Astérisque

OLIVIER MATHIEU

Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales

Astérisque, tome 159-160 (1988)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1988__159-160__1_0>

159-160 ASTÉRISQUE

1988

FORMULES DE CARACTÈRES POUR LES ALGÈBRES DE KAC-MOODY GÉNÉRALES

par Olivier MATHIEU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 17 B 67.

En 1968, en étudiant la classification des algèbres de Lie graduées simples, Victor Kac a introduit une nouvelle classe d'algèbres de Lie (qui, simultanemment apparurent aussi dans un article de R.Moody). Ces nouveaux objets, appelés désormais algèbres de Kac-Moody, sont des généralisations en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples.

Le but de cet article est d'étendre certains des résultats classiques pour les algèbres semi-simples aux algèbres de Kac-Moody, et en particulier les deux théorèmes suivants:

1) les formules de caractères de Demazure et de Weyl,

2) les théorèmes de Borel, Weil, Bott et Kempf.

Le point central des démonstrations consiste à interpréter les formules de caractères comme des caractèristiques d'Euler-Poincaré et de les combiner à des thèorèmes d'annulation de la cohomologie des fibrés en droites semi-amples sur les variétés de Schubert. Ces résultats sont obtenus par passage en caractéristique finie au moyen de scindage de morphismes de Frobenius (une technique due à Metha, Ramanan et Ramanathan).

TABLE DES MATIÈRES

page

Introduction : 3

I Algèbres de Kac-Moody et groupes associés.............. 16

II Groupe de Weyl.. 30

III Les foncteurs de Joseph.............................. 33

IV Variétés de Demazure.................................. 43

V Variétés de Schubert (en caractéristique zéro).......... 64

VI La formule de la limite inductive..................... 86

VII Scindage - calcul de ω_w.......................... 91

VIII Schémas h-normaux.................................... 101

IX Formule de Demazure et Weyl........................... 109

X Normalité de certaines images des variétés de Schubert.. 116

XI Rationalité des singularités des variétés de Schubert et applications.. 119

XII Groupe de Picard des variétés de Schubert............ 139

XIII Représentation des foncteurs de Joseph.............. 152

XIV Etude du morphisme B(w) $\longrightarrow \tilde{S}_w$ 172

XV Le foncteur D , et le théorème de Borel-Weil-Bott...... 178

XVI Le foncteur F 210

XVII Dualité des foncteurs de Joseph, et algèbres de Lie affines 227

XVIII Constructions enbase arbitraire..................... 246

Tableau des notations.................................... 260

Bibliographie.. 262

INTRODUCTION

En 1968, étudiant la classification des algèbres de Lie graduée simples V.Kac a introduit une nouvelle classe d'algèbre de Lie [32]. Pour toute matrice de Cartan, Chevalley, Harish-Chandra et Serre avaient associé une algèbre de Lie semi-simple déployée, définie par générateurs et relations. Pour une classe de matrices plus large - pour les matrices dites de Cartan généralisée - la même présentation fournit les algèbres de Lie précédentes. Cette dernière construction est apparue simultanemment dans un article de R. Moody, et c'est pourquoi ces nouveaux objets sont désormais appelés algèbres de Kac-Moody.

Le but de cette article est d'étendre certains des résultats classiques pour les algèbres de Lie semi-simples aux algèbres de Kac-Moody, et en particulier les 2 théorèmes suivants :

1) les formules de caractères de Weyl et du dénominateur
2) les théorèmes de Borel-Weyl-Bott et de Kempf.

L'énoncé des formules de caractères est élémentaire, et fait l'objet du paragraphe de cette introduction. Les démonstrations reposent sur des énoncés cohomologiques relatifs aux variétés de Schubert. L'histoire de la démonstration de ces énoncés dans le cas des algèbres de Lie semi-simple nécessite les paragraphes 2, 3, et 4. Les paragraphes suivants expliquent les points essentiels de la démonstration de tels énoncés dans le cas d'algèbres de Kac-Moody, et leurs diverses applications.

§1 Formules de Weyl et du dénominateur.

Soient k un corps de caractéristique 0 , n un entier ≥ 0, I l'ensemble $\{ 1,\dots, n\}$ et $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ une matrice de Cartan généralisée

[33]. Soit $\underline{g}$ l'algèbre de Kac-Moody associée à A. La définition choisie ici (cf. ch. I) correspond au choix maximal.De manière générale, la terminologie employée, usuelle en théorie des algèbre de Kac-Moody, est rappelée principalement au chapitre I. Soient Δ^+ l'ensemble des racines positives de $\underline{g}$, relativement à la sous-algèbre de Cartan $\underline{h}$, et W le groupe de Weyl. Soient Λ un poids dominant entier, et $L(\Lambda)$ le $U(\underline{g})$-module quotient intégrable maximal du module de Verma $V(\Lambda)$. Pour tout $U(\underline{h})$-module M , et tout $\lambda \in \underline{h}^*$, on note M_λ l'espace associé au poids λ , et on appelle caractère de M l'expression formelle suivante (notée ch(M)) :

$$\sum_{\lambda \in \underline{h}^*} \dim (M_\lambda) e^\lambda .$$

Soit $\varepsilon : W \longrightarrow \{\pm 1\}$ (respectivement ρ) le caractère de W (le poids) défini au chapitre I. Je vais montrer les formules suivantes :

$$(1) \ \mathrm{ch} \ L(\Lambda) = \frac{\Sigma \ \varepsilon(w) \ e^{w(\Lambda+\rho)}}{\Sigma \ \varepsilon(w) \ e^{w\rho}} \quad (1) \text{ (Formule de Weyl)}$$

$$(2) \ \Pi(1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha} = \Sigma \ \varepsilon(w) \ e^{w\rho-\rho} \quad (2) \text{ (Formule du dénominateur).}$$

Ces deux expressions ont un sens formel précisé au chapitre IX. La somme (le produit) est indexée par les éléments $w \in W$, (respectivement $\alpha \in \Delta^+$), et l'entier m_α est défini par la formule :

3) $m_\alpha = \dim \underline{g}_\alpha \quad (\alpha \in \Delta^+)$

On rappelle que lorsque $\underline{g}$ est de dimension finie, on a $m_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$, ce qui explique que la formule (2) est une généralisation de la formule du dénominateur. Ces formules ont été démontrées par V. Kac lorsque la matrice de Cartan est symétrisable (cf. [33]). La démonstration de Kac utilise un opérateur de Casimir, dont l'existence est équivalente à la symétrisabilité. La démonstration que je donne utilise des techniques de géométrie algébrique dont je vais parler dans les points suivants de cette introduction.

§2 Sur l'article de Demazure [7] :

Soit $\underline{b}$ la sous-algèbre de lie de $\mathfrak{g}$: $\underline{b} = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$. On suppose que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, de sorte que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Soit G le groupe connexe simplement connexe associé. Soit Λ un poids dominant entier, e un vecteur non nul de $L(\Lambda)_\Lambda$. Soit B_Λ le sous-groupe parabolique stabilisateur de la droite ke . La représentation $L(\Lambda)$ détermine une immersion fermée $\Phi : G/B_\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}L(\Lambda)$, donnée par la formule $\Phi(g\ B_\Lambda) = g.(ke)$. Pour chaque $w \in W$, soit $E_w(\Lambda) = U(\underline{b}).L(\Lambda)_{w\Lambda}$. Soit P le réseau des poids entiers de $\mathfrak{g}$. M. Demazure a défini des endomorphismes $\Delta^w : \mathbb{Z}[P] \longrightarrow \mathbb{Z}[P]$, et a prouvé les faits suivants ([7]).

(A) Les variétés de Schubert (i. e. la fermeture d'une B-orbite dans G/B_Λ) sont normales, et Φ se restreint en une immersion projectivement normale de chaque variété de Schubert.

(B) On a la formule $ch(E_w(\Lambda)) = \Delta^w e^\Lambda$, pour tout $w \in W$.

(C) Les variétés de Schubert sont à singularités rationnelles.

Enfin M. Demazure avait donné une nouvelle démonstration de la formule de Weyl [8].

G. Heckman a remarqué que l'on pouvait généraliser aux algèbres de Kac-Moody les sous-espaces $E_w(\lambda)$, les opérateurs de Demazure Δ^w , ainsi que la formule $ch(E_w(\lambda)) = \Delta^w e^\Lambda$. Puis par un argument combinatoire (que j'ai repris dans le §IX), il en déduit la formule de Weyl, dans un article en 1983. V. Kac s'est alors aperçu que les démonstrations d'Heckman et de Demazure comportaient un trou.

Néanmoins beaucoup des constructions d'Heckman et de Demazure restent valables. Après la remarque de Kac, l'article de Demazure contient encore le fait que l'assertion (A) implique les assertions (B) et (C) (plus de détails seront donnés dans la seconde partie de cet article), et de l'article d'Heckman, on peut encore déduire les formules de Weyl et du dénominateur à partir des formules

$$\mathrm{ch}(E_w(\Lambda)) = \Delta^w e^\Lambda$$

(que j'appellerai dans la suite formule de Demazure). Ce sont ces formules de Demazure que je démontre ici, pour toute algèbre de Kac-Moody.

§3 La théorie des monômes standards et les travaux de Andersen et de Haboush :

Je continue de supposer que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie. En 1978 et 1979 V. Lakshmibai, C. Musili et C.S. Seshadri ont étudié intensivement les anneaux de fonctions homogènes des variétés de Schubert, et ont précisé les résultats de Demazure lorsque $\mathfrak{g}$ est de type classique (i.e. somme d'algèbres de Lie simples des séries A, B, C ou D). Ces travaux s'appuient sur l'article de Demazure, mais selon C.V. Seshadri ([56]) peuvent être rendus indépendants, ce qui fournirait dans le cas des algèbres de Lie classique une démonstration des résultats de Demazure.

Un cas particulier des résultats cherchés est le cas de la grosse variété de Schubert. Dans ce cas le résultat énoncé par Demazure est le théorème de Borel-Weil-Bott. Or en 1980, V.J. Haboush et H. Andersen ont trouvé indépendamment une nouvelle démonstration des théorèmes de Borel-Weil-Bott et de Kempf par l'utilisation du théorème de semi-continuité (passage des caractéristiques finies à la caractéristique 0), et par une utilisation miraculeuse des modules de Steinberg ([1], [9]).

§4 Les travaux de Joseph et Seshadri, et la théorie de Metha et Ramanan et Ramanathan :

Je suppose toujours $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Récemment et indépendamment, A. Joseph et C.V. Seshadri ont comblé une partie du trou de la démonstration de Demazure en prouvant que les variétés de Schubert sont normales (et donc la formule (B) pour presque tout Λ ([31] et [57]). Plus précisément, on verra dans la partie II de cet article que le résultat de Joseph et les résultats de l'article de Demazure impliquent la normalité des variétés de Schubert, et que les démonstrations de Joseph et de Seshadri sont similaires.

Enfin Metha, Ramanan et Ramanathan (et indépendamment de Seshadri et de Joseph) ont réussi à compléter entièrement les démonstrations manquantes dans l'article de Demazure; Leur démonstration utilise l'opération de Cartier ainsi qu'une nouvelle notion de géométrie des variétés sur des corps de caractéristique $\neq 0$: la notion de scindage (cf. [47], [50], [51] et §VII) (J.B. Bost m'a signalé que J. Illusie et P. Deligne ont récemment utilisé des techniques apparemment voisines pour montrer la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge). Un autre intérêt des démonstrations de Metha, Ramanan et Ramanathan est de donner une interprétation satisfaisante à l'utilisation signalée précédemment des modules de Steinberg dans les démonstrations de Anderssen et Haboush du théorème de Kempf (cf. aussi H. Anderssen [2] qui a donné des démonstrations similaires de ces résultats).

§5 Le cas des algèbres de Kac-Moody :

Je considère à nouveau le cas d'une algèbre de Kac-Moody générale $\underline{g}$. Soit J une partie de I . Je définis :

$P_J^+ = \{ \Lambda \in P / \lambda (h_j) = o$ pour $j \in J$ et $\Lambda (h_j) > o$ pour $j \notin J \}$

$W_J = \{ w \in W / w s_j \leq w$ pour tout $j \in J \}$.

(on se reportera au chapitre I pour la définition de l'ensemble des poids entiers P, au chapitre II pour celle de l'ordre de Bruhat $\leq$).

Utilisant des réseaux de Chevalley, j'associe à la sous-algèbre de Borel $\underline{b}$ de $\underline{g}$ un groupe affine B (plus précisement un foncteur en groupe affine défini sur Spec $\mathbf{Z}$). Pour un couple $w \in W_J$, $\Lambda \in P_J^+$ je définis

$E_w (\Lambda) = \mathcal{U} (\underline{b}) \ L(\Lambda)_{w\Lambda}$

$S_{w,\Lambda} = B.\ L(\Lambda)_{w\Lambda}$ dans $\mathbb{P}\, E_w(\Lambda)$.

Ces variétés $S_{w,\Lambda}$ avaient été considérées par D.Peterson et V.Kac [48]

J.Tits [58] [60] et P.Slodowy [57]. En revanche je définis ici les variétés de Schubert à l'aide d'une construction supplémentaire. Au chapitre v je prouve que la normalisée de $S_{w\Lambda}$ ne dépend de Λ qu'au travers de l'ensemble J . Je note donc cette variété $\tilde{S}_{w,I}$, et j'appelle variétés de Schubert ces variétés $\tilde{S}w_I$. Je prouve aussi que la normalisation $\mu:\tilde{S}_{w,J} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est un homéomorphisme, fait crucial en vertu du résultat général suivant (et à ma connaissance nouveau).

<u>Lemme clef</u> (lemme 55) Soient X, Y deux variétés, $i: Y \longrightarrow X$ une inclusion fermée, $u: \tilde{X} \longrightarrow X$ et $\mu: \tilde{Y} \longrightarrow Y$ les morphismes de normalisation. On suppose que μ et u sont des homéomorphismes absolus.

i) Il existe un unique morphisme $j: \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mu"'] & \tilde{X} \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

2) On suppose X projectif, et soient $\mathcal{L}$ un faisceau invertible ample de X, $\mathcal{L} = v^*\mathcal{L}$. Pour tout entier n , soit

$$R_n: H^{\circ}(\tilde{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^{\circ}(\tilde{Y}, j^*\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$$

le morphisme naturel. On suppose R_1 non surjectif. Alors il existe un entier $n > 0$, $\sigma \in H^{\circ}(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$ avec $\sigma \notin \mathrm{Im}\, R_n$ et $\sigma \in \mathrm{Im}\, R_{nl}$ pour tout entier $l \geq z$.

Soient $v, w \in w_j$ avec $v \leq w$. Le point 1 du lemme clef implique l'existence d'un morphisme naturel $j: \tilde{S}_{v,j} \longrightarrow \tilde{S}_{w,j}$. Suivant une idée de Demazure, on peut associer à toute décomposition réduite $\tilde{w}$ de w une variété de Demazure $D(\tilde{w})$ désingularisation de $\tilde{S}_{w,j}$ définie sur $\mathbf{Z}$. Je généralise aussi facilement le résultat de Metha, Ramanan et Ramanathan que les variétés de Demazure sont compatiblement scindées en caractéristique non nulle. J'obtiens ainsi le résultat technique central suivant, combinaison du lemme clef et des techniques de scindages en caractéristique non nulle:

<u>Lemme technique central</u>: Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible engendré par ses sections globales sur l'une des variétés $S_{w,\Lambda}$, et $\mu\colon \tilde{S}_{w,J} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ le morphisme de normalisation et je pose $\tilde{\mathcal{L}} = \mu^{*}\mathcal{L}$. Alors le morphisme

$$H^{0}(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}) \longrightarrow H^{0}(\tilde{S}_{v,J}, \tilde{\mathcal{L}})$$

est surjectif.

Du lemme technique je déduis (chapitre IX) les formules de Demazure, i.e. le caractère des modules $E_{w}(\Lambda)$, et de là les formules de Weyl et du dénominateur.

Dans le cas d'algèbres de Lie semi-simples, les démonstrations de Metha, Ramanan et Ramanathan reposent sur les deux points techniques suivants:

1) une récurrence décroissante sur $w \in W$

2) l'existence de fibrés localement triviaux dont les fibres sont en espaces de drapeaux $G/_{B} \longrightarrow G/_{P}$ où P est un sous-groupe parabolique de G . Il n'y a pas d'équivalent à cela pour les algèbres de Kac-Moody, car d'une part le groupe de Weyl ne possède pas en général de plus grand élément, d'autre part la matrice de Cartan A peut contenir des sous-matrices propres qui ne sont pas de type fini.

La démonstration présentée ici se différencie principalement par les points suivants:

1) j'utilise les variétés $\tilde{S}_{w,\Lambda}$ (au lieu des variétés $S_{w,\Lambda}$) en combinaison avec le lemme clef.

2) les démonstrations sont effectuées par une récurrence croissante sur $w \in W$.

Par ailleurs, le lemme clef est faux en caractéristique non nulle.

Cependant je définis également des variétés de Schubert en toute caractéristique, et prouve le lemme clef dans le cas spécial de variétés de Schubert.(chapitre XIIX). Cela permet d'étendre en toutes caractéristiques les résultats obtenus en caractéristique 0 . J'ai laissé toutefois ce chapitre en fin d'article pour essayer d'expliquer le plus clairement possible où l'argument de caractéristique finie intervenait dans les démonstrations de résultats.

§6 Propriétés élémentaires des variétés de Schubert et applications.

Du lemme technique central je déduis des résultats sur les variétés de Schubert, et des applications aux algèbres de Kac-Moody. Je discuterai dans ce paragraphe des résultats obtenus "élémentairement", i.e. sans technique cohomologique. Les sections suivantes seront au contraire consacrées aux propriétés cohomologiques des variétés de Schubert, et à leur conséquences.

Il y a 3 applications du lemme technique central:

1) Combiné avec la formule de la limite inductive (lemme 43) je prouve successivement les formules de Demazure, la formule de Weyl et la formule du dénominateur (théorème I).

2) Par construction les variétés de Schubert sont normales. La généralisation du théorème de normalité est la suivante :

Théorème 2 (avec les notations précédentes). Pour tout entier n suffisament grand, le morphisme $\tilde{S}_{w,J} \longrightarrow \mathbb{P}E_w(n\Lambda)$ est une immersion fermée projectivement normale. En outre lorsque $\underline{g}$ est symmétrisable, on peut supposer simplement que l'on a $n \geq 1$.

Ceci prouve en particulier que pour n grand, $S_{w,n\Lambda}$ est lisse en codimension 1. Ce corollaire avait été montré par Slodowy [58].

3) Je calcule aussi le groupe des fibrés algèbriques en droite sur $\tilde{S}_{w,J}$, fait à ma connaissance nouveau même dans le cas d'algèbre de Lie semi-simples. (proposition 6). J'ai depuis trouvé une démonstration moins élémentaire mais plus courte [45].

§7 Propriétés cohomologiques des variétés de Schubert et applications.

Soient w,J comme précédemment, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w et $\pi : D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S}_{w,J}$ le morphisme de Demazure. Je prouve que la variété $\tilde{S}_{w,J}$ est triviale (au sens de Kempf) i.e. que l'on a:

$$R^q\pi_* O_{D(\tilde{W})} = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0$$

et j'en déduis, suivant une démonstration de Demazure que les variétés $\tilde{S}_{w,J}$ sont à singularités rationnelles. Ainsi les variétés de Schubert sont triviales et Cohen-Macaulay, et chacune de ces deux propriétés ont des conséquences différentes, que je vais expliquer dans la suite.

Pour simplifier, je vais supposer que l'on a $J = \emptyset$, et poser $\tilde{S}_w = \tilde{S}_{w,\emptyset}$.

7a) Applications de la trivialité.

La trivialité des variétés de Schubert est ici très utile, car elle permet d'associer fonctoriellement à tout B-module M un faisceau quasi cohérent de $O_{\tilde{S}w}$ modules localement libre, noté $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$.

Cette construction est inutile en dimension finie (i.e. lorsque l'algèbre de Lie $\underline{g}$ est de dimension finie) car on dispose d'une variété $\overline{BwB}$ telle que l'on ai $\tilde{S}_w = \overline{BwB} / B$, ce qui permet la construction des faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$. Dans le cas d'algèbres de Kac-Moody générales, la constructions des faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}_{w(M)}$ implique au contraire la construction d'un schéma, que je note B(w). Lorsque $\underline{g}$ est de dimension finie, on a $B(w) = \overline{BwB}$ [41] . Dans le cas général B(w) est un BxB-schéma, et l'on a un isomorphisme canonique de schéma $B(w)/B = \tilde{S}_w$. On verifie en outre que B(w) est affine, ce qui donne de nouveaux théorèmes d'annulation de cohomologie, par un théorème de Serre. On notera que lorsque $\underline{g}$ est de dimension infinie, on est conduit à utiliser la version non noethérienne du théorème de Serre, car B(w) n'est pas un schema noetherien (cette version se trouve dans les E.G.A. de A.Grothendieck). Le chapitre XI explique aussi pourquoi j'ai cherché au cours du chapitre IV à éviter toute hypothèse noethérienne, ce qui avait conduit à vérifier des énoncés particulièrement fastidieux. Le faisceau $\tilde{\mathcal{L}}(M)$

s'identifie alors au faisceau des sections du fibré vectoriel

$B(w) \times B_M \longrightarrow S_w$.

Aux chapitres XIV et XVI j'obtiens quelques précisions sur les schémas $B(w)$ et $\tilde{S}_w$. Je montre en effet que l'action à droite de B sur $B(w)$ est localement libre, ce qui indique que ce schéma $B(w)$ est la bonne généralisation des schémas $\overline{BwB}$ lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie. Soient K le corps de base, et G le groupe (discret) associé à $\mathfrak{g}$ (à quelques détails près, ce groupe est le groupe minimal au sens de Tits [59], [60], ou le groupe construit par V.Kac et D.Peterson [49]. Je pose $K[G] = \varprojlim \Gamma\ (B(w), \mathcal{O}_{B(w)})$, et soient $k_f[G]$ (respectivement $k_F[G]$) l'anneau des fonctions faiblement régulières (respectivement fortement régulières) au sens [34] de D.Peterson et V.Kac. On a des inclusions naturelles (cf. ch.XVI).

$$k_F[G] \subset k[G] \subset k_f[G]$$

et je prouve, lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie, que ces deux inclusions sont strictes. Cela indique que l'on ne peut pas obtenir le schéma $B(w)$ à partir des constructions de D.Peterson et de V.Kac (on a un problème analogue pour les faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$). D'une certaine manière cela explique pourquoi la construction des variétés de Schubert $\tilde{S}_{w,J}$ et des morphismes $\tilde{S}_{uJ} \longrightarrow \tilde{S}_{w,J}$ a été un point délicat de la première partie.

En fait le point technique pour l'étude des objets associés à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ repose essentiellement sur l'étude des foncteurs et des δ-foncteurs définis sur la catégorie $\mathcal{C}(B)$ des B-modules, étude faite au chapitre XIII. Par exemple un δ-foncteur cohomologique qui commute aux limites inductives est dans un certain sens représentable par un module. Plus intéressants sont donc les δ-foncteurs qui commutent aux limites inductives et qui ne sont pas nécessairement cohomologiques. On retrouve alors certains d'entre eux à l'aide d'une suite spectrale. Cela est l'argument principal pour étudier par exemple le morphisme $B(w) \longrightarrow \tilde{S}_w$ au chapitre XIV, par défaut d'un préfaisceau non abélien de B-torseurs sur $\tilde{S}_w$.

La principale application consiste en de nouvelles constructions pour les foncteurs de Joseph. J'obtiens, pour tout B-module M les formules suivantes, et toute écriture réduite $\tilde{w}$ de w :

$$\begin{aligned} D_w^* M &\simeq H^*(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \\ &\simeq H^*(D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)) \\ &\simeq H^*(B, K[B(w)] \otimes M) \end{aligned}$$

Si $w = uv$, avec $l(w) = l(u) + l(v)$, on trouve ainsi une suite spectrale fonctorielle E_*^{**}, qui converge vers le foncteur D_w^* et avec $E_2^{p,q} = D_u^q D_v^p$

7b) Application de la propriété de Cohen-Macaulay.

La propriété de Cohen-Macaulay fournit une caractérisation des variétés de Schubert-Gorenstein. Comme les variétés de Demazure sont lisses, on dispose d'une dualité de Serre. Un problème est donc de déterminer si cela induit une dualité pour les foncteurs de Joseph, exprimable uniquement en termes d'algèbre de Lie. Dans le cas général, cette dualité ne peut s'obtenir qu'au moyen d'une suite spectrale (chapitre XVII); en outre la détermination du groupe de Picard des variétés de Schubert au chapitre XII prouve qu'on trouvera une dualité parfaite pour D_w si et seulement si la variété de Schubert $\tilde{S}_w$ est de Gorenstein. Je montre alors que la plupart des variétés de Schubert associées aux algèbres de Lie affines $A_n^{(1)}$ et $D_n^{(2)}$ sont Gorenstein. Par exemple, pour l'algèbre affine $A_1^{(1)}$ elles le sont toutes. Je montre également qu'une variété de Schubert associée à $A_1^{(1)}$ et de dimension ≥ 3 n'est pas lisse (tout cela donnant un grand nombre de réponses négatives à une question de A.Arabia et de M.Vergnes à savoir si l'on peut toujours plonger une variété de Schubert dans une variété de Schubert plus grosse et lisse.

§8 La généralisation du théorème de Borel-Weil-Bott.

Je définis au chapitre XV un espace topologique annelé que je note G/B et appelle espace de drapeaux (ici G/B est une pure notation, et ne fait aucune référence au groupe de Borel B ou au groupe de Kac-Moody G). Cet espace est simplement la limite inductive des espaces topologiques annelés $\tilde{S}_w$ Lorsque $\underline{g}$ est de dimension finie, G/B est l'usuelle variété algèbrique des drapeaux associée au groupe algèbrique G/B , mais lorsque $\underline{g}$ est de dimension infinie G/B n'est meme pas un schéma. On peut définir pour tout B-module un faisceau de $O_{G/B}$-module $\tilde{\mathcal{L}}(M)$. Au chapitre XV je donne une généralisation du théorème de Borel-Weil-Bott sous la forme suivante:

i) Je prouve que les faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ sont localement libres de rang un, et que tout faisceau inversible de $O_{G/B}$-module est isomorphe à l'un des $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

2) Je calcule les groupes de cohomologie $H^*(G/B,\tilde{\mathcal{L}}(\lambda))$
Puis je considère d'autres topologies sur G/B , ce qui permet d'autres généralisations de ce théorème (cf. [41]).

Un théorème de B.Konstant calcule les groupes $H^*(\underline{n}^+,L(\Lambda))$, lorsque $\underline{g}$ est de dimension finie, et cette formule a été généralisée par H.Garland et J.Lepowsky [i6] au cas où $\underline{g}$ est une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Ces formules sont en fait équivalentes au calcul des groupes $H^*(B, L(\Lambda) \otimes M)$ pour tout B-module M de dimension un. Enfin on relie le théorème de Borel-Weil-Bott et la formule cohomologique de Kostant à l'aide d'une suite spectrale. Cette suite spectrale dégénère lorsque $\underline{g}$ est symétrisable.

§9) Je tiens à signaler que cet article doit beaucoup à ceux de M.Demazure, V.B.Mehta, S.Ramanan, A.Ramanathan déjà cités, et aux cours de V.G.Kac (à Paris, en i983) et J.Tits (au collège de France, en 1982) sur les groupes de Kac-Moody.

J'utilise en plusieurs points des énoncés des E.G.A, et en particulier la version non noethérienne de théorème de Serre de nullité cohomologique des espaces affines. Ce livre est la fusion des deux parties d'un preprint de l'université de Paris 7 [43]. Les changements notables sont les suivants: la refonte de l'introduction, une clarification du chapitre XVIII, une complétion de la preuve du lemme 14 (le referee a remarqué que j'avais oublié de vérifier la canonicité des isomorphismes construits, et a suggéré une preuve), la suppression d'une partie du chapitre XV (lequel contenait une preuve fausse, comme me l'ont indiqué F.Ducloux et le referee).

Ces résultats ont été annoncés dans des conférences à Paris et Helsinki (mai-juin 1986) [42] dans une note [40] et ont été exposé dans un cours à Yale (automne 1986). S.Kumar a donné une autre démonstration d'une partie des résultats de cet article, en caractéristique 0 ([39]).

Je tiens à remercier A.Arabia, M.Andler, Y.Benoist, J.L.Brylinski, J.B.Bost, A.Bruguières, M.Demazure, A.Joseph, G.Rousseau, J.J.Sansuc, P.Slodowy, J.Tits et M.Ville pour diverses conversations sur ces sujets.
Michel Duflo m'a fait bénéficier de nombreuses et bienveillantes critiques qui m'ont considérablement aidé. Qu'il en soit remercié.
Cet article a été tapé avec un grand soin par M^{mes} Chaunac, Delongeas, Ledray, Orieux.

Remarque: Dans cet article, variété signifiera schéma intègre de type fini sur un corps.

I. Algèbres de Kac-Moody et groupes associés.

Dans tout cet article, je fixe N un entier > 0, je pose $I = \{1,\ldots,N\}$, et je fixe $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ une matrice de Cartan généralisée (i. e. $a_{ii} = 2$, a_{ij} est un entier négatif si $i \neq j$, et $a_{ij} \neq 0$ si et seulement si $a_{ji} \neq 0$, pour tout $i,j \in I$). Soit r le corang de A. Si V est un espace vectoriel, on note V^* son dual. Soit $(\underline{h},\pi,\check{\pi})$ une réalisation de A, c'est-à-dire un triplet $(\underline{h},\pi,\check{\pi})$ où $\underline{h}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension $N + r$, $\pi = \{\alpha_i, i \in I\}$ est une partie libre de $\underline{h}^*$, et où $\check{\pi} = \{h_i, i \in I\}$ est une partie libre de $\underline{h}$, tels que $\alpha_i(h_j) = a_{ji}$ pour tout $i,j \in I$ [33]. On pose $\check{Q} = \mathbb{Z}\, h_1 \oplus\ldots\oplus \mathbb{Z}\, h_N$, et $Q = \mathbb{Z}\, \alpha_1 \oplus\ldots\oplus \mathbb{Z}\, \alpha_N$. Il existe des réalisations, et elles sont isomorphes (cf. [33]).

J'appelle réalisation entière de A un réseau $\check{P}$ de $\underline{h}$, tel que

1) On ait $\check{P} \supseteq \check{Q}$, et $\check{P}/\check{Q}$ est sans torsion.

2) On ait $Q \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\check{P},\mathbb{Z})$.

Il est également clair qu'il existe des réalisations entières. Dans la suite, on fixe des réalisations $(\underline{h},\pi,\check{\pi})$ et $\check{P}$ de A. On pose $P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\check{P},\mathbb{Z})$, de sorte que P est naturellement un réseau de $\underline{h}^*$. Ce réseau P est dit réseau des poids entiers, et Q est dit réseau des racines (bien que, lorsque l'on a $\det A = 0$, Q ne soit pas un réseau, et que P ne soit pas unique).

Soit $\mathfrak{g}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie engendrée par l'espace vectoriel $\underline{h}$, par des générateurs e_i, $f_i (i \in I)$, et soumise aux relations

(I) $[\underline{h},\underline{h}] = 0$

(II) $[h,e_i] = \alpha_i(h)e_i$

(III) $[h,f_i] = -\alpha_i(h)f_i$

(IV) $[e_i,f_j] = 0$

(V) $[e_i,f_i] = h_i$

(VI) $\mathrm{ad}^{n_{ij}}(e_i)(e_j) = 0$

(VII) $\mathrm{ad}^{n_{ij}}(f_i)(f_i) = 0$

pour tout $h \in \underline{h}$, $i,j \in I$, $i \neq j$, et où $n_{ij} = -\alpha_j(h_i) + 1$.

Soit $Q^+ = \mathbb{N}\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{N}\alpha_N$, et soit $P^+ = \{\Lambda \in P, \Lambda(h_i) \geq 0$ pour tout $i \in I\}$. Dans la suite, on considère $\underline{h}$ comme une algèbre de Lie abélienne.

Pour toute algèbre de lie $\underline{k}$, je note $U(\underline{k})$ son algèbre enveloppante, et $U^+(\underline{k})$ son idéal d'augmentation $\underline{k}.U(\underline{k})$. Pour tout $U(\underline{h})$-module M et tout $\lambda \in \underline{h}^*$, je pose $M_\lambda = \{m \in M \mid h.m = \lambda(h)m \ , \ \forall h \in \underline{h}\}$. L'application $\underline{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie injectif, et $\mathfrak{g}$ est donc naturellement un $U(\underline{h})$-module. Soit $\Delta = \{\lambda \in \underline{h}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}\}$. On a $\Delta \subseteq Q$. Soit $\Delta^+ = \Delta \cap Q^+$, $\Delta^- = \Delta \cap (-Q^+)$.

On pose $\underline{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\underline{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha$. D'après [33], on a $\mathfrak{g} = \underline{n}^+ \oplus \underline{h} \oplus \underline{n}^-$, et $\underline{n}^+$, $\underline{h}$ et $\underline{n}^-$ sont trois sous-algèbres de lie de $\mathfrak{g}$. On définit également les sous-algèbres de Lie $\underline{b} = \underline{n}^+ \oplus \underline{h}$ et pour chaque $i \in I$, $\underline{p}_i = \underline{b} \oplus \mathbb{Q} f_i$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a été introduite en 1968 par Kac et Moody. Ces algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ sont des analogues, de dimension éventuellement infinie, des algèbres de Lie semi-simples déployées sur $\mathbb{Q}$. La sous-algèbre $\underline{b}$ est analogue à une sous-algèbre de Borel, et les sous-algèbres $\underline{p}_i$ à des sous-algèbres paraboliques non boréliennes minimales. L'ensemble Δ est dit ensemble des racines, et Δ^+ ensemble des racines positives. Si M est un $U(\underline{h})$-module, un élément $\lambda \in \underline{h}^*$ tel que M_λ soit $\neq \{0\}$ est dit poids du module M . Les racines sont les poids non nuls du module $\mathfrak{g}$.

Dans cet article, je vais considérer deux types de groupes. Les groupes usuels (i. e. la donnée d'un ensemble muni d'une loi satisfaisant les axiomes bien connus) seront nommés ici groupes discrets, afin de les distinguer des groupes affines dont je vais rappeler la définition dans le paragraphe suivant.

Soit R un anneau commutatif. Soit F une R algèbre commutative. Soient $\gamma : F \longrightarrow F \otimes_R F$, $\omega : F \longrightarrow F$, $\varepsilon : F \longrightarrow R$ trois morphismes de R-algèbre. Je dis que F est une algèbre de groupe affine si $(F,\gamma,\omega,\varepsilon)$ est une algèbre de Hopf coassociative, de comultiplication γ , avec une counité ε et une inversion ω [28].

Je dis que le couple (G, R[G]) est un R-groupe affine si R[G] est une R-algèbre de groupe affine, dont le spectre est l'espace topologique G . Plus brièvement, je dirai que G est un R-groupe affine. Lorsque $R = \mathbb{Z}$, je dirai que G est un groupe affine.

Soit G un groupe affine, et soit $\mathbb{Z}[G]$ l'algèbre de groupe affine associée. A chaque anneau commutatif R , je peux associer le R-groupe G(R) , qui est le spectre de l'anneau $R[G] = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$. Un R-point de G est un morphisme de R-algèbre $R[G] \longrightarrow R$. L'ensemble des R-points de G est un groupe discret. Lorsque R est intègre, un R-point s'identifie à un élément de G(R) .

Soit $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$ le sous-anneau de $U(\underline{g})$ engendré par les éléments $f_i^{(m)}$, $e_i^{(m)}$ et $\binom{h}{m}$, où $i \in I$, $m \in \mathbb{N}$ et $h \in \check{P}$ (cf. [6] pour les notations). Pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$, je pose $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})_\lambda = U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) \cap U(\underline{g})_\lambda$, où $U(\underline{g})$ est considéré comme $U(\underline{h})$-module pour l'action adjointe. A quelques détails près, cet anneau a été construit par J. Tits dans son cours en 1981.

L'anneau $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$ est dit réseau de Chevalley, en raison du lemme suivant, dû (sous cette forme de généralité) à J. Tits [59, 62] (cf. aussi [6]).

<u>Lemme 1</u> : $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$ est un réseau de $U(\underline{g})$. On a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) = \bigoplus_{\lambda \in Q} U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})_\lambda$.

Soit $\Box : U(\underline{g}) \longrightarrow U(\underline{g}) \otimes U(\underline{g})$ le morphisme de comutiplication. Par le lemme 1, $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) \otimes_{\mathbb{Z}} U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$ est naturellement un réseau de $U(\underline{g}) \otimes U(\underline{g})$, et par construction, on a $\Box(U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})) \subseteq U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) \otimes_{\mathbb{Z}} U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$. (il suffit de vérifier que l'on a $\Box\, x \subseteq U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) \otimes_{\mathbb{Z}} U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$ pour chacun des générateurs $e_i^{(m)}$, $f_i^{(m)}$ et $\binom{h}{m}$

de $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g})$; cf. [3] [25] [27]))..

Soit $\underline{m}$ une sous-algèbre de Lie de $\underline{g}$. Je pose $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) = U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) \cap U(\underline{m})$. Soit $\mathcal{H}_1$ la condition.

$\mathcal{H}_1$: On a $[\underline{h},\underline{m}] \subseteq \underline{m}$.

Si $\underline{m}$ satisfait la condition $\mathcal{H}_1$, je définis un $\mathbb{Q}$-groupe affine $M(\mathbb{Q})$ asssocié à $\underline{m}$ de la façon suivante. Soit $\underline{h}' = \underline{h} \cap \underline{m}$. On note ad l'action adjointe de $\underline{h}$ sur $U(\underline{m})$, g (respectivement d) l'action à gauche (respectivement à droite) de $\underline{m}$ sur $U(\underline{m})$. Soit $\mathbb{Q}^g[M]$ (respectivement $\mathbb{Q}^d(M)$) l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments $\Upsilon \in U(\underline{m})^*$ satisfaisant aux conditions suivantes

(a) Il existe $\lambda \in \underline{h}^*$ tel que $\mathrm{ad}(h)(\Upsilon) = \lambda(h)\Upsilon$ pour tout $h \in \underline{h}$ (et en particulier on a $\lambda \in Q$ lorsque $\Upsilon \neq 0$).

(b) Υ est $g(U(\underline{m}))$ fini (respectivement $d(U(\underline{m}))$-fini).

(c) Il existe $\mu \in P$ tel que $g(h)(\Upsilon) = \mu(h)\Upsilon$ (respectivement $d(h)(\Upsilon) = \mu(h)\Upsilon$ pour tout $h \in \underline{h}'$.

<u>Lemme 2</u> : On a $\mathbb{Q}^g[M] = \mathbb{Q}^d[M]$.

<u>Démonstration</u> : Montrons par exemple que l'on a $\mathbb{Q}^g[M] \subseteq \mathbb{Q}^d[M]$. Soient $(\Upsilon,\lambda,\mu) \in U(\underline{m})^* \times \underline{h}^* \times P$ un triplet satisfaisant aux conditions (a), (b), (c). Soit $J = \{u \in U(\underline{m}) , g(u)\Upsilon = 0\}$. Par la condition (b), J est un idéal à gauche de $U(\underline{m})$ de codimension finie. Donc J contient un idéal bilatère J' de codimension finie. Ceci implique que $d(\omega(J'))\Upsilon = 0$ (où ω désigne l'antiautomorphisme principal de $U(\underline{m})$) et donc Υ est $d(U(\underline{m}))$-fini. On peut supposer que l'on a $\Upsilon \neq 0$ .On a $d(h)\Upsilon = g(h)\Upsilon - \mathrm{ad}(h)\Upsilon$, et $\lambda \in Q$. Donc pour $h \in h'$ on a $d(h)\Upsilon = (\mu-\lambda)(h)\Upsilon$ et comme $\mu-\lambda \in P$ la condition (C) est satisfaite.

Ceci montre le lemme 2.

Je peux donc poser $\mathbb{Q}[M] = \mathbb{Q}^g[M] = \mathbb{Q}^d[M]$. Je pose

$\underline{m}^+ = \underline{m} \cap \underline{n}^+$, $\underline{m}^- = \underline{m} \cap \underline{n}^-$, de sorte que l'on a $\underline{m} = \underline{m}^+ \oplus \underline{h}' \oplus \underline{m}^-$. Soit $X(\underline{m})$ l'ensemble des idéaux à gauche J de $U(\underline{m})$ qui satisfont aux trois conditions suivantes

(1) J est de codimension finie dans $U(\underline{m})$,

(2) J est stable par l'action adjointe de $\underline{h}$,

(3) Il existe une partie finie $\Phi \subseteq \underline{h}'^*$ formée de restrictions de formes linéaires de P , telle que $\prod_{\mu\in\Phi} (h - \mu(h))$ appartienne à J pour tout $h \in \underline{h}'$.

Lemme 3 : Soit $\Psi \in U(\underline{m})^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) Ψ appartient à $\mathbb{Q}[M]$,

(b) Il existe $J \in X(\underline{m})$ un idéal bilatère tel que $\Psi(J) = 0$.

Ce lemme est évident. On en déduit immédiatement que $\mathbb{Q}[M]$ est une sous-algèbre de l'algèbre commutative $U(\underline{m})^*$. La multiplication de $U(\underline{m})$ induit par dualité une application $\gamma : U(\underline{m})^* \longrightarrow [U(\underline{m}) \otimes U(\underline{m})]^*$. On a un diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}[M] \arrow[d, hook] & \mathbb{Q}[M] \otimes \mathbb{Q}[M] \arrow[d, hook] \\
U(\underline{m})^* \arrow[r, "\gamma"] & {[U(\underline{m}) \otimes U(\underline{m})]^*}
\end{tikzcd}$$

On déduit du lemme 3 que l'on a $\gamma(\mathbb{Q}[M]) \subseteq \mathbb{Q}[M] \otimes \mathbb{Q}[M]$. Soit $\omega : U(\underline{m}) \longrightarrow U(\underline{m})$ l'antiautomorphisme principal. Par dualité ω définit une application linéaire $\omega : U(\underline{m})^* \longrightarrow U(\underline{m})^*$. Il est clair que l'on a $\omega(\mathbb{Q}[M]) \subseteq \mathbb{Q}[M]$. L'application naturelle $\varepsilon : \mathbb{Q} \longrightarrow U(\underline{m})$ donne par dualité une application $\varepsilon : \mathbb{Q}[M] \longrightarrow \mathbb{Q}$. Je note μ la multiplication $\mu : \mathbb{Q}[M] \otimes \mathbb{Q}[M] \longrightarrow \mathbb{Q}[M]$.

Le lemme suivant est évident.

<u>Lemme 4</u> : L'algèbre $\mathbb{Q}[M]$ est une algèbre de groupe affine, avec multiplication μ , comultiplication γ d'augmentation ε et d'inversion ω

J'ai ainsi construit un groupe associé à $\underline{m}$. Je note ce groupe $M(\mathbb{Q})$. Dans la suite, j'adopte les conventions suivantes : Je note d'une minuscule gothique les sous-algèbres de Lie de $\underline{g}$. Lorsque cette sous-algèbre satisfait $\mathcal{H}_1$, je note d'une majuscule latine le groupe correspondant.

A présent je cherche à définir des formes entières de $M(\mathbb{Q})$. Je pose

$$\mathbb{Z}[M] = \{\varphi\in \mathbb{Q}[M] | \varphi(\mathcal{U}^{\mathbb{Z}}(\underline{m})) \subseteq \mathbb{Z}\} .$$

Il est naturel de poser la définition suivante :

<u>Définition</u> : Soit $\underline{m}$ une algèbre de Lie dans $\underline{g}$, satisfait $\mathcal{H}_1$. Je dis que le groupe associé $M(\mathbb{Q})$ possède une forme entière si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées

(1) $\varepsilon(\mathbb{Z}[M]) \subseteq \mathbb{Z}$

(2) $\omega(\mathbb{Z}[M]) \subseteq \mathbb{Z}[M]$

(3) $\mu(\mathbb{Z}[M] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[M]) \subseteq \mathbb{Z}[M]$

(4) $\gamma(\mathbb{Z}[M]) \subseteq \mathbb{Z}[M] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[M]$

(5) $\mathbb{Q}[M] = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[M]$.

La condition 5 implique que $\mathbb{Z}[M]$ est un réseau de $\mathbb{Q}[M]$, ce qui explique la terminologie.

Dans la suite je vais étudier ces cinq conditions. Je pose $U^{+,\mathbb{Z}}(\underline{m}) = U^{+}(\underline{m}) \cap U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})$. Il est clair que l'on a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) = \mathbb{Z} \oplus U^{+,\mathbb{Z}}(\underline{m})$. La condition (1) est automatiquement vérifiée. La condition (2) est également automatiquement satisfaite.

J'étudie la condition (3). Pour que la condition (3) soit satisfaite, il suffit que la condition suivante soit satisfaite

$\mathcal{H}_2$: On a $\square\, U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \subseteq U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})$.

Je ne sais pas si cette condition est toujours vérifiée. On considère la condition suivante

$\mathcal{H}_3$: Soit $J \in X(\underline{m})$, et $J^{\mathbb{Z}} = J \cap U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})$. Alors $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})/J^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

Je ne sais pas si la condition $\mathcal{H}_3$ est toujours vérifiée. On a :

<u>Lemme 5</u> : On suppose la condition $\mathcal{H}_3$ satisfaite. Alors les conditions (4) et (5) sont satisfaites.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varphi \in \mathbb{Z}[M]$. Il existe un idéal bilatère $J \in X(\underline{m})$ tel que $\varphi(J) = 0$. Par la condition $\mathcal{H}_3$, $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})/J^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, et par construction il est sans torsion; c'est donc un $\mathbb{Z}$-module libre. On a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})/J^{\mathbb{Z}} , \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}[M]$. On a

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \ / \ J^{\mathbb{Z}} \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) + U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \otimes J^{\mathbb{Z}} , \mathbb{Z})$

$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \ / \ J^{\mathbb{Z}} , \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \ / \ J^{\mathbb{Z}} , \mathbb{Z})$

et on a donc $\gamma(\mathbb{Z}[M]) \subseteq \mathbb{Z}[M] \otimes \mathbb{Z}[M]$, ce qui vérifie la condition (4) .

Soit $\varphi \in \mathbb{Q}[M]$. Il existe un idéal $J \in X(\underline{m})$ tel que $\varphi(J) = 0$. Comme $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})/J^{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, il existe un entier $d \in \mathbb{Z}-\{0\}$, tel que $\varphi(U^{\mathbb{Z}}(m)) \subseteq \frac{1}{d}\mathbb{Z}$. On a donc $d\varphi \in \mathbb{Z}[M]$. Ceci montre la condition (5).

Soit $Y(\underline{m})$ l'ensemble des $U(\underline{m} + \underline{h})$-modules de dimension finie, $\underline{h}$ - semi-simples à poids dans P .

<u>Lemme 6</u> : (1) La condition $\mathcal{H}_3$ est équivalente à la condition suivante : pour tout $E \in Y(\underline{m})$, et pour tout $e \in E$, le $\mathbb{Z}$-module $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}).e$ est de type fini.

(2) Si $\underline{m} + \underline{h}$ satisfait $\mathcal{H}_3$, $\underline{m}$ satisfait $\mathcal{H}_3$.

(3) Soit $q = \underline{m}^{+} \oplus \underline{h}$. Alors $\underline{q}$ et $\underline{m}^{+}$ satisfont $\mathcal{H}_3$.

(4) On suppose que l'on a $\underline{m} \supseteq \underline{h}$. On suppose que l'on a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) = U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^{-}) \otimes_{\mathbb{Z}} U^{\mathbb{Z}}(\underline{q})$. Alors $\underline{m}$ satisfait $\mathcal{H}_3$.

Démonstration : Soit $E \in Y(\underline{m})$. L'ensemble des éléments $e \in E$ tels que $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}).e$ soit un $\mathbb{Z}$-module de type fini est un $U(\underline{m} + \underline{h})$-sous-module de E . Le point (1) en résulte clairement. On a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}) \subseteq U^{\mathbb{Z}}(\underline{m} + \underline{h})$. Donc le point (1) implique le point (2). Pour montrer le point (3), il suffit donc de montrer que $\underline{q}$ satisfait $\mathcal{H}_3$. Soit donc $E \in Y(\underline{q})$, et $e \in E$. Je peux supposer que e est un vecteur de poids. Par le lemme 3 du ch. VIII §12 n° 5 de [3], on a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{b}) = U^{\mathbb{Z}}(\underline{n}^+) \otimes_{\mathbb{Z}} U^{\mathbb{Z}}(\underline{h})$. Pour chaque $\beta \in Q$, on a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^+)_\beta = U(\underline{m}^+)_\beta \cap U^{\mathbb{Z}}(\underline{n}^+)_\beta$. Comme $U^{\mathbb{Z}}(\underline{n}^+)_\beta$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, il vient que $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^+)_\beta$ est un facteur direct de $U(\underline{n}^+)_\beta$. Donc $U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^+)$ est un facteur direct de $U^{\mathbb{Z}}(\underline{n}^+)$. On en déduit que l'on a aussi $U^{\mathbb{Z}}(\underline{q}) = U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^+) \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{h})$. Or on a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{h}).e = \mathbb{Z}e$. On a donc $U^{\mathbb{Z}}(\underline{q}).e = U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^+).e$. Il existe une partie finie $\Phi \subseteq Q^+$ telle que $U(\underline{m}^+).e = \bigoplus_{\alpha\in\Phi} U(\underline{m}^+)_\alpha.e$. On a donc $U^{\mathbb{Z}}(\underline{q}).e = \bigoplus_{\alpha\in\Phi} U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^+)_\alpha.e$, donc $U^{\mathbb{Z}}(\underline{q}).e$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

Reste à montrer le point (4) du lemme. Soit $E \in Y(\underline{m})$. Par le point (3) du lemme 6 , pour tout $e \in E$ les $\mathbb{Z}$-modules $U^{\mathbb{Z}}(m^-)e$ et $U^{\mathbb{Z}}(q)e$ sont des $\mathbb{Z}$-modules de type fini. Si l'on a $U^{\mathbb{Z}}(m) = U^{\mathbb{Z}}(\underline{m}^-) \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{q})$ ceci implique le point 4 du lemme.

Remarque : Par la proposition 3 du ch. VIII §12 n° 6 de [6] on a $U^{\mathbb{Z}}(\underline{g}) = U^{\mathbb{Z}}(n^+) \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{h}) \otimes U^{\mathbb{Z}}(\underline{n}^-)$ et $U^{\mathbb{Z}}(n^+)$ est engendrée par les éléments $e_i^{(n)}$ $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $U^{\mathbb{Z}}(\underline{h})$ par les éléments $\binom{h}{n}$ $h \in \overset{\vee}{P}$, $n \in \mathbb{N}$, et $U^{\mathbb{Z}}(\underline{n}^-)$ par les éléments $f_j^{(n)}$ $j \in I$, $n \in \mathbb{N}$ (cf. aussi [59]).

Soit $i \in I$. On introduit les sous-algèbres de Lie suivantes dans $\underline{g}$:

$\underline{e}_i = \mathbb{Q}e_i$, $\underline{f}_i = \mathbb{Q}f_i$,

$\underline{a}_i = \underline{h} \oplus \underline{e}_i \oplus \underline{f}_i$, $\underline{u}_i = \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha\neq\alpha_i}} \alpha$, $\underline{b}_i = \underline{h} \oplus \underline{e}_i$, $\underline{b}'_i = \underline{h} \oplus \underline{f}_i$,

$\underline{c}_i = \underline{h} \oplus \underline{f}_i \oplus \underline{u}_i$. Pour construire les groupes associés aux différentes sous-algèbres de Lie vues jusqu'à présent, je vais construire quelques modules.

Soit $\lambda \in P$. je note $\mathcal{V}(\lambda)$ le $U(\underline{b})$-sous-module de $\mathrm{Coind}_{\underline{h}}^{\underline{b}}(\mathbb{Q}_\lambda)$ formé des vecteurs $U(\underline{h})$-semi-simples. Ici $\mathbb{Q}_\lambda$ designe le $U(\underline{h})$-module de dimension un de poids λ . Comme $U(\underline{b})$-module, on a $\mathcal{V}(\lambda) = \mathcal{V}(0) \otimes \mathbb{Q}_\lambda$. Donc les $U(\underline{b})$-modules $\mathcal{V}(\lambda)$ sont isomorphes entre eux comme $U(\underline{n}^+)$-module. Soit $\mathcal{V}$ le $U(\underline{n}^+)$-module $\mathcal{V}(\lambda)$ pour un certain λ .

Lorsque $\lambda(h_i) \geq 0$, soit $\ell_i(\lambda)$ le $U(\underline{a}_i)$-module simple de plus haut poids λ . Le $U(\underline{a}_i)$-module $\ell_i(\lambda)$ est de dimension $\lambda(h_i) + 1$, car $\underline{a}_i$ est une algèbre réductive de partie simple isomorphe à $\underline{s\ell}(2)$. Soit $\mathcal{V}_i(\lambda)$ le sous-module de $\mathrm{Coind}_{\underline{a}_i}^{\underline{p}_i} \ell_i(\lambda)$ des vecteurs $U(\underline{h})$-semi-simples. Je pose $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i(0)$ considé comme $U(\underline{u}_i)$-module.

Dans le tableau suivant, je donne la liste des sous-algèbres remarquables étudiées. Elles satisfont toutes $\mathcal{H}_1$. Je donne dans le tableau le nom du $\mathbb{Q}$-groupe affine associé.

TABLEAU DES SOUS-ALGÈBRES DE LIE REMARQUABLES

ALGÈBRE DE LIE	GROUPE	ALGÈBRE DE LIE	GROUPE
$\underline{b}$	$B(\mathbb{Q})$	$\underline{u}_i$	$U_i(\mathbb{Q})$
$\underline{p}_i$	$P_i(\mathbb{Q})$	$\underline{b}_i$	$B_i(\mathbb{Q})$
$\underline{n}$	$N(\mathbb{Q})$	$\underline{b}'_i$	$B'_i(\mathbb{Q})$
$\underline{e}_i$	$E_i(\mathbb{Q})$	$\underline{c}_i$	$C_i(\mathbb{Q})$
$\underline{f}_i$	$F_i(\mathbb{Q})$	$\underline{a}_i$	$A_i(\mathbb{Q})$

$\underline{h}$	$H(\mathbb{Q})$		

Dans le lemme suivant, j'indique à quoi sont isomorphes les différentes algèbres des groupes considérés ici.

<u>Lemme 7</u> : 1) On a $\mathbb{Q}[H] = \mathbb{Q}[P]$ où $\mathbb{Q}[P]$ désigne l'algèbre du groupe discret P. Plus précisément comme $U(\underline{h}) \times U(\underline{h})$-module, on a $\mathbb{Q}[H] = \bigoplus_{\lambda\in P} \mathbb{Q}_\lambda \otimes \mathbb{Q}_\lambda^*$.

2) Soit $i \in I$. Soit $\tilde{P}_i = \{\lambda \in P \text{ , } \lambda(h_i) \geq 0\}$. On a comme $U(\underline{a}_i) \times U(\underline{a}_i)$-module

$$\mathbb{Q}[A_i] = \bigoplus_{\lambda\in\tilde{P}_i} \ell_i(\lambda) \otimes \ell_i(\lambda)^* .$$

3) On a $\mathbb{Q}[N] = \check{V}$ comme $U(\underline{n})$-module à gauche.

4) On a $\mathbb{Q}[B] = \bigoplus_{\lambda\in P} \check{V}(\lambda)$ comme $U(\underline{b})$-module à gauche.

5) Soit $\underline{m}$, $\underline{m}'$ deux algèbres de Lie du tableau. Si $\underline{m} \subseteq \underline{m}'$, il existe un morphisme naturel $M(\mathbb{Q}) \longrightarrow M'(\mathbb{Q})$, qui est une immersion fermée (i. e. $\mathbb{Q}[M'] \longrightarrow \mathbb{Q}[M]$ est surjective).

6) On a, pour chaque $i \in I$ des isomorphismes naturels $P_i(\mathbb{Q}) = A_i(\mathbb{Q}) \times U_i(\mathbb{Q})$, $B(\mathbb{Q}) = B_i(\mathbb{Q}) \times U_i(\mathbb{Q})$, $C_i(\mathbb{Q}) = B_i'(\mathbb{Q}) \times U_i(\mathbb{Q})$. On a $B(\mathbb{Q}) = H(\mathbb{Q}) \times U(\mathbb{Q})$.

7) Comme $U(P_i)$-module à droite, on a $\mathbb{Q}[P_i] = \bigoplus_{\lambda\in\tilde{P}_i} [V_i(\lambda)]^{\lambda(h_i)+1}$.

<u>Démonstration</u> : Ce lemme est facile. Je n'indique que brièvement les démonstrations. Le point 2 est une formule à la Peter-Weyl. Les assertions 1,3,5 sont faciles. Le point 5 résulte du point 6, qui est aisé. Enfin le point 7 résulte des points 6 et 2.

<u>Lemme 8</u> : 1) Les algèbres de Lie du tableau satisfont aux conditions $\mathcal{H}_2$ et

$\mathcal{H}_3$.

2) On pose $\mathfrak{V}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[N]$. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{V}^{\mathbb{Z}}$ est un réseau de $\mathfrak{V}$. Plus précisément, $\mathfrak{V}$ est un $U(\underline{h})$-module pour l'action adjointe. On a $\mathfrak{V} = \bigoplus_{\lambda \in -Q^+} \mathfrak{V}_\lambda$. On pose $\mathfrak{V}^{\mathbb{Z}}_\lambda = \mathfrak{V}^{\mathbb{Z}} \cap \mathfrak{V}_\lambda$. On, a $\mathfrak{V}^{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\lambda \in -Q^+} \mathfrak{V}^{\mathbb{Z}}_\lambda$, et chaque $\mathfrak{V}^{\mathbb{Z}}_\lambda$ est un réseau de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{V}_\lambda$.

3) On a $\mathbb{Z}[H] = \mathbb{Z}[P]$.

4) On pose, pour chaque $\lambda \in P$ $\mathfrak{V}^{\mathbb{Z}}(L) = \mathfrak{V}(\lambda) \cap \mathbb{Z}[B]$. On a $\mathbb{Z}[B] = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathfrak{V}^{\mathbb{Z}}(\lambda)$.

5) On a des isomorphismes, pour chaque $i \in I$

$P_i = A_i \times U_i$, $B = B_i \times U_i$, $C_i = B'_i \times U_i$. On a $B = H \times U$.

6) Si $\underline{m} \subseteq \underline{m}'$ sont deux algèbres du tableau, le morphisme naturel $M \longrightarrow M'$ est une immersion fermée.

7) Soit $i \in I$. Les morphismes naturels $F_i \times B \longrightarrow P_i$ et $E_i \times C_i \longrightarrow P_i$ sont des immersions ouvertes.

<u>Démonstration</u> : Le seul point délicat est de montrer le point 6 . Plus précisément, de montrer que $B \longrightarrow P_i$ est une immersion fermée. En utilisant les isomorphismes de groupes $P_i = A_i \times U_i$ et $B = B_i \times U_i$, on se ramène à montrer que $B_i \longrightarrow A_i$ est une immersion fermée, ce qui se fait par un calcul direct. On montre par le même argument le point 7 .

Soit $\underline{m}$ une sous-algèbre de Lie de $\underline{g}$, et R un anneau commutatif. Je peux définir la R-forme de l'algèbre enveloppante de $\underline{m}$, en posant $U^R(\underline{m}) = R \otimes_{\mathbb{Z}} U^{\mathbb{Z}}(\underline{m})$. Si R est un corps de caractéristique 0 , je pose $\underline{m}^R = R \otimes_{\mathbb{Q}} \underline{m}$.

On suppose que $\underline{m}$ satisfait $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$. On peut alors définir le foncteur $R \longrightarrow M(R)$, où $M(R)$ est le spectre de $R[M] = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[M]$. On remarque que cette notation est compatible à la notation $\mathbb{Q}[M]$ déjà définie. Lorsque l'anneau de base R sera convenu, on notera M le groupe $M(R)$.

L'algèbre de Lie $\underline{g}$ elle-même satisfait aux conditions $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$. Lorsque dim $\underline{g} < \infty$, la construction précédente permet d'obtenir le groupe de Chevalley simplement connexe. En revanche lorsque $\underline{g}$ est de dimension infinie, le groupe obtenu est extrêmement petit. On suppose par exemple que l'on a dim $\underline{g} = \infty$ et que A est indécomposable. Soit r le corang de A. L'anneau de groupe obtenu est un anneau de polynôme de Laurent à r-indéterminées. Soient $\underline{m} \subseteq \underline{m}'$ deux sous-algèbres de Lie de $\underline{g}$, satisfaisant aux conditions $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$. L'exemple précédent montre qu'en général le morphisme naturel $M \longrightarrow M'$ n'est pas en général une immersion fermée (même sur $\mathbb{C}$).

Soit k un corps de caractéristique 0, V un espace vectoriel, et W un sous-espace vectoriel de V^*. On dit que W est dense dans V si pour toute partie finie indépendante $\{a_1 \dots a_n\}$ de V, et tout n-uplet de scalaires $(c_1 \dots c_n)$ il existe $\xi \in W$ tel que $\xi(a_i) = c_i$. Soit $\underline{m}$ une sous-algèbre de $\underline{g}^{\mathbb{Q}}$ satisfaisant $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$. En général, il n'est pas vrai que k[M] est dense dans $U^k(\underline{m})^*$. Néanmoins ce fait est vrai pour les sous-algèbres de Lie remarquables du tableau.

Quoique le fait suivant ne sera pas utile avant le paragraphe XI, j'énonce un lemme qui permet de comprendre un peu quel est le spectre des groupes affines associés aux algèbres de Lie remarquables. Soit $\hat{U}^k(n^+)$ le complété de $U^k(\underline{n}^+)$ formé des expressions formelles $x = \sum_{\alpha \in Q^+} x_\alpha$ où $x_\alpha \in U^k(\underline{n}^+)_\alpha$. Soit $\hat{n}^+$ la fermeture de $\underline{n}^+$ dans $\hat{U}^k(n^+)$, i. e. l'ensemble des expressions formelles $\sum_{\alpha \in Q^+} x_\alpha$, où $x_\alpha \in n_\alpha^{+,k}$. Soit exp : $\hat{n}^{+,k} \longrightarrow \hat{U}^k(n^+)$ l'application exponentielle, donnée par l'expression formelle $\exp(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$. Je pose $\hat{N}^{+,k} = \exp \hat{n}^{+,k}$. Chaque élément $n \in \hat{N}^{+,k}$ définit une forme linéaire $V_n : k[N^+] \longrightarrow k$, par la dualité $k[N^+] \times U^k(\underline{n}^+) \longrightarrow k$ qui se prolonge par continuité en : $k[N^+] \times \hat{U}^k(n^+) \longrightarrow k$. La forme linéaire V_n est un morphisme de k-algèbres, d'où une application $\hat{N}^{+,k} \longrightarrow \mathrm{Spec}_{\max}(k[N^+])$.

d'où une application $\hat{N}^{+,k} \longrightarrow \mathrm{Spec}_{\max}(k[N^+])$.

Lemmme 9 : On suppose que k est algébriquement clos. Alors $\hat{N}^{+,k} \longrightarrow \mathrm{Spec}_{\max}(k[\hat{N}^+])$ est bijective.

Ce lemme est évident, et permet de construire les spectres maximaux des groupes affines (sur un corps de caractéristique zéro) associés aux sous-algèbres de Lie remarquables (un fait analogue est montré dans [40], et aussi [59], [60], [62]).

Dans la fin de ce paragraphe, je fixe k un corps de caractéristique 0 . Pour alléger les notations, je pose $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}$. Soit $\lambda \in \underline{h}^*$. Dans la suite, je noterai k_λ , ou parfois λ , le $U(\underline{b})$-module de dimension un de poids λ . Soit $V(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\underline{b})} k_\lambda$, le module de Verma associé. Je fixe $\rho \in P$ un poids tel que $\rho(h_i) = 1$, pour tout $i \in I$. Soit $i \in I$, et $\lambda \in \underline{h}^*$ tel que $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$. Soit W le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}^{\mathbb{Q}}$ [33] . Le groupe (discret) W est engendré par des réflexions élémentaires s_j , $j \in I$. Il existe un morphisme de $U(\mathfrak{g})$-module non trivial $V(s_i(\lambda + \rho) - \rho) \longrightarrow V(\lambda)$.

Soit $P^+ = \{\mu \in P \text{ , } \mu(h_j) \in \mathbb{N} \text{ pour tout } j \in I\}$. Soit $\Lambda \in P^+$. Je note $L(\Lambda)$ le conoyau du morphisme naturel $\bigoplus_{i \in I} V(s_i(\Lambda + \rho) - \rho) \longrightarrow V(\Lambda)$. Le $U(\mathfrak{g})$-module $L(\Lambda)$ est dit intégrable, car il est un $U(\underline{a}_i)$-module localement fini pour tout $i \in I$. Comme $U(\underline{n}^-)$-module $L(\Lambda)$ est isomorphe à $U(\underline{n}^-)/\Sigma\, U(\underline{n}^-) f_i^{\lambda(h_i)+1}$.

Le module $L(\Lambda)$ s'intègre en un P_i-module comme suit. L'action de $\mathcal{U}_{(\underline{p}_i)}$ sur $L(\Lambda)$ donne un morphisme $L(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_{(\underline{p}_i)}, L(\Lambda))$. Comme l'action est localement fini, ce morphisme factorise à travers $L(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda) \otimes \mathcal{U}_{(p_i)}^*$, et par construction de $k[P_i]$ en un morphisme $L(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda) \otimes k[P_i]$.

Remarque : J'ai rappelé dans ce chapitre les définitions des algèbres de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, et des modules standards $L(\Lambda)$, car ceci implique un certain choix. Ici on a fait en quelque sorte des choix maximaux. Il me semble qu'en dehors du cas où la matrice A est symétrisable, les questions suivantes sont encore ouvertes.

Question 1) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est-elle simple (au sens du théorème de Gabber et Kac [15] ?

2) Le module $L(\Lambda)$ est-il simple [33] ?

Des réponses positives à ces questions impliquent que les diverses constructions des algèbres de Kac-Moody, et des modules $L(\Lambda)$, donnent les mêmes résultats.

Remarque : La construction des réseaux $U^{\mathbf{Z}}(\mathfrak{g})$, $U^{\mathbf{Z}}(\underline{b})$, $U^{\mathbf{Z}}(\underline{n}^{+})$, $U^{\mathbf{Z}}(\underline{n}^{-})$ est dû à J. Tits. Cette construction est la généralisation directe de l'exposé de Bourbaki [6]. La seule différence que j'ai introduite ici est dans le choix de $\underline{h}$, et dans un choix maximal (et non plus minimal) pour $\mathfrak{g}$. La notion de réalisation est due à V. Kac.

II Groupe de Weyl.

Soit $(X,\leq)$ un ensemble ordonné. L'ensemble X est dit filtrant s'il satisfait à la condition :

$$\forall\, \alpha,\ \beta \in X,\ \exists \gamma \in X : \alpha \leq \gamma \quad \text{et} \quad \beta \leq \gamma\ .$$

Un sous- ensemble Y d'un ensemble inductif est dit cofinal s'il satisfait à la condition :

$$\forall \alpha \in X,\ \exists \beta \in Y,\ \alpha \leq \beta\ .$$

Soit $(X,\leq)$ un ensemble filtrant, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Par système inductif d'objets de $\mathcal{A}$ (respectivement : système projectif d'objets de $\mathcal{A}$) on entendra une famille $|E_\alpha|_{\alpha\in X}$ d'objets de $\mathcal{A}$, et une famille $\{\varphi_{\alpha,\beta}\}$ de morphismes $\varphi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \longrightarrow E_\beta$ indexée par les couples $(\alpha,\beta) \in X^2$ tels que $\alpha \leq \beta$, (respectivement $\alpha \geq \beta$) et vérifiant la propriété de commutativité usuelle.

Le lemme suivant est élémentaire..

Lemme 10 : Soit $(X,\leq)$ un ensemble filtrant, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $\{E_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}\}$ un système inductif

(1) On suppose que $\mathcal{A}$ est la catégorie des groupes abéliens. Soit $E = \varinjlim_{X} E_\alpha$ la limite inductive de $\{E_\alpha\}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout $\alpha \in X$, l'application $E_\alpha \longrightarrow E$ est injective.

(b) Pour tout α , $\beta \in X$, $\alpha \leq \beta$, $\varphi_{\alpha,\beta}$ est injective.

(2) On suppose que $\{E_\alpha\}$ possède une limite inductive E . Soit Y un sous-ensemble cofinal. Alors $\{E_\alpha,\ \alpha \in Y\}$ possède une limite inductive, et le morphisme naturel $\varinjlim_{Y} E_\alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Soit $\tilde{W}$ l'ensemble des décompositions réduites des éléments du groupe de Weyl. A chaque élément w de W ou de $\tilde{W}$ on peut associer sa longueur

$\ell(w)$. On pose $\varepsilon(W) = (-1)^{\ell(w)}$[33]. Soit $\leq$ l'ordre de $\tilde{W}$ défini comme suit : soient u , v deux éléments de $\tilde{W}$ de longueurs respectives p et q . On pose

$$u = s_{i_1} \dots s_{i_p}$$

$$v = s_{j_1} \dots s_{j_q} .$$

On dit que l'on a $u \leq v$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \{1,\dots,p\} \longrightarrow \{1,\dots,q\}$, telle que pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$ on ait $i_k = j_{\varphi(k)}$. Moins formellement, ceci signifie que la décomposition réduite u peut être obtenue en supprimant certaines réflexions élémentaires dans la décomposition réduite v ; L'ordre $\leq$ est dit ordre de Bruhat de $\tilde{W}$. On définit l'ordre de Bruhat de W en posant, pour tout couple d'éléments $u , v \in W$: $u \leq v$ dés qu'il existe des décompositions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ de u et v (respectivement) telle que l'on ait $\tilde{u} \leq \tilde{v}$. L'ordre de Bruhat de W est un ordre (cf. par exemple [12], où les démonstrations restent également valables dans le cas Kac-Moody). On note $u < v$ lorsque l'on a $u \leq v$ et $u \neq v$.

Soit J une partie de I . On pose

$W_J = \{w \in W , ws_j \geq w$ pour tout $j \in J\}$.

${}_JW = \{w \in W , s_j w \leq w$ pour tout $j \in J\}$.

Lorsque J est réduit à un élément $\{j\}$, on pose $W_j = W_{\{j\}}$ et ${}_jW = {}_{\{j\}}W$.

Lemme 11 : 1) L'ensemble W est filtrant.

(2) Pour tout $i \in I$, ${}_iW$ est cofinal dans W .

(3) Soit $w \in W$. Il existe une suite $w_0, w_1, \dots$ dans W (respectivement $w'_0,\dots,w'_n$) (suite finie lorsque W est fini, infinie lorsque W est infini) telle que $w'_0 = w_0 = w$, $w_0 \leq w_1 \leq w_2 \dots$, et telle que $w_{n+1} = w_n s_{i_n}$ (respectivement $w'_{n+1} = s_{i'_n} w_n$) pour certains i_n , $i'_n \in I$, et telle que l'ensemble $\{w_n , n \in \mathbb{N}\}$ (respectivement) $\{w'_n , n \in \mathbb{N}\}$ soit

cofinal.

(4) En particulier, si W est infini, W contient un sous-ensemble cofinal isomorphe à $\mathbb{N}$ (comme ensemble ordonné).

(5) Soit u , $v \in \tilde{W}$, $u \leq v$. Soit $n = \ell(v) - \ell(u)$.

Il existe une suite w_0 , $w_1, \dots, w_n$ de n éléments de $\tilde{W}$ tels que $u = w_0$, $v = w_n$ et $w_1 < w_2 < \dots < w_n$.

<u>Démonstration</u> : Je vais montrer le point 3 . Pour simplifier, je suppose W infini, le cas où W est fini se traitant de manière identique. L'ensemble des éléments $w \in W$ de longueur donnée est finie. Donc il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow W$ telle que pour tout couple d'entiers n , $m \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$ on ait $\ell(\varphi(n)) \leq \ell(\varphi(m))$.

Pour montrer le point 3 , je vais construire la suite $w_0, w_1 \dots$ inductivement de la manière suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$, et je suppose construire $w_0, w_1 \dots w_n$. Je pose $\tau(n) : \inf \{m / \varphi(m) \not\leq w_n\}$. on a nécessairement $\varphi(0) = 1$, et on a donc $\tau(n) > 0$ .Il existe $u \in W$, $i \in I$, tel que l'on ait $\varphi(\tau(n)) = us_i$, et $us_i \geq u$. On a donc $u = \varphi(m)$, avec $m < \tau(n)$. On a donc $u \leq w_n$ et $us_i \not\leq w_n$. On déduit facilement de [12] , 7.7.4 que l'on a $w_n \leq w_n s_i$ et $us_i \leq w_n s_i$ .Je pose $w_{n+1} = w_n s_i$. On a donc $\tau(n+1) > \tau(n)$, ce qui prouve que la suite $\{w_n\}$ est pleine. On construit de même la suite w'_n (ce point du lemme a été prouvé indépendamment par A. Arabia).

Les points 1 et 4 en résultent. Le point 2 est évident. Le point 5 résulte de [12] 7.7.5.

III Les foncteurs de Joseph.

Soit k un corps de caractéristique 0 . On reprend les notations du chapitre I.

Soit $i \in I$. Soit $C(B)$ (respectivement $C(P_i)$) la catégorie des $U(\underline{b})$ (respectivement $U(\underline{p})$)-modules localement finis, $U(\underline{h})$ semi-simples à poids entiers, i.e. des modules M tels que $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ .La catégorie $C(B)$ (respectivement des P_i-modules) au sens algèbrique.

Soient $i \in I$, et $M \in C(B)$. Soit $N = \mathrm{Coind}_{\underline{b}}^{\underline{p}_i} M$. Je définis $D_{s_i} M$ comme le sous-module des vecteurs $U(p_i)$-localement finis, $U(\underline{h})$-semi-simples de N. Il est clair que les poids de $D_{s_i} M$ sont entiers, et l'on a donc $D_{si}M \in C(P_i)$. Soit M' un autre élément de C(B), et $M \longrightarrow M'$ un morphisme de $u(\underline{b})$-module. Je pose $N' = \mathrm{Coind}_{\underline{b}}^{\underline{p}_i} M'$. Le morphisme naturel $M \longrightarrow M'$ induit un morphisme de $U(\underline{p}_i)$-modules $D_{s_i} M \longrightarrow D_{s_i} M'$. La remarque précédente prouve que D_{s_i} définit un foncteur covariant de C(B) dans $C(P_i)$.

Soit $M \in C(B)$ de dimension finie. Il est connu que $N = U(\underline{p}_i) \otimes_{U(\underline{b})} M$ est un $U(\underline{p}_i)$-module de longueur finie. Soit Z le sous-module de N de codimension finie, et minimal pour cette propriété. Je pose $D^{s_i} M = N/Z$. On a encore $D^{s_i}M \in C(P_i)$.

Dans les notations précédentes, s_i désigne la réflexion simple de W .

Soit $\underline{s} = ke \oplus kh_i \oplus kf_i$, et soit $\beta = kh_i \oplus ke_i$ .L'algèbre de Lie $\underline{s}$ est isomorphe à $\underline{sl}(z)$, et β est une sous-algèbre de Borel. Soient S le groupe algèbrique simplement connexe associé à S (isomorphe à SL(Z)) et L le sous-groupe de Borel associé à β ;Je peux considérer $\underline{s}$ comme une sous-algèbre parabolique de l'algèbre de Kac-Moody $\underline{s}$. Soit s l'élément non trivial du groupe de Weyl de $\underline{s}$. On a ainsi un foncteur $D_s : C(L) \longrightarrow C(S)$.

Par restriction, tout élément de $C(B)$ (respectivement $C(P_i)$) défini un élément de $C(L)$ (respectivement $C(S)$). Je note donc $\mathrm{Res}: C(B) \longrightarrow C(L)$ et $\mathrm{Res}: C(P_i) \longrightarrow C(S)$ les foncteurs d'oubli correspondants.

Je vais utiliser le lemme évident suivant pour comparer les foncteurs D_{s_i} et D_s .

<u>Lemme 12</u> : 1) Le foncteur D_{s_i} commute à la limite inductive.

2) Il existe un morphisme naturel de foncteurs $\sigma_i : D_{s_i} \longrightarrow \mathrm{Id}$.

3) Le foncteur D_{s_i} possède la propriété universelle des foncteurs de coinduction. Plus précisément, soit $M \in C(B)$, et $N \in C(P_i)$. Pour tout morphisme de $U(\underline{b})$-module $N \longrightarrow M$ il existe un unique morphisme fonctoriel de $U(\underline{p}_i)$-module $N \longrightarrow D_{s_i} M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d] \arrow[r] & M \\
D_{s_i} M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Corollairement D_{s_i} est un foncteur covariant exact à gauche, et il commute aux limites filtrantes. Je compare les foncteurs D_{s_i} et D_s . On a un diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
C(B) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "D_{s_i}"'] & C(L) \arrow[d, "D_s"] \\
C(P_i) & C(S)
\end{tikzcd}$$

Utilisant la propriété 3 du lemme précédent, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C(B) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "D_{s_i}"'] & C(L) \arrow[d, "D_s"] \\
C(P_i) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & C(S)
\end{tikzcd}$$

Soit $M \in C(B)$. Je veux prouver que le morphisme naturel $D_{s_i} M \longrightarrow D_s M$ est un isomorphisme. Utilisant les commutations aux limites inductives, on se ramène au cas où M est de dimension finie. On a un isomorphisme canonique $\mathrm{Coind}_{\underline{b}}^{\underline{p}_i} M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coind}_{\beta}^{\underline{s}} M$. Soit N ce module. Il est alors facile de prouver que $D_{s_i} M$ et $D_s M$ sont égaux au sous-module de N des vecteurs semi-simples sous l'action de h_i , et nilpotents sous l'action de e_i . Ainsi $D_{s_i} M \longrightarrow D_s M$ est un isomorphisme.

Il est facile de montrer que $C(B)$ contient suffisament d'injectifs: les injectifs de $C(B)$ sont les sommes directes (finies ou infinies) de modules $\check{V}(\lambda)$ $(\lambda \in P)$. Je peux donc considérer les dérivés $D^*_{s_i}$ du foncteur D_{s_i} . Les modules $\check{V}(\lambda)$ et leur sommes directes restent injectifs dans $C(L)$. On a donc un isomorphisme $D^*_{s_i} \xrightarrow{\sim} D^*_s$ de foncteurs à valeurs dans $C(S)$.

Enfin on remarque que $C(L)$ est de dimension homologique un. Ceci est clair, car les modules injectifs $M \in C(L)$ sont caractérisés par le fait que $M = e_i M$. On a donc $D^k_{s_i} = 0$ pour $k \geq 2$. Un calcul direct prouve que si $M \in C(L)$ est de dimension finie, $D^0_{s_i} M$ et $D^1_{s_i} M$ sont de dimension finie. Si M est de dimension finie, on a un isomorphisme naturel $(D^0_{s_i} M^*) \simeq D^{s_i} M$, et je peux donc poser $D^{s_i}_k M = (D^k_{s_i} M^*)^*$ pour tout entier k .

Soit $\Delta^{s_i} : \mathbb{Z}[P] \longrightarrow \mathbb{Z}[P]$ l'opérateur de Demazure défini par la formule (cf. [4], [12])

$$\Delta^{s_i} e^{\lambda} = \frac{e^{\lambda} - e^{s_i(\lambda+\rho)-\rho}}{1 - e^{-\alpha_i}} \text{ , pour tout } \lambda \in P \text{ .}$$

Soit $\tau : \mathbb{Z}[P] \longrightarrow \mathbb{Z}[P]$ l'opérateur d'inversion $\tau(e^{\lambda}) = e^{-\lambda}$, et Δ_{s_i} l'opérateur dual de Demazure $\Delta_{s_i} = \tau \circ \Delta^{s_i} \circ \tau$.

Si M est un $U(\underline{h})$-module diagonalisable tel que $\dim(M_{\lambda}) < \infty$ pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$, je pose $ch(M) = \sum_{\lambda \in \underline{h}^*} \dim(M_{\lambda}) e^{\lambda}$, l'expression définissant ch(M) étant prise dans un sens formel dans $\mathbb{Z}\,[[P]]$.

Le lemme suivant est dû à A. Joseph [31].

<u>Lemme 13</u> : Soit $M \in C(B)$, M de dimension finie. Pour que $D_1^{s_i}\ M = 0$, il suffit que $M \longrightarrow D^{s_i}\ M$ soit injective.

On a $ch(D_0^{s_i}\ M) - ch(D_1^{s_i}\ M) = \Delta^{s_i}\ ch(M)$.

On a $ch(D^0_{s_i}\ M) - ch(D^1_{s_i}\ M) = \Delta_{s_i}\ ch(M)$.

<u>Démonstration</u> : On rappelle brièvement la démonstration de Joseph, par exemple pour le foncteur D_{s_i} . Tout module $M \in C(L)$ est somme directe de modules ficelles $\ell_i(\lambda) \otimes k_{\mu}$ (où $\lambda, \mu \in \underline{h}^*$) . On vérifie alors que l'on a $D^*_{s_i}(\ell_i(\lambda) \otimes k_{\mu}) = \ell_i(\lambda) \otimes D^*_{s_i} k_{\mu}$, et $\Delta_{s_i}\ ch(\ell_i(\lambda) \otimes k_{\mu}) = ch(\ell_i(\lambda)) \otimes ch(\Delta_{s_i} k_{\mu})$. On peut donc n'examiner que le cas où l'on a $M = k_{\lambda}$. On peut supposer également que l'on a $\underline{g} = \underline{sl}(2)$, ce qui permet d'utiliser les notations du chapitre I. On a une résolution

$0 \longrightarrow M \longrightarrow \check{V}(\lambda) \longrightarrow \check{V}(\lambda - \alpha_i) \longrightarrow 0$.

Enfin on a: $D_{s_i} \check{V}(\lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} \ell_i(\lambda + n\alpha_i)$ lorsque $\lambda(h_i) \geq 0$

et $D_{s_i} \check{V}(s_i \lambda) = D_{s_i} \check{V}(\lambda)$ pour tout λ .

Ceci donne les formules

$$\begin{array}{ll} D_{s_i}(k_{\lambda}) = \ell_i(s_i \lambda) & \\ & \text{si } \lambda(h_i) \leq 0 \\ D^1_{s_i}(1_{\lambda}) = 0 & \end{array}$$

$D_{s_i}(k_\lambda) = 0$ si $\lambda(h_i) \geq 0$

$D^1_{s_i}(k_\lambda) = \ell_i(\lambda - \alpha_i)$

$D^*_{s_i} k_\lambda = 0$ si $\lambda(h_i) = 1$,

d'où les formules cherchées. C.Q.F.D.

Soient M , $M' \in C(B)$. Il existe un morphisme naturel $D_{s_i} M \otimes D_{s_i} M' \longrightarrow D_{s_i}(M \otimes M')$. En particulier si M' appartient à $C(P_i)$, on a un isomorphisme $D_{s_i}(M \otimes M') \xrightarrow{\sim} (D_{s_i} M) \otimes M'$, et un isomorphisme $D_{s_i} M' \xrightarrow{\sim} M'$(car $D_{s_i} k = k$) . Ceci prouve aussi que l'on a $D_{s_i} \circ D_{s_i} = D_{s_i}$) . On remarque aussi que l'on a $D^{s_i}_* k_{-\rho} = 0$, ce qui prouve que la condition suffisante du lemme précédent n'est pas nécessaire (remarque due à A. Joseph).

Soit $w \in \tilde{W}$, $w = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$ .Pour chaque $M \in C(B)$ on peut considérer $D_{s_i} M$ comme un élément de $C(B)$. On peut donc définir $D_w = D_{s_{i_1}} \ldots D_{s_{i_n}}$ et $D^w = D^{s_{i_1}} \ldots D^{s_{i_n}}$. Si M est de dimension finie , on a des isomorphismes naturels $(D_w M^*)^* \simeq D^w M$, $D_w M^*$ et $D^w M$ étant de dimension finie. Il n'est pas clair pour le moment que les foncteurs dérivés $D^*_w M$ sont de dimension finie, ni que D_w est de dimension homologique finie. Dans la seconde partie, je montrerai que tel est le cas (L'étude des foncteurs dérivés rendra plus naturelle les notations employées ici, qui sont différentes de [31]).

Avant d'expliquer les propriétés des foncteurs D_w , je vais d'abord considérer un cas particulier technique. Je suppose que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie. Soit donc G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie G . Pour tout $M \in C(B)$, soit $\tilde{\mathcal{L}}(M)$ le faisceau des sections du fibré $G \times^B M$. Je note aussi $K[G]_B$ l'anneau des fonctions régulières sur G , avec action à droite de B .

Lemme 14: On suppose que w est la décomposition réduite de w_o l'élément maximal de W . On a alors un isomorphisme canonique, pour tout $M \in C(B)$, $H^O(G/B,\tilde{\mathcal{L}}(M)) \xrightarrow{\sim} D_w M$.

Corollairement on a

1) Si w' est une autre décomposition de w_o , on a un isomorphisme canonique de foncteur $D_w \simeq D_{w'}$.

2) Pour tout $M \in C(B)$, on a $D_w M = HH^O(\underline{b}, k[G]_B \otimes M)$.

Démonstration: On trouvera des détails sur les constructions utilisées dans la démonstration dans [7] et dans la suite de cet article. Soient $D(w)$ la variété de Demazure associée à w , et $\pi : D(w) \longrightarrow G/B$ le morphisme associé. Pour chaque $M \in C(B)$ on peut associer un faisceau $\mathcal{L}_w(M)$ sur $D(W)$, et on a $\mathcal{L}_w(M) = \pi^*\tilde{\mathcal{L}}(M)$. On a un isomorphisme canonique (cf. chapitre V) $D_w M \simeq H^O(D(w), \mathcal{L}_w(M))$.

Le morphisme π est propre et birationnel, et G/B est normal (puisque G/B est lisse). On a donc

$$\tilde{\mathcal{L}}(M) = \Pi_* \mathcal{L}_w(M) \quad \text{et}$$

$$H^\circ(G/B,\tilde{\mathcal{L}}(M)) = H^\circ(D(w),\mathcal{L}_w(M)).$$

ce qui prouve le lemme.

Le corollaire I du lemme 14 a été prouvé par A.Joseph de manière purement algèbrique [32]. On revient à la situation générale.

Je vais établir quelques propriétés des foncteurs D_w . Ces propriétés résulteront aussi de manière triviale de la proposition 3. Cependant la proposition 3 exige la construction des faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}(M)$ sur les variétés de Schubert, i.e. du fait que les variétés de Schubert sont à singularités rationnelles. Aussi j'ai préféré indiquer des démonstrations élémentaires de ce fait. Egalement on peut vérifier que le seul point utile concernant les foncteurs de Schubert (pour la preuve des résultats jusqu'à la proposition 3) est le lemme 13. La formule de caractère du lemme 13 peut aussi être obtenue comme conséquence du théorème de Riemann-Roch pour $\mathbb{P}_1$, et la première assertion du fait suivant

Lemme 14: Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent localement libre sur $\mathbb{P}^1$, et $i: {}_2P \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme correspondant. Alors si le morphisme

$$H^o(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) \longrightarrow H^o(P, i^*\mathcal{F})$$

est surjectif, on a $H^1(\mathbb{P}', \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration: D'après [21] , $\mathcal{F}$ est somme direct de faisceaux inversibles $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Il suffit donc de vérifier cette assertion pour ces faisceaux inversibles, ce qui est trivial.

Propriétés élémentaires des foncteurs D_w :

1) Soient $w \in \tilde{W}$, M, $M' \in C(B)$. On construit par récurrence un morphisme fonctoriel

$$D_wM \otimes D_wM' \longrightarrow D_w(M \otimes M')$$. Le foncteur associé sera appelé la multiplication.

2) Soient w, $v \in \tilde{W}$, $n \in \mathbb{N}$ avec $\ell(w) = n$, $v \leq w$. Je pose $w = s_{i_1} \dots s_{i_1}$. Il existe donc $\varepsilon = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ tels que l'on ait

$$v = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{I_n}^{\varepsilon_n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \ell(v)$$

avec la convention $s_{i_1}^{\varepsilon_1} = 1$ ou s_{i_1} suivant que $\varepsilon_1 = 0$ ou 1 . Ceci définit un morphisme de foncteurs $\sigma_\varepsilon : D_w \longrightarrow D_v$, donné par la formule

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_{S_{i_1}}^{\bar{\varepsilon}_1} \dots \sigma_{S_{i_n}}^{\bar{\varepsilon}_n}$$, où $\bar{\varepsilon}_i$ est définit par $\varepsilon_i + \bar{\varepsilon}_i = 1$ pour $i = 1$ à n .

Je vais prouver que le morphisme de foncteurs $\sigma_\varepsilon : D_w \longrightarrow D_v$ ne dépend pas de ε . Par récurrence, on se ramène à la situation suivante:

$w = S_i \, u \, S_i$ pour un certain $i \in I$, $u \in \tilde{W}$ avec $\ell(u) = \ell(w) - 2$.

$v = S_i$.

et la donnée des séquences $\varepsilon = (1, 0\ldots0)$ et $\varepsilon' = (0,\ldots0, 1)$ pour lesquelles on veut prouver que l'on a $\sigma_\varepsilon = \sigma_{\varepsilon'}$.

Je pose $\sigma + \mathrm{Id}\, \sigma_{S_{i_2}} \circ\cdots\circ \sigma_{S_{i_{n-1}}} \circ \mathrm{Id}$. On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & D_w \arrow[ddl, "\sigma_\varepsilon"'] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddr, "\sigma_{\varepsilon'}"] & \\
 & D_{S_i} \circ D_{S_i} \arrow[dl, "\sigma_{S_i} \circ \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id} \circ \sigma_{S_i}"'] & \\
D_{S_i} & & D_{S_i}
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $\sigma_{S_i} \circ \mathrm{Id}$, $\mathrm{Id} \circ \sigma_{S_i} : D_{S_i} \circ D_{S_i} \longrightarrow D_{S_i}$ sont des isomorphismes, ce qui fournit l'isomorphisme $\sigma_\varepsilon \simeq \sigma_{\varepsilon'}$ cherché. Enfin il est clair que les morphismes de foncteurs considérés commutent à la multiplication.

3) Je vais prouver que les foncteurs $D_{\tilde{w}}$ ne dépendent que de l'image de $\tilde{w}$ dans W . Plus précisement, étant donné deux décompositions réduites $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$ d'un même élément de W , je vais construire un isomorphisme canonique de foncteurs $D_{\tilde{w}} \simeq D_{\tilde{w}'}$.

Cette construction se fait en deux étapes: premièrement je construis un isomorphisme de D_w dans $D_{w'}$, puis je vérifie sa canonicité (dans le preprint de cet article j'avais oublié la seconde étape, ainsi que me l'a fait remarquer le referee).

Soient $w \in W$, et Γ l'ensemble des décompositions réduites de w . Pour tout sous-ensemble $J \subset I$, je note $w(J)$ le sous-groupe de W engendré par les réflections S_j, $j \in J$. Suivant [61], on muni Γ d'une structure de graphe par le procédé suivant. Si $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$ sont deux éléments de Γ , ils sont les sommets d'une arête commune si la condition suivante est réalisé:

Il existe $J \subset I$ tel que $W(J)$ soit fini et le cardinal de J soit 2, il existe $u, v \in \tilde{W}$ tel que l'on ait

$\tilde{w} = u \,\omega\, v$

$\tilde{w}' = u \,\omega'\, v$

où ω, ω' sont les deux décompositions réduites de l'élément maximal de $W(J)$, et où l'on a

$\ell(\tilde{w}) = \ell(u) + \ell(v)$.

(Cette dernière condition implique aussi que l'on a

$\ell(\tilde{w}') = \ell(u) + \ell(\omega') + \ell(v)$) .

Soient à présent $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$ les deux sommets d'une arrête commune de Γ , comme précédemment. Comme le groupe de Weyl $W(J)$ est fini, la sous-algèbre de Kac-Moody de rang deux et de matrice de Cartan $(a_{ij})_{i,j \in J}$ est de dimension finie. Par le lemme 14, on a donc un isomorphisme canonique $D_\omega \xrightarrow{\sim} D_{\omega'}$, ce qui induit un isomorphisme $D_{\tilde{w}} \longrightarrow D_{\tilde{w}'}$.

D'après [61] , le graphe Γ est connexe. Donc à tous $\tilde{w}, \tilde{w}' \in \Gamma$, et toute classe γ d'homotopie de chemin de source $\tilde{w}$ et de but $\tilde{w}'$ est associé un isomorphisme $\tau_\gamma : D_{\tilde{w}} \longrightarrow D_{\tilde{w}'}$.

Prouver la canonicité de l'isomorphisme ainsi défini revient à prouver que pour tout $\mathscr{V} \in \Gamma$, l'action du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, \mathscr{V})$ sur D_w est triviale.

Pour toute partie $J \subset I$ telle que $W(J)$ soit fini et J soit de cardinal 3, on considère le graphe Γ_J des décompositions réduites de l'élément maximal de $W(J)$. Soient $X \in \Gamma_J$, et $(X_0 \ldots X_m)$ une suite d'éléments de Γ_J telle que

a) $X = X_0 = X_m$

b) Pour tout entier i, $1 \leq i \leq m$, X_{i-1} et X_i sont les deux sommets

d'une arrête commune de Γ_J .
Soient u, v $\in \tilde{W}$ tels que u x v soit une décomposition réduite de w avec ($\ell(u) + \ell(x) + \ell(v) = \ell(w)$).La suite d'éléments ($u\ x_0\ v$, ..., $u\ x_m\ v$) définit un lacet de Γ , de base u x v . Dans la suite j'appelerai élémentaires les lacets de Γ que l'on peut obtenir par cette construction.

Soient $\tilde{w} \in \Gamma$ et γ un lacet élémentaire de base $\tilde{w}$. Par le lemme 14, on obtient par la même démonstration que précédemment que l'isomorphisme $\tau_\gamma : D_w \longrightarrow D_w$ est l'identité. D'après [61] , le groupe fondamental de Γ en un point donné ψ est engendré par les conjugués (dans le groupoïde fondamental) des lacets élémentaires. Ainsi les isomorphismes cherchés sont canoniques.

4) Pour tout élément w de W , on peut donc définir le foncteur D_w comme n'importe lequel des foncteurs $D_{\tilde{w}}$, ou $\tilde{w}$ est une décomposition réduite de w .

Pour tout couple (w, v) d'éléments de W avec $w \geq u$ on définit ainsi un morphisme de foncteurs $\sigma_{u,w} : D_w \longrightarrow D_u$. Ces morphismes commutent à la multiplication, et l'on a $\sigma_{x,y} \circ \sigma_{y,z} = \sigma_{x,z}$ pour tout triplets d'éléments (x, y, z) de W avec $x \leq y \leq z$.

<u>Remarque:</u> Pour une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, A.Joseph a les foncteurs notés ici D^w [31] . Dans cet article sont également définis des dérivés par un moyen homologique non généralisable ici. Néanmoins, il résultera de théorèmes d'annulation cohomologique que ces définitions coïncident pour le cas des algèbres semi-simple. Ces foncteurs s'apparentent aux foncteurs de Zuckerman.

IV Variétés de Demazure.

Soit S un schéma. Dans ce paragraphe, les schémas considérés seront tous donnés sur la base S , sans mentions supplémentaires. Si X et Y sont deux schémas, j'appellerai donc morphisme entre les schémas X et Y des morphismes sur S , et je noterai $X \times Y$ le produit $X \times_S Y$.

Soit G un groupe. Dans la suite, je supposerai que tous les groupes considérés seront affines, i. e. que le morphisme $\pi : G \longrightarrow S$ est affine. Je noterai $\mu : G \times G \longrightarrow G$ la multiplication, $\varepsilon : S \longrightarrow G$ le morphisme unité, et $\omega : G \longrightarrow G$ le morphisme d'inversion.

Soit X un schéma. Je dis que X est un G-schéma à gauche, si l'on s'est donné une action de G à gauche, i. e. un morphisme $\sigma_X : G \times X \longrightarrow X$ satisfaisant aux conditions de compatibilités usuelles, à savoir :

$$\sigma_X\, o(Id_G \times \sigma_X) = \sigma_X\, o(\mu \times Id_X)$$
$$\sigma_X\, o(\varepsilon \times Id_X) = Id_X$$

Soient X , Y deux G-schémas, et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Je dis que φ est un G-morphisme, si l'action de G commute à φ , i. e. si l'on a $\sigma_Y\, o(Id_G \times \varphi) = \varphi \circ \sigma_X$. Le produit $X \times Y$ est naturellement un $G \times G$-schéma. Via l'application diagonale $\delta : G \longrightarrow G \times G$, $X \times Y$ est naturellement un G-schéma.

On a une notation analogue de G-schéma à droite. L'inversion ω permet de transformer naturellement tout G-schéma à gauche en un G-schéma à droite, et réciproquement. Ainsi toute définition concernant les G-schémas à gauche se transporte aux schémas à droite.

Soit X un G-schéma. On a une notion évidente d'ouverts et de fermés G-invariants, et plus généralement de parties localement fermées G-invariantes. Dans la suite on considérera G comme un G-schéma pour la multiplication à gauche.

Lemme 15 : Soit $\pi : G \longrightarrow S$ un groupe. Les ouverts G-invariants de G sont exactement les ouverts du type $\pi^{-1}(V)$, où V est un ouvert de S .

<u>Démonstration</u> : Comme on a supposé G affine, le morphisme $\varepsilon : S \longrightarrow G$ est une immersion fermée. Soit U un ouvert G-invariant de G. En confondant S à son image par ε, il est clair que l'on a $U = \pi^{-1}(U \cap S)$.

Soit X un G-schéma. Je dis que l'action de G sur X est libre (en m'écartant de la terminologie usuelle [48]), s'il existe un schéma Y, avec action triviale de G sur Y, tel que l'on ait un isomorphisme $X \simeq G \times Y$ de G-schéma. Je dis que l'action de G sur X est localement libre, s'il existe un recouvrement de X par des ouverts G-invariants U_α sur lequel l'action de G est libre.

Soit X, Y deux G-schémas, et $\pi : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme. Je dis que Y est le quotient de X par l'action de G si les deux conditions suivantes sont satisfaites

(a) G agit trivialement sur Y.

(b) Pour tout schéma Z sur lequel G agit trivialement, tout G-morphisme $\nu : X \longrightarrow Z$ factorise de manière unique à travers Y, i. e. il existe un unique morphisme $Y \longrightarrow Z$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, dash, "\pi"'] & & Z \arrow[dl, dash] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Etant solution d'un problème universel, le quotient de X par l'action est unique, dès qu'il existe. Je note le quotient, lorsqu'il existe, $G \backslash X$.

<u>Lemme 16</u> : Soit X un schéma avec une action localement libre de G. Le quotient $G\backslash X$ existe, et le morphisme $X \longrightarrow G\backslash X$ est affine. Si en outre le morphisme $\pi : G \longrightarrow S$ est plat, le morphisme $X \longrightarrow G\backslash X$ est plat. Soit U un ouvert G-invariant de X. L'action de G sur U est localement libre, et le morphisme naturel $G\backslash U \longrightarrow G\backslash X$ est une immersion ouverte.

Démonstration. Le lemme est évident lorsque G agit librement sur X, et se démontre dans le cas général par recollement.

Soit X un G-schéma. Soit X_{triv} le schéma X sur lequel G-opère trivialement. Soient $\sigma : G \times X \longrightarrow X$ le morphisme donnant l'action de G sur X, et $\delta : G \longrightarrow G \times G$ le morphisme diagonal. Je note $X_X : G \times X \longrightarrow G \times X$ le morphisme donné par la formule $X_X = (I_{d_G} \times \sigma) \circ (\delta \times Id_X)$. En termes naïfs, on a $X_X(g,x) = (g,gx)$. Il est clair que X_X est un isomorphisme de G-schéma $X_X : Gx\, X_{triv} \longrightarrow G \times X$.

Lemme 17 : Soient X, Y deux G-schémas. Si l'action de G sur X est libre (respectivement localement libre), G agit librement (respectivement localement librement) sur $X \times Y$.

Soient X un schéma sur lequel G opère à droite, et Y un schéma sur lequel G opère à gauche. Lorsque le quotient de $X \times Y$ par l'action de G existe, on note ce quotient $X \times^G Y$.

Soient X un G-schéma, $\sigma : G \times X \longrightarrow X$ le morphisme donnant l'action de G, $p : G \times X \longrightarrow X$ la projection sur le second facteur, $P : G \times G \times X \longrightarrow G \times X$ la projection sur les deux derniers facteurs. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Suivant Mumford, ([48], définition 1.6, page 30), on dit que $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module G-équivarant si l'on s'est donné un isomorphisme $\Phi : \sigma^* \mathcal{L} \longrightarrow p^*\mathcal{L}$, satisfaisant la condition suivante : le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
(Id_G \times \sigma)^*\sigma^*\mathcal{L} \arrow[r, "(Id_G \times \sigma)^*\Phi"] \arrow[d, dash] & (Id_G \times \sigma)^*p^*\mathcal{L} \arrow[d, dash] \\
(\mu \times Id_X)^*\sigma^*\mathcal{L} \arrow[d, "(\mu \times Id_X)^*\Phi"] & P^*\sigma^*\mathcal{L} \arrow[d, "P^*\Phi"] \\
(\mu \times Id_X)^*p^*\mathcal{L} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & P^*p^*\mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Cette condition est dite condition de cocycle.

Soient X , Y deux G-schémas, $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de G-schémas. et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module G-équivariant. De manière naturelle $\varphi^*\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module G-équivariant.

Soit X un G-schéma. On a une notion évidente de morphisme équivariant de $\mathcal{O}_X$-module équivariant. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module équivariant. Soit $\mathcal{L}_{triv}$ le $\mathcal{O}_{X_{triv}}$ -module $\mathcal{L}$ sur X_{triv} , avec action triviale de G .

Les morphismes p et σ peuvent être considérés comme des G-morphismes

$$p : G \times X_{triv} \longrightarrow X_{triv}$$
$$\sigma : G \times X_{triv} \longrightarrow X .$$

Par la constuction précédente les $\mathcal{O}_G \times X_{triv}$-modules $p^*\mathcal{L}_{triv}$ et $\sigma^*\mathcal{L}$ sont donc naturellement équivariants. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(Id_G \times \sigma)^*\sigma^*\mathcal{L} \arrow[r, "(Id \times \sigma)^*\Phi"] \arrow[d] & (Id_G \times \sigma^*p^*\mathcal{L} \arrow[d] \\
(\mu \times Id)^*\sigma^*\mathcal{L} & P^*\sigma^*\mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

est le diagramme qui fournit l'isomorphisme

$\sigma^*\Phi : (\mu \times Id)^*\sigma^*\mathcal{L} \longrightarrow P^*\sigma^*\mathcal{L}$, donnant la structure d'équivariance au module $\sigma^*\mathcal{L}$. L'isomorphisme naturel $(\mu \times Id_X)^*p^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} P^*p^*\mathcal{L}$ donne la structure d'équivariance au module $p^*\mathcal{L}_{triv}$. Donc la condition de cocycle, i. e. de commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\mu \times Id_X)^*\sigma^*\mathcal{L} \arrow[r, "\sigma^* \Phi"] \arrow[d] & P^*\sigma^*\mathcal{L} \arrow[d] \\
(\mu \times Id_X)^*p^*\mathcal{L}_{triv} \arrow[r, "\sim"] & P^*p^*\mathcal{L}_{triv}
\end{tikzcd}$$

peut s'exprimer en disant que Φ est un G-isomorphisme entre les modules équivariants $\sigma^*\mathcal{L}$ et $p^*\mathcal{L}_{\mathrm{triv}}$.

On peut considérer S comme un G-schéma, avec action triviale de G . Ainsi les morphismes $\pi : G \longrightarrow S$ et $\varepsilon : S \longrightarrow G_{\mathrm{triv}}$ sont des morphismes de G-schémas.

Lemme 18 : Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_G$-module équivariant. Il existe un isomorphisme canonique de G-modules $\mathcal{L} \longrightarrow \pi^*\varepsilon^*\mathcal{L}$.

Démonstration : Soit $p : G \times G \longrightarrow G$ la projection sur le second facteur. Soit $\Phi : \mu^*\mathcal{L} \longrightarrow p^*\mathcal{L}$ l'isomorphisme donnant la structure d'équivariance sur $\mathcal{L}$. On a vu que Φ est un isomorphisme de G-modules $\Phi : \mu^*\mathcal{L} \longrightarrow p^*\mathcal{L}_{\mathrm{triv}}$, sur le G-schéma $G \times G_{\mathrm{triv}}$. Soit $\eta = \mathrm{Id}_G \times \varepsilon$. On a ainsi un isomorphisme de G-modules $\eta^*\Phi : \eta^*\mu^*\mathcal{L} \longrightarrow \eta^*p^*\mathcal{L}_{\mathrm{triv}}$. Or on a $\mu \circ \eta = \mathrm{Id}_G$ et $p \circ \eta = \varepsilon \circ \pi$. On a ainsi un isomorphisme de $\mathcal{O}_G$-modules équivariants $\mathcal{L} \longrightarrow \pi^*\varepsilon^*\mathcal{L}_{\mathrm{triv}}$.

Afin d'étudier les images directes des faisceaux quasi-cohérents de modules, on rappelle deux résultats de Grothendieck :

Théorème A : Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé quasi-compact de schémas. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi cohérent sur X . Pour tout entier $q \geq 0$, $R^q f_* \mathcal{F}$ est quasi-cohérent

Soit :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X' \arrow[r] & Y'
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de schémas. On dit que ce diagramme est cartésien si le morphisme naturel $X \longrightarrow X' \times_{Y'} Y$ est un isomorphisme.

Théorème B Soit :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "v"] & Y' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif cartésien de schémas. On suppose f quasi-compact séparé, et v plat. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module quasi cohérent. Pour tout entier $q \geq 0$ le morphisme naturel $v^* R^q f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^q g_* u^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Les références de ces théorèmes sont les suivantes : [23] EGA III, proposition 1.4.10 (page 91) pour le théorème A, proposition 1.4.15 (page 92) pour le théorème B. Il faut noter la différence de terminologie (un préschéma dans EGA est actuellement un schéma), et que dans le théorème B l'hypothèse que f est de type fini est inutile (cf. [23, page 89, (Err III, 25)). Seule l'hypothèse de quasi compacité est nécessaire.

Dans la suite de ce paragraphe, tous les groupes considérés seront supposés plat sur S .

Lemme 19 : Soient X , Y deux G-schémas, et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme quasi-compact et séparé. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi cohérent G-équivariant. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $R^q\varphi_*\mathcal{F}$ est naturellement G-équivariant.

Démonstration : Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "P_X"] \arrow[d, "Id_G \times \varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times Y \arrow[r, "P_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, et P_Y est plat. Comme les factorisations naturelles χ_X et χ_Y sont des isomorphismes de diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\chi_X"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G \times \varphi"'] & G \times X \arrow[d, "\mathrm{Id}_G \times \varphi"] \\ G \times Y \arrow[r, "\chi_Y"] & G \times Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, et χ_Y est plat. Donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G \times \varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times Y \arrow[r, "\sigma_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien, et σ_Y est plat. Soit $\Phi : \sigma_{\times}^{*}\mathcal{F} \longrightarrow p_{\times}^{*}\mathcal{F}$ l'isomorphisme donnant la structure d'équivariance de $\mathcal{F}$. Pour tout entier $q \geq 0$, on a donc un isomorphisme naturel $R^q(\mathrm{Id}_G \times \varphi)_* \Phi : R^q(\mathrm{Id}_G \times \varphi)_* \sigma_X^* \mathcal{F} \longrightarrow R^q(\mathrm{Id}_G \times \varphi)_* p_X^* \mathcal{F}$. Le théorème B fournit donc un isomorphisme $\sigma_Y^* R^q \varphi_* \mathcal{F} \longrightarrow p_Y^* R^q \varphi_* \mathcal{F}$. On vérifie la condition de cocycle de la même façon. Ainsi $R^q\varphi_*\mathcal{F}$ est naturellement équivariant.

Soit X un schéma, sur lequel l'action de G est triviale. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module équivariant. Soit Φ $\sigma^*\mathcal{L} \longrightarrow p^*\mathcal{L}$ l'isomorphisme donnant la structure de G-module. Soit U un ouvert de X . Les morphismes naturels $\mathcal{L}(U) \longrightarrow p^{-1}\mathcal{L}(p^{-1}(U)) \longrightarrow p^*\mathcal{L}(p^{-1}(U))$, $\mathcal{L}(U) \longrightarrow \sigma^{-1}(U)) \longrightarrow \sigma^*\mathcal{L}(\sigma^{-1}(U))$ et l'égalité $\sigma^{-1}(U) = p^{-1}(U)$ induisent un diagramme

$$\begin{tikzcd} & p^*\mathcal{L}(p^{-1}U) \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathcal{L}(U) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & p^*\mathcal{L}(p^{-1}U) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Je note $\mathcal{L}(U)^G$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(U)$ pour lesquels le diagramme (*) est commutatif. Le préfaisceau $U \longrightarrow \mathcal{L}(U)^G$ est en fait un faisceau, que je note $\mathcal{L}^G$. Il est clair que $\mathcal{L}^G$ est même un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{L}$. Soit Y un G-schéma, $U : Y \longrightarrow X$ un G morphisme quasi-compact et séparé. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi cohérent de $\mathcal{O}_Y$-module, G-équivariant. Je pose $\nu_+\mathcal{F} = (\nu_*\mathcal{F})^G$.

Lemme 20 : Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_G$-module quasi-cohérent équivariant. On a un isomorphisme naturel $\varepsilon^*\mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \pi_+\mathcal{F}$.

Démonstration : Par le lemme 18, on a un isomorphisme de G-modules $\mathcal{F} \simeq \pi^*\varepsilon^*\mathcal{F}_{triv}$, d'où un isomorphisme $\pi_X F \simeq \pi_*\pi^*\varepsilon^*\mathcal{F}_{triv}$, d'où un G-morphisme naturel de $\mathcal{O}_S$-modules équivariants $\varepsilon^*\mathcal{F}_{triv} \longrightarrow \pi_*\mathcal{F}$. L'action de G sur le $\mathcal{O}_S$-module $\varepsilon^*\mathcal{F}_{triv}$ est triviale. On obtient donc un morphisme naturel $\varepsilon^*\mathcal{F} \longrightarrow \pi_+\mathcal{F}$. Les ouverts affines de S formant une base de la topologie de S , il suffit de vérifier que pour tout ouvert affine U l'application $\varepsilon^*\mathcal{F}(U) \longrightarrow \pi_+\mathcal{F}(U)$ est un isomorphisme. Je pose $R = \Gamma(U,\mathcal{O}_S)$, $R[G] = \Gamma(V,\mathcal{O}_G)$ où $V = \pi^{-1}(U)$.

Je noterai $\varepsilon^\#$, $\mu^\#$, $p^\#$ les applications (entre divers groupes de sections globales) induites par les morphismes ε , μ et p . Je vais d'abord prouver l'injectivité de l'application $\varepsilon^*\mathcal{F}(U) \longrightarrow \pi_+\mathcal{F}(U)$. Pour cela il suffit de prouver que $\varepsilon^*\mathcal{F}(U) \longrightarrow \pi_*\mathcal{F}(U)$ est injective. Je pose $M = \varepsilon^*\mathcal{F}(U)$. L'application $\varepsilon^*\mathcal{F}(U) \longrightarrow \pi_*\mathcal{F}(U)$ est l'application $M \longrightarrow R[G]\otimes_R M$. Or il est clair que comme R-module, on a $R[G] = R \oplus \operatorname{Ker} \varepsilon^\#$. Donc l'application $M \longrightarrow R[G] \otimes_R M$ est injective et par la suite $\varepsilon^*\mathcal{F}(U) \longrightarrow \pi_+\mathcal{F}U)$ est injective.

Le groupe $\pi_+\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des éléments u de $R[G] \otimes_R M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & R[G] \otimes_R R[G] \otimes_R M \arrow[dd, "\Phi"] \\
R[G] \otimes_R M \arrow[ur, "\mu^\#"] \arrow[dr, "p^\#"'] & \\
 & R[G] \otimes_R R[G] \otimes_R M
\end{tikzcd}$$

Soit $u = \sum_\alpha \varphi_\alpha \otimes m_\alpha (\varphi_\alpha \in R[G]$, $m_\alpha \in M)$ un élément de $R[G] \otimes_R M$. Alors u appartient à $\pi_+\mathcal{F}(U)$ si et seulement si on a l'égalité suivante dans $R[G]\otimes_R R[G]\otimes_R M : \sum_\alpha \mu^\#(f_\alpha)\otimes m_\alpha = \sum_\alpha 1\otimes f_\alpha\otimes m_\alpha$. On a $\mu\ o(Id_G\times\varepsilon) = Id_G$.

Pour tout $u\in\pi_+\mathcal{F}(U)$ l'identité : $(Id_G\times\varepsilon)^\#\mu^\#(u) = u$ implique :

$$\begin{aligned} u &= \sum_\alpha (Id_G\times\varepsilon)^\#\mu^\#(f_\alpha)\otimes m_\alpha \\ &= \sum_\alpha (Id_G\times\varepsilon)^\#\ 1\otimes f_\alpha\otimes m_\alpha \\ &= \sum_\alpha 1\otimes\varepsilon^\# f_\alpha\otimes m_\alpha \end{aligned}$$

et on a donc $u\in M = \varepsilon^*\mathcal{F}(U)$.

Ainsi le morphisme naturel $\varepsilon^*\mathcal{F}\longrightarrow\pi_+\mathcal{F}$ est un isomorphisme.

Soit X un schéma. On note $\underline{\underline{\text{Q coh}}}\ (X)$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérent sur X . Si X est un G-schéma, on note $\underline{\underline{\text{Q coh}}}_G(X)$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents et équivariants .Comme G est supposé plat sur S , la catégorie $\underline{\underline{\text{Q coh}}}_G(X)$ est abélienne.

<u>Lemme 21</u> : Soit X un schéma sur lequel le groupe G agit localement librement. Soit $\nu : X\longrightarrow G\setminus X$ le morphisme de passage au quotient. Soit $\mathcal{F}\in\underline{\underline{\text{Q coh}}}_G(X)$. Alors $\nu_+\mathcal{F}$ est quasi-cohérent. En outre si $\mathcal{F}$ est plat sur X (respectivement localement de type fini) alors $\mathcal{F}$ est plat sur $G\setminus X$ (respectivement localement de type fini).

Le foncteur $\nu_+ : \underline{\underline{\text{Q coh}}}_G(X)\longrightarrow\underline{\underline{\text{Q coh}}}(G\setminus X)$ est covariant et exact, et est une équivalence de catégorie dont l'inverse est ν^*.

<u>Démonstration</u> : Les assertions que l'on cherche à montrer sont locales sur $G\setminus X$. Quitte à changer de base, on peut donc supposer que l'on a $X = G$, de sorte que l'on a $G\setminus X = S$, et $\nu = \pi$.

Le foncteur ε^* conserve la quasi-cohérence, la platitude et la finitude, et est exact à droite. Par le lemme précédent on a $\pi_+ = \varepsilon^*$. Comme par construction π_+ est exact à gauche. On a aussi $\pi_+\pi^* = \mathrm{id}_{\underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}(S)}$, $\pi^*\pi_+ = \mathrm{id}_{\underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(G)}$, ce qui achève la preuve du lemme.

Lemme 22 : Soient X, Y deux schémas sur lesquels G agit localement librement. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & Y \arrow[d, "\nu"] \\ G \backslash X \arrow[r, "g"] & G \backslash Y \end{tikzcd}$$

(a) Soit $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(Y)$. On a un isomorphisme naturel

$$\mu_+ f^* \mathcal{F} \simeq g^* \nu_+ \mathcal{F} .$$

(b) On suppose f quasi-compact et séparé. Soit $\mathcal{G} \in \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(X)$. Alors pour tout entier $q \geq 0$ on a un isomorphisme naturel

$$\nu_+ R^q f_* \mathcal{G} \simeq R^q g_* \mu_+ \mathcal{F} .$$

Démonstration : Les assertions (a) et (b) sont locales sur $G \backslash Y$. Donc on peut supposer que l'action de G sur Y est libre. On choisit un isomorphisme de G-schémas $Y \simeq G \times (G\backslash Y)$. On a ainsi construit une section φ du morphisme ν. On pose $X' = f^{-1}(\varphi(G\backslash Y))$. Il est clair que l'on a $X = G \times X'$ comme G-schéma. En particulier μ induit un isomorphisme : $X' \xrightarrow{\sim} G\backslash X$. Ainsi la section φ détermine canoniquement une section $\chi : G\backslash X \longrightarrow X$ du morphisme μ.

On va montrer d'abord le point (a); Par le lemme 20, on a des isomorphismes $\nu_+\mathcal{F} \simeq \varphi^*\mathcal{F}$, et $\mu_+ f^*\mathcal{F} \simeq \chi^* f^* \mathcal{F}$. On a $f \circ \chi = \varphi \circ g$. on obtient ainsi un isomorphisme $\mu_+ f^* \mathcal{F} \simeq g^* \nu_+ \mathcal{F}$. Il est clair que cet isomorphisme ne dépend pas en fait du choix de la section φ. Ainsi le point (a) est montré.

On va montrer le point (b). D'après ce qui précède, il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
G \backslash X \arrow[r] & G \backslash Y
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Comme le morphisme $\pi : G \longrightarrow S$ est supposé plat et affine le morphisme $\nu : Y \longrightarrow G\backslash Y$ est plat et quasi-compact. Comme ν est scindé, ν est donc en outre fidèlement plat. Donc le morphisme g est quasi-compact ([8], EGA IV, page 28, corollaire 2.6.4) et séparé (ibid, page 29), proposition 2.7.1). Par le théorème B , on a donc un isomorphisme $\varphi^* R^q f_* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} R^q g_* \chi^* \mathcal{G}$ pour tout entier $q \geq 0$. On obtient ainsi un isomorphisme $\nu_+ R^q f_* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} R^q g_* \mu_+ \mathcal{G}$. Il est clair que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de la section φ . Ceci montre le point (b) .

Soit X un schéma sur lequel G agit à droite localement librement. Soit Y un G-schéma (à gauche). Par le lemme 16, le quotient $X \times^G Y$ existe. Soit $\nu : X \times Y \longrightarrow X \times^G Y$ le morphisme de quotient, et $p : X \times Y \longrightarrow Y$ la projection sur le second facteur. Soit $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(X)$. On a donc $p^*\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(X \times Y)$. Je pose $\mathcal{D}_X \mathcal{F} = \nu_+ p^* \mathcal{F}$, de sorte que l'on a ainsi défini un foncteur $\mathcal{D}_X : \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(Y) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}(X \times^G Y)$.

<u>Lemme 23</u> : Soient X , X' deux schémas à droite sur lesquels G agit localement librement, Y , Y' deux G-schémas à gauche.

1) Le foncteur $\mathcal{D}_X : \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(Y) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}(X \times^G Y)$ est covariant exact à droite. Soit $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(Y)$. Si $\mathcal{F}$ est plat sur Y (respectivement localement de type fini), $\mathcal{D}_X \mathcal{F}$ est plat sur $X \times^G Y$ (respectivement localement de type fini). En outre si X est plat sur S , $\mathcal{D}_X$ est exact.

2) Soient $f : X \longrightarrow X'$ un G-morphisme et $\varphi : X \times^G Y \longrightarrow X' \times^G Y$ le morphisme induit. Pour tout $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Q\ coh}}}_G(Y)$, on a un isomorphisme naturel $\mathcal{D}_X \mathcal{F} \simeq \varphi^* \mathcal{D}_{X'} \mathcal{F}$.

3) Soient $g : Y \longrightarrow Y'$ un G-morphisme, et $\varphi : X \times^G Y \longrightarrow X \times^G Y'$ le morphisme induit. On suppose g quasi-compact et séparé, et X plat sur S. Soit $\mathcal{G} \in \underline{\underline{Q\ coh}}_G(Y)$. Pour tout entier $q \geq 0$, on a un isomorphisme naturel $\mathcal{D}_X\ R^q g_* \mathcal{G} \simeq R^q \varphi_*\ \mathcal{D}_X\ \mathcal{G}$.

Démonstration : Le point 1 résulte du lemme 21, les points 2 et 3 résultent (respectivement) des points 1 et 2 du lemme précédent.

Remarque : Soient X, Y deux schémas sur lesquels G opère localement librement. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme. On a vu au cours de la démonstration du lemme, que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[d, "\nu"] \\
G \backslash X \arrow[r, "\varphi"] & G \backslash Y
\end{tikzcd}$$

est cartésien, et que le morphisme $Y \longrightarrow G \backslash Y$ est affine (donc quasi compact) et fidèlement plat. Il en résulte donc ([8] EGA IV, §2, p. 28 et 29) que si f est une immersion fermée (respectivement universellement fermée, séparée...) il en est de même pour φ. Par construction, on a également $\sigma_{G \backslash X} = \mu_+ \sigma_X$.

Dans la suite, je vais construire les variétés de Demazure, qui seront en fait des schémas sur Spec($\mathbf{Z}$). Je pose donc $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$.

Soit $i \in I$. Soit $U = F_i \times B$ et $V = E_i s_i \times B$. Par le lemme 8, U et V s'identifient à deux ouverts de P_i. Soit $T = U \cap V$. Les ouverts U, V et T sont invariants par l'action à droite de B, et B agit librement sur chacun des ces ouverts. Comme B-schémas, on a des isomorphismes

$$U \simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t]) \times B$$
$$V \simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t]) \times B$$
$$T \simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[t,t^{-1}]) \times B$$

où t désigne une indéterminée. Soit $w \in \tilde{W}$, $n = \ell(w)$. On pose $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$. On peut donc définir les schémas

$$E(w) = P_{i_1} \times^B \dots \times^B P_{i_n} \ , \ E(1) = B$$

$$D(w) = P_{i_1} \times^B \dots . \times^B P_{i_n}/B \ , \ D(1) = B/B = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$$

de sorte que l'on a $E(w)/B = D(w)$. En fait ces définitions n'ont de sens que lorsque l'on a vérifié que les schémas obtenus ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on a effectué les opérations de quotients, ce qui est évident car $P_{i_1} \times \dots \times P_{i_n}$ est un schéma sur lequel B^n agit de manière localement libre (B agissant n-1 fois "entre" deux facteurs consécutifs, et une fois à droite).

Ces schémas sont reliés entre eux par deux types de morphismes :

1) Soit $w = s_{i_n} \dots s_{i_1}$ un élément de $\tilde{W}$. Soit k un entier, $0 \leq k \leq n$. Soit $\varphi : \{1,\dots,k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ une application strictement croissante. On suppose que $v = s_{i_{\varphi(k)}} \dots s_{i_{\varphi(1)}}$ est réduit. Alors φ détermine des immersions fermées canoniques $j_\varphi : E(v) \longrightarrow E(w)$ et $i_\varphi : D(v) \longrightarrow D(w)$, qui commutent à l'action de B , construites de la manière suivante. On peut supposer $n \geq 1$. Soit $u = s_{i_{n-1}} \dots s_{i_1}$. L'immersion fermée $B \longrightarrow P_i$ déterminent des immersions fermées $B \times^B D(u) \longrightarrow P_{i_n} \times^B D(u)$ et $B \times^B E(u) \longrightarrow P_{i_n} \times^B E(u)$, i. e. des immersions fermées $D(u) \longrightarrow D(w)$ et $E(u) \longrightarrow E(w)$. Lorsque $k = 0$, ou $\varphi(k) \neq n$, on peut supposer par récurrence sur $\ell(w)$ avoir défini les immersions fermées $j_\varphi : E(v) \longrightarrow E(u)$ et $i_\varphi : D(v) \longrightarrow D(u)$ ce qui fournit les immersions cherchées. Si $\varphi(k) = n$, on pose $v' = s_{i_{\varphi(k-1)}} \dots s_{i_{\varphi(1)}}$, et soit $\varphi' : \{1,\dots,k-1\} \longrightarrow \{1,\dots,n-1\}$ la restriction de φ . On suppose de même construire les immersions fermées $j_{\varphi'}$ et $i_{\varphi'}$. Ceci détermine des immersions fermées

$$i_\varphi : P_{i_n} \times^B D(v') \longrightarrow P_{i_n} \times^B D(u)$$

$$j_\varphi : P_{i_n} \times^B E(v') \longrightarrow P_{i_n} \times^B E(u)$$

On notera que ces immersions dépendent de φ . Dans le cas particulier où l'on choisit $v \in \tilde{W}$, $v \leq w$ et $\ell(v) = \ell(w) - 1$, il existe une unique application φ comme précédemment, telle que l'on ait $v = s_{i_{\varphi(1)}}$. Ainsi il existe une immersion canonique $D(v) \longrightarrow D(w)$ et $E(v) \longrightarrow E(w)$.

2) Soit $w = s_{i_n} \dots s_{i_1}$ un élément de $\tilde{W}$. Soit k un entier, $1 \leq k \leq n$. On pose $u = s_{i_n} \dots s_{i_{n-k}}$ $v = s_{i_{n-k-1}} \dots s_{i_1}$ de sorte que l'on a $w = uv$. Le morphisme naturel $D(v) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ détermine un morphisme $P_{i_n} \times^B \dots \times P_{i_{n-k}} \times^B D(v) \longrightarrow P_{i_n} \times^B \dots \times^B P_{i_{n-k}}/B$ i. e. un morphisme $D(w) \longrightarrow D(u)$. Soit $\varphi : \{1,\dots,n-k\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ l'addition par k . Il est clair que $D(w) \longrightarrow D(u)$ est un fibré localement trivial de fibre $D(v)$. En outre $i_\varphi = D(v) \longrightarrow D(w)$ est une section de ce fibré. Les deux cas particuliers utilisés seront les suivants :

a) $u = s_{i_n} \dots s_{i_2}$, de sorte que le fibré $D(v) \longrightarrow D(u)$ est un fibré localement trivial de fibre P_{i_1}/B isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1$.

b) $u = s_{i_n}$, de sorte que le fibré $D(w) \longrightarrow D(s_{i_n})$ est fibré localement trivial de base P_{i_n}/B isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1$.

Par récurrence, on voit que les schémas de Demazure $D(w)$ sont obtenus par des fibrations successives en droite $\mathbb{P}^1$. On obtient ainsi :

<u>Lemme 24</u> : Soit $w \in \tilde{W}$. Le schéma de Demazure $D(w)$ est propre et plat sur $\mathbb{Z}$. Pour tout corps F , $D(w)(F) = D(w) \times \mathrm{Spec}(F)$ est une variété complète lisse (irréductible) de dimension $\ell(w)$.

Les constructions de ce paragraphe s'applique au groupe $G = B$. Pour chaque $w \in \tilde{W}$, $E(w)$ est un B-schéma à droite. On a ainsi un foncteur $\mathcal{D}_{E(w)}$ que je noterai plus simplement $\mathcal{D}_w$.

On appelle B-module un élément de $\underline{\underline{\text{Q coh}}}_B(\text{Spec } \mathbb{Z})$, catégorie que je noterai plus brièvement Mod(B). Tout élément $\lambda \in P$ détermine un élément de Mod(B) (qui est un $\mathbb{Z}$-module de rang un) que je note encore λ . En termes naïfs, le sous-groupe distingué N de B agit de manière triviale, et l'action est déterminée par l'isomorphe $H = \text{Hom}(P, G_m)$.

Soit $w \in \tilde{W}$. Soit Y un B-schéma. L'isomorphisme naturel $B \times (E(w) \times^B Y) \simeq (B \times E(w)) \times^B Y$ montre que $E(w) \times^B Y$ est naturellement un B-schéma, et que le morphisme $E(w) \times Y \longrightarrow E(w) \times^B Y$ est un B-morphisme. Soient $\sigma : B \times (E(w) \times Y) \longrightarrow E(w) \times Y$, $\sigma' : B \times (E(w) \times^B Y) \longrightarrow E(w) \times^B Y$ les morphismes donnant l'action, $p : B \times (E(w) \times Y) \longrightarrow E(w) \times Y$, $p' : B \times (E(w) \times^B Y) \longrightarrow E(w) \times^B Y$, et $\pi : E(w) \times Y \longrightarrow Y$ les projections sur le second facteur. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \times E(w) \times Y \arrow[r, shift left, "\sigma{,}p"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\mu"'] & E(w) \times Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\nu"'] & Y . \\
B \times E(w) \times^B Y \arrow[r, shift left, "\sigma'{,}p'"] \arrow[r, shift right] & E(w) \times^B Y &
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{L} \in \underline{\underline{\text{Q coh}}}_B(Y)$. L'isomorphisme $\pi \circ \sigma = \pi \circ p$ donne un isomorphisme $\sigma^*(\pi^*\mathcal{L}) \simeq p^*(\pi^*\mathcal{L})$, ce qui muni $\pi^*\mathcal{L}$ d'une (seconde) structure d'équivariance, relative à l'action à gauche de B . Par le lemme 22, on a des isomorphismes naturels :

$$\mu_+ \, \sigma^*(\pi^*\mathcal{L}) \simeq \sigma'^* \, \nu_+(\pi^*\mathcal{L})$$

$$\mu_+ \, p^*(\pi^*\mathcal{L}) \simeq p'^* \, \nu_+(\pi^*\mathcal{L})$$

d'où un isomorphisme naturel $\sigma'^* \, \mathcal{D}_w \, \mathcal{L} \simeq p'^* \, \mathcal{D}_w \, \mathcal{L}$. On vérifie de même que cet isomorphisme satisfait la condition de cocyle. Ainsi $\mathcal{D}_w \, \mathcal{L}$ est naturellement B-équivariant. En particulier, si $w = s_{i_n} \dots s_{i_1}$, on en tire un isomorphisme de foncteur $\mathcal{D}_{s_{i_n}} \circ \dots \circ \mathcal{D}_{s_{i_1}} \simeq \mathcal{D}_w$.

Lorsque $M \in \mathrm{Mod}(B)$ et $Y = \mathrm{spec}\ \mathbf{Z}$, on posera $\mathcal{L}_w(M) = \mathcal{D}_w(M)$ le faisceau sur $D(w)$ obtenu. On pose aussi $\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{D(w)}$.

<u>Lemme 25</u> : Soit $M \in \mathrm{Mod}(B)$. On suppose que M est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini r . Alors $\mathcal{L}_w(M)$ est localement libre de rang r . En outre si $v \in \tilde{W}$, $v \leq w$ et $\ell(v) + 1 = \ell(w)$, la restriction de $\mathcal{L}_w(M)$ a $D(v)$ est $\mathcal{L}_v(M)$.

<u>Démonstration</u> : Par le lemme 23, $\mathcal{L}_w(M)$ est un $\mathcal{O}_w$-module quasi-cohérent, plat, localement de type fini. Donc $\mathcal{L}_w(M)$ est localement libre. Soit $i : E(1) \longrightarrow E(w)$ l'immersion fermée canonique, et $i' : \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \longrightarrow D(w)$ l'immersion fermée correspondante. Comme $D(w)$ est irréductible, $\mathcal{L}_w(m)$ est de rang constant. Or par le lemme, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{D}_1 M \simeq i'^* \mathcal{D}_w(M)$. Comme on a $\mathcal{D}_1\ M = M$, le rang du faisceau localement libre $\mathcal{L}_w(M)$ est r . Le second point du lemme est aussi une application du lemme 23.

<u>Remarque</u> Il est nécessaire de construire les schémas de Demazure sur $\mathbf{Z}$ pour pouvoir appliquer un résultat de semi-continuité. Plus précisément, on utilisera le fait suivant. Soit R un anneau de Dedekind. Pour tout couple de R-modules M , N , on pose $M * N = \mathrm{Tor}_1^R(M,N)$.

<u>Lemme 26</u> : Soit $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ un schéma quasi-compact et séparé sur le spectre d'un anneau de Dedekind R . Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X , plat sur R . Soient F une R-algèbre, $Y = \mathrm{Spec}(F) \times_{\mathrm{Spec}(R)} X$, et $j : Y \longrightarrow X$ le morphisme canonique. On a pour tout entier $q \geq 0$ des suites exactes naturelles

$$0 \longrightarrow F \otimes H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(Y,j^*\mathcal{F}) \longrightarrow F * H^{q+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0 .$$

Ce lemme est bien connu. Comme ce lemme est un cas particulier de théorèmes difficiles de Grothendieck, j'en indique une démonstration (cf. [23] EGA III, §6).

Soit U un recouvrement affine fini de X . Soit $U' = j^{-1}(U)$. Alors U' est un recouvrement affine de Y . Comme X et Y sont séparés on a

$$H^*(X,\mathcal{F}) \simeq h^*(\mathcal{C}^\cdot(U,\mathcal{F}))$$
$$H^*(Y,j^*\mathcal{F}) \simeq h^*(\mathcal{C}^\cdot(U',j^*\mathcal{F}))$$

où $\mathcal{C}^\cdot(\ ,\ )$ désigne le complexe de Cech. On a $\mathcal{C}^\cdot(U',j^*\mathcal{F}) \simeq F \otimes C^\cdot(U,\mathcal{F})$, et le complexe $C^\cdot(U,\mathcal{F})$ est plat sur R . Le lemme 26 résulte donc de la formule de Kunneth.

Ce lemme est un résultat de semi-continuité pour la raison suivante. Soient $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ un schéma propre sur un anneau de Dedekind, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X , plat sur R . Soit K le corps des fractions de R . Pour toute R-algèbre F , on note $\mathcal{F}(F)$ la restriction de $\mathcal{F}$ à $X(F) = X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(F)$. On a alors

1) Pour tout idéal maximal m de R les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F}(R/m))$ et $\chi(\mathcal{F}(K))$ sont égales.

2) Pour presque tout idéal maximal, le morphisme naturel $R/m \otimes H^*(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^*(X(R/m)\ ,\ \mathcal{F}(R/m))$ est un isomorphisme.

Ceci résulte du lemme précédent, et du fait que $H^*(X,\mathcal{F})$ est un R-module de type fini ([8] EGA III, §3).

Soit S un schéma. Pour tout $w \in \tilde{W}$, on peut définir le schema de Demazure $D(w)_{(S)}$ par la formule $D(w)_{(S)} = S \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})} D(w)$. Les cas que l'on considérera dans la suite correspondent aux cas où S est le spectre d'un corps, où d'un anneau d'entiers Soit $M \in \mathrm{Mod}(B)$. Soit $j : D(w)_{(S)} \longrightarrow D(w)$ le morphisme naturel. On pose $\mathcal{L}_w(M)_S = j^*\mathcal{L}_w(M)$. On a $D(w)_{(S)} = E(w) \times^B S$, donc par le lemme 23 on a aussi $\mathcal{L}_w(M)_S = \mathcal{D}_w(\pi^*M)$, où $\pi : S \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ est le morphisme naturel. Afin d'éviter d'alourdir les notations, je poserai

$$H_S^*(D(w)\ ,\ \mathcal{L}_w(M)) = H^*(D(w)_{(S)}\ ,\ \mathcal{L}_w(M)_S)\ .$$

Lorsque S sera le spectre d'un anneau R , je noterai aussi $D(w)(R)$, $L_w(M)(R)$, $H_R^*(D(w)\ ,\ \mathcal{L}_w(M))$ les objets considérés. Dans les chapitres où le schéma S sera convenu, j'oublierai d'indiquer S , et je noterai par exemple $D(w)$ le schéma $D(w)(S)$. En revanche, dans les chapitres où des confusions sont possibles, je noterai $D(w)(\mathbb{Z})$, $\mathcal{L}_w(M)(\mathbb{Z})$, $H_{\mathbb{Z}}^*(D(w)\ ,\ L_w(M))$ les objets absolus.

Je vais établir un premier lien entre les variétés de Demazure et le foncteur de Joseph.

Lemme 27: Soit K un corps de caractéristique 0 . Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. On a un morphisme naturel $H_K^0(D(w)\ ,\ \mathcal{L}_w(M)) \simeq D_w M$.

Démonstration: Je vais prouver le lemme par récurrence sur $\ell(w)$. On peut supposer $\ell(w) \geq 1$. On peut poser $w = s_i v$ pour un certain $i \in I$. Soit $\pi : D(w) \longrightarrow P_i/B$ le morphisme naturel construit plus haut. On a $\mathcal{L}_w(M) = \mathcal{D}_{P_i}\mathcal{L}_v(M)$. On a $H_K^0(D(w)\ ,\ \mathcal{L}_w(M) = H_K^0(P_i/B\ ,\ \pi_*\mathcal{D}_{P_i}\mathcal{L}_v(M)$. Par le lemme 23, on a $\pi_*\mathcal{D}_{P_i}\mathcal{L}_v(M) = \mathcal{D}_{P_i}\pi_*\mathcal{L}_v(M)$. Le morphisme π envoie $D(v)$ sur $\mathrm{Spec}(K)$. On a $\pi_*\mathcal{L}_v(M) = H_K^0(D(v)\ ,\ \mathcal{L}_v(M))$. On a donc

$$H_K^0(D(w)\ ,\ \mathcal{L}_w(M)) = H_K^0(P_i/B\ ,\ \mathcal{D}_{P_i}(H_K^0(D(v)\ ,\ \mathcal{L}_v(M))))\ .$$

Il est clair que pour tout $N \in \mathcal{C}(\underline{b})$, on a $H^0(P_i/B\ ,\ \mathcal{D}_{P_i}N) = D_{s_i}N$. Ceci montre le lemme. En particulier, ceci montre que $H^0(P_i/B\ ,\ \mathcal{L}_w(M))$ ne dépend en fait que de la valeur de w dans W . Ce fait est lié au fait que l'on va construire une variété normale (de Schubert) $\tilde{S}_w$, ne dépendant que de la valeur de w dans W , un morphisme $\pi : D(w) \longrightarrow \tilde{S}_w$ propre et birationnel, un foncteur $\tilde{\mathcal{L}}_w : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Qcoh}}(\tilde{S}_w)$ tel que pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ soit localement libre, et $\pi_*\tilde{\mathcal{L}}_w(M) = \mathcal{L}_w(M)$. On généralisera le lemme précédent aux foncteurs dérivés (chapitre XI, proposition 3; cf. aussi [41]), en démontrant que les variétés de Schubert sont à singularités rationnelles.

Je fixe J une partie (non vide) de $\{1,\dots,N\}$ de sorte que la sous-matrice de Cartan $A_J = (a_{i,j})_{i,j\in J}$ soit de type fini (cf. [13]). Dans la suite je serai plus particulièrement intéressé par le cas où J est de cardinal 2 ou 3. Soit $W(J)$ le sous-groupe de W engendré par les réflexions s_j , $j \in J$. Le groupe $W(J)$ est le groupe de Weyl d'une algèbre semi-simple et il est fini.

On suppose donnés 6 éléments $u,v,w_1,w_2,\mathfrak{w}_1,\mathfrak{w}_2$ dans $\tilde{W}$ tels que l'on ait:

a) $w_1 = u\,\mathfrak{w}_1\,v$

b) $w_2 = u\,\mathfrak{w}_2\,v$

c) $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ sont deux décompositions réduites de l'élément de longueur maximale de $W(J)$.

Soit $\underline{a}_J$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par l'espace vectoriel $\underline{h}$ et les éléments e_j , f_j , $j \in J$. La sous-algèbre de Lie $\underline{a}_J$ est de dimension finie et réductive. On pose $\underline{p}_J = \underline{a}_J + \underline{b}$. Soit P_J le groupe associé à l'algèbre de Lie $\underline{p}_J$ (cf. § I ; il est trivial que $\underline{p}_J$ satisfait $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$) . Comme dans le cas où J est réduit à un élément, B opère localement librement sur P_J et par réduction à l'étude de $\underline{a}_J$, il vient que P_J/B est propre sur $\mathbb{Z}$ et recouvert par des ouverts isomorphes à $\mathbb{A}^{\ell}_{\mathbb{Z}}$ (où $\ell = 1/2 \dim(\underline{a}_J/\underline{h}))$.

Je définis des schémas E et D sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ par les formules suivantes (qui ont clairement un sens):

$$E = E(u) \times^B P_J \times^B E(v)$$

$$D = E(u) \times^B P_J \times^B E(v)/B \ .$$

On a des morphismes naturels $E(\mathfrak{w}_i) \longrightarrow P_J$, pour $i = 1,2$, ce qui induit des morphismes naturels

$$\mu_i : E(w_i) \longrightarrow E$$

$$\pi_i : D(w_i) \longrightarrow D \qquad (i = 1,2) \ .$$

Soit S un schéma. Comme précédemment, je note D_S et E_S les schémas obtenus par l'extension de la base $S \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Il est clair que E est propre et plat sur $\mathbb{Z}$.

Lemme 28:

1) Soit $\mathcal{M} \in \underline{\mathrm{Qcoh}}_B(S)$. Alors on a des isomorphismes naturels, pour $i = 1,2$:

$$(\pi_i)_* \mathcal{L}_{w_i}(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathcal{D}_E(\mathcal{M}) .$$

2) On suppose S noethérien séparé et normal. Soit $\mathcal{M} \in \underline{\mathrm{Qcoh}}_B(S)$, tel que $\mathcal{M}$ soit réunion de ses sous-modules B-équivariants localement libres et de type fini. Alors les morphismes

$$(\pi_i)_* \mathcal{L}_{w_i}(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathcal{D}_E(\mathcal{M})$$

sont des isomorphismes, pour $i = 1,2$.

Démonstration:

1) Je montre d'abord le point 1. Par définition, on a $\mathcal{L}_{w_i} = \mathcal{D}_{E(w_i)}$. Par le lemme 23.2, on a un isomorphisme naturel

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{L}_{w_i}(\mathcal{M}) \simeq \pi_i^* \mathcal{D}_E(\mathcal{M}) .$$

Par adjonction, on obtient un morphisme naturel $\mathcal{D}_E(\mathcal{M}) \longrightarrow (\pi_i)_* \mathcal{L}_{w_i}(\mathcal{M})$, pour $i = 1,2$.

2) Je montre le point 2. Comme S est noethérien, ceci implique que les espaces topologiques $D(w_i)$, $E(w_i)$, E et D sont quasi-compacts. Donc les foncteurs $(\pi_i)_*$, $\mathcal{D}_E$ et $\mathcal{L}_{w_i}$ commutent aux limites inductives.

Pour montrer 2, je peux donc supposer $\mathcal{M}$ localement libre de type fini. Par le lemme 13.1, $\mathcal{D}_E(\mathcal{M})$ est plat et localement de type fini. Comme E est noethérien, $\mathcal{D}_E(\mathcal{M})$ est localement libre de type fini. Utilisant la formule

(I) et la formule de la projection, on a

$$(\pi_i)_* \mathcal{L}_{w_i}(\mathcal{M}) = (\pi_i)_* \mathcal{O}_{D(w_i)_s} \otimes \mathcal{D}_E(\mathcal{M}) .$$

Il s'agit de prouver que l'on a

(II) $$(\pi_i)_* \mathcal{O}_{D(w_i)_s} = \mathcal{O}_{D_s} .$$

Il est clair que les schémas $D(w_i)_s$ et D possèdent un recouvrement par les ouverts de la forme $\mathbb{A}^{\ell}_s$ (pour $\ell = \ell(w_1) = \ell(w_2)$) . Ceci implique que $D(w_i)_s$ et D_s sont des schémas normaux ([58], proposition 17.B). Comme π_i (pour $i = 1,2$) est clairement birationnelle, ceci prouve (II), ce qui achève la preuve du lemme.

<u>Remarque:</u> Ce chapitre ne contient aucun point original. J'ai indiqué toutes les constructions principalement parce que beaucoup des schémas que je vais utiliser ne sont pas noethériens.

Dans son cours en 1982 [59], J.Tits avait construit les variétés de Demazure sur $\mathbb{C}$ par un moyen différent (suivant une idée de P.Deligne). Il a donné un système explicite de cartes, chacune de ces cartes étant isomorphe à un espace vectoriel. Pour une algèbre de Lie $\underline{g}$ semi-simple, la construction de Demazure est une généralisation d'une construction de Bott et Samelson.

V Variétés de Schubert (en caractéristique 0).

Dans ce paragraphe, je fixe K un corps de caractéristique 0. Soit J une partie de I. Je pose $P_J^+ = \{\lambda(h_j) \neq 0$ si $j \neq J$ et $\lambda(h_j) = 0$ si $j \in J\}$. Soit $\Lambda \in P_J^+$. Pour chaque $w \in W_J$. $L(\Lambda)_{w\Lambda}$ est de dimension 1, et les poids $w\Lambda (w \in W_J)$ sont tous deux distincts (cf. pour les notations les chapitres I et II). Soit $i \in I$. L'action de l'algèbre de lie $\underline{s}_i = ke_i \oplus kh_i \oplus kf_i$ s'intègre en une action de $SL(2)$ sur $L(\Lambda)$. On identifie $L(\Lambda)$ à un $SL(2)$-module en identifiant $\exp e_i$ (respectivement $\exp f_i$) à l'action de la matrice $\begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Soit m_i l'une des deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout poids μ on a $m_i\, L(\Lambda)_\mu = L(\Lambda)_{s_i\mu}$.

Soit e_Λ une base choisie une fois pour toute de $L(\Lambda)$. Soit $w \in W_J$, et soit $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une decomposition reduite de w. Je pose $e_{w\Lambda} = m_{i_1} \dots m_{i_k} e_\Lambda$. L'élément $e_{w\Lambda}$ est défini à un signe près, et est une base de $L(\Lambda)_{w\Lambda}$. On pose

$$E_w(\Lambda) = U(\underline{b})e_{w\Lambda} .$$

Il est clair que $E_w(\Lambda)$ est un $U(\underline{b})$-module de dimension finie dans $L(\Lambda)$, et l'on a $L(\Lambda) = \bigcup_{w\in W} E_w(\Lambda)$. Soient $F_w(\Lambda)$ le dual de $E_w(\Lambda)$, $L(\Lambda)^*$ le dual de $L(\Lambda)$. Par dualité on a donc un morphisme surjectif de $U(\underline{b})$-module

$$L(\Lambda)^* \longrightarrow F_w(\Lambda) .$$

Soient $v,w \in W_J$. On rappelle que les assertions suivantes sont équivalentes [49] [58]

(a) $E_v(\Lambda) \subseteq E_w(\Lambda)$

(b) $v \leq w$.

Donc lorsque l'on a $v \leq w$, on a un morphisme naturel $F_w(\Lambda) \longrightarrow F_v(\Lambda)$, et on a $L(\Lambda)^* = \varprojlim F_w(\Lambda)$.

On note $S_{w,\Lambda} = \overline{B\, ke_{w\Lambda}}$ la fermeture de l'orbite du point $ke_{w\Lambda}$ dans le projectif $PE_w(\Lambda)$. Soit $\Sigma_{w,\Lambda}$ le cône fermé correspondant dans $E_w(\Lambda)$, i.e. $\Sigma_{w,\Lambda} = \overline{B\ ke}_{w,\Lambda}$ dans $E_w(\Lambda)$. Je pose $\Sigma^o_{w,\Lambda} = \Sigma_{w,\Lambda} - \{0\}$.

Lemme 29: Soient J une partie de I , $w \in W_J$. et $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . Il existe des morphismes B-équivariants $\eta_{\tilde{w},\Lambda} : E(\tilde{w}) \longrightarrow \Sigma^o_{w,\Lambda}$, et $\nu_{\tilde{w},\Lambda} : D(\tilde{w}) \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E(\tilde{W}) \arrow[r, "\eta_{\tilde{w},\Lambda}"] \arrow[d] & \Sigma^o_{w,\Lambda} \arrow[d] \\
D(\tilde{W}) \arrow[r, "\nu_{\tilde{w},\Lambda}"] & S_{w,\Lambda}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $E(\tilde{w}) \longrightarrow \Sigma^o_{w,\Lambda}$ ne dépend que du choix de l'élément non nul e_Λ dans $L(\Lambda)_\Lambda$. Le morphisme $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ est canonique, birationnel et propre. La variété $S_{w,\Lambda}$ est irréductible de dimension $\ell(w)$. On a

$$S_{w,\Lambda} = \bigcup_{\substack{v \leq w \\ v \in W_J}} B\ ke_{v,\Lambda} \quad (\text{dans } \mathbb{P}E(\Lambda)) \quad \text{et}$$

$$\Sigma_{w,\Lambda} = \bigcup_{\substack{v \leq w \\ v \in W_J}} B\ ke_{v,\Lambda} \quad (\text{dans } E_w(\Lambda)) \ .$$

Démonstration: On montre le lemme par récurrence sur $\ell(w)$. Lorsque $w = 1$, on a $E(1) = B$, $\Sigma^o_{w,\Lambda} = k^* e_\Lambda$. Le morphisme $\eta_{1,\Lambda}$ est le morphisme donné par la formule naïve : $\eta_{1,\Lambda}(b) = be_\Lambda$, pour $b \in B$. Enfin on a $S_{1,\Lambda} = \operatorname{Spec} k$, et $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ est le morphisme identifié.

On suppose maintenant que l'on a $w \neq 1$. Soit $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . Je pose $\tilde{w} = s_i \tilde{u}$, pour un certain $i \in I$ et $\tilde{u} \in \tilde{w}$. Soit u la valeur de $\hat{u}$ dans $\tilde{W}$. Il est clair que l'on a $ke_{u,\Lambda} \in S_{w,\Lambda}$. On

a donc $S_{w,\Lambda} \supseteq P_i ke_{w\Lambda}$, on a donc $S_{w,\Lambda} = P_i ke_{w\Lambda}$. Comme on a $P_i ke_{u\Lambda}$, on a aussi $S_{w,\Lambda} = \overline{P_i S_u}(\Lambda)$. Donc $S_{w,\Lambda}$ (respectivement $\Sigma^o_{w,\Lambda}$) contient $S_{u,\Lambda}$ ($\Sigma^o_{u,\Lambda}$) et est P_i-invariant. Par hypothèse de récurrence, on a des morphismes B-équivariants $\nu_{\tilde{u},\Lambda} : D(\tilde{u}) \longrightarrow S_{u,\Lambda}$ et $_{\tilde{u},\Lambda} : E(\tilde{u}) \longrightarrow \Sigma^o_{u,\Lambda}$. On en déduit des morphismes $P_i \times D(\tilde{u}) \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ et $P_i \times E(\tilde{u}) \longrightarrow \Sigma^o_{u,\Lambda}$, qui par construction des quotients factorisent en des morphismes P_i-équivariants $\nu_{\tilde{w},\Lambda} : P_i \times^B D(\tilde{u}) \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ et $_{\tilde{w},\Lambda} : P_i \times^B E(\tilde{u}) \longrightarrow \Sigma^o_{w,\Lambda}$.
Les morphismes $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ et $_{\tilde{w},\Lambda}$ sont en particulier B-équivariants, et rendent commutatif le diagramme du lemme. Il est clair que $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ est birationnel donc $S_{w,\Lambda}$ est irréductible de dimension $\ell(w)$. Comme $D(w)$ est propre, $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ est également propre, donc surjective. En particulier, on a $S_{w,\Lambda} = P_i S_{u,\Lambda}$. Par la décomposition de Bruhat $P_i = B\, m_i\, B \cup B$, et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} S_{w,\Lambda} &= \bigcup_{\substack{v \leq u \\ v \in W_J}} P_i B\, ke_{v\Lambda} \\ &= \bigcup_{\substack{v \leq u \\ v \in W_J}} (B\, ke_{v\Lambda} \cup B\, ke_{s_i v\Lambda}) \\ &= \bigcup_{\substack{v \leq w \\ v \in W_J}} (B\, ke_{v\Lambda}) \end{aligned}$$

et le lemme en résulte.

Soit X un espace topologique, F un fermé de X . On dit que F est disconnexe (ou non connexe) s'il existe deux fermés non vides disjoints F_1 , F_2 tels que $F = F_i \cup F_2$. On dit sinon que F est connexe. On dit que X satisfait à la propriété (P) si tout fermé F de X est l'adhérence de ses points fermés. La propriété P est locale : l'espace topologique X satisfait (P) si et seulement si il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de X , chaque ouvert U_α satisfaisant (P) . Donc les variétés (et les schémas de type fini) sur k satisferont (P) (par le Nullstellensatz d'Hilbert).

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. Je dis que f est connexe si et seulement si l'image réciproque de tout fermé connexe est connexe.

Lemme 30 : Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective et (topologiquement) fermée. On suppose que Y satisfait (P).

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(a) f est connexe,

(b) Pour tout point fermé P de Y, $f^{-1}(P)$ est connexe.

Démonstration : Il est clair que l'assertion (a) implique l'assertion (b). On suppose à présent l'assertion (b). Soit Z un fermé de Y, connexe. On suppose par l'absurde que $f^{-1}(Z)$ est disconnexe. Il existe deux fermés non vides disjoints X_1, X_2 dans X tels que $f^{-1}(Z) = X_1 \cup X_2$. Soient $Y_1 = f(X_1)$, $Y_2 = f(X_2)$. Comme f est surjective on a $Z = Y_1 \cup Y_2$. Comme f est fermée, Y_1 et Y_2 sont fermés. Comme Z est connexe, on a $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Comme Y satisfait (P), il existe un point fermé P appartenant à $Y_1 \cap Y_2$. On a $f^{-1}(P) = (f^{-1}(P) \cap X_1) \cup (f^{-1}(P) \cap X_2)$, d'où une contradiction. C.Q.F.D.

Soient X, Y deux schémas sur k. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soient $\bar{k}$ la cloture algébrique de k et soient $j_X : \bar{X} \longrightarrow X$ et $j_Y : \bar{Y} \longrightarrow Y$ l'extension à $\bar{k}$. Soit $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ la restriction de f à $\bar{X}$ et $\bar{Y}$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bar{X} \arrow[r, "j_X"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\bar{Y} \arrow[r, "j_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

On dit que f est absolument connexe, si $\bar{f}$ est connexe. On notera que si f est absolument connexe, et si X et Y sont noethèriens de type fini, alors f est connexe. En effet soit F un fermé connexe de Y, soit F' une composante connexe de $j_Y^{-1}(F)$. Alors $F'' = \bar{f}^{-1}(F')$ est connexe, et comme j_X et j_Y sont entiers, il est clair que l'on a $f^{-1}(F) = j_X(F'')$.

<u>Lemme 31 :</u> 1) Soient X, Y deux B-schémas de type fini, $f : X \longrightarrow Y$ un B-morphisme propre, surjectif absolument connexe. Alors le morphisme $P_i \times^B X \longrightarrow P_i \times^B Y$ est absolument connexe.

2) Soit X un P_i-schéma de type fini, propre. Alors le morphisme naturel $\mu : P_i \times^B X \longrightarrow X$ est absolument connexe.

<u>Démonstration :</u> Je démontre le point 1. Je peux supposer k algébriquement clos. L'application naturelle $\varepsilon : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow P_i$ dètermine un diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
P_i \times^B Y \arrow[r, "i_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

et i_X, i_Y sont des immersions fermées. Soit P un point de $P_i \times^B Y$. Il est clair que l'on peut supposer $P \in Y$. On a alors $\tilde{f}^{-1}(P) = f^{-1}(P)$, donc

$\tilde{f}^{-1}(P)$ est connexe. Par le lemme précédent, ceci montre le lemme, car $\tilde{f}$ est propre et surjective.

Je montre le point 2. Je peut supposer k algébriquement clos. Soient σ , $p : P_i \times X \longrightarrow X$ les morphismes d'actions et de projection sur le second facteur, $x_X : P_i \times X \longrightarrow P_i \times X$ la factorisation canonique, $\pi : P_i \times X \longrightarrow P_i \times^B X$ le morphisme naturel. On a ainsi un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd}
P_i \times X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "x_X"] \arrow[dr, "\sigma"] & P_i \times^B X \arrow[d, "\mu"] \\
P_i \times X \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

Le morphisme M est propre et surjectif. Il suffit donc de prouver que $\mu^{-1}(P)$ est connexe pour tout point fermé $P \in X$. Comme X est de type fini, le corps résiduel en P est isomorphe à k . Donc $p^{-1}(P)$ est irréductible, isomorphe à P_i . Comme x_X est un isomorphisme, donc $\sigma^{-1}(P)$ est irréductible. Comme π est clairement surjective, on a $\mu^{-1}(P) = \pi\,\sigma^{-1}(P)$. Donc $\pi\,\sigma^{-1}(P)$ est un fermé irréductible, donc connexe. Ceci prouve le point 2. C.Q.F.D.

Soient J une partie de I , $w \in W_J$, $\Lambda \in P_J^+$. Soit $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . Soit $\tilde{S}_{w,\Lambda}$ le normalisé de $S_{w,\Lambda}$.

<u>Lemme 32 :</u> 1) Ie morphisme $\nu_{\tilde{w},\Lambda} : D(\tilde{w}) \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est absolument connexe.

2) Le morphisme de normalisation $j_{w,\Lambda} : \tilde{S}_{w,\Lambda} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est un homéomorphisme.

<u>Démonstration :</u> On peut supposer, pour montrer le point 1, que l'on a $w \neq 1$.

On choisit $i \in I$, $\tilde{u} \in \tilde{W}$ tels que $\tilde{w} = s_i \tilde{u}$. Soit u la valeur de $\tilde{u}$ dans W. On va montrer le point 1 par récurrence sur $\ell(w)$. On peut donc supposer que le point i est montré pour le morphisme $\nu_{\tilde{u},\Lambda} : D(\tilde{u}) \longrightarrow S_{u,\Lambda}$.

Je vais montrer que le morphisme $\nu : P_i \times^B S_{u,\Lambda} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est absolument connexe. Je peux supposer k algébriquement clos. Soit $Y = \cup S_{v,\Lambda}$ la réunion portant sur les $v \in W_I$ tels que $v \leq u$, et $s_i v \leq u$. De manière naturelle, Y est un sous-schéma fermé de $S_{u,\Lambda}$ et un sous-espace P_i invariant de $S_{w,\Lambda}$. Soient $U = S_{u,\Lambda} - Y$, $V = S_{w,\Lambda} - Y$. On a ainsi un diagramme

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B Y \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"'] & P_i \times^B S_{u,\Lambda} \arrow[d, "\nu"] & P_i \times^B U \arrow[l] \arrow[d, "\pi_1"] \\
Y \arrow[r] & S_{w,\Lambda} & V \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Soit P un point fermé de $S_{w,\Lambda}$. Il est clair que π_1 est bijective. Donc si $P \in V$, $\pi_1^{-1}(P)$ est réduit à un point et est connexe. Par le lemme, π_2 est connexe. Donc si $P \in Y$, $\nu^{-1}(P) = \pi_2^{-1}(P)$ est également connexe. Donc ν est connexe, puisque ν est propre et surjective.

Par le lemme 31, le morphisme naturel $\mu : P_i \times^B D(\tilde{u}) \longrightarrow P_i \times^B S_{u,\Lambda}$ est connexe, puisque par hypothèse de récurrence $D(\tilde{u}) \longrightarrow S_{u,\Lambda}$ est connexe. Or on a $\nu_{\tilde{w},\Lambda} = \nu \circ \mu$. Donc $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ est connexe. Ceci montre le point 1.

Le schéma $D(\tilde{w})$ est lisse, donc normal. Comme l'application $\nu_{\tilde{w},\Lambda} : D(\tilde{w}) \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est birationnelle, il existe un unique morphisme $\mu_{\tilde{w},\Lambda} : D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S}_{w,\Lambda}$ tel que $j_{w,\Lambda} \circ \mu_{\tilde{w},\Lambda} = \nu_{\tilde{w},\Lambda}$.

Le morphisme $\mu_{\tilde{w},\Lambda}$ est propre et birationnel. Il est donc surjectif. Donc pour tout fermé $F \subseteq \tilde{S}_{w,\Lambda}$ on a

$$j_{w,\Lambda}^{-1}(F) = \mu_{\tilde{w},\Lambda}(\nu_{\tilde{w},\Lambda}^{-1}(F)) .$$

Donc le morphisme $j_{w,\Lambda}$ est connexe. Comme $j_{w,\Lambda}$ est un morphisme de normalisation, $j_{w,\Lambda}$ est fini. Donc $j_{w,\Lambda}$ est bijectif, donc $j_{w,\Lambda}$ est un homéomorphisme.

Lemme 33 : Soient J une partie de I , $w \in W_J$, Λ et M deux poids de P_J^+ . Il existe un isomorphisme canonique de B-variétés $\Phi : \tilde{S}_{w,\Lambda} \longrightarrow \tilde{S}_{w,M}$, tel que pour toute décomposition réduite $\tilde{w}$ de w , le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{S}_{w,\Lambda} \arrow[d, "\Phi"] \\
D(\tilde{w}) \arrow[ur, "\mu_{\tilde{w},\Lambda}"] \arrow[dr, "\mu_{\tilde{w},\Lambda}"'] & \\
 & \tilde{S}_{w,M}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration : On va montrer le lemme par récurrence sur $\ell(w)$. On peut supposer que l'on a $w \neq 1$. On suppose le lemme montré pour tous les $u \in W_J$, avec $\ell(u) < \ell(w)$. Les variétés $\tilde{S}_{u,\Lambda}$ et $\tilde{S}_{u,M}$ étant isomorphes, on peut noter ces variétés $\tilde{S}_{u,I}$.

On va d'abord construire un homéomorphisme naturel $\Phi : \tilde{S}_{w,\Lambda} \longrightarrow \tilde{S}_{w,M}$. On fixe $i \in I$, $u \in W$ tels que $w = s_i\, u$ et $u \leq w$. Soient pour tout poids $\lambda \in P_J^+$ $Y(\lambda) = \bigcup_{\substack{v \leq u \\ v \geq s_i v \\ v \in W_J}} S_{v,\lambda}$. Ainsi $Y(\lambda)$ est un sous-schéma fermé de $S_{w,\lambda}$, stable par P_i , et contenu dans $S_{u,\lambda}$. Topologiquement, les espaces $S_{u,\lambda}$ et $Y(\lambda)$ ainsi que l'application continue $Y(\lambda) \longrightarrow S_{u,\lambda}$ sont indépendants. On pose $\tilde{Y}(\lambda) = j_{u,\lambda}^{-1}(Y(\lambda))$, $\tilde{U}(\lambda) = j_{u,\lambda}^{-1}(U(\lambda))$. Comme $j_{u,\lambda}$ est un homéomorphisme, le sous-schéma fermé $\tilde{Y}(\lambda)$ et le sous-schéma ouvert $\tilde{U}(\lambda)$ de $\tilde{S}_{uI}$ ne dépendent pas de λ . On note ce sous-schéma $\tilde{Y}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B Y(\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & P_i \times^B S_{u,\lambda} \arrow[d] \\
Y(\lambda) \arrow[r] & S_{w,\lambda}
\end{tikzcd}$$

Il est clair que comme espace topologique, $S_{w,\lambda}$ est le coproduit de $Y(\lambda)$ et $P_i \times^B S_{u,\lambda}$ suivant $P_i \times^B Y(\lambda)$. Les morphismes naturels $P_i \times^{\tilde{B}} \tilde{Y} \longrightarrow P_i \times^B Y(\lambda)$, $\tilde{Y} \longrightarrow Y(\lambda)$ et $P_i \times^{\tilde{B}} \tilde{S}_{u,I} \longrightarrow P_i \times^{\tilde{B}} \tilde{S}_{u,\lambda}$ étant des homéomorphismes, comme espace topologique $S_{w,\lambda}$ est donc le coproduit du système d'espace topologique

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^{\tilde{B}} \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d] & P_i \times^{\tilde{B}} \tilde{S}_{u,\lambda} \\
\tilde{Y} &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Le système (*) ne dépend pas de λ . Donc les espaces topologiques $S_{w,\lambda}$, pour divers $\lambda \in P_J^+$ sont tous homeomorphes. Comme $\tilde{S}_{w,\lambda}$ est homéomorphe à $S_{w,\lambda}$, on en déduit que les divers schémas $\tilde{S}_{w,\lambda}$ sont tous naturellement homeomorphes. Par construction le diagramme d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{S}_{w,\Lambda} \arrow[dd, "\Phi"] \\
D(\tilde{w}) \arrow[ur, "\nu_{\tilde{w},\Lambda}"] \arrow[dr, "\nu_{\tilde{w},M}"'] & \\
 & \tilde{S}_{w,M}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme les morphismes $\nu_{\tilde{w},\Lambda}$ et $\nu_{\tilde{w},M}$ sont des morphismes birationnels propres entre variétés normales, on a aussi

$$\mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,\Lambda}} = (\nu_{\tilde{w},\Lambda})_* \mathcal{O}_{D(\tilde{w})}$$

$$\mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,M}} = (\nu_{\tilde{w},M})_* \mathcal{O}_{D(\tilde{w})} \ .$$

Donc il existe un isomorphisme naturel $\mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,M}} \xrightarrow{\sim} \Phi_* \mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,\Lambda}}$ ce qui prouve que Φ se prolonge en un isomorphisme de variétés (car un isomorphisme d'espace annelés entre schémas est un isomorphisme de schémas) C.Q.F.D. .

Remarque et définition : Soient J une partie de I , $w \in W_J$.
Par le lemme 33, les variétés $\tilde{S}_{w,\Lambda}$ (Λ décrit P_J^+) sont toutes isomorphes entre elles. J'appelle donc variété de Schubert cette classe de variétés isomorphes, et je la noterai $\tilde{S}_{w,J}$.

Soit $\mathcal{S}(w) = \{i \in I \ / \ s_i \leq w\}$, soit $\mathfrak{g}_0$ la sous algèbre de Kac-Moody de $\mathfrak{g}$ associé à la matrice de Cartan $(a_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}(w)}$, et soit $J_0 = J \cap \mathcal{S}(w)$. Par construction il est clair que $\tilde{S}_{w,J}$ et $\tilde{S}_{w,J_0}$ sont isomorphes.

Réciproquement, il est aisé de prouver que si J' est une autre partie de I telle que w appartienne à $W_{J'}$, les variétés $\tilde{S}_{w,J}$ et $\tilde{S}_{w,J'}$ sont isomorphes si et seulement si on a $J \cap \mathcal{S}(w) = J' \cap \mathcal{S}(w)$.
On considère k' un sur-corps arbitraire de k . Pour toute partie $J \subseteq I$, pour tout $w \in W_J$, et $\Lambda \in P_J^+$, je note $S_{w,\Lambda}(k')$, $\tilde{S}_{w,J}(k')$ les variétés $S_{w,\Lambda}$, $\tilde{S}_{w,J}$ construites sur k' . Par construction on a

$$S_{w,\Lambda}(k') = \mathrm{Spec}(k') \times_{\mathrm{Spec}(k)} S_{w,\Lambda} \ .$$

Soit $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . On a un diagramme naturel :

$$\begin{tikzcd}
D(\tilde{\tilde{w}})(k') \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mu'_{\tilde{w}}"] & D(\tilde{w}) \arrow[d, "\mu_{\tilde{w}}"] \\
\mathrm{Spec}(k') \times_{\mathrm{Spec}\ k} S_{\tilde{w},J} \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & \tilde{S}_{\tilde{w},J}
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme naturel est cartésien. Comme l'extension de $k \longrightarrow k'$ est plate, $\tilde{\tau}$ est un monomorphisme plat. Donc par le théorème B (§ IV), on a $(\mu'_{\tilde{w}})_* o_{D(\tilde{w})(h')} = \tilde{\tilde{\tau}}^* o_{\tilde{S}_{w,J}}$. Comme $D(\tilde{\tilde{w}})(k')$ est normale, le faisceau d'anneau $(\mu'_{\tilde{\tilde{w}}})_* o_{D(\tilde{\tilde{w}})(k')}$ est un faisceau d'anneaux intégralement clos. Donc $\mathrm{Spec}(k') \times_{\mathrm{Spec}(k)} S_{\tilde{\tilde{w}},J}$ est normale, donc on a $\hat{\tilde{S}}_{w,J}(k') = \mathrm{Spec}(k') \times_{\mathrm{Spec}(k)} S_{\tilde{w},J}$, ce qui prouve que $\tilde{\tilde{s}}_{w,J}$ est absolument normale. En particulier $\tilde{\tilde{S}}_{w,J}$ est naturellement définie sur $\mathbb{Q}$ et pour tout $\Lambda \in P_J^+$ le morphisme $j_{w,\Lambda} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est un homéomorphisme absolu. On montrera plus loin que $\tilde{\tilde{S}}_{w,J}$ est naturellement définie sur $\mathbb{Z}$ (cf. ch. XIIX).

<u>Lemme 34 :</u> Soient X , Y deux schémas de type fini sur k , et $\tilde{\tilde{X}}$, $\tilde{\tilde{Y}}$ leur normalisation (respectivement). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés. On suppose que le morphisme de normalisation $\tilde{\tilde{Y}} \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme absolu, et que X est réduit.

Alors il existe un unique morphisme $\tilde{\tilde{f}} : \tilde{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{\tilde{Y}}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\tilde{f}}"] \arrow[d] & \tilde{\tilde{Y}} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

<u>Démonstration :</u> Cette assertion est locale relativement à X et à Y. Je peux donc supposer X et Y affines, ce qui implique que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont affines. Soient donc A, $\tilde{A}$, B, $\tilde{B}$ les algèbres telles que l'on ait

$$X = \mathrm{Spec}(B) \quad , \quad \tilde{X} = \mathrm{Spec}(\tilde{B})$$

$$Y = \mathrm{Spec}(A) \quad , \quad \tilde{Y} = \mathrm{Spec}(\tilde{A}) \ .$$

La variété $\tilde{X}$ est la réunion disjointe des normalisés des composantes irréductibles de X. Je peux donc supposer X irréductible, i.e. B intègre. On a ainsi un diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r] & \tilde{B} \\ A \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\Phi"] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] & \tilde{B} \\ A \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\Phi"] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Soit p le noyau de Φ. Comme B est intègre, l'idéal p est premier. Soit $q = \sqrt{j(p)\tilde{A}}$. Comme j est fini et birationnel on a $j^{-1}(q) = p$. Comme $\mathrm{Spec}(\tilde{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est un homéomorphisme q est premier. Par hypothèse, pour tout sur-corps k' et k, le morphisme

$\mathrm{Spec}(\tilde{A}/q \otimes k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A/p \otimes k')$ est un homéomorphisme. Soit k, la cloture algébrique de k. Il vient donc que l'extension $A/p \otimes k \longrightarrow \tilde{A}/q \otimes K$ est "birationnelle" (au sens que cette extension fournit un isomorphisme sur l'anneau des fractions), puisque k est de caractéristique 0. Comme le morphisme $A/p \longrightarrow \tilde{A}/q$ est également finie, on obtient ainsi un morphisme

$\tilde{A}/q \longrightarrow \tilde{B}$, d'où il existe une application $\tilde{\Phi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ rendant commutatif le diagramme (*). En outre $\tilde{\Phi}$ est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme (*), et factorisant à travers $\tilde{A}/q$.

Comme il est clair qu'un morphisme $\tilde{\Phi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ rendant commutatif (*) factorise à travers $\tilde{A}/q$, ce morphisme est nécessairement unique.

Remarque : Le lemme précédent est faux en caractéristique non nulle. Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique p . Soit A la sous-algèbre de $\mathbb{F}[X,Y]$: $A = \mathbb{F}[X^p] \oplus Y\,\mathbb{F}[X,Y]$. Soit $B = \mathbb{F}[X^p]$. Comme $I = Y\,\mathbb{F}[X,Y]$ est un idéal de A , on a un morphisme surjectif naturel $A \longrightarrow B$. On a $\tilde{A} = \mathbb{F}[X,Y]$. Il est clair que $\mathrm{Spec}(\tilde{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est un homéomorphisme absolu. L'idéal I est premier dans $\tilde{A}$, et l'on a $\tilde{A}/I = \mathbb{F}[X]$, ce qui interdit l'existence d'un morphisme $\tilde{\Phi}$.

Lemme 35 : Soient J une partie de I , w , $W \in W_J$, avec $v \leq w$. Il existe un morphisme naturel unique $\tilde{i} : \tilde{S}_{v,J} \longrightarrow \tilde{S}_{w,J}$ de B-schémas, tel que pour tout $\Lambda \in P_J^+$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{S}_{v,J} \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "j_{v,\Lambda}"] & \tilde{S}_{w,J} \arrow[d, "j_{w,\Lambda}"] \\
S_{v,\Lambda} \arrow[r, "i"] & S_{w,\Lambda}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration : Soit $\Lambda \in P_J^+$. On a précédemment remarqué que le morphisme $j_{w,\Lambda} : \tilde{S}_{w,J} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ est un homéomorphisme absolu. Donc par le lemme 33, il existe un morphisme $\tilde{i}_\Lambda : \tilde{S}_{v,J} \longrightarrow \tilde{S}_{w,J}$ rendant commutatif le diagramme :

$$(*)\qquad\begin{tikzcd}\tilde{S}_{v,J} \arrow[r, "\tilde{i}_{\Lambda}"] \arrow[d, "j_{v,\Lambda}"] & \tilde{S}_{w,J} \arrow[d, "j_{w,\Lambda}"] \\ S_{v,\Lambda} \arrow[r] & S_{w,\Lambda}\end{tikzcd}$$

En fait par construction, $\tilde{i}_{\Lambda}$ est même l'unique morphisme d'espace annelé rendant commutatif le diagramme (*). Reste à montrer que $\tilde{i}_{\Lambda}$ ne dépend pas en fait de Λ .

Soient $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w , $\tilde{v}$ une décomposition réduite de v , avec $\tilde{v} \leq \tilde{w}$. Soit $j : D(\tilde{v}) \longrightarrow D(\tilde{w})$ l'une des immersions fermées construites au § IV. Comme les morphismes $j_{v,\Lambda} : \tilde{S}_{v,J} \longrightarrow S_{v,\Lambda}$ et $j_{w,\Lambda} : \tilde{S}_{w,J} \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ sont des isomorphismes, en tant qu'application continue $\tilde{i}_{\Lambda}$ ne dépend pas de Λ . On a ainsi un diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{tikzcd}D(\tilde{v}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mu_{\tilde{v}}"] & D(\tilde{w}) \arrow[d, "\mu_{\tilde{w}}"] \\ \tilde{S}_{v,J} \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{S}_{w,J}\end{tikzcd}$$

Le morphisme naturel de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}(D(\tilde{w})) \longrightarrow j_{*}\mathcal{O}(D(\tilde{v}))$, d'où un morphisme de faisceaux d'anneaux $(\mu_{\tilde{w}})_{*}\mathcal{O}(D(\tilde{w})) \longrightarrow (\mu_{\tilde{w}})_{*}j_{*}\mathcal{O}(D(\tilde{v}))$. On obtient ainsi un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,J}} \longrightarrow \tilde{i}_{*}\mathcal{O}_{\tilde{S}_{v,J}}$. Ainsi l'application continue $\tilde{i}$ se prolonge en un morphisme d'espaces annelés. Comme pour tout $\Lambda \in P_J^{+}$, par construction le diagramme d'espace annelé

$$\begin{tikzcd}
\tilde S_{v,J} \arrow[r, "\tilde i"] \arrow[d] & \tilde S_{w,J} \arrow[d] \\
S_{v,\Lambda} \arrow[r] & S_{w,\Lambda}
\end{tikzcd}$$

est commutatif, on a $\tilde i = \tilde i_\Lambda$. En particulier $\tilde i$ est un morphisme de schémas, et $\tilde i_\Lambda$ ne depend pas de Λ (en particulier cette construction est indépendante des choix faits : $\tilde w$, $\tilde v$, j).

<u>Remarque :</u> Pour l'instant, je n'ai pas encore prouvé que le morphisme $\tilde S_{v,J} \longrightarrow \tilde S_{w,J}$ est une immersion fermée. Ce fait sera un des points du théorème 2 du chapitre XI (cf. [41]). Néanmoins l'application $\tilde S_{v,J} \longrightarrow \tilde S_{w,J}$ est un homéomorphisme sur son image.

Je fixe J une partie de I , $w \in W_J$, $\lambda \in P_J^+$. L'immersion fermée (définissant $S_{w\lambda}$) $s_{w\lambda} \longrightarrow \mathbb{P}E_w(\lambda)$ détermine un faisceau inversible canonique $\mathcal{O}_{S_{w\lambda}}(1)$. Je noterai ce faisceau $\mathcal{L}_w(-\lambda)$. Soit $i \in I$ un élément tel que $s_i w \le w$. Alors $\bar{\mathcal{L}}_w(-\lambda)$ est naturellement P_i-équivariant, et inversible. Soit $j_{w\lambda}\ \tilde S_{w,J} \longrightarrow S_{w\lambda}$ le morphisme de normalisation. Je pose $\bar{\mathcal{L}}_w(-\lambda) = j^*_{w\lambda}\ \bar{\mathcal{L}}_w(-\lambda)$. Soit $\tilde w$ une décomposition réduite de w . Soit $\nu_{\tilde w,\lambda} : D(\tilde w) \longrightarrow S_{w\lambda}$ et $\mu_{\tilde w,J} : D(\tilde w) \longrightarrow \tilde S_{w,J}$ les morphismes naturels. Soit $u \in W_J$, $u \le w$. Soit $\tilde u$ une décomposition réduite de u , $\tilde u \le \tilde w$. Soit $\tilde i : S_{u\lambda} \longrightarrow S_{w\lambda}$ le morphisme canonique, $\tilde i : \tilde S_{u,J} \longrightarrow \tilde S_{w,J}$ le morphisme construit au lemme 35, soit $j : D(\tilde u) \longrightarrow D(\tilde w)$ l'une des immersions fermées construites au § IV. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
D(\tilde{u}) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{\tilde{u},J}"] & D(\tilde{w}) \arrow[d, "\mu_{\tilde{w},J}"] \\
\tilde{S}_{u,J} \arrow[r] \arrow[d, "j_{u\lambda}"] & \tilde{S}_{w,J} \arrow[d, "j_{w\lambda}"] \\
S_{u\lambda} \arrow[r] & S_{w\lambda}
\end{tikzcd}$$

Lemme 36 : (1) On a $\tilde{i}^*\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_u(-\lambda)$.

(2) On a $\mu^*_{\tilde{w},J}\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda) = \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda)$.

(3) On a $(\mu_{\tilde{w},J})_*\, \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda)$.

Démonstration : 1) Je montre le point 1. Par construction on a $i^*(\mathcal{L}_w(-\lambda)) = \mathcal{L}_u(-\lambda)$. Par ailleurs, on a $i \circ j_{u\lambda} = \tilde{i} \circ j_{w\lambda}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{i}^*\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda) &= \tilde{i}^* j_{w\lambda}{}^*\mathcal{L}_w(-\lambda) \\
&= j_{w\lambda}{}^* i^*\mathcal{L}_w(-\lambda) \\
&= j_{w\lambda}{}^*\mathcal{L}_u(-\lambda) \\
&= \tilde{\mathcal{L}}_u(-\lambda) .
\end{aligned}$$

2) Pour montrer le point 2, on va d'abord pour chaque $w \in W$ construire un morphisme naturel $\nu_{\tilde{w},\lambda}{}^*\mathcal{L}_w(-\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda)$. Soit $\Sigma^o_{w\lambda} = \Sigma_{w\lambda} - \{o\}$. Soit $\Theta_{w\lambda} : \Sigma^o_{w\lambda} \longrightarrow S_{w\lambda}$ le morphisme naturel. Par le lemme 28, on a un diagramme commutatif naturel :

$$\begin{tikzcd}
D(\tilde{w}) \arrow[d, "\nu_{\underset{\sim}{w},\lambda}"] & E(\tilde{w}) \arrow[l, "\pi_{\underset{\sim}{w}}"'] \arrow[d, "\eta_{\underset{\sim}{w},\lambda}"] \\
S_{w\lambda} & \Sigma^{o}_{w\lambda} \arrow[l, "\Theta_{w\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

Soit χ_λ le caractère du groupe B correspondant au poids λ . $\Sigma^{o}_{w\lambda}$ est naturellement une B-variété à droite, cette structure est donnée par la "formule" $\sigma.b = \chi_\lambda(b)\sigma$, pour chaque $\sigma \in \Sigma^{o}_{w\lambda}$, $b \in B$. Cette formule à un sens puisque $\Sigma^{o}_{w\lambda}$ est un cône. Pour cette structure, l'application naturelle η_w est un $B \times B$-morphisme. On muni $D(\tilde{w})$ et $S_{w\lambda}$ de structure de B-variété à droite, pour l'action triviale. Le morphisme naturel $\mathcal{O}_{\Sigma^{o}_{w\lambda}} \longrightarrow (\eta_{\underset{\sim}{w},\lambda})_* \mathcal{O}_{E(\tilde{w})}$ est $B \times B$-équivariant, et détermine un morphisme $B \times B$-équivariant $(\Theta_{w\lambda})_* \mathcal{O}_{\Sigma^{o}_{w\lambda}} \longrightarrow (\Theta_{w\lambda})_* (\eta_{\underset{\sim}{w},\lambda})_* \mathcal{O}_{E(\tilde{w})} = (\nu_{\underset{\sim}{w},\lambda})_* (\pi_{\underset{\sim}{w}})_* \mathcal{O}_{E(\tilde{w})}$.

Pour éviter des manipulations trop abstraites, je vais décrire les divers faisceaux en termes de fonctions. Cependant on peut décrire les fonctions propres sous l'action de B en termes (plus corrects) de coproduit comme au § IV.

Le faisceau $(\Theta_{w\lambda})_* \mathcal{O}_{\Sigma^{o}_{w\lambda}}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{S_{w\lambda}}$-algèbre graduée, et son terme de degré 1 est le faisceau $\mathcal{L}_w(-\lambda)$. Compte tenu de la formule $\sigma.b = \chi_\lambda(b)\sigma$ (pour chaque $b \in B$, $\sigma \in \Sigma^{o}_{w\lambda}$) pour tout ouvert U de $S_{w\lambda}$ on a

$$(\Theta_{w\lambda})_* \mathcal{O}_{\Sigma^{o}_{w\lambda}} (U) = \{\varphi \in \mathcal{O}_{\Sigma^{o}_{w\lambda}} (\Theta^{-1}_{w\lambda} (U)) \,|\, \varphi(\sigma b) = \chi_\lambda(b)\varphi(\sigma) \ ,$$

pour tout $\sigma \in \Theta^{-1}_{w\lambda} (U)$, $b \in B\}$.

Comme le morphisme $\Phi : (\Theta_{w\lambda})_* \mathcal{O}_{\Sigma^{o}_{w\lambda}} \longrightarrow (\nu_{\underset{\sim}{w},\lambda})_* (\pi_{\underset{\sim}{w}})_* \mathcal{O}_{E(\tilde{w})}$, est $B \times B$-équivariant $\Phi(\mathcal{L}_w(-\lambda))$ est inclus dans le sous-faisceau $\mathcal{F}$ de $(\nu_{\underset{\sim}{w},\lambda})_* (\pi_{\underset{\sim}{w}})_* \mathcal{O}_{E(\tilde{w})}$ défini par

$\mathcal{F}(U) = \{r \in \mathcal{O}_{E(\tilde{w})}(V)/r(\rho b) = r(\rho)x_\lambda(b)$, pour tout $\rho \in V$ et $b \in B\}$ où l'on a posé $V = \pi_{\tilde{w}}^{-1}\, \nu_{\tilde{w},\lambda}^{-1}(U)$. Par construction on a $\mathcal{F} = (\nu_{\tilde{w},\lambda})_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda)$.

Ainsi on a construit un morphisme $\Phi : \mathcal{L}_w(-\lambda) \longrightarrow (\nu_{\tilde{w},\lambda})_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda)$. Par adjonction on a donc un morphisme naturel $\varphi_{\tilde{w},\lambda} : (\nu_{\tilde{w},\lambda})^* \mathcal{L}_w(-\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda)$. Lorsqu'on voudra faire des changements du corps de base on notera $\varphi_{\tilde{w},\lambda}(k)$ ce morphisme.

3) Soit u un élément de W_J , $u \leq w$ et $\tilde{u}$ une décomposition réduite de u . Soit j une des immersions fermées $j : D(\tilde{u}) \longrightarrow D(\tilde{w})$ construites au § IV. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
D(\tilde{u}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\nu_{\tilde{u},\lambda}"] & D(\tilde{w}) \arrow[d, "\nu_{\tilde{w},\lambda}"] \\
S_{u\lambda} \arrow[r, "i"] & S_{w\lambda}
\end{tikzcd}$$

On a $\nu_{\tilde{w},\lambda} \circ j = i \circ \nu_{\tilde{u},\lambda}$. Donc $j^*\varphi_{\tilde{w},\lambda}$ est un morphisme $j^*\varphi_{\tilde{w},\lambda} : (\nu_{\tilde{u},\lambda})^* \mathcal{L}_u(-\lambda) \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{u}}(-\lambda)$. En reprenant la construction de $\varphi_{\tilde{u},\lambda}$, il vient que l'on a $j^*\varphi_{\tilde{w},\lambda} = \varphi_{\tilde{u},\lambda}$.

4) Soit k' un sur-corps de k . Je note $\xi : D(\tilde{w})(k') \longrightarrow D(\tilde{w})(k)$ et $\xi' : S_{w,\lambda}(k') \longrightarrow S_{w,\lambda}(k)$ les morphismes naturels. Ces morphismes sont les morphismes du changement de base $\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$. Ainsi le morphisme naturel $\xi^*\varphi_{\tilde{w},\lambda}(k)$ est un morphisme

$\xi^*\varphi_{\tilde{w},\lambda}(k) : (\nu_{\tilde{w},\lambda})^* \mathcal{L}_w(-\lambda)(k') \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda)(k')$. En reprenant la construction de $\varphi_{\tilde{w},\lambda}$, il vient que l'on a $\xi^*\varphi_{\tilde{w},\lambda}(k) = \varphi_{\tilde{w},\lambda}(k')$.

Le morphisme ξ est fidèlement plat. Donc si k désigne la clôture algébrique de k , il suffit de montrer que $\varphi_{\tilde{w},\lambda}(k^*)$ est un isomorphisme. Ainsi on peut supposer k algébriquement clos.

5) Soit X une variété. Pour chaque point fermé P de X soit $i_P : P \longrightarrow X$ l'inclusion correspondante. Soit $\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$-module cohérent. D'aprés le lemme de Nakayama, pour que Φ soit un isomorphisme, il suffit de prouver que pour chaque point fermé $P \in X$, l'application sur la fibre $i_P^* \Phi$ est un isomorphisme.

Je vais montrer que $\varphi_{\tilde{w},\lambda}$ est un isomorphisme, par récurrence sur $\ell(\tilde{w})$. Il est clair que je peux supposer que l'on a $\tilde{w} \neq 1$. Je choisis $i \in I$, $\tilde{u} \in \tilde{W}$ tel que $\tilde{w} = s_i\tilde{u}$. Je peux donc supposer que $\varphi_{\tilde{u},\lambda}$ est un isomorphisme. Soit $j : D(\tilde{u}) \longrightarrow D(\tilde{w})$ l'immersion fermée naturelle.

Par construction, il est clair que $\varphi_{\tilde{w},\lambda}$ est un P_i-morphismes de $\mathcal{O}_{D(\tilde{w})}$-modules P_i-équivariants. Soit P un point fermé de $D(\tilde{w})$. Comme on a $D(\tilde{w}) = P_i \times^B D(\tilde{u})$, pour vérifier que $i_P^* \varphi_{\tilde{w},\lambda}$ est un isomorphisme, il suffit de le vérifier lorsque $P \in D(\tilde{u})$. En effet soit $\pi : P_i \times^B D(\tilde{u}) \longrightarrow P_i/B$ le morphisme naturel qui envoie $D(\tilde{u})$ sur un unique point noté ∞ . Comme k est algébriquement clos, le groupe discret des points fermés de P_i opère de manière transitive sur les points fermés de P_i/B (car P_i/B est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et P_i agit comme le groupe PSL(2)). On a $\pi^{-1}(\infty) = D(\tilde{u})$. Donc on peut supposer $P \in D(\tilde{u})$.

On a alors $I_P^* \varphi_{\tilde{w},\lambda} = i_P^* j^* \Theta_{\tilde{w},\lambda}$. Par le point 3, on a $j^*\varphi_{\tilde{w},\lambda} = \varphi_{\tilde{u},\lambda}$. Donc on a $i_P^* \varphi_{\tilde{w},\lambda} = i_P^* \varphi_{\tilde{u},\lambda}$, ce qui prouve que $\varphi_{\tilde{w},\lambda}$ est un isomorphisme.

6) On a $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) = (\nu_{\tilde{w},\lambda})^*\mathcal{L}_w(-\lambda)$, d'où $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) = \mu_{\tilde{w},J})^*\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda)$, ce qui prouve le point 2 du lemme. On a $(\mu_{\tilde{w},J})_* \mathcal{O}_{D(\tilde{w})} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,J}}$, d'où par la formule de projection $(\mu_{\tilde{w},J})_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda)$. Ceci montre le point 3 du lemme. C.Q.F.D.

Comme corollaire on obtient les deux lemmes suivants.

Lemme 37 : On a $H^{o}(\tilde{S}_{w,J}\ ,\ \tilde{\mathcal{L}}_{w}(-\lambda)) = D_{w}(k_{-\lambda})$.

Ce lemme résulte en effet du point 3 du lemme précédent et du lemme. On conserve toujours les mêmes notations. Soit $P_J = \{\lambda \in P/\lambda(h_j) = 0\ \forall\ j \in J\}$. Il est clair que le groupe P_J est engendré par le semi-groupe P_J^+ . Je note $\tilde{\mathcal{L}}_w$ l'application de P_J^+ dans $\mathrm{Pic}(\tilde{S}_{w\lambda})$ groupe des fibrés inversibles de $\tilde{S}_{w\lambda}$, déterminée par $\lambda \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda)$

Lemme 38 : L'application $\tilde{\mathcal{L}}_w$ se prolonge en un morphisme de groupes de P_J dans $\mathrm{Pic}(\tilde{S}_{w,\lambda})$.

Démonstration : Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que si $\lambda\ ,\ \mu \in P_J^+$, on a $\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda-\mu) = \tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(-\mu)$.

$$\begin{aligned}\text{On a } \tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda-\mu) &= (\mu_{\tilde{w},J})_*(\mu_{\tilde{w},J})^*\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda-\mu)\\ &= (\mu_{\tilde{w},J})_*(\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) \otimes \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\mu))\\ &= (\mu_{\tilde{w},J})_*(\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) \otimes (\mu_{\tilde{w},J})_*(\tilde{\mathcal{L}}_w(-\mu))\ .\end{aligned}$$

D'où par la formule de projection

$$\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda-\mu) = ((\mu_{\tilde{w},J})_*\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda)) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w()\mu)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_w(-\lambda) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(-\mu)\ .$$

Ce fait sera utilisé dans le paragraphe consacré aux groupes de Picard des variétés de Schubert (cf. chapitre XII).

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, X une sous-variété fermée (donc supposée irréductible) de $\mathbb{P}E$, et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ le faisceau tordu de Serre. Je note $S(X)$ l'anneau des fonctions homogènes de X , et pour tout entier n sa composante de degré n est notée $S_n(X)$. Le morphisme

$k[E] \longrightarrow S(X)$ est un morphisme surjectif d'algèbres graduées. Soient $j : \tilde{X} \longrightarrow X$ la normalisation de X , et $\tilde{\mathcal{L}} = j^{*}\mathcal{L}$. Soit $\tilde{S}(X)$ la clôture intégrale de $S(X)$. L'algèbre $\tilde{S}(X)$ est naturellement graduée.
Soient S^{+} l'idéal de
$S(X) : S^{+} = \oplus_{n>o} S_n(X)$, et $S^{o}(X) = \{x \in \tilde{S}(X) \text{ , } \exists n \text{ , } (S^{+})^{n}.x \subseteq S(X)\}$. Alors $S^{o}(X)$ est une algèbre graduée, et l'on a $S(X) \subseteq S^{o}(X) \subseteq \tilde{S}(X)$. On notera que $S(X)$ est de codimension finie dans $S^{o}(X)$ (d'après le théorème de Serre sur les faisceaux amples). On note $S_n^{o}(X)$ et $\tilde{S}_n(X)$ les composantes homogènes de $S^{o}(X)$ et de $\tilde{S}(X)$.

On rappelle le lemme usuel suivant

<u>Lemme 39 :</u> 1) Pour tout entier $n \geq 0$, on a des isomorphismes naturels
$H^{\grave{a}}(X \text{ , } \mathcal{L}^{\otimes n}) = S_n^{o}(X)$ et $H^{o}(\tilde{X} \text{ , } \tilde{\mathcal{L}}^{\otimes n}) = \tilde{S}_n(X)$.
2) $\tilde{\mathcal{L}}$ est un faisceau ample.

<u>Démonstration :</u> Pour le point 1 du lemme, on peut se reporter au chapitre II § 5 de [27] (et en particulier exercice 5.14). Le second point résulte du fait qu'un morphisme fini conserve l'amplitude ([26]).

En conclusion, on remarque qu'à tout triplet (λ,J,w) avec $J \subseteq I$, $w \in W_J$, $\lambda \in P_J^{+}$, on peut associer trois anneaux

1) L'anneau $k[\Sigma_{w,\lambda}]$.

2) L'anneau $\oplus_{n\geq o} H^{o}(S_{w,\lambda}, \mathcal{L}(-\lambda)^{\otimes n})$, que par définition je note $A(w,\lambda)$.

3) L'anneau $\oplus_{n\geq o} H^{o}(\tilde{S}_{w,\lambda}, \tilde{\mathcal{L}}(-\lambda)^{\otimes n})$, que par définition je note $\tilde{A}(w,\lambda)$.

On a des morphismes birationnels finis $k[\Sigma_{w,\lambda}] \longrightarrow A(w,\lambda) \longrightarrow \tilde{A}(w,\lambda)$ d'anneaux gradués. En outre par le lemme 39, $\tilde{A}(w,\lambda)$ est intégralement clos. Par construction, on a $k[\Sigma_{w,\lambda}]_1 = F_w(\lambda)$. Soit à présent $v \in W_J$, $v \leq w$. Il existe des morphismes naturels $k[\Sigma_{w,\lambda}] \longrightarrow k[\Sigma_{v,\lambda}]$ (ce morphisme étant surjectif) et $A(w,\lambda) \longrightarrow A(v,\lambda)$. Il existe deux méthodes pour construire un morphisme d'anneaux $\tilde{A}(w,\lambda) \longrightarrow \tilde{A}(v,\lambda)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A(w,\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & A(v,\lambda) \arrow[d] \\
\tilde{A}(w,\lambda) \arrow[r] & \tilde{A}(v,\lambda)
\end{tikzcd}$$

La première consiste à identifier $\tilde{A}(w,\lambda)$ à $\oplus_{n\geq o} D_w(k_{-n\lambda}$, et $\tilde{A}(v,\lambda)$ à $\oplus_{n\geq o} D_v(k_{-n\lambda})$ et utiliser le morphisme naturel de foncteurs $D_w \longrightarrow D_v$. La seconde consiste à utiliser le morphisme $\tilde{S}_{v,\lambda} \longrightarrow \tilde{S}_{w,\lambda}$ et le point i du lemme 36.

On remarque que ces différents morphismes commutent à l'action de B . Je note $\tilde{\Sigma}_{w,\lambda}$ le spectre de $\tilde{A}(w,\lambda)$, i.e. le normalisé de $\Sigma_{w,\lambda}$.

VI. La formule de la limite inductive.

On pose $h_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} h_{\mathbb{Z}}^* = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} h_{\mathbb{Q}}^*$. On a une inclusion naturelle $P \longrightarrow h_{\mathbb{R}}^*$. Un sous-ensemble C de P est dit convexe, si C est l'intersection de P est d'un convexe de $h_{\mathbb{R}}^*$. Tout sous-ensemble C de P est contenu dans un convexe minimal, que je note E(C) , et que j'appelle l'enveloppe convexe de C .

Soit $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$. Je pose

$P(M) = \{\lambda \in P, M_\lambda \neq \{0\}\}$.

Lemme 40 : Soit $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, M de dimension finie.
Soit $i \in I$. On a alors

$$P(D^{s_i}M) \subseteq E(P(M) \cup s_i P(M)) .$$

Démonstration : Le $\mathcal{U}(\underline{p}_i)$-module $D^{s_i}M$ est quotient de $\mathcal{U}(\underline{p}_i) \otimes_{\mathcal{U}(\underline{b})} M$. Soit $\mu \in P(D^{s_i}M)$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mu + n\alpha_i \in P(M)$. Comme $P(D^{s_i}M)$ est stable par s_i , il existe de même $n' \in \mathbb{N}$ tel que $s_i\mu + n'\alpha_i \in P(M)$. Le lemme en résulte.

Soit $\Lambda \in P^+$. Je note $C(\Lambda)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{w\Lambda , w \in W\}$.

Lemme 41 : Soient $\Lambda \in P^+$, et $w \in W$.

1) On a $P(D^w(\Lambda)) \subseteq C(\Lambda)$.

2) L'espace vectoriel $D^w(\Lambda)_{w\Lambda}$ est de dimension un.

3) On a $D^w(\Lambda) = U(\underline{b}).f_{w\Lambda}$ où $f_{w\Lambda}$ est une base de $D^w(\Lambda)_{w\Lambda}$.

Démonstration : Le point 1 résulte du lemme 40 et d'une récurrence triviale. Je démontre les points 2 et 3 par récurrence sur $\ell(w)$. Lorsque $w = 1$, il n'y a rien à montrer. Je peux donc supposer $\ell(w) \geq 1$. Soient $i \in I$, $v \leq w$ tels que $w = s_i v$.

Par récurrence les points 2 et 3 du lemme sont supposés vérifiés par v . Soit $\pi : D^v(\Lambda) \longrightarrow D^w(\Lambda)$ le morphisme naturel. Comme $D^w(\Lambda)$ est un quotient de $U(\underline{p}_i)\otimes_{U(\underline{b})} D^v(\Lambda)$, on a :

$$\begin{aligned} D^v(\Lambda) &= U(\underline{p}_i)\ \pi(D^v(\Lambda)) \\ &= U(\underline{p}_i)\ \pi(U(\underline{b}).D^v(\Lambda)_{v\Lambda}) \\ &= U(\underline{p}_i)\ \pi(D^v(\Lambda)_{v\Lambda}) \\ &= U(\underline{p}_i)\ D^w(\Lambda)_{v\Lambda}\ . \end{aligned}$$

Comme $D^w(\Lambda)$ est un $U(\underline{p}_i)$-module de dimension finie, on a aussitôt $D^w(\Lambda) = U(\underline{p}_{\underline{i}})\ D^w(\Lambda)_{w\Lambda}$. Or il est clair que l'on a $w\Lambda - \alpha_i \notin C(\Lambda)$. Donc on a $D^w(\Lambda) = U(\underline{b}).(D^w(\Lambda)_{w\Lambda}$.

Il reste à montrer que l'espace vectoriel $D^w(\Lambda)_{w\Lambda}$ est de dimension un. On a

$$D^v(\Lambda) = k\ f_{v\Lambda} \oplus X$$

où $X = \bigoplus_{\mu \neq v\Lambda} D^v(\Lambda)_\mu$. On a $D^v(\Lambda) = U(\underline{b})f_{v\Lambda}$, donc X est un $U(\underline{b})$-sous-module de $D^v(\Lambda)$. Comme on a $v\Lambda + \alpha_i \notin C(\Lambda)$, $k\ f_{v\Lambda}$ est un $U(\underline{b}_i)$-sous-module de $D^v(\Lambda)$. Donc $D^v(\Lambda)$ est somme directe des deux $U(\underline{b}_i)$-modules X et $kf_{v\Lambda}$.

On a donc $D^w(\Lambda) = D^{s_i}(kf_{v\Lambda}) \oplus D^{s_i}X$ comme $U(\underline{a}_i)$-modules. On a $P(X) \cap \{v\Lambda + \mathbb{Z}\alpha_i\} = \emptyset$, donc on a par le lemme 40, $P(D^{s_i}X) \cap \{v\Lambda + \mathbb{Z}\alpha_i\} = \emptyset$. D'où on a $D^w(\Lambda)_{w\Lambda} = D^{s_i}(k\ f_{v\Lambda})_{w\Lambda}$. Il est clair que $D^{s_i}(k\ f_{v\Lambda})_{w\Lambda}$ est de dimension un, ce qui prouve le lemme.

Du lemme précédent résulte le lemme suivant.

<u>Lemme 42</u> : Pour chaque $w \in W$, il existe une application naturelle c_w :

$D^w(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$. On a $\operatorname{Im} c_w = E_w(\Lambda)$. En outre pour $v \leq w$ le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
D^v(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & D^w(\Lambda) \arrow[d] \\
L(\Lambda) \arrow[r] & L(\Lambda)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Démonstration</u> : L'espace vectoriel $L(\Lambda)_\Lambda$ est un $U(\underline{b})$-sous-module de dimension un dans $L(\Lambda)$. On a donc un morphisme naturel non nul c_1 : $k_\Lambda \longrightarrow L(\Lambda)$. Comme le module $L(\Lambda)$ est intégrable, on obtient par récurrence sur $\ell(w)$ pour chaque $w \in W$ un morphisme naturel $D^w(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$ construit comme suit. Soit $w \in W$. On choisit $i \in I$, $v \in W$ tels que $w = s_i v$. On suppose construit un morphisme $D^v(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$. On en déduit un morphisme naturel $D^{s_i} D^v(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$. Comme précédemment il est clair que le morphisme $D^w(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$ ne dépend pas des choix faits. On notera que ce morphisme est non nul, car il est aisé de montrer par récurrence que sur $\ell(w)$ que $c_w(f_{w\Lambda}) \neq 0$. On a donc $c_w(kf_{w\Lambda}) = ke_{w\Lambda}$. Comme par le lemme, on a $D_w(\Lambda) = U(\underline{b})e_{w\Lambda}$, on en déduit que l'on a $\operatorname{Im} c_w(\Lambda) = E_w(\Lambda)$.

Soit $\tilde{\underline{g}}$ l'algèbre de Lie engendrée par l'espace vectoriel $\underline{h}$ et les générateurs $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ $(i \in I)$ et définie par les relations (I), (II), (III), (IV) et (V) . Il est clair que $\tilde{\underline{g}}$ est la somme amalgamée des algèbres de Lie $\underline{p}_i$ suivant leur sous-algèbre de Lie commune $\underline{b}$. les $U(\underline{b})$-modules $D^w(\Lambda)$ forment un système inductif. Soit $E(\Lambda) = \varinjlim_{w \in W} D^w(\Lambda)$. Il est clair que $E(\Lambda)$ appartient à $\mathscr{C}(\underline{b})$.

<u>Lemme 43</u> : Le $U(\underline{b})$-module $E(\Lambda)$ est naturellement un $U(\underline{g})$-module.

<u>Démonstration</u> : Soit $i \in I$. Par le lemme 11 ${}_iW$ est un sous-ensemble cofinal dans W . On a donc $E(\Lambda) = \varinjlim_{w \in {}_iW} D^w(\Lambda)$. Donc $E(\Lambda)$ un naturellement un

$U(\underline{p}_i)$-module localement fini. Par construction de $\tilde{\underline{g}}$, $E(\Lambda)$ est donc naturellement un $U(\tilde{\underline{g}})$-module. Il reste à vérifier que $E(\Lambda)$ est en fait un $U(\underline{g})$-module, i. e. que pour tout couple $i, j \in I$, $i \neq j$, on a

$$ad(f_i)^{-\alpha_j(h_i) + 1}(f_j).E(\Lambda) = \{0\} .$$

Soit $X_{i,j} = \bigoplus_{n \geq -\alpha_j(h_i)+1} k\ ad^n(f_i)(f_j)$. Il est clair que $X_{i,j}$ est un $\mathcal{U}(\underline{a}_i)$-sous-module de $\tilde{\underline{g}}$, et que l'on a $X_{i,j} = ad(e_i)(X_{i,j})$. Or e_i agit de manière localement nilpotente sur $E(\Lambda)$. Soit $Y_{i,j} = X_{i,j}.E(\Lambda)$. Donc on a $Y_{i,j} = e_i\ Y_{i,j}$. Or $E(\Lambda)$ est un $U(\underline{a}_i)$-module localement fini, donc Y_{ij} est également un $U(\underline{a}_i)$-module localement fini, et donc $Y_{i,j} = \{0\}$, et donc $ad(f_i)^{-\alpha_j(h_i)+1}(f_j)E(\Lambda) = \{0\}$.

Les applications naturelles c_w déterminent un morphisme naturel $c : E(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$.

<u>Lemme 44</u> : Le morphisme naturel c est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : Le morphisme c est un morphisme de $U(\underline{b})$-modules. Comme $E(\Lambda)$ et $L(\Lambda)$ sont des $U(\underline{a}_i)$-modules localement finis, pour tout $i \in I$, c est un morphisme de $U(\underline{p}_i)$-modules. Ainsi c est un morphisme de $U(g)$-modules.

Pour chaque $w \in W$, je note encore $f_{w\Lambda}$ l'image de $f_{w\Lambda}$ dans $E(\Lambda)$. On a $c_w(kf_{w\Lambda}) = ke_{w\Lambda}$, donc on a $c(kf_{w\Lambda}) = ke_{w\Lambda}$. Ceci prouve en particulier que l'on a $c \neq 0$. Par le lemme 41, on a $D^w(\Lambda) = U(\underline{b})f_{w\Lambda}$. On a donc $E(\Lambda) = \cup\ U(\underline{b})f_{w\Lambda}$. On pose $E' = U(\underline{b}^-)f_\Lambda$. Comme par le lemme 41 les poids de $E(\Lambda)$ sont contenus dans $C(\Lambda)$, on a $\underline{n}^+ f_\Lambda = \{0\}$. Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, E' est donc un $U(g)$-sous-module de $E(\Lambda)$.

On va montrer par récurrence sur $\ell(w)$ que l'on a $f_{w\Lambda} \in E'$. Soit $w \in W$. On peut supposer $w \neq 1$. Soit $i \in I$, $v \in W$ tels que $w = s_i v$,

$v \leq w$. Il est clair que l'on a $kf_{w\Lambda} = f_i^{v\Lambda(h_i)} . f_{v\Lambda}$. Donc si par hypothèse de récurrence on a $f_{v\Lambda} \in E'$, on a $f_{w\Lambda} \in E'$. On a donc $E(\Lambda) = E'$, et donc $E(\Lambda) = U(\underline{b}^-)f_\Lambda$. Donc $E(\Lambda)$ est un quotient intégrable de $V(\Lambda)$, et s'envoie surjectivement (par c) sur $L(\Lambda)$. Comme $L(\Lambda)$ est le quotient maximal parmi les quotients intégrable de $V(\Lambda)$, le morphisme c est un isomorphisme.

<u>Lemme 45</u> : Soient J une partie de I , $\Lambda \in P_J^+$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

(1) Pour tout $w \in W$ l'application $d_w : F_w(\Lambda) \longrightarrow D_w(-\Lambda)$ est surjective.

(2) Pour tout $w , v \in W_J$ avec $w \geq v$ et $\ell(w) = \ell(v) + 1$, le morphisme $D_w(-\Lambda) \longrightarrow D_v(-\Lambda)$ est surjectif.

<u>Démonstration</u> : Je vais d'abord prouver que l'assertion (1) implique l'assertion (2) . Par le lemme l'application $c_w : D^w(\Lambda) \longrightarrow E_w(\Lambda)$ est surjective. Comme cette application est la transposée de d_w , l'assertion (1) implique que l'application c_w est un isomorphisme. L'injectivité de l'application $E_v(\Lambda) \longrightarrow E_w(\Lambda)$ implique donc la surjectivité des applications $D_w(-\Lambda) \longrightarrow D_v(-\Lambda)$ pour tout couple v, w avec $v \leq w$. En particulier l'assertion (2) est satisfaite.

A présent je suppose l'assertion (2) . Tout élément $x \in W$ s'écrit de manière unique $x = x' x''$, où $x' \in W_J$ et où x'' appartient au sous-groupe engendré par les réflexions $s_j (j \in J)$. En outre si $y \in W$, $y \leq x$ on a $y' \leq x'$. Donc l'assertion (2) implique en fait que pour tout couple v , w d'éléments de W avec $v \leq w$ l'application $D_w(-\Lambda) \longrightarrow D_v(-\Lambda)$ est surjective. Donc les applications $D^v(\Lambda) \longrightarrow D^w(\Lambda)$ sont injective, donc $D^w(\Lambda)$ s'injecte dans $L(\Lambda) = \varinjlim D^v(\Lambda)$ (par le lemme 42). Donc l'application $c_w : D^w(\Lambda) \longrightarrow E_w(\Lambda)$ est injective, ce qui prouve que d_w est surjective.
C.Q.F.D.

VII Scindage - Calcul de ω_w .

§1 Soit X une variété, n un entier, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module. L'opération de puissance n ième donne une application (en général non linéaire) de faisceaux $\Sigma_n : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$.

On suppose que le corps de base est de caractéristique p . Selon Metha-Ramanan et Ramanathan [17-19-20] , on dit que la variété X est scindable, en notant F le morphisme de Frobenius, le morphisme naturel de $\mathcal{O}_X$-module $\Phi_X : \mathcal{O}_X \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$ est scindable, i.e. s'il existe un morphisme de $\mathcal{O}_X$-module $\sigma_X : F_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ tel que $\sigma_X o\, \Phi_X = id_{\mathcal{O}_X}$. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de variétés, les variétés X et Y sont dites compatiblement scindables si et seulement s'il existe des scindages σ_X et σ_Y de X et de Y respectivement, qui rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y \arrow[r, "\sigma_Y"] \arrow[d] & F_*\mathcal{O}_Y \arrow[d] \\
f_*\mathcal{O}_X \arrow[r, "f_*\sigma_X"] & f_*F_*\mathcal{O}_X
\end{tikzcd}$$

Soit X une variété scindable. Soit σ_X un scindage de X , et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X . D'après [47-50-51] , le scindage σ_X définit une application linéaire $\sigma_X : H^o(X,\mathcal{L}^{\otimes p}) \longrightarrow H^o(X,\mathcal{L})$ telle que $\sigma_X \circ \Sigma_p = id|_{H^o(X,\mathcal{L})}$. En outre si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de variétés, si X et Y sont compatiblement scindables par des scindages σ_X et σ_Y , et si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible de Y le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^o(Y,\mathcal{L}^{\otimes p}) \arrow[r, "\sigma_Y"] \arrow[d] & H^o(Y,\mathcal{L}) \arrow[d] \\
H^o(X,f^*\mathcal{L}^{\otimes p}) \arrow[r, "\sigma_X"] & H^o(X,f^*\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

Soit G un groupe algébrique déployé, B un sous-groupe de Borel, Y une variété de Schubert de G/B . Ramanan et Ramanathan ont prouvé que Y et G/B sont compatiblement scindés, à l'aide du critère suivant (cf. par exemple [50]).

<u>Théorème</u> : Soit X une variété absolument lisse complète sur un corps k, de dimension n. Soit P un k point fermé. Soit $Z_1, \dots, Z_n$ n sous-variétés irréductibles, de codimension un, lisses, et telles que
$T_P Z_1 \cap \dots \cap Z_P Z_n = \{0\}$ (dans $T_P Z$).

Soit ω_X le faisceau des formes différentielles de degré maximal. Soit Z le diviseur $Z = [Z_1] + \dots + [Z_n]$. On suppose que l'on a

$$(\omega_X)^{1-p} = \mathcal{L}((p-1)\, Z + D)$$

où D est un diviseur effectif tel que $P \notin D$.

Alors la variété X est scindable, compatiblement à chacune des n immersions $Z_i \longrightarrow X$.

Dans la suite j'appellerai ce résultat théorème de Metha-Ramanan-Ramanathan. On pourra se reporter à [47], [50] et [51] pour trouver les démonstrations. J'ai cependant modifié très légèrement l'énoncé pour simplifier l'utilisation du théorème de semi-continuité. Remplacer un corps algébriquement clos par un corps parfait est inofffensif dès que l'on choisit pour P un point rationnel. La condition $T_P Z_1 \cap \dots \cap T_P Z_n = \{0\}$ n'est que la traduction du fait que localement les équations définissant les hypersurfaces Z_i forment un système de paramètres.

§2 Dans cette section je fixe k un corps de caractéristique arbitraire, X une variété complète et lisse sur k, et $\pi : Y \longrightarrow X$ un fibré localement trivial de fibre $\mathbb{P}^1$. Je suppose que ce fibré possède une section, i. e. qu'il existe $\sigma : X \longrightarrow Y$ un morphisme tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$. Par hypothèse Y est une variété lisse et complète. Je note $Cl(X)$ et $Cl(Y)$ les groupes de classes de diviseurs de X et de Y respectivement. Comme les variétés X et Y sont lisses, ces groupes $Cl(X)$ et $Cl(Y)$ s'identifient naturellement aux groupes de Picard $Pic(X)$ et $Pic(Y)$. Aussi le morphisme π induit un

morphisme de groupes π^* : $Cl(X) \longrightarrow Cl(Y)$. L'image du morphisme σ est une sous-variété de codimension un dans Y , et cette variété définit un diviseur que je note D . J'ai ainsi défini une application naturelle
$\mathbf{Z}\, D \times Cl(X) \longrightarrow Cl(Y)$.

Lemme 46 : L'application natuelle $\mathbf{Z}\, D \times Cl(X) \longrightarrow Cl(Y)$ est un isomorphisme.

Démonstration : Ce lemme est facile et bien connu. Je vais juste indiquer comment construire l'isomorphisme inverse $CI(Y) \longrightarrow CI(X) \otimes \mathbf{Z}\, D$.

Soit ξ le point générique de X . Je pose $\mathbb{P}'_\xi = \mathbb{P}'_{k(\xi)}$. Par construction, on a donc un isomorphisme $\pi^{-1}(\xi) \simeq \mathbb{P}'_\xi$. Je note

$i: \xi \longrightarrow X$ et $j: \mathbb{P}'_\xi \longrightarrow Y$ les morphismes correspondants.

L'isomorphisme canonique $CI(\mathbb{P}'_\xi) \simeq \mathbf{Z}\, D$, et le morphisme

$j^*: CI(Y) \longrightarrow CI(\mathbb{P}'_\xi)$ détermine un morphisme $CI(Y) \longrightarrow \mathbf{Z}\, D$ que l'on appelle le degré et que je noterai deg . On a ainsi un morphisme

$(\sigma^*, \deg): CI(Y) \longrightarrow CI(X) \otimes \mathbf{Z}\, D$, qui est l'isomorphisme inverse cherché. J'utiliserai ces notations dans les lemmes suivants.

Lemme 47 : Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur Y . Les assertions suivantes sont équivalentes

(1) $\mathcal{L}$ provient de X , i. e. il existe un fibré inversible $\mathcal{L}'$ sur X tel que $\mathcal{L} = \pi^*\mathcal{L}'$

(2) $\deg \mathcal{L} = 0$

Lorsque l'une de ces conditions équivalentes sont réalisées, alors $\mathcal{L} = \pi^*\sigma^*\mathcal{L}$.

Démonstration : Le lemme résulte de la suite exacte

$0 \longrightarrow Cl(X) \xrightarrow{\pi^*} Cl(Y) \xrightarrow{\deg} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$, et du fait que les variétés sont lisses.

Soit à présent $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux déterminé par l'image de σ . On a donc $\mathcal{I} \simeq \mathcal{L}(-D)$. Je pose $D' = \sigma^*(D)$. Si on considère $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ comme un fibré inversible sur X , on a donc $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \mathcal{L}(- D')$. Soit $E = \pi^* D'$.

<u>Lemme 48</u> : Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur Y , soit d son degré. On a

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(dD) \otimes \mathcal{L}(- dE) \otimes \pi^*\sigma^*\mathcal{L} .$$

<u>Démonstration</u> : Le fibré inversible $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(- dD)$ est de degré 0 . On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(- dD) &= \pi^*\sigma^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(- dD)) \\ &= \pi^*\sigma^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(- dE) \end{aligned}$$

d'où le lemme.

<u>Lemme 49</u> : On a $\Omega_{Y|X} = \mathcal{L}(E - 2D)$.

<u>Démonstration</u> : Je considère la seconde suite exacte (proposition 8-12[27]) :

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega_{Y|X} \otimes \mathcal{O}_{\sigma(X)} \longrightarrow \Omega_{\sigma(X)|X} \longrightarrow 0 .$$

Comme le morphisme $\pi : \sigma(X) \longrightarrow X$ est un isomorphisme, on a $\Omega_{\sigma(X)|X} = 0$. Je peux considérer $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ et $\mathcal{O}_{\sigma(X)}$ comme des faisceaux du support $\sigma(X)$. La seconde suite exacte donne donc un morphisme surjectif

$$\varphi : \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \sigma^* \Omega_{Y|X} \longrightarrow 0 .$$

Il est clair (en examinant le point générique) que ce morphisme est non nul. Comme $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ et $\sigma^* \Omega_{Y|X}$ sont inversible, le morphisme φ est un isomorphisme. (Remarque : Plus simplement comme π est lisse, φ est injective).

Il est clair que $\Omega_{Y|X}$ est de degré $- 2$. J'applique le lemme précédent. On a donc

$$\Omega_{Y|X} = \mathcal{L}(2E - 2D) \otimes \pi^*\sigma^* \Omega_{Y|X} .$$

Or on a

$$\begin{aligned} \pi^*\sigma^* \Omega_{Y|X} &= \pi^* \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \\ &= \pi^*\mathscr{L}(- D') \\ &= \mathscr{L}(- E) \ . \end{aligned}$$

D'où on a $\Omega_{Y|X} = \mathscr{L}(E - 2D)$

§3 Dans cette troisième section je vais calculer le faisceau ω_w des formes de degré maximal sur la variété de Demazure $D(w)$, pour chaque $w \in \tilde{W}$.

Je fixe $w \in \tilde{W}$, $w \neq 1$. Soit $u \in \tilde{W}$, et $i \in I$ tels que $w = us_i$. Soient

$$\pi : D(w) \longrightarrow D(u)$$

$$\sigma : D(u) \longrightarrow D(w)$$

les morphismes construits au paragraphe IV. Je rappelle que π est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{P}^1$, et σ est une section de π .

Plus généralement, soit M un B schéma à droite, de sorte que l'action de B soit localement libre, et que le quotient soit une variété lisse. Soit $M' = M \times^B P_i$. La projection naturelle $P_i/B \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ induit une fibration localement triviale de fibre P_i/B $\pi : M'/B \longrightarrow M/B$.

De même la section $\mathrm{spec}(k) \xrightarrow{\sim} B/B \longrightarrow P_i/B$ induit une section $\sigma : M/B \longrightarrow M'/B$.

Soit $\lambda \in P$. Le poids λ définit un B-module de dimension un, que je note encore λ . Je pose

$$\mathscr{L}(\lambda) = \mathscr{D}_M(\lambda)$$

$$\mathscr{L}'(\lambda) = \mathscr{D}_{M'}(\lambda)$$

Comme M/B et M'/B sont supposées être des variétés, les faisceaux $\mathscr{L}(\lambda)$ et $\mathscr{L}'(\lambda)$ sont inversibles, par le lemme 23.

Par la section précédente de ce paragraphe, il existe un morphisme $\deg : \mathrm{Cl}(M'/B) \longrightarrow \mathbf{Z}$.

<u>Lemme 50</u>: Soit $\lambda \in P^+$.

(1) $\sigma^* \mathscr{L}'(\lambda) = \mathscr{L}(\lambda)$.

(2) $\deg(\mathscr{L}'(\lambda)) = - \lambda(h_i)$.

Démonstration : Le point 1 résulte du lemme 23. Pour le point 2 , on se ramène au cas où M/B est un point. Mais alors $M'/B = P_i/B$ et le lemme est clair.

A présent je vais définir des sous-variétés $Z^w_1,\dots,Z^w_{\ell(w)}$ de codimension 1 dans $\mathscr{D}(w)$, par récurrence sur $\ell(w)$. Je suppose définies les sous-variétés $Z^u_1 \dots Z^u_{\ell(u)}$ par hypothèse de récurrence. Je pose

$Z^w_i = \pi^{-1}(Z^u_i)$ pour $1 \leq i \leq \ell(u)$

$Z^w_{\ell(w)} = D(u)$ où $D(u)$ est considéré comme une sous-variété de $D(w)$ par σ .

Pour alléger les notations, je pose $n = \ell(w)$.

Soit $Z^w = [Z^w_1] + \dots + [Z^w_n]$ l'élément de $Cl(D(w))$ correspondant.

Soit P_w l'intersection $Z^w_1 \cap \dots \cap Z^w_n$ (intersection est considérée ici ensemblistement). Comme σ est une section de π , on a (ensemblistement), pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$

$$Z^w_i \cap D(u) = Z^u_i \ .$$

Je suppose $u \neq 1$. On obtient alors $P_w = P_u$. Lorsque w est de longueur 1 , P_w est réduit à un point. Ainsi, pour tout $w \in \tilde{W}$, P_w est réduit à un point. Ce point correspond à l'application naturelle construite par récurrence $D(1) \longrightarrow D(w)$.

Lemme 51 : Soit $w \in \tilde{W}$, $n = \ell(w)$. Les sous-variétés Z^w_i $(1 \leq i \leq n)$ sont lisses de codimension 1 dans $D(w)$. Leur intersection est ensemblistement (et d'ailleurs schématiquement) réduit au point rationnel fermé P . On a dans l'espace vectoriel de dimensions n : $T_P\, D(w)$

$$T_P\, Z^w_1 \cap \dots \cap T_P\, Z^w_n = \{0\} \ .$$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence. On fixe u , $i \in I$ comme précédemment. Dans un voisinage de P , le fibré $D(w) \longrightarrow D(u)$ est trivial. Soit donc V un voisinage de P dans $D(u)$, et une trivialisation de l'ouvert $U = \pi^{-1}(V)$ en $U \simeq \mathbb{P}^1_k \times V$.

Soit Δ la droite tangente à $\mathbb{P}^1$ en P .

Comme π est localement trivial, et à fibres lisses, le fait que Z^u_i est lisse implique que Z^w_i est aussi lisse, pour $1 \leq i \leq n-1$. De même comme $Z^w_n = D(u)$, Z^w_n est lisse.

On a dans la trivialisation choisie

$T_P Z^w_i = T_P Z^u_i \oplus \Delta$ pour $1 \leq i \leq n-1$

$T_P Z^w_i = T_P D(u)$.

Donc il vient que pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$

$(T_p Z^w_i) \cap (T_p Z^w_n) = T_P Z^u_i$, et il vient donc

$(T_P Z^w_1) \cap \ldots \cap (T_P Z^w_n) = \{0\}$.

Remarque : 1) Le fait que $P = Z^w_1 \cap \ldots \cap Z^w_n$ schématiquement résulte du fait que ces variétés se coupent transversalement.

2) Soit $v \in \widetilde{W}$, tel que l'on ait $v \leq w$ et $\ell(v) = \ell(w) -1$. Alors la sous-variété $D(v)$ de $D(w)$ est l'une des variétés Z^w_j .

Proposition 1 : On a

$$\omega_w = \mathcal{L}_w(\rho) \otimes \mathcal{L}(-Z^w) .$$

Démonstration : J'effectue la démonstration par récurrence.

Dans le cas où w est de longueur 1, i.e. $w = s_i$, on a $D(w) = P_i/B$. Les faisceaux inversibles

$$\omega_{s_i} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{s_i}(\rho) \otimes \mathcal{L}(-Z^{s_i})$$

ont le même degré : -2 , et sont donc isomorphes.

Je peux donc supposer $\ell(w) > 1$, et la proposition vraie pour u . De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^* \Omega_{D(u)|k} \longrightarrow \Omega_{D(w)|k} \longrightarrow \Omega_{D(w)|D(u)} \longrightarrow 0$$

et du fait que les faisceaux de la suite exacte précédente sont localement libres, et que $\Omega_{D(w)|D(u)}$ est inversible, il vient que naturellement on a un isomorphisme

$$\omega_w = \pi^* \omega_u \otimes \Omega_{D(w)|D(u)} .$$

Je pose D le diviseur correspondant à la sous-variété $D(u)$ et $E = \pi^*\sigma^*D$. par le lemme 49 on a

$$\Omega_{D(w)|D(u)} = \mathcal{L}(E - 2\,D) .$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$\omega_u = \mathcal{L}_u(\rho) \otimes \mathcal{L}(-Z^u) .$$

Par construction on a

$$\pi^* Z^u = Z^w - D .$$

Par le lemme 50 $\mathcal{L}_w(\rho)$ est de degré -1 . On a donc par le lemme 48

$$\mathcal{L}_w(\rho) = \mathcal{L}(E - D) \otimes \pi^*\sigma^*\mathcal{L}_w(\rho) .$$

Or par le lemme 41 $\sigma^* \mathcal{L}_w(\rho) = \mathcal{L}_u(\rho)$. Il vient donc

$$\pi^* \mathcal{L}_u(\rho) = \mathcal{L}_w(\rho) \otimes \mathcal{L}(D - E)$$

On a donc

$$\pi^*(\omega_u) = \mathcal{L}_w(\rho) \otimes \mathcal{L}(D - E) \otimes \mathcal{L}(-\pi^* Z^u) .$$

D'où on a

$$\begin{aligned}\omega_w &= \pi^*(\omega_u) \otimes \Omega_{D(w)|D(u)} \\ &= \mathcal{L}_w(\rho) \otimes \mathcal{L}(D - E) \otimes \mathcal{L}(-\pi^* Z^u) \otimes \mathcal{L}(E - 2\,D) \\ &= \mathcal{L}_w(\rho) \otimes \mathcal{L}(-D) \otimes \mathcal{L}(-\pi^* Z^u) \\ &= \mathcal{L}_w(\rho) \otimes \mathcal{L}(-Z^w)\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme.

<u>Remarque</u> : Le fibré inversible ω_w est naturellement un B-fibré inversible,

et de même pour $\mathcal{L}_w(\rho)$. Comme Z^w est un diviseur B-invariant de Div(D(w)) , $\mathcal{L}(-Z^w)$ est également un B-fibré inversible. Néanmoins l'isomorphisme de la proposition ne commute à l'action de B que modulo un caractère non trivial de B .

Lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, cette formule est montrée dans [47] pour les variétés de Demazure de dimension maximale, et est implicitement donnée pour toutes les variétés de Demazure.

§4 - Scindage des variétés de Demazure.

Soit $w \in \tilde{W}$.

Lemme 52 : Il existe un ouvert non vide $\mathcal{V}_w \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, tel que pour tout nombre premier $p \in \mathcal{V}_w$, pour tout corps k de caractéristique p , pour tout élément $u \in \tilde{W}$ avec $u \leq w$ et $\ell(u) = \ell(w) - 1$, les variétés de Demazure D(w) et D(u) sont scindées, compatiblement avec l'immersion fermée naturelle $D(u) \longrightarrow D(w)$ (définie au §IV).

Démonstration : Il est clair qu'il suffit de prouver que l'énoncé vaut pour presque tout nombre premier p , et pour le corps fini $\mathbb{F}_p$.

Je note $P_{\mathbb{Z}}$ le sous-schéma fermé $D(1)(\mathbb{Z})$ dans $D(w)(\mathbb{Z})$. Il est clair que la spécialisation de ce sous-schéma à un corps est le point P^w défini plus haut.

Je considère d'abord les différents objets sur le corps $k = \mathbb{Q}$. Comme par construction $\overline{\mathcal{L}}_w(-\rho)$ est sans points bases (car $\overline{\mathcal{L}}_w(-\rho)$ est très ample) , $\mathcal{L}_w(-\rho)$ ne possède pas P^w comme point base. Donc, par semi-continuité, pour presque tout nombre premier p , $P^w(\mathbb{F}_p)$ n'est pas un point base de $\mathcal{L}_w(-\rho)_{\mathbb{F}_p}$. Soit $\mathcal{V}_w$ l'ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ correspondant.

Soit $p \in \mathcal{V}_w$. Puisque P^w n'est pas un point base de $\mathcal{L}_w(-\rho)$, il existe un diviseur effectif D sur D(w) , avec $P \notin \mathrm{Supp}(D)$, tel que l'on ait un isomorphisme de faisceaux inversibles $\mathcal{L}_w(-\rho) = \mathcal{L}(D)$.

On a donc

$$\omega_w^{\otimes(1-p)} = \mathcal{L}((p - 1)Z^w + (p - 1)D) .$$

Or par la seconde remarque postérieure au lemme 51, la sous-variété D(u) est l'une des variétés Z_j^w . Le lemme résulte donc du théorème de Metha-Ramanan et Ramanathan cité plus haut.

Au chapitre XIIX, on verra que ce lemme est vrai pour tout nombre premier p . Ce fait sera lié à la construction de variétés de Schubert en toute caractéristique.

VIII Schémas h-normaux.

Soit k un corps. Soit X un schéma noethérien localement de type fini sur k . Je dis que X est h-normal si le morphisme de normalisation $j : \tilde{X} \longrightarrow X$ est un homéomorphisme. Soit $\overline{k}$ la clôture intégrale de k . Je dis que X est absolument h-normal si et seulement si j est homéomorphisme absolu, i. e. si $j' : \mathrm{Spec}(\overline{k}) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \tilde{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{k}) \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$ est un homéomorphisme. On notera que si X est absolument h-normale, X est h-normale.

Une k-algèbre $\mathcal{A}$ de type fini est dite h-normale si et seulement si le schéma affine associé est h-normal. On définit de même les algèbres absolument h-normales.

Dans la suite de ce paragraphe, je suppose le corps k de caractéristique zéro. Le lemme suivant est faux en caractéristique non nulle comme le prouve l'exemple considéré au § V.

Lemme 53 : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de type fini, graduée sur $\mathbf{Z}$ et intègre (je ne suppose pas nécessairement les composantes homogènes de $\mathcal{A}$ de dimension finie). Soient K le corps de fraction de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{B}$ une sous-algèbre graduée de K telle que $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$. On suppose le morphisme $j : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fini. Les assertions suivantes sont équivalentes

(1) j induit un homéomorphisme absolu de $\mathrm{Spec}(\mathcal{B})$ dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$.

(2) Pour tout couple d'algèbres graduées $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ avec $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \not\subseteq \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{B}$, il existe un élément homogène $\sigma \in \mathcal{A}''$ tel que $\sigma \notin \mathcal{A}'$ et $\sigma^n \in \mathcal{A}'$ pour tout entier $n \geq 2$.

(3) Il existe un entier $n \geq 0$, des éléments homogènes $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \mathcal{B}$, des algèbres $\mathcal{A}_o, \dots, \mathcal{A}_N$ tels que

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_o \subset \mathcal{A}_1 \dots \subset \mathcal{A}_N = \mathcal{B}$,

(b) pour tout entier $1 \leq i \leq N$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i-1}[\sigma_i]$,

(c) $\sigma_i^m \in \mathcal{A}_{i-1}$ pour tout $m \geq 2$, et $1 \leq i \leq N$.

<u>Démonstration</u> : Je vais d'abord montrer que l'assertion (1) implique l'assertion (2) . Soient $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ deux algèbres graduées avec $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \nsubseteq \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{B}$. Comme les morphismes $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}''$, $\mathcal{A}'' \longrightarrow \mathcal{B}$ sont finis, les morphismes $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}'')$, $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}'') \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}')$ et $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}') \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ sont propres et dominants donc surjectifs. Donc $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}'') \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}')$ est un homéomorphisme absolu. Soit $M = \mathcal{A}''/\mathcal{A}'$. Soit $\mathcal{P}$ un élément premier associé au $\mathcal{A}'$-module M . Comme M est un $\mathcal{A}'$-module gradué, $\mathcal{P}$ est un idéal gradué. Il existe donc un élément homogène $\tau \in \mathcal{A}''\backslash\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{P}\tau \subseteq \mathcal{A}'$. Il est clair que l'on peut supposer que l'on a $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'[\tau]$. Soit $\mathcal{C}$ le conducteur de l'extension $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}''$, i. e. :

$$\mathcal{C} = \{a \in \mathcal{A}' \ , \ a\,\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}'\} \ .$$

Comme $\mathcal{A}'$ est noethérien, $\mathcal{A}''$ est un $\mathcal{A}'$-module noethérien. Il existe donc un entier $N \geq 1$, tel que l'on ait

$$\mathcal{A}'' = \sum_{i=0}^{N} \mathcal{A}'.\tau^i \ .$$

On a donc $\mathcal{P}^N \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$.

On suppose d'abord que l'on a $\mathcal{C} \neq \mathcal{P}$. Alors il existe un élément homogène $\xi \in \mathcal{A}''$ tel que $\mathcal{P}.\xi \nsubseteq \mathcal{A}'$. Donc il existe un élément homogène $\pi \in \mathcal{P}$ tel que $\pi\,\xi \notin \mathcal{A}'$. On a $(\pi\xi)^M = \pi^M\xi^M \in \mathcal{A}'$ pour $M \geq N$. Donc il existe un entier $q \leq 1$ tel que $(\pi\xi)^q \notin \mathcal{A}'$ et $(\pi\xi)^M \in \mathcal{A}'$ pour $M > q$. L'élément $\sigma = (\pi\xi)^q$ satisfait donc à l'assertion 2 .

On suppose à présent que l'on a $\mathcal{P} = \mathcal{C}$. Ceci implique que $\mathcal{P}$ est également un idéal de $\mathcal{A}''$. Je vais prouver que $\mathcal{P}$ n'est pas un idéal réduit dans $\mathcal{A}''$. En effet, on suppose $\mathcal{P}$ réduit dans $\mathcal{A}''$. Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}''/\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}'/\mathcal{P})$ est un homéomorphisme absolu, et que k est de caractéristique 0 , ceci implique $\mathcal{A}'/\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}''/\mathcal{P}$ est birationnel. Soit $\mathcal{D}'$ le conducteur de l'extension $\mathcal{A}'/\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}''/\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}'$ l'image réciproque de $\mathcal{D}'$

dans $\mathcal{A}'$. On a donc $\mathcal{C}'\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}' + \mathcal{P}$, et on a donc $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{P}$, ce qui implique que l'on a $\mathcal{D}' = \{0\}$. Comme l'extension $\mathcal{A}'/\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}''/\mathcal{P}$ est finie et non triviale, ceci est impossible.

Ainsi l'idéal $\mathcal{P}$ n'est pas réduit dans $\mathcal{A}''$. Comme $\mathcal{P}$ est un idéal gradué, il existe un élément homogène σ tel que $\sigma \notin \mathcal{P}$ et $\sigma^m \in \mathcal{P}$ pour $m \geq 2$. Comme $\mathcal{P}$ est réduit dans $\mathcal{A}'$, on a également $\sigma \notin \mathcal{A}'$, ce qui prouve l'assertion (2) .

Je vais prouver que l'assertion (2) implique l'assertion (3) . Utilisant l'assertion (2) , on peut construire une suite d'éléments homogènes $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ de $\mathcal{B}$ telle que si l'on pose $\mathcal{A}_o = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}[\sigma_1, \ldots, \sigma_{\iota}]$ pour $i > 0$ on ait $\sigma_i \notin \mathcal{A}_{i-1}$ et $\sigma_i^m \in \mathcal{A}_{i-1}$ pour $m \geq 2$. On a ainsi $\mathcal{A}_o \subsetneq \mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}_2 \ldots$ Comme $\mathcal{A}$ est un anneau noethérien, que $\mathcal{B}$ est un $\mathcal{A}$-module de type fini, et que chacune des algèbres $\mathcal{A}_o$, $\mathcal{A}_1 \ldots$ sont des $\mathcal{A}$-modules, la suite $\mathcal{A}_i$ est stationnaire et l'on a $\mathcal{A}_N = \mathcal{B}$ pour un certain entier $N \geq 0$.

Je vais prouver que l'assertion (3) implique l'assertion (1) . On suppose donc qu'il existe des sous-algèbres graduées $\mathcal{A}_o \subsetneq \mathcal{A}_1 \ldots \subsetneq \mathcal{A}_N$ satisfaisant à la condition (2) . Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est la composante des morphismes $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_{i-1})$ il suffit de montrer que chacun des morphismes $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_{i-1})$ est un homémorphisme absolu. Je peux donc supposer qu'il existe un élément homogène $\sigma \in \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{A}[\sigma] = \mathcal{B}$ et tel que $\sigma^m \in \mathcal{A}$ pour tout $m \geq 2$. Je peux aussi supposer que k est algébriquement clos. Pour montrer que $\theta : \mathrm{Spec}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est un homéomorphisme, il suffit de montrer que θ est injectif sur les points fermés, car θ étant fini et dominant, il est propre et surjectif. Il suffit donc de prouver qu'un morphisme d'algèbres $v : \mathcal{A} \longrightarrow k$ se prolonge d'au plus une manière en un morphisme $\tilde{v} : \mathcal{B} \longrightarrow k$. Si $v(\sigma^2) = 0$, on a nécessairement $\tilde{v}(\sigma) = 0$, ce qui détermine de manière unique $\tilde{v}$. Si $v(\sigma^2) \neq 0$, on a nécessairement $\tilde{v}(\sigma) = v(\sigma^3)/v(\sigma^2)$, ce qui détermine de manière unique $\tilde{v}$.

Soit X une variété projective, et $\mathcal{L}$ un fibré inversible. Je note $\Sigma_X(\mathcal{L})$ le schéma affine spectre de l'anneau $\oplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Soit 0 le point fermé de $\Sigma_X(\mathcal{L})$ correspondant à l'idéal "irrelevant" $\oplus_{n > 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$. Je pose $\Sigma_X^0(\mathcal{L}) = \Sigma_X(\mathcal{L}) - \{0\}$. Lorsque $\mathcal{L}$ est ample $\Sigma_X(\mathcal{L})$ est une variété.

<u>Lemme 54</u> : Soit X une variété projective, et $\mathcal{L}$ un fibré inversible très ample. Alors si X est absolument h-normale, $\Sigma_X(\mathcal{L})$ est absolument h-normale.

<u>Démonstration</u> : Soient $\tilde{X}$ le normalisé de X, et $j : \tilde{X} \longrightarrow X$ le morphisme de normalisation. Par le lemme 39, le normalisé de $\Sigma_X(\mathcal{L})$ est le schéma $\Sigma_{\tilde{X}}(j^*\mathcal{L})$.

Je vais d'abord montrer que le morphisme naturel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ est un isomorphisme.

Soient $k' = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et $\bar{k}$ la clôture algébrique de k. On a $\dim_k k' \leq \infty$, donc k' est un sur-corps de k de dimension finie. Comme k est de caractéristique zéro, l'algèbre $\bar{k} \otimes_k k'$ est réduite, et isomorphe à $(\dim_k k')$ copies de $\bar{k}$. Donc $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est le nombre de composantes connexes du schéma $\bar{X} = \mathrm{Spec}(\bar{k}) \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$.

On montre de même que $\dim_k \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ est le nombre de composantes connexes de $\bar{\tilde{X}} = \mathrm{Spec}(\bar{k}) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \tilde{X}$. Comme le morphisme $\tilde{X} \longrightarrow X$ est un homéomorphisme absolu, ces deux nombres sont égaux. Donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ est un isomorphisme.

Donc les points "irrelevants" 0 et $\tilde{0}$ de $\Sigma_X(\mathcal{L})$ et de $\Sigma_{\tilde{X}}(j^*\mathcal{L})$ ont même corps résiduel. Donc pour que le morphisme $\Sigma_{\tilde{X}}(j^*\mathcal{L}) \longrightarrow \Sigma_X(\mathcal{L})$ soit un homéomorphisme absolu, il suffit que le morphisme $\Sigma_{\tilde{X}}^0(j^*\mathcal{L}) \longrightarrow \Sigma_X^0(\mathcal{L})$ soit un homéomorphisme absolu. Soit $\pi : \Sigma_X^0(\mathcal{L}) \longrightarrow X$ le morphisme naturel. On a

$\Sigma^o_{\tilde{X}}(j^*\mathcal{X}) = \tilde{X} \times_X \Sigma^o_X(\mathcal{X})$. Je pose $A^* = \mathrm{Spec}\ k[T,T^{-1}]$. Le morphisme π est une fibration localement triviale de fibre A^* . Comme la propriété d'homéomorphisme absolue est locale, et que le morphisme de normalisation j est affine, on est ramené à prouver le fait suivant :

Soit $\mathcal{A}$ une k-algèbre intègre de type fini. Si $\mathcal{A}$ est absolument h-normale, $\mathcal{A}[T,T^{-1}]$ est absolument h-normale.

Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ le normalisé de $\mathcal{A}$. Alors $\tilde{\mathcal{A}}[T,T^{-1}]$ est le normalisé de $\mathcal{A}[T,T^{-1}]$. Il s'agit de prouver que le morphisme $\varphi : (\overline{K} \otimes \mathcal{A})[T,T^{-1}] \longrightarrow (\overline{K} \otimes \tilde{\mathcal{A}})[T,T^{-1}]$ induit un homéomorphisme φ sur le spectre. Pour cela il suffit de montrer que φ^* est injective sur les points fermés car φ^* est propre et surjective (puisque φ est finie et birationnelle). Comme $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ sont des algèbres de type fini, le corps résiduel d'un point fermé du spectre de $(\overline{K} \otimes \mathcal{A})[T,T^{-1}]$ est $\overline{K}$. Soit $v : (\overline{K} \otimes \mathcal{A})[T,T^{-1}] \longrightarrow \overline{K}$ un morphisme d'algèbre. On a $v(\overline{K} \otimes \mathcal{A}) = \overline{K}$. Comme $\mathcal{A}$ est absolument h-normale, v se prolonge d'au plus une manière en un morphisme $\tilde{v} : (\overline{K} \otimes \tilde{\mathcal{A}}) \longrightarrow \overline{K}$, et donc d'au plus une manière en un morphisme $\tilde{v} : (\overline{K} \otimes \tilde{\mathcal{A}})[T,T^{-1}] \longrightarrow \overline{K}$. Ceci montre le lemme.

On considère la situation suivante. Soient X une variété, Y une sous-variété. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ les normalisées de X et Y , et $j_X : \tilde{X} \longrightarrow X$, $j_Y : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ les morphismes de normalisation , $i : Y \longrightarrow X$ le morphisme d'inclusion.

On suppose X absolument h-normale. Alors par le lemme, il existe un unique morphisme $j : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_Y"] & \tilde{X} \arrow[d, "j_X"] \\
Y \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

Le lemme suivant est le lemme-clef de cet article :

<u>Lemme 55</u> : Soient X une variété projective, Y une sous-variété. On suppose X et Y absolument h-normale. Soit :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_Y"] & \tilde{X} \arrow[d, "j_X"] \\
Y \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

le diagramme commutatif associé comme précédemment. Soit $\mathscr{L}$ un fibré inversible très ample sur X . Soit $\tilde{\mathscr{L}} = j_X^*\mathscr{L}$. Alors si le morphisme naturel $\Gamma(\tilde{X},\tilde{\mathscr{L}}) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Y},j^*\tilde{\mathscr{L}})$ n'est pas surjectif, il existe un entier $n > 0$, $\sigma \in \Gamma(\tilde{Y},j^*\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes n})$ tels que

(1) σ n'appartient pas à l'image du morphisme $\Gamma(\tilde{X},\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Y},j^*\mathscr{L}^{\otimes n})$.

(2) Pour tout entier $m \geq 2$, σ^m appartient à l'image du morphisme $\Gamma(\tilde{X},\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes nm}) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Y},j^*\mathscr{L}^{\otimes nm})$.

<u>Remarque:</u> La condition (2) est évidemment équivalente à la condition (3) suivante:

(3) Pour $m = 2$ ou 3, σ^m appartient à l'image du morphisme

$$\Gamma(\tilde{X} , \tilde{\mathscr{L}}^{\otimes nm}) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Y} , j_*\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes nm}) .$$

<u>Démonstration</u> : Par la commutativité du diagramme précédent, on a $j_Y^* i^*\mathscr{L} \simeq j^* j_X^*\mathscr{L}$. On a donc un diagramme commutatif d'algèbres graduées

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{n\geq o}\Gamma(\tilde{X},\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \arrow[r, "j^\#"] & \oplus_{n\geq o}\Gamma(\tilde{Y},j^*\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes n}) \\
\oplus_{n\geq o}\Gamma(X,\mathscr{L}^{\otimes n}) \arrow[r, "i^\#"] \arrow[u] & \oplus_{n\geq o}\Gamma(Y,i^*\mathscr{L}^{\otimes n}) \arrow[u]
\end{tikzcd} .$$

Je pose $\mathscr{A}' = \mathrm{Im}\ i^\#$, $\mathscr{A} = \mathrm{Im}\ j^\#$, $\mathscr{B}' = \oplus_{n\geq o}\Gamma(Y,i^*\mathscr{L}^{\otimes n})$, $\mathscr{B} = \oplus_{n\geq o}\Gamma(Y,j^*\tilde{\mathscr{L}}^{\otimes n})$. Par le lemme 39, $\mathscr{B}$ est la clôture intégrale de l'algèbre $\mathscr{B}'$. Par un théorème de Serre ([10] III §5) $\mathscr{A}'$ est une sous-algèbre de codimension fini dans $\mathscr{B}'$. Donc le morphisme $\mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{B}'$ est birationnel et fini. Donc $\mathscr{B}$ est la clôture intégrale de $\mathscr{A}'$. Par le lemme, $\mathscr{B}'$ est absolument h-normale. Donc par le point 3 du lemme 53, $\mathscr{A}'$ est absolument h-normale. Comme on a $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ est également la clôture intégrale de $\mathcal{A}$, et par le point 2 du lemme 53 $\mathcal{A}$ est absolument h-normale. Donc par le point 2 du lemme 53 si $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, il existe un élément homogène $\sigma \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, tel que $\sigma^{m} \in \mathcal{A}$ pour tout $m \geq 2$. Soit n le degré de σ . Ainsi on a prouvé que si $\Gamma(\tilde{X},\tilde{\mathcal{L}}) \longrightarrow \Gamma(\tilde{Y},j^{*}\tilde{\mathcal{L}})$ n'est pas surjective, il existe $\sigma \in \Gamma(\tilde{Y},j^{*}\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$, tel que σ satisfasse aux conditions (1) et (2) recherchées. Ceci montre le lemme.

<u>Lemme 56</u> : Soient J une partie de I , $\Lambda \in P_{J}^{+}$, w , $v \in W_{J}$. On suppose $w \geq v$, et $\ell(w) = \ell(v) + 1$. On suppose que l'application $D_{w}(-\Lambda) \longrightarrow D_{v}(-\Lambda)$ n'est pas surjective. Soient $\tilde{w}$, $\tilde{v}$ des décompositions réduites de w et v avec $\tilde{w} \geq \tilde{v}$.

Alors il existe un entier $n \geq 0$, un élément $\sigma \in H_{\mathbf{Z}}^{0}(D(\tilde{V}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$ tels que :

(1) $y\sigma$ n'appartient pas à l'image du morphisme naturel $H_{\mathbf{Z}}^{0}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) \longrightarrow H_{\mathbf{Z}}^{0}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$, pour tout entier non nul y .

(2) Pour tout entier $m \geq 2$, σ^{m} appartient à l'image du morphisme naturel $H_{\mathbf{Z}}^{0}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-nm\Lambda)) \longrightarrow H_{\mathbf{Z}}^{0}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-nm\Lambda))$.

<u>Démonstration</u> : On suppose que le morphisme $D_{w}(-\Lambda) \longrightarrow D_{v}(-\Lambda)$ n'est pas surjectif. Je peux donc supposer que l'on a $k = \mathbb{Q}$. Je vais appliquer le lemme précédent aux données suivantes

$$X = S_{w,\Lambda}$$

$$Y = S_{v,\Lambda}$$

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}_{w}(-\Lambda) \ .$$

Par le lemme, les variétés X et Y sont absolument h-normale, et par construction $\mathcal{L}$ est très ample. Par le lemme 37, on a $D_{u}(-\Lambda) = \Gamma(\tilde{S}_{u,J},\tilde{\mathcal{L}}_{u}(-\Lambda))$ pour tout $u \in W_{J}$. L'hypothèse implique donc que le morphisme $H^{0}(\tilde{S}_{w,J},\tilde{\mathcal{L}}_{w}(-\Lambda)) \longrightarrow H^{0}(\tilde{S}_{v,J},\tilde{\mathcal{L}}_{v}(-\Lambda))$ n'est pas surjectif. Donc par le lemme précédent, il existe un entier $n \geq 0$, et $\sigma \in H^0(\tilde{S}_{v,J},\tilde{\mathcal{L}}_v(-n\Lambda))$ tel que

(1) σ n'appartient pas à l'image du morphisme

$H^0(\tilde{S}_{w,J},\tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)) \longrightarrow H^0(\tilde{S}_{v,J},\tilde{\mathcal{L}}_v(-n\Lambda))$.

(2) Pour tout $m \geq 2$, σ^m appartient à l'image du morphisme

$H^0(\tilde{S}_{w,J},\tilde{\mathcal{L}}_w(-nm\Lambda)) \longrightarrow H^0(\tilde{S}_{v,J},\tilde{\mathcal{L}}_v(-nm\Lambda))$.

On a des isomorphismes naturels, pour tout $u \in W_J$, toute décomposition réduite $\tilde{u}$ de u , tout entier m

$$H^0(\tilde{S}_{u,j},\tilde{\mathcal{L}}_u(-m\Lambda) \xrightarrow{\sim} H^0(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda))$$

$$\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda)) \xrightarrow{\sim} H^0(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda)) .$$

En outre l'application $H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda)) \longrightarrow H^0(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda))$ est injective et identifie $H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda))$ à un réseau de $H^0(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-m\Lambda))$. Donc quitte à multiplier σ par un entier non nul, on peut supposer que l'on a en outre

(3) $\sigma \in H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$.

(4) σ^{ℓ} est dans l'image du morphisme naturel

$H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\ell\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\ell\Lambda)$, pour $\ell = 2$ ou 3.

La condition (1) implique en particulier que $y\sigma$ n'appartient pas à l'image du morphisme $H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$, pour tout entier non nul y .

Comme tout nombre entier $m \geq 2$ est somme de 2 et de 3 , σ^m est dans l'image du morphisme naturel $H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-nm\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-nm\Lambda))$ pour tout $m \geq 2$. C.Q.F.D.

IX Formule de Demazure et Weyl

Dans tout ce paragraphe, k désigne un corps de caractéristique 0.

Lemme 57 : Soit $\Lambda \in P^+$. Alors pour tout $w \in W$, pour toute décomposition réduite $\tilde{w}$ de W, les morphismes

$$F_w(\Lambda) \longrightarrow D_{\tilde{w}}(-\Lambda)$$

$$D^{\tilde{w}}(\Lambda) \longrightarrow E_w(\Lambda)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration : Les deux applications sont transposées l'une de l'autre. Il suffit donc de prouver que l'application $F_w(\Lambda) \longrightarrow D_{\tilde{w}}(-\Lambda)$ est un isomorphisme. Comme il résulte du § VI que cette application est injective, il suffit de prouver la surjectivité.

Soit $J = \{ i \,/\, \Lambda(h_i) = 0\}$ par le lemme 45, il suffit de prouver que pour tout couple v,w d'éléments de W_J avec $v \leq w$, $\ell(v) + 1 = \ell(w)$, et toute décomposition réduite $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ de v et w avec $\tilde{v} \leq \tilde{w}$, l'application $D_{\tilde{w}}(-\Lambda) \longrightarrow D_{\tilde{v}}(-\Lambda)$ est surjective. On suppose par l'absurde que cette application n'est pas surjective. Alors par le lemme 56, il existe un entier $n > 0$, et $\sigma \in H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$ tels que

(i) $y\sigma$ n'est pas dans l'image de l'application

$R_1 : H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$, pour tout entier $y \neq 0$

(2) Pour tout entier $m \geq 2$, σ^m est dans l'image de l'application

$R_m : H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-nm\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-nm\Lambda))$.

Les schémas $D(\tilde{w})(\mathbf{Z})$ et $D(\tilde{v})(\mathbf{Z})$ sont propres sur $\mathbf{Z}$, et les faisceaux $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(x\Lambda)$ et $\mathcal{L}_{\tilde{v}}(x\Lambda)$ sont cohérents et plats sur $\mathbf{Z}$, pour tout entier x. Donc les groupes de cohomologie $H^*_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(x\Lambda))$ et $H^*_{\mathbf{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(x\Lambda))$ sont des $\mathbf{Z}$-modules de type fini.

Je note $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments, pour tout nombre premier p. On a donc

(a) Pour presque tout nombre premier p, σ n'appartient pas à $\operatorname{Im} R_1 + p\, H^0_{\mathbb{Z}}(D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda))$ (par la condition 1).

(b) Pour presque tout nombre premier p , on a $\mathbb{F}_p * H^1_{\mathbb{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) = 0$

(c) Pour presque tout nombre premier, $D(\tilde{v})(\mathbb{F}_p)$ et $D(\tilde{w})(\mathbb{F}_p)$ sont compatiblement scindables (par le lemme 52).

Je choisis p un nombre premier qui satisfasse aux conditions énoncées (a), (b), (c). Je note τ un élément de $H^0_{\mathbb{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-pn\ \Lambda))$ tel que $R_p(\tau) = \sigma^p$. Pour tout entier x , et tout $\tilde{u} \in W_J$, on a des isomorphismes naturels

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} H^0_{\mathbb{Z}}\ (D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(x\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(x\Lambda)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbb{F}_p * H^1_{\mathbb{Z}}\ (D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(x\Lambda)) \longrightarrow 0 \quad \text{(lemme 26).}$$

On peut donc définir les images $\overline{\tau}$ et $\overline{\sigma}$ dans les groupes (respectivement) $H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-np\ \Lambda))$ et $H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-np\Lambda)$. Pour tout entier m , soit $\overline{R}_m$ l'application naturelle

$$\overline{R}_m\ :\ H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-nm\Lambda)) \longrightarrow H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-nm\Lambda)).$$

Soient $\sigma_{\tilde{w}}$ et $\sigma_{\tilde{v}}$ des scindages compatibles de $D(\tilde{w})(\mathbb{F}_p)$ et $D(\tilde{v})(\mathbb{F}_p)$ relatif à l'immersion canonique $D(\tilde{v})(\mathbb{F}_p) \longrightarrow D(\tilde{w})(\mathbb{F}_p)$. De tels scindages existent par la condition (c) .Ces scindages induisent un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-np\ \Lambda)) \arrow[r, "\overline{R}_p"] \arrow[d, shift right, "\sigma_{\tilde{w}}"'] & H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-np\ \Lambda)) \arrow[d, shift right, "\sigma_{\tilde{v}}"'] \\
H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) \arrow[r, "\overline{R}_1"] \arrow[u, shift right, "\Sigma_p"'] & H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{v}),\mathcal{L}_{\tilde{v}}(-n\Lambda)) \arrow[u, shift right, "\Sigma_p"']
\end{tikzcd}$$

Par l'assertion (b) , on a

$$H^0_{\mathbb{F}_p}\ (D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) = \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} H^0_{\mathbb{Z}}(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda))$$

Donc par l'assertion (c) , on a $\bar{\sigma} \notin \mathrm{Im}\, \bar{R}_1$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma_{\tilde{v}} \circ \Sigma_p(\bar{\sigma}) \\ &= \sigma_{\tilde{v}} \circ \bar{R}_p(\bar{\tau}) \\ &= \bar{R}_1 \circ \sigma_{\tilde{w}}(\bar{\tau}) \in \mathrm{Im}\, \bar{R}_1 \end{aligned}$$

ce qui implique une contradiction.

Soit $w \in W$. Soit $s_{i_1} \ldots s_{i_n}$ une décomposition réduite de w. On note Δ_w l'opérateur $\mathbb{Z}$-linéaire $\Delta_w : \mathbb{Z}[\Lambda] \longrightarrow \mathbb{Z}[\Lambda]$ défini par $\Delta_w = \Delta_{s_{i_1}} \ldots \Delta_{s_{i_n}}$.

En utilisant le lemme de Matsumoto [61], il est clair que cet opérateur est défini, indépendamment de la décomposition réduite choisie. Ce fait résultera aussi du théorème 3. On définit aussi l'opérateur $\Delta_w = \Delta^{s_{i_1}} \ldots \Delta^{s_{i_1}}$. Ces opérateurs Δ_w et Δ^w sont appelés opérateurs de Demazure.

<u>Proposition 2</u> : Soit $\Lambda \in P^+$, et $w \in W$. On a $\mathrm{ch}(E_w(\Lambda)) = \Delta^w e^{\Lambda}$ et $\mathrm{ch}(F_w(\Lambda)) = \Delta_w e^{\Lambda}$.

<u>Démonstration</u> : On effectue la démonstration par récurrence sur $\ell(w)$.Je vais montrer par exemple la première assertion. Si $w = 1$, il n'y a rien à montrer.Aussi je peux supposer que l'on a $w \neq 1$. Soit $i \in I$, $v \in W$ tels $w = s_i v$ et $\ell(w) \geq \ell(v)$. Par le lemme 57 on a

$$E_w(\Lambda) = D^{s_i} E_v(\Lambda).$$

Comme l'application naturelle $E_v(\Lambda) \longrightarrow D^{s_i} E_v(\Lambda)$ est injective, on a par le lemme

$$\mathrm{ch}\, E_w(\Lambda) = \Delta^{s_i}\, \mathrm{ch}\, E_v(\Lambda)$$

D'où par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\ E_w(\Lambda) &= \Delta^{s_i}\,\Delta^{v}(e^{\Lambda}) \\ &= \Delta^{w}(e^{\Lambda}) \end{aligned}$$

Lemme 58 : Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, M de dimension finie. On suppose l'application $M \longrightarrow D^{s_i} M$ injective. On a alors pour tout $\lambda \in P$:

$$\dim M_{\lambda} - \dim M_{s_i(\lambda+\rho)-\rho} = \dim (D^{s_i})_{\lambda} - \dim (D^{s_i}M)_{s_i(\lambda+\rho)-\rho} .$$

Démonstration : Le lemme n'est juste qu'une application de la formule $\mathrm{ch}(D^{s_i}M) = \Delta^{s_i}\ \mathrm{ch}(M)$.

Lemme 59 : Soit $\Lambda \in P^+$, et soit $\mu \in P^+$. Alors l'ensemble $\{w \in W \ /\ w(\mu + \rho) - \rho \in C(\Lambda)\}$ est fini.

Démonstration : Soit Q le réseau des racines, et Q^+ l'ensemble des poids de $U(\underline{n}^+)$. Soit $\leq$ la relation d'ordre sur Q induite par Q^+. Si $\alpha, \beta \in Q^+$, on pose $\alpha \leq \beta$ dés que $\beta - \alpha \in Q^+$.

Soit $C = \{\ \beta \in Q^+ \ /\ \mu + \beta \leq \Lambda\ \}$. L'ensemble C est fini. Pour chaque $w \in W$, $\rho - w\rho$ appartient à Q^+ . Il est connu et facile [12,33], que l'application naturelle $w \longrightarrow \rho - w\rho$ est injective.

Soit $C' = \{w \in W\ ,\ \rho - w^{-1}\rho \in C\}$. Il vient donc que l'ensemble C' est fini. Or on a

$$\{w \in W\ ,\ w(\mu + \rho) - \rho \in C(\Lambda)\} = \{w \in W\ ,\ \mu + \rho - w^{-1}\rho \in C(\Lambda)\} \subseteq C' .$$

Donc l'ensemble $\{w \in W\ ,\ w(\mu + \rho) - \rho \in C(\Lambda)\}$ est fini.

Soit $\nu \in P$. je pose $F(\nu) = \{\gamma \in P\ ,\ \gamma \leq \nu\}$. Je note $\mathbf{Q}[[P]]$ l'ensemble des fonctions $\Upsilon : \Lambda \longrightarrow P$ dont le support est contenu dans une réunion finie d'ensemble $F(\nu)$. Sur $\mathbf{Q}[[P]]$ il existe une topologie naturelle, pour laquelle une suite $(\Upsilon_n) \in \mathbf{Q}[[P]]$ tend vers zéro si et seulement si pour tout $\nu \in \Lambda$, il existe un entier n_o tel que

$$\mathrm{Supp}(\Upsilon_n) \cap \nu+Q \subseteq F(\nu)$$

pour tout $n \geq n_o$.

Il est clair que la structure d'anneau de $Q[P]$ se prolonge par continuité à $\mathbb{Q}[[P]]$.

<u>Lemme 60</u>: 1) On a $\mathrm{ch}\, L(\Lambda) \in \mathbb{Q}[[P]]$, pour tout $\Lambda \in P^+$.

2) Soit $\Lambda \in P^+$. Il existe une unique fonction $\Upsilon : P^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$, telle que

$$\mathrm{ch}(L(\Lambda)) = \sum_{\mu \in P^+} \Upsilon(\mu) \frac{\sum_w \varepsilon(w)\, e^{w(\mu+\rho)}}{\sum_w \varepsilon(w)\, e^{w\rho}} .$$

<u>Démonstration</u> : Les poids de $L(\Lambda)$ sont de multiplicité finie et contenus dans $F(\Lambda)$. On a donc $\mathrm{ch}\, L(\Lambda) \in \mathbb{Q}[[P]]$. On a pour tout $w \in W$, $w\rho \in F(\rho)$. Donc l'expression formelle $\sum_w \varepsilon(w)\, e^{w\rho}$ converge dans $\mathbb{Q}[[P]]$ et est inversible. Soit $Q = (\sum_w \varepsilon(w)\, e^{w\rho})\ \mathrm{ch}\, L(\Lambda)$ .On a $Q \in \mathbb{Q}[[P]]$, et $Q = \sum_{\mu \in P} Q(\mu)\, e^{\mu}$. On notera que W agit naturellement sur $\mathbb{Q}[[P]]$, et l'on a pour tout $w \in W$: $w\, Q = \varepsilon(w)\, Q$. Donc le support de Q est W-invariant, et l'on a Supp $Q \subseteq F(\Lambda+\rho)$. Ceci implique que pour tout poids $\mu \in$ Supp Q, il existe $w \in W$ tel que $w\mu$ soit maximal dans l'ensemble $W\mu$. On a donc $w\mu \in P^+$. On note aussi que pour tout μ, et tout $i \in I$, on a $Q(\mu) = - Q(s_i\mu)$. Ceci implique que si $\mu \in P^+ \cap \mathrm{Supp}(\Upsilon)$, on a $\mu(h_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, donc on a $\mu - \rho \in P^+$. On note donc Υ la fonction de P^+ dans $\mathbb{Z}$ définie par $\Upsilon(\mu) = Q(\mu+\rho)$. Il est alors clair que l'on a

$$\Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho}\Big)\ \mathrm{ch}\, L(\Lambda) = \sum_{\mu \in P^+} \Upsilon(\mu) \sum_w \varepsilon(w) e^{w(\mu+\rho)}$$ d'où la formule cherchée.

A présent je reprends une méthode d'Heckman tirée de son travail cité en introduction, pour déduire la formule de Weyl des formules de Demazure.

Lemme 61 Soit $\Lambda \in P^+$. Alors pour tout $\mu \varepsilon P^+$, on a

$$\sum_w \varepsilon(w) \dim(L(\Lambda)_{w(\mu+\rho)-\rho} = \delta_{\Lambda,\mu} .$$

Démonstration On note d'abord que par le lemme 59 la somme considérée est finie. Soit $\mu \in P^+$. Par le lemme il existe un élément $v \in W$ tel que pour tout $w \in W$ l'application : $(E_v(\Lambda))_{w(\mu+\rho)-\rho} \longrightarrow L(\Lambda)_{w(\mu+\rho)-\rho}$ soit un isomorphisme. Or en appliquant le lemme 58 de manière récurrente, il est facile de prouver que pour tout $v \in W$ on a

$$\sum_w \varepsilon(w) \dim(E_v(\Lambda))_{w(\mu+\rho)-\rho} = \delta_{\Lambda,\mu} .$$

En effet pour $v = 1$ cette formule est évidente. Ainsi le lemme est montré.

Théorème 1 1) Soit $\Lambda \in P^+$. On a

$$\mathrm{ch}\ L(\Lambda) = \frac{\sum \varepsilon(w)\ e^{w(\Lambda+\rho)}}{\sum \varepsilon(w)\ e^{w\rho}} .$$

2) On a en outre la formule du dénominateur

$$\Pi_{\alpha\in\Delta^+} (1-e^{-\alpha})^{\dim g_\alpha} = \sum \varepsilon(w)\ e^{w\rho-\rho}$$

Démonstration Je démontre d'abord le point 1. En utilisant le lemme 60, il s'agit de prouver que l'application $\varphi : P^+ \longrightarrow \mathbf{Z}$ telle que :

$$\mathrm{ch}\ L(\Lambda) = \sum_{\mu\varepsilon P^+} \varphi(\mu) \frac{\sum \varepsilon(w)\ e^{w(\mu+\rho)}}{\sum \varepsilon(w)\ e^{w\rho}}$$

est l'application de Dirac δ_Λ.

Soit $\mu \varepsilon P^+$. On a $\varphi(\mu) = \sum_{w\varepsilon W} \varepsilon(w) \dim(L(\Lambda))_{\mu+\rho-w\rho}$.

Par invariance de Λ caractère de $L(\Lambda)$ sous l'action de W, on a

$$\varphi(\mu) = \sum_{w\varepsilon W} \varepsilon(w) \dim(L(\Lambda))_{w(\mu+\rho)-\rho} .$$

D'où $\rho(\mu) = \delta_{\Lambda,\mu}$ par le lemme 61, d'où le point 1.

Je démontre le point 2 du théorème. Si φ, ψ sont deux élément de

$\mathbb{Q}[[P]]$, je dis que φ est inférieure à ψ (ce que je note $\varphi \leq \psi$) si l'on a $\varphi(\mu) \leq \psi(\mu)$ pour tout $\mu \varepsilon P$.

Par le théorème de Poincaré - Birkhoff - Witt on a $(\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha})^{-1} = \mathrm{ch}\, U(\underline{n})$ Je choisis Λ un élément de P^+ tel que $\Lambda(h_i) > 0$ pour tout $i \in I$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a une suite exacte

$$\bigoplus_{i\in I} V(s_i(n\Lambda+\rho)-\rho) \longrightarrow V(n\Lambda) \longrightarrow L(n\Lambda) \longrightarrow 0 .$$

On a donc

$$\mathrm{ch}\, V(n\Lambda) \geq \mathrm{ch}\, L(n\Lambda) \geq \mathrm{ch}\, (V(n\Lambda)) - \sum_{i\varepsilon I} \mathrm{ch}\, V({}^{s}i(n\Lambda+\rho)-\rho).$$

Pour tout $\mu \in P$, on a $\mathrm{ch}\, (V(\mu)) = e^{\mu}\mathrm{ch}\, U(n^-)$

On a donc

$$\mathrm{ch}\, (U(\underline{n}^-)) \geq e^{-n\Lambda}\, \mathrm{ch}(L(n\Lambda) \geq (1 - \sum_{i\in I} e^{-(n\lambda(h_i)+1)\alpha_i})\, \mathrm{ch}(U(\underline{n}^-)).$$

Donc la suite $e^{-n\Lambda}\, \mathrm{ch}(n\Lambda)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ et l'on a $\mathrm{ch}\, (U(\underline{n}^-)) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda}\, \mathrm{ch}(L(n\Lambda))$. Or il est clair que $\sum_{\substack{w\in W\\ w\neq 1}} \varepsilon(w)\, e^{w(n\Lambda+\rho)-(n\Lambda+\rho)}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On a donc $\mathrm{ch}\, U(\underline{n}^-) = \dfrac{1}{\sum \varepsilon(w)\, e^{w\rho-\rho}}$, d'où le point 2 du théorème.

X.- Normalité de certaines images des variétés de Schubert.

Pour tout poids $\lambda \in P^+$, je pose $J(\lambda) = \{i / \lambda(h_i) = 0\}$. Si J est une partie de $\{1,\dots,N\}$, je pose $P^+_J = \{\lambda \in P^+ / J(\lambda) = J\}$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Kac-Moody considérée. Je dis que $\mathfrak{g}$ satisfait la condition Σ , si pour tout $\Lambda \in P^+$, le $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module $L(\Lambda)$ est simple. Un théorème de V. Kac [33] s'exprime en disant qu'une algèbre de Kac-Moody symétrisable satisfait la condition Σ . A part ceci, je ne connais aucun exemple d'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, et de poids Λ , pour lesquels on sache déterminer si le module $L(\Lambda)$ est simple ou non simple (excepté les exemples déduits directement du théorème de Kac).

Je vais énoncer le théorème suivant sous l'hypothèse générale, puis sous l'hypothèse où $\mathfrak{g}$ satisfait Σ : le résultat obtenu est alors la généralisation exacte du théorème de normalité des variétés de Schubert (pour les groupes semi-simples) démontré par A. Joseph [31] et C.S. Seshadri [57].

Théorème 2 :

Soient J une partie de $\{1,\dots,N\}$, $w \in W_J$, et $\Lambda \in P^+_J$. Alors pour tout entier n suffisamment grand (la borne inférieure dépendant des données) le morphisme naturel $\tilde{S}_{w,J} \to \mathbb{P}\,E_w(n\Lambda)$ est une immersion fermée projectivement normale. En particulier on a :

(a) Pour n suffisamment grand, $S_{w,n\Lambda}$ est normale.

(b) Pour tout $u \in W_J$, $u \leq w$, le morphisme naturel $\tilde{S}_{u,J} \to \tilde{S}_{w,J}$ est une immersion fermée.

Théorème 2.Σ :

Je suppose que $\mathfrak{g}$ satisfait Σ . Soient J une partie de $\{1,\dots,N\}$, $w \in W_J$ et $\Lambda \in P^+_J$. Alors le morphisme naturel $\tilde{S}_{w,J} \to \mathbb{P}\,E_w(\Lambda)$ est une immersion fermée projectivement normale. En particulier la variété $S_{w,\Lambda}$ est normale.

Démonstration :

1) Je vais commencer par démontrer le théorème 2. Par définition, le faisceau inversible $\tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)$ est un faisceau très ample de $S_{w,\Lambda}$, et en particulier ample. Comme le morphisme $j_w : \tilde{S}_{w,J} \to S_{w,\Lambda}$ est une normalisation, il est fini. Donc [26] , le faisceau inversible $j^*_w\, \overline{\mathcal{L}}_w(-\Lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)$ est ample. Donc par le lemme 38, pour n suffisamment grand, le faisceau inversible $\tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)$

est très ample. Par les lemmes 27 et 57 le morphisme naturel

$$F_w(n\Lambda) \to H^0(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda))$$

est un isomorphisme pour tout n. Donc pour n suffisamment grand, le morphisme $\tilde{S}_{w,J} \to \mathbb{P}E_w(n\Lambda)$ est une immersion fermée projectivement normale. En particulier on obtient

a) Pour n suffisamment grand, le morphisme $\tilde{S}_{w,J} \to S_{w,n\Lambda}$ est un isomorphisme, donc $S_{w,n\Lambda}$ est normale.

b) Pour n suffisamment grand, et $u \in W_J$ tel $u \leq w$, les flèches verticales du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{S}_{u,J} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{S}_{w,J} \arrow[d] \\
S_{u,n\Lambda} \arrow[r] & S_{w,n\Lambda}
\end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes. Donc le morphisme naturel $\tilde{S}_{u,J} \to \tilde{S}_{w,J}$ est une immersion fermée.

2) Je passe à la démonstration du théorème 2.Σ. Je vais montrer que l'anneau $k[\Sigma_{w,\Lambda}]$ est intégralement clos. La clôture intégrale de cet anneau, $k[\tilde{\Sigma}_{w,\Lambda}]$ est égale par le lemme 39 à $\bigoplus_{n\geq 0} H^0(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda))$. Donc par les lemmes 26 et 58, on a $k[\tilde{\Sigma}_{w,\Lambda}] = \bigoplus_{n\geq 0} F_w(n\Lambda)$. Comme on a $k[\Sigma_{w,\Lambda}] \supset F_w(\Lambda)$, pour montrer que $k[\Sigma_{w,\Lambda}]$ est intégralement clos, il suffit de montrer que $k[\tilde{\Sigma}_{w,\Lambda}]$ est engendré, comme anneau, par le sous-espace $F_w(\Lambda)$. Il suffit donc de montrer que pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme naturel $S^n F_w(\Lambda) \to F_w(n\Lambda)$ est surjectif. Comme le module $L(n\Lambda)$ est simple, le sous-espace vectoriel $(E_w(n\Lambda))^{\underline{n}^+}$ est de dimension 1, et a pour base un vecteur v_n de poids $n\Lambda$. Soit v_n^* un vecteur non nul de $F_w(n\Lambda)$ de poids $-n\Lambda$. On a donc un isomorphisme $k v_n^* \xrightarrow{\sim} F_w(n\Lambda)/_{\underline{n}^+} F_w(n\Lambda)$. Comme $\underline{n}^+$ agit de manière nilpotente sur $F_w(n\Lambda)$, le $U(\underline{n}^+)$-module $F_w(n\Lambda)$ est cyclique, engendré par v_n^*.

Comme le morphisme naturel $S^n F_w(\Lambda) \to F_w(n\Lambda)$ est un morphisme de $U(\underline{n}^+)$-module et que l'on a $k(v_1^*)^n = k v_n^*$, ce morphisme est surjectif. Donc $k[\Sigma_{w,\Lambda}]$ est intégralement clos, et le morphisme $\tilde{S}_{w,\Lambda} \hookrightarrow \mathbb{P}E_w(\Lambda)$ est une immersion fermée projectivement normale. En particulier, $S_{w,\Lambda}$ est normale, ce qui finit la preuve du théorème 2.

Comme cas particulier du théorème 2, on obtient que lorsque $\mathfrak{g}$ est symétrisable (ou plus particulièrement satisfait Σ) les variétés de Schubert ne dépendent pas de la représentation $L(\Lambda)$ choisie pour les définir (plus précisement, une variété de Schubert ne dépend de la représentation $L(\Lambda)$ qu'à travers la partie $J(\Lambda)$). Ce fait avait déjà été prouvé par J. Tits ([59] cf. aussi [58]).

On suppose $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Le théorème de Joseph auquel j'ai fait allusion s'énonce ainsi: Soient $\Lambda \in P^+$, et $w \in W$. Si est suffisamment loin des murs, le morphisme naturel $D^w(\Lambda)$-- $E_w(\Lambda)$ est un isomorphisme. Par la démonstration précédente il est clair que ce résultat est équivalent à la normalité des variétés de Schubert. En effet il suffit de montrer la normalité des variétés de Schubert dans G/B , puisque une variété de Schubert générale n'est qu'un fibré localement trivial de fibre une variété lisse au-dessus d'une variété de Schubert sur G/B . Un facile argument sur le fait que G/B est homogène implique que pour tout $\Lambda \in P^+_{\emptyset}$, le morphisme naturel G/B $\mathbb{P}L(\Lambda)$ est une immersion fermée. Donc toutes les variétés $S_{w,\Lambda}$ ($\Lambda \in P^+_{\emptyset}$) pour un $w \in W$ fixé sont isomorphes à la variété de Schubert correspondant dans G/B . Par l'argument utilisé dans la démonstration du théorème 2, le théorème de Joseph est équivalet à la normalité de $S_{w,\Lambda}$ pour Λ suffisamment loin des murs.

XI.- Rationalité des singularités des variétés de Schubert et applications.

Le lemme suivant, qui compare les dérivés des foncteurs de Joseph D_{s_i} à la cohomologie des faisceaux $\mathcal{L}_{s_i}$ sera généralisé plus loin au cas des foncteurs D_w. Néanmoins, il ne m'a pas été possible de traiter le cas général immédiatement et d'éviter la répétition des mêmes démonstrations.

Lemme 62 :

Soient $i \in I$ et $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Alors on a un isomorphisme canonique, pour chaque entier n: $D^n_{s_i} M \simeq H^n(P_i/_B, \mathcal{L}_{s_i}(M))$.

Démonstration :

Exceptionnellement, je vais m'écarter de la notation de § I et poser $\underline{a}_i = k\, e_i \oplus k\, h_i \oplus k\, f_i$, $\underline{b}_i = k\, h_i \oplus k\, e_i$. Soient A_i et B_i les groupes associés à $\underline{a}_i$ et $\underline{b}_i$, de sorte que A_i est isomorphe à $SL(2)$, et B_i à son sous-groupe de Borel. Pour éviter toute confusion, je note $\bar{D}_{s_i} : \mathcal{C}(B_i) \to \mathcal{C}(B_i)$ le foncteur de Joseph sur $\mathcal{C}(B_i)$. D'après le § III, on a un isomorphisme de $\underline{a}_i$-modules $\bar{D}^*_{s_i} M \simeq D^*_{s_i} M$, et on a un isomorphisme naturel $A_i/_{B_i} \simeq P_i/_B$.

Donc pour montrer le lemme, on peut ne considérer que le cas où l'on a $\mathfrak{g} = a_i$, $\underline{b} = \underline{b}_i$. On pose alors $G = A_i$, $B = B_i$, $D_s = D_{s_i}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{s_i}$. Pour tout module $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, on a un isomorphisme naturel $D_s\, M \xrightarrow{\sim} H^0(G/_B, \mathcal{L}(M))$. Comme le foncteur $\mathcal{L}$ est exact, on obtient un morphisme naturel $D^*_s\, M \to H^*(G/_B, \mathcal{L}(M))$. Pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'étant donné un injectif I de $\mathcal{C}(\underline{b})$, on a $H^p(G/_B, \mathcal{L}(I)) = \{0\}$ pour $p \neq 0$. Soit α l'unique racine de $\mathfrak{g}$ et soit $\rho = 1/_2\, \alpha$. Tout injectif de $\mathcal{C}(B)$ est une somme directe (éventuellement infinie) de modules $\check{V}(n\rho)$, pour divers $n \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a $k\,[B] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \check{V}(n\rho)$. Donc tout injectif est un facteur direct d'une somme, éventuellement infinie, de copies du module $k\,[B]$. Or il est clair que $\mathcal{L}$ commute à la limite inductive, et comme $G/_B$ est un espace noethérien, la cohomologie des faisceaux sur $G/_B$ commute également à la limite inductive. On veut donc montrer $H^p(G/_B, \mathcal{L}(k\,[B]) = \{0\}$ pour $p \neq 0$.

Soit $\pi : G \to G/_B$ le morphisme de projection. Il est clair que l'on a $\pi_*\, \mathcal{O}_G = \mathcal{L}(k\,[B])$. Comme le fibré π est localement trivial, de fibre B et que la fibre est affine, on a $R^q\, \pi_*\, \mathcal{O}_G = \{0\}$ pour $q \neq 0$. Donc la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(G/_B, R^q_{\pi_*}\mathcal{O}_G) \Rightarrow H^{p+q}(G,\mathcal{O}_G)$$

dégénère et on a des isomorphismes

$$H^*(G,\mathcal{O}_G) \simeq H^*(G/_B, \pi_* \mathcal{O}_G) \ .$$

Comme G est affine, par le théorème de Serre il vient $H^p(G,\mathcal{O}_G) = \{0\}$ pour $p \neq 0$. On en déduit donc que l'on a $H^p(G/_B, \mathcal{L}(k\ [B])) = 0$ pour $p \neq 0$, ce que l'on cherchait à montrer.

Soit X un B-schéma sur $\mathrm{Spec}(k)$. Soit $i \in \{1,\ldots,N\}$. On note ν et π les morphismes naturels du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B X \arrow[d, "\pi"] & X \arrow[l] \arrow[d, "\nu"] \\
P_i/B & \mathrm{Spec}\ k \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dans le lemme suivant, on suppose que X est séparé sur $\mathrm{Spec}(k)$.

Lemme 63 :

Soit $\mathcal{L} \in \underline{\underline{\mathrm{Qcoh}}}_B(X)$. Alors pour tout couple d'entier p,q on a des isomorphismes naturels

$$H^p(P_i/_B, R^q\ \pi_*\ \mathcal{D}_{\mathbf{P}_i}\ \mathcal{L}) \simeq D^p_{s_i}\ H^q(X,\mathcal{L}) \ .$$

Démonstration :

Par hypothèse, ν est séparé. Donc par le lemme 23.3 on a un isomorphisme naturel

$$R^q\ \pi_*\ \mathcal{D}_{\mathbf{P}_i}\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathbf{P}_i}\ R^q\ \nu_*\mathcal{L} \ .$$

On a donc

$$R^q\ \pi_*\ \mathcal{D}_{\mathbf{P}_i}\mathcal{L} = \mathcal{D}_{\mathbf{P}_i}\ H^q(X,\mathcal{L}) \ .$$

Enfin par le lemme 62, on a un isomorphisme naturel

$$H^p(P_i/_B, \mathcal{D}_{\mathbf{P}_i}\ H^q(X,\mathcal{L})) \simeq D^p_{s_i}\ H^q(X,\mathcal{L}) \ .$$

On obtient ainsi l'isomorphisme $H^p(P_{i}/_B, R^q\, \pi_* \mathscr{D}_{P_i}\, \mathscr{L}) \simeq D^p_{s_i}\, H^q(X,\mathscr{L})$ cherché.

Lemme 64 :

Pour tout $w \in \widetilde{W}$ et tout $\Lambda \in P^+$, on a $H^q(D(w),\mathscr{L}_w(-\Lambda)) = 0$, pour tout $q > 0$.

Démonstration :

On montre le lemme par récurrence sur la longueur $\ell(w)$ de l'élément w . Pour $w = 1$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc que l'on a $\ell(w) \geq 1$. Soient $v \in \widetilde{W}$, $i \in \{1,\dots,N\}$ tels que $w = s_i\, v$. Le morphisme naturel $D(v) \to \mathrm{Spec}(k)$ induit comme précédemment un morphisme $\pi : D(w) \to P_{i}/_B$. La suite spectrale de Leray associée au morphisme π a pour second terme $E_2^{p,q} = H^p(P_{i}/_B, R^q\, \pi_*\, \mathscr{L}_w(-\Lambda))$. Par le lemme 63, on a donc $E_2^{p,q} = D^p_{s_i}\, H^q(D(v),\mathscr{L}_v(-\Lambda))$. Par hypothèse de récurrence cette suite spectrale dégénère et l'on a

$$H^q(D(w),\mathscr{L}_w(-\Lambda)) = D^q_{s_i}\, H^0(D(v),\mathscr{L}_v(-\Lambda)) \quad \text{pour tout entier } q \ .$$

Par les lemmes 27 et 57 on a :

$$H^0(D(v),\mathscr{L}_v(-\Lambda)) = F_v(\Lambda)$$

$$H^0(D(w),\mathscr{L}_w(-\Lambda)) = F_w(\Lambda) \ .$$

Ceci implique que l'application naturelle $D_{s_i}\, H^0(D(v),\mathscr{L}_v(-\Lambda)) \to H^0(D(v),\mathscr{L}_v(-\Lambda))$ est surjective. Par le lemme 13, il vient que l'on a $D^q_{s_i}\, H^0(D(v),\mathscr{L}_v(-\Lambda)) = 0$, pour $q > 0$. Ceci montre que l'on a $H^q(D(w),\mathscr{L}_w(-\Lambda)) = 0$ pour tout entier $q > 0$. C.Q.F.D.

Soit $\nu : Z \to X$ un morphisme birationnel entre variétés propres. On suppose que la variété Z est lisse. Suivant G. Kempf, on dit que ν est une résolution rationnelle des singularités de X si les trois conditions suivantes sont satisfaites [7], [36]:

(a) $\nu_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X$

(b) $R^q\, \nu_* \mathcal{O}_Z = 0$ pour $q \neq 0$

(c) $R^q\, \nu_* K_Z = 0$ pour $q \neq 0$,

où K_Z est le faisceau canonique de Z . Cette définition a un sens sur des corps de caractéristique arbitraire. En caractéristique 0 , un théorème transcendant de Grauert-Riemannschneider exprime que la condition (c) résulte des conditions (a) et (b) ([7], [36]); des versions plus récentes du théorème de Kodaira [14] [37] prouvent la condition (c) sous des hypothèses très faibles.

Je vais prouver que les variétés de Demazure (ou plus précisément les morphismes canoniques du type $D(\tilde{w}) \rightarrow S_{w,J}$) sont des résolutions rationnelles des singularités des variétés de Schubert. Ici je vais montrer les conditions (a) et (b) précédentes et déduire la condition (c) par le théorème de Grauert-Riemannschneider (suivant la démonstration de Demazure en dimension finie). Dans le cas spécial des variétés de Schubert, il existe une autre démonstration (due à Ramanathan) pour déduire le point (c) des points (a) et (b). J'indiquerai cette démonstration plus loin, lors de la construction des variétés de Schubert sur une base arbitraire.

Il est connu que les conditions (a), (b) et (c) impliquent que X est Cohen-Macaulay. Ce fait sera essentiel pour comparer les topologies sur les espaces de drapeaux.

Théorème 3 :

Soient J une partie de $\{1,\ldots,N\}$, $w \in W_J$ et $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w .

(a) Le morphisme $\mu_w : D(\tilde{w}) \rightarrow \tilde{S}_{w,J}$ est une résolution rationnelle des singularités de $\tilde{S}_{w,J}$.

(b) Soit $\Lambda \in P^+$ tel que $\Lambda(h_j) = 0$ pour $j \in J$. Alors $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = 0$ pour $q \neq 0$ et on a $H^0(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = F_w(\Lambda)$.

Démonstration :

Je fixe d'abord Λ un élément de P^+_J . Pour alléger les notations, je pose $\mu = \mu_w$. Par construction, le faisceau $\overline{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)$ est un faisceau inversible très ample de $S_{w,\Lambda}$. Donc comme précédemment, $\tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)$ est un faisceau ample de $\tilde{S}_{w,J}$. Les faisceaux $R^q \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}}$ sont cohérents, et au plus $(\ell(w)+1)$ d'entre eux sont non nuls. Donc pour tout entier n suffisamment grand, les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

(1) $R^p \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}(-n\Lambda)$ est engendrée par ses sections globales pour tout entier p ,

(2) $H^q(\tilde{S}_{w,J}, R^p \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)) = 0$, pour tout couple d'entiers p,q , avec $q \neq 0$.

Les groupes $E_2^{p,q} = H^q(\tilde{S}_{w,J}, R^p \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda))$ forment le second terme d'une suite spectrale de Leray qui converge vers $H^*(D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda))$. Par le lemme 36, on a $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda) = \mu^* \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)$ et donc la formule de la projection donne

$$R^q \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda) = R^q \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda) .$$

La condition (2) implique la dégénérescence de la suite spectrale considérée et l'on a donc pour tout entier n suffisamment grand :

$$H^p(D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-n\Lambda)) = H^0(\tilde{S}_{w,J}, R^p \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)) .$$

La condition (1) et le lemme 64 impliquent que pour n suffisamment grand, on a $R^p \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda) = 0$, pour $p \neq 0$. Or $\tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)$ est inversible, donc ceci prouve que l'on a $R^p \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}}$ pour $p \neq 0$. On notera que l'on a aussi $\mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,J}}$ car par construction $\tilde{S}_{w,J}$ est normale et μ est un morphisme propre et birationnel.

On a ainsi montré les conditions (a) et (b) de la définition d'une résolution rationnelle des singularités. Le corps de base étant supposé de caractéristique 0, ces conditions impliquent la condition (c). Ceci montre le point (a) du théorème.

Soit $\lambda \in P_J$. Par le lemme 36, on a $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(\lambda) = \mu^* \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)$ et par la formule de projection, on a $R^q \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(\lambda) = R^q \mu_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)$. Donc par le point (1) du lemme, on obtient que pour tout $q \neq 0$, on a $R^q \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(\lambda) = 0$. La dégénérescence de la suite spectrale de Leray associée à μ implique donc un isomorphisme

$$H^*(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)) \xrightarrow{\sim} H^*(D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(\lambda)) .$$

En particulier, dans le cas où l'on a $\lambda = -\Lambda$, pour un certain $\Lambda \in P_J \cap P^+$, alors il vient par les lemmes 27 et 57

$$H^0(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = F_w(\Lambda)$$

et par le lemme 64, on a pour tout $q \neq 0$

$$H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = 0 .$$

Ceci finit la preuve du théorème 3.

Remarque :

(1) Un théorème analogue a été prouvé par M. Demazure pour les algèbres de Lie semi-simples de dimension finie. Cependant la démonstration de [7] comporte un trou. Si l'on tient compte de cette erreur, le résultat de Demazure peut être énoncé sous la forme suivante. Si G est un groupe semi-simple, B un sous-groupe de Borel, si toutes les variétés de Schubert de $G/_B$ sont normales, alors elles sont à singularités rationnelles (la caractéristique du corps de base étant supposée être zéro).

(2) L'intégralité du théorème 3 a été prouvée par Metha, Ramanan et Ramanathan en caractéristique 0 et par Ramanathan en toute caractéristique ([52]). On notera que l'utilisation des foncteurs de Joseph évite le recours au subtil lemme de Kempf que l'on trouve dans [7] et [36]. Ici le lemme de Kempf est utilisé implicitement au cours de la démonstration du théorème 3 sous une forme complètement triviale.

(3) L'idée de montrer les conditions (a) et (b), puis d'utiliser le théorème de Grauert-Riemannschneider dans ce type de problème est dû à M. Demazure [7].

Dans la suite, on s'intéresse au cas où l'on a $J = \emptyset$. On pose alors $\tilde{S}_w = \tilde{S}_{w,J}$, pour tout $w \in W$. Dans le cas où l'algèbre de Kac-Moody est de dimension finie, on dispose pour tout w d'une variété $\overline{BwB}$ telle que $\tilde{S}_w = \overline{BwB}/_B$. Donc à tout module $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, on peut associer le faisceau $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ des sections du fibré $\overline{BwB}\; x^B M$. Lorsque M est de dimension finie, $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est un faisceau localement libre de rang la dimension de M. Ici on va procéder de manière inverse. Le théorème 3 va permettre pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$ de définir un faisceau $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ sur $\tilde{S}_w$ (ce faisceau étant localement libre de rang la dimension de M dès que celle-ci est finie). On pourra alors construire un certain schéma $B(w)$ au-dessus de $\tilde{S}_w$, tel que $\tilde{S}_w = B(w)/_B$ (en dimension finie ce schéma est $\overline{BwB}$). Puis on montrera que $B(w)$ est affine.

Cette construction sera utile pour identifier les dérivées des foncteurs de Joseph à la cohomologie de certains faisceaux.

Soit $w \in W$ et soit $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w. Je note μ le morphisme naturel $\mu : D(\tilde{w}) \to \tilde{S}_w$. Soit $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$. Je note $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ le faisceau sur $\tilde{S}_w$: $\tilde{\mathcal{L}}_w(M) = \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)$. On note que lorsque M est un module de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ isomorphe à un certain module unidimensionnel λ, où $\lambda \in P$, cette notation est compatible avec celle donnée au § V.

Le faisceau $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est bien défini, i. e. ne dépend pas du choix de la décomposition réduite $\tilde{w}$. Ce fait a déjà été prouvé pour un module M unidimensionnel $M = \lambda$.

Lemme 65:

Soient $w \in W$, w_1 , w_2 deux décompositions réduites de w , $\nu_1 : D(w_1) \longrightarrow \tilde{S}_w$, $\nu_2 : D(w_2) \longrightarrow \tilde{S}_w$ les morphismes naturels. Alors pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, on a un isomorphisme canonique $(\nu_1)_*\mathcal{L}_{w_1}(M) \simeq (\nu_2)_*\mathcal{L}_{w_2}(M)$.

Démonstration:

Par le lemme de Matsumoto ([3], ch.IV §1.5), il suffit de montrer le lemme dans le cas où w_1 et w_2 sont de la forme:

$$w_1 = u\,\varpi_1\,v$$
$$w_2 = u\,\varpi_2\,v$$

où $u,v \in \tilde{W}$ et où ϖ_1, ϖ_2 sont deux décompositions reduites d'un plus grand élément ϖ d'un sous-groupe de Weyl fini de rang deux, i.e. la situation étudiée précédemment. Reprenant les notations du lemme 28, il existe un morphisme naturel $j : D \longrightarrow \tilde{S}_w$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D(w_1) \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[ddr, "\nu_1"'] & & D(w_2) \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[ddl, "\nu_2"] \\
& D \arrow[d] & \\
& \tilde{S}_w &
\end{tikzcd}$$

Le lemme 72.2 donne un isomorphisme naturel

$$(\Pi_1)_*\mathcal{L}_{w_1}(M) \simeq (\Pi_2)_*\mathcal{L}_{w_2}(M) .$$

On a donc un isomorphisme naturel $j_*(\Pi_1)_*\mathcal{L}_{w_1}(M) \simeq j_*(\Pi_2)*\mathcal{L}_{w_2}(M)$, i.e. un isomorphisme naturel $(\nu_1)_*\mathcal{L}_{w_1}(M) \simeq (\nu_2)_*\mathcal{L}_{w_2}(M)$. On vérifie comme au chapitre 3 que les isomorphismes trouvés sont canoniques (i.e. en utilisant les sous-matrices de Cartan de rang 3 dans A).

Lemme 66:

Le foncteur $\tilde{\mathcal{L}}_w : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Qcoh}}}(\tilde{S}_w)$ est un foncteur covariant, exact et il commute aux limites inductives. Si $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, M de dimension finie, alors $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est localement libre de rang la dimension de M. Soit u un élément de W , $u \leq w$, et soit $\sigma : \tilde{S}_u \longrightarrow \tilde{S}_w$ l'immersion fermée correspondante. Alors on a un isomorphisme de foncteurs $\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w = \tilde{\mathcal{L}}_u$.

Démonstration:

Je vais d'abord montrer que pour tout module $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, M de dimension finie, $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est localement libre de rang la dimension de M , et que $R^q \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) = 0$ pour $q > 0$, par récurrence sur la dimension de M .

Par le théorème 3 et la formule de la projection, ces deux assertions sont vérifiées lorsque M est de dimension un. Je choisis donc $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, $\dim M \geq 2$ et je suppose ces assertions montrées pour tout module $E \in \mathcal{C}(\underline{b})$ avec $\dim E < \dim M$. Comme l'action de $\underline{b}$ est résoluble, il existe une suite exacte

$0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$ où aucun des deux modules E ou F n'est égal à $\{0\}$. Par le lemme 23.1; le foncteur $\mathcal{L}_{\tilde{w}}$ est exact. On obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{w}}(E) \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) \longrightarrow \mathcal{L}_{\tilde{w}}(F) \longrightarrow 0 .$$

Par image directe, on obtient une longue suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(E) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(F) \longrightarrow R^1 \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(E) \longrightarrow \dots$$

Comme par hypothèse de récurrence on a pour $q \neq 0$ $R^q \mu_* \tilde{\mathcal{L}}_w(E) = 0$ et $R^q \mu_* \tilde{\mathcal{L}}_w(F) = 0$, on obtient $R^q \mu_* \tilde{\mathcal{L}}_w(M) = 0$ pour $q \neq 0$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(E) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(F) \longrightarrow 0$$

et de l'hypothèse de recurrence, on déduit également que $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est localement libre de rang la dimension de M .

Comme l'espace topologique $D(\tilde{W})$ est noethérien, le foncteur μ_* commute aux limites inductives. Comme $\mathcal{L}_{\tilde{w}}$ commute également aux limites inductives, $\tilde{\mathcal{L}}_w$ commute aux limites inductives.

On va prouver maintenant l'exactitude de $\tilde{\mathcal{L}}_w$.

Soit $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{C}(\underline{b})$. Soit $\{M_\alpha\}$ la famille des sous-modules de dimension finie de M . Pour chaque indice α , soit $E_\alpha = E \cap M_\alpha$ et F_α l'image de M_α dans F . Il est clair que l'on a $E = \varinjlim E_\alpha$, $M = \varinjlim M_\alpha$ et facile de montrer que l'on a $F = \varinjlim F_\alpha$. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow F_\alpha \longrightarrow 0$$

induisent des suites exactes

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(E_\alpha) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(M_\alpha) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(F_\alpha) \longrightarrow 0$$

car on a $R^1 \mu_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(E_\alpha) = 0$. Comme $\mathcal{L}_{\tilde{w}}$ commute à la limite inductive, la suite

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(E) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(F) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Il reste à prouver l'assertion sur la restriction. Soit $\tilde{u}$ une décomposition réduite de u , avec $\tilde{u} \leq \tilde{w}$. Soit $\tau : D(\tilde{u}) \longrightarrow D(\tilde{w})$ l'une des immersions fermées rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D(\tilde{u}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\nu"] & D(\tilde{w}) \arrow[d, "\mu"] \\
\tilde{S}_u \arrow[r, "\sigma"] & \tilde{S}_w
\end{tikzcd}$$

(une telle immersion τ est construite § IV et ν désigne le morphisme $D(\tilde{u}) \longrightarrow \tilde{S}_u$ naturel).

Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Par le lemme 23.2, on a $\mathcal{L}_{\tilde{u}}(M) = \tau^* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)$. Le morphisme canonique de foncteur $\sigma^* \nu_* \longrightarrow \mu_* \tau^*$ induit un morphisme naturel

$$\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_u(M) \ .$$

Je vais montrer par récurrence sur la dimension de M que ce morphisme naturel est un isomorphisme. Lorsque M est de dimension un, on peut écrire $M = \Lambda - \Lambda'$ où Λ, Λ' sont deux poids de $P^+_\emptyset$. Par le lemme 35, on a

$$\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_u(\Lambda) \ , \ \sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda') = \tilde{\mathcal{L}}_u(\Lambda') \ ,$$

d'où, par le lemme 37

$$\begin{aligned}\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(M) &= \sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda-\Lambda') \\ &= \sigma^*(\tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda')^{-1}) \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_u(\Lambda) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_u(\Lambda')^{-1} \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_u(\Lambda-\Lambda') .\end{aligned}$$

On suppose donnée à présent une suite exacte $0 \to E \to M \to F \to 0$ de $\mathcal{E}(\underline{b})$, où M est de dimension finie et on suppose l'assertion prouvée pour E et pour F. Comme $\tilde{\mathcal{L}}_w(F)$ est localement libre, on obtient le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(E) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \tilde{\mathcal{L}}_u(E) \arrow[r] & \tilde{\mathcal{L}}_u(M) \arrow[r] & \tilde{\mathcal{L}}_u(F) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent implique que le morphisme $\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \to \tilde{\mathcal{L}}_u(M)$ est un isomorphisme. Ainsi ceci permet de conclure par récurrence lorsque la dimension de M est finie. Puis un passage à la limite sur les sous-modules de dimension finie de M montre que $\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \to \tilde{\mathcal{L}}_u(M)$ est un isomorphisme pour un module M quelconque dans $\mathcal{E}(\underline{b})$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Soit $(X,\mathcal{O}_X)$ un schéma séparé et $\mathcal{A}$ un faisceau quasicohérent de $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative. Il existe un schéma $\Theta : Y \to X$ affine sur X, uniquement déterminé par un isomorphisme $\mathcal{A} = \Theta_* \mathcal{O}_Y$.

La construction de Y est la suivante : Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement affine ouvert de X. On utilise les notations usuelles $U_{\alpha,\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, $U_{\alpha,\beta,\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ pour tout triplet d'indice α,β,γ. Soient V_α (respectivement $V_{\alpha,\beta}$, $V_{\alpha,\beta,\gamma}$) le schéma affine associé à l'anneau $\mathcal{A}(U_\alpha)$ (respectivement $\mathcal{A}(U_{\alpha,\beta})$, $\mathcal{A}(U_{\alpha,\beta,\gamma})$). Le système d'immersions ouvertes

$$V_{\alpha,\beta,\gamma} \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\rightarrow}} V_{\alpha,\beta} \rightrightarrows V_\alpha$$

satisfait la condition de cocycle. Soit donc Y le schéma obtenu par recollement des ouverts V_α suivant le système d'ouverts $V_{\alpha,\beta}$. Les différents morphismes $\Theta_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ induisent un morphisme affine $\Theta : Y \to X$ ([27], exercice II.2.12, exercice II.5.17 et [23]).

Le foncteur Θ_* induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux quasi-cohérents de Y , et les faisceaux quasi-cohérents de X , qui sont des faisceaux de $\mathcal{A}$-modules (avec compatibilité de ces deux structures). En particulier si $\pi : Z \to X$ est un morphisme de schéma, il y a équivalence entre la donnée d'un morphisme de faisceau d'algèbre $\mathcal{A} \to \pi_* \mathcal{O}_Z$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{A} \arrow[rr] & & \pi_* \mathcal{O}_Z
\end{tikzcd}$$

et la donnée d'un morphisme $Z \to Y$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\Theta"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Je vais appliquer cette construction pour construire le schéma $B(w)$. La structure d'algèbre sur $k\,[B]$ induit un morphisme de $\mathcal{U}(\underline{b})$-module $k\,[B] \otimes k\,[B] \to k\,[B]$. Soit $w \in W$. On obtient ainsi un morphisme $\tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B]) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B]) \to \tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B])$, et donc $\tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B])$ est naturellement une $\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}$-algèbre quasi-cohérente. Il existe donc un schéma $\Theta_w : B(w) \to \tilde{S}_w$ affine relativement à $\tilde{S}_w$, tel que $\Theta_{w\,*}\mathcal{O}_{B(w)} = \tilde{\mathcal{L}}(k\,[B])$.

Soit $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . Il est clair que l'on a $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(k\,[B]) = \pi_{\tilde{w}\,*}\mathcal{O}_{E(\tilde{w})}$, où $\pi_{\tilde{w}}$ désigne le morphisme $E(\tilde{w}) \to D(\tilde{w})$. Par la construction précédente, il existe un morphisme naturel $E(\tilde{w}) \to B(w)$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E(\tilde{w}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\tilde{w}}"'] & B(w) \arrow[d, "\Theta_w"] \\
D(\tilde{w}) \arrow[r, "\nu_{\tilde{w}}"] & \tilde{S}_w
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

On fixe u un élément de W avec $u \leq w$. Soit $\tilde{u}$ une décomposition réduite de u , avec $\tilde{u} \leq \tilde{w}$. Soient $\sigma : \tilde{S}_u \to \tilde{S}_w$ l'immersion naturelle $\tau : D(\tilde{u}) \to D(\tilde{w})$ l'une des immersions fermées construites au paragraphe 4 et $\tau' : E(\tilde{u}) \to E(\tilde{w})$ le morphisme qui est associé à τ . Il est clair que l'on obtient un cube commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & E(\tilde{u}) \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau'"] \arrow[dd] & & B(u) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
E(\tilde{w}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & B(w) \arrow[dd] & \\
 & D(\tilde{u}) \arrow[rr] \arrow[dl, "\tau"] & & \tilde{S}_u \arrow[dl, "\sigma"] \\
D(\tilde{w}) \arrow[rr] & & S_{\tilde{w}} &
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 64, on a $\sigma^* \tilde{\mathcal{L}}_w(k\ [B]) = \tilde{\mathcal{L}}_u(k\ [B])$. Donc le morphisme naturel $B(u) \to B(w)$ est une immersion fermée.

Avant de prouver que les schémas $B(w)$ sont affines, j'ai besoin de rappeler quelques constructions sur les groupes de Kac-Moody. Je note $C(w)$ le spectre de $\Gamma(B(w),\mathcal{O}_{B(w)})$. On note que l'on a $\Gamma(B(w),\mathcal{O}_{B(w)}) = \Gamma(\tilde{S}_w,\tilde{\mathcal{L}}_w(k\ [B]))$ et on a donc $\Gamma(B(w),\mathcal{O}_{B(w)}) = D_w\ k\ [B]$. Soit $\underline{G}$ le groupe de Kac-Moody associé à $\mathfrak{g}$ (je note ce groupe et les groupes suivants avec un soulignement pour rappeler qu'il s'agit de groupes discrets).

Ce groupe a été construit par Kac et Peterson [49] et Tits [59]. Je vais en indiquer la construction, car ces groupes présentent des différences minimes suivant la construction. Je suis ici la construction du groupe minimal de Tits, à la différence du choix du réseau près (la seule différence entre le groupe que je construis ici et celui de Kac et Peterson tient à la taille du sous-groupe de Cartan $\underline{H}$) .

Je pose $\underline{H} = \mathrm{Hom}(P,k^*)$. Soit $\hat{U}(\underline{n}^+)$ le complété de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\underline{n}^+$ (confère le § I). Soit Δ^+_{re} l'ensemble des racines réelles positives de $\mathfrak{g}$. Soit $\hat{U}^{(1)} = \{x \in \hat{U}(\underline{n}^+)\ , x \equiv 1 \text{ modulo } \underline{n}^+\ \hat{U}(\underline{n}^+)\}$. Soit $\underline{N}$ le sous-groupe (noté X dans [25]) de $\hat{U}^{(1)}$ engendré par les "sous-groupes à un paramètre" $\exp(\underline{n}^+_{\alpha})$, où $\alpha \in \Delta^+_{re}$. Soient $i \in \{1,\dots,N\}$, $\hat{U}(\underline{u}_i)$ la fermeture de $U(\underline{u}_i)$ dans $\hat{U}(\underline{n}^+)$, $\hat{U}^{(1)}_i = \hat{U}(\underline{u}_i) \cap \hat{U}^{(1)}$ et $\underline{E}_i$ le groupe à un paramètre $\exp(ke_i)$. On pose $U_i = \underline{N} \cap \hat{U}^{(1)}_i$. Soit $\underline{A}_i$ les k-points du groupe algébrique A_i . Comme groupe algébrique, A_i est le quotient d'un produit d'un groupe $SL(2)$ et d'un tore déployé par un groupe fini. Un point délicat de la construction est de montrer que l'on a $\underline{U} = \underline{E}_i \ltimes \underline{U}_i$ (cf. [59], [62]). L'action de $\underline{E}_i$ sur $\underline{U}_i$ se prolonge en une action de $\underline{A}_i$ et on note $\underline{P}_i = \underline{A}_i \ltimes U_i$. Le groupe $\underline{H}$ agit naturellement sur $\underline{U}$ (de manière compatible à l'action de $\underline{A}_i$ sur $\underline{U}_i$) et on note $\underline{B} = \underline{H} \ltimes \underline{U}$, de sorte que $\underline{B}$ s'identifie à un sous-groupe de $\underline{P}_i$ et que $\underline{P}_i/\underline{B}$ s'identifie aux points rationnels de P_i/B (qui est isomorphe à la droite projective). Il existe une extension abélienne naturelle

$$1 \to \underline{H} \to \mathcal{N}(\underline{H}) \to W \to 1$$

et pour chaque indice i on note $\mathcal{N}_i(H)$ la sous-extension

$$1 \to \underline{H} \to \mathcal{N}_i(\underline{H}) \to \{1,s_i\} \to 1$$

et $\mathcal{N}_i(H)$ s'identifie au normalisateur de $\underline{H}$ dans $\underline{P}_i$. Par définition le groupe de Tits minimal $\underline{G}$ associé à $\mathfrak{g}$ est le produit amalgamé des groupes $\underline{P}_i$ et $\mathcal{N}(\underline{H})$ suivant leurs sous-groupes B et $\mathcal{N}_i(\underline{H})$ ([59], [62]). Comme usuellement, on note d'une même lettre un élément $w \in W$ et un représentant w de cet élément dans $\mathcal{N}(\underline{H})$. Pour chaque $w \in W$, on pose $\underline{B}(w) = \bigcup_{u \leq w} \underline{B}\, u\, \underline{B}$. Dans [63] , il est montré que $(\underline{G},\underline{B},\mathcal{N}(\underline{H}))$ est un système de Tits. Soient $w \in W$ et $i \in I$. Je pose $\underline{B}_i(w) = \bigcup_{\substack{u \leq w \\ s_i u \leq u}} \underline{B}(u)$. Si $w \in W$, $i \in \{1,\dots,N\}$ sont tels que $s_i\, w \leq w$, on a $\underline{P}_i\ \underline{B}(w) \subset \underline{B}(w)$.

Lemme 67 :

Soient $w \in W$, $v \in W$, $i \in \{1,\dots,N\}$ tels que $w = s_i\, v$ et $w \geq v$. On a un diagramme commutatif d'ensemble

$$\begin{tikzcd}
\underline{P}_i \overset{B}{\times} \underline{B}(v) \arrow[d] & P_i \overset{B}{\times} \underline{B}_i(v) \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{B}(w) & \underline{B}_i(v) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et $\underline{B}(w)$ est le coproduit de $\underline{P}_i \overset{B}{\times} \underline{B}(v)$ et de $\underline{B}_i(v)$ suivant $\underline{P}_i \overset{B}{\times} \underline{B}_i(v)$ (dans la catégorie des ensembles).

Démonstration :

Ce lemme résulte directement de l'axiome des systèmes de Tits, et du fait que $\underline{G}$ est un groupe avec système de Tits.

Je note, pour chaque $i \in \{1,\dots,N\}$, $\underline{F}_i$ le groupe discret à un paramètre $\exp kf_i$.

Lemme 68 :

Soient $M \in \mathcal{C}(B)$, $i \in \{1,\dots,N\}$ et $\nu : D_{s_i} M \to M$ le morphisme naturel. Soit φ un élément non nul de $D_{s_i} M$. Il existe un entier n tel que

$\nu(f_i^n.\varphi) \neq 0$ et il existe $g \in \underline{F}_i$ tel que $\nu(g.\varphi) \neq 0$.

Démonstration :

Je vais d'abord prouver la première assertion. Le $\mathcal{U}(\underline{p}_i)$-module $D_{s_i} M$ est naturellement un sous-module de $\mathrm{Coind}_{\underline{b}}^{\underline{p}_i} M$ et par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on a un isomorphisme naturel d'espace vectoriel $\tau : \mathrm{Coind}_{\underline{b}}^{\underline{p}_i} M \simeq \mathrm{Hom}(U(kf_i),M)$. Soit n un entier tel que $\tau\varphi(f_i^n) \neq 0$. Alors on a $\upsilon(f_i^n.\varphi)\neq 0$. Comme on a $f_i^q.\varphi = 0$ pour q suffisamment grand, il existe une famille de scalaires a_α,t_α telle que l'on ait $f_i^n.\varphi = \Sigma\, a_\alpha(\exp t_\alpha f_i)\varphi$. Donc il existe un indice α tel que l'on ait $\nu(\exp(t_\alpha f_i)\varphi) \neq 0$.

Ceci montre le lemme.

Pour tout $w \in W$, je note $C_k(w)$ l'ensemble des k-points de $C(w)$ et $\mathcal{E}(\underline{B}(w))$ l'ensemble des fonctions de $\underline{B}(w) \to k$.

Lemme 69 :

Pour tout $w \in W$, il existe une application naturelle $\alpha_w : \underline{B}(w) \to C_k(w)$. Ces diverses applications sont compatibles entre elles, et pour tout $w \in W$, l'application $\alpha_w^{\#} : \Gamma(C(w),\mathcal{O}_{C(w)}) \to \mathcal{E}(\underline{B}(w))$ ainsi déterminée est injective.

Démonstration :

Je vais construire α_w et montrer l'assertion correspondante par récurrence sur $\ell(w)$. Je considère d'abord le cas où l'on a $w = 1$. L'application naturelle (construite au § I) $\hat{N}^{+k} \to N$ se restreint en une application naturelle $\underline{N} \to N$. Il est clair que l'image de $\hat{N}^{+k}$ est dense et que la fermeture de l'image de $\underline{N}$ contient $\hat{N}^{+k}$. Donc l'image de $\underline{N}$ dans N est dense. Soit $h \in \underline{H}$. Par définition, $k\,[H]$ est égal à l'algèbre du groupe $k\,[P]$. L'élément général $\varphi \in k\,[H]$ s'écrit donc $\varphi = \sum_{\lambda\in P} a_\lambda e^\lambda$. L'application $\varphi \to \Sigma\, a_\lambda \lambda(h)$ est un morphisme d'algèbre et donc h détermine un k-point de H . On a ainsi une application de $\underline{H}$ dans les k-points de H . Le produit des deux applications précédentes détermine une application naturelle $\alpha_1 : \underline{B} \to C_k(1)$ et $\alpha_1^{\#}$ est clairement injective.

Soit $w \in W$, $\ell(w) \geq 1$. Je pose $w = s_i v$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,N\}$, $v \in W$, $v \leq w$. Je suppose construit par récurrence α_v et je suppose $\alpha_v^{\#}$ injective. Le groupe $\underline{P}_i$ opère sur $C_k(w)$ et l'application $\alpha_v^{\#}$ commute à l'action de $\underline{B}$. On obtient ainsi une application naturelle $\underline{P}_i \times^{\underline{B}} \underline{B}(v) \to C_k(w)$.

Soit à présent $u \in W$, tel que l'on ait $u \leq w$ et $s_i u \leq u$. Le morphisme $C(u) \to C(w)$ commute à l'action de P_i, donc l'application $C_k(u) \to C_k(w)$ commute à l'action de $\underline{P}_i$. Donc le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
\underline{P}_i \times^{B} \underline{B}(v) \arrow[d] & \underline{P}_i \times^{B} \underline{B}(u) \arrow[l] \arrow[d] \\
C(w) & \underline{B}(u) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui prouve que l'application $\underline{P}_i \times^{B} \underline{B}(v) \to C(w)$ factorise en une application $\underline{B}(w) \to C(w)$.

Il reste à montrer que $\alpha_w^{\#}$ est injective. Soit $\nu : \Gamma(C(w),\mathcal{O}_{C(w)}) \to \Gamma(C(v),\mathcal{O}_{C(v)})$ l'application naturelle. On a $\Gamma(C(w),\mathcal{O}_{C(w)}) = D_{s_i}\ \Gamma(C(v),\mathcal{O}_{C(v)})$. Soit $\varphi \in \Gamma(C(w),\mathcal{O}_{C(w)})$, $\varphi \neq 0$. Par le lemme 68, il existe $g \in \underline{F}_i$ tel que $\nu(g\varphi) \neq 0$. Par hypothèse de récurrence, on a $\alpha_v^{\#}\ \nu(g\varphi) \neq 0$. Or le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(C(w),\mathcal{O}_{C(w)}) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\alpha_w^{\#}"] & \Gamma(C(v),\mathcal{O}_{C(v)}) \arrow[d, "\alpha_v^{\#}"] \\
\mathcal{C}(\underline{B}(w)) \arrow[r] & \mathcal{C}\ \underline{B}(v)
\end{tikzcd}$$

est commutatif et $\alpha_w^{\#}$ commute à l'action de $\underline{P}_i$. Donc $\alpha_w^{\#}(\varphi) \neq 0$, ce qui montre le lemme.

Lemme 70 :

Pour tout $w \in W$, le schéma $B(w)$ est affine.

Démonstration :

Je choisis $\Lambda \in P_\phi^+$ et pour simplifier, je suppose Λ choisi suffisamment grand, de sorte que le morphisme $\tilde{S}_w \to \mathbb{P}\ E_w(\Lambda)$ soit une immersion fermée (ce qui est possible d'après le théorème 2).

Soit $\{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ une base de $F_w(\Lambda)$. Pour tout indice γ, soient H_γ le noyau de ξ_γ et U_γ l'ouvert de $\tilde{S}_w$ défini par la formule $U_\gamma = \tilde{S}_w \cap (\mathbb{P}\,E_w(\Lambda) \setminus \mathbb{P}\,H_\gamma)$. Ainsi $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ est un recouvrement ouvert affine de $\tilde{S}_w$, de sorte que l'ensemble des ouverts $V_\gamma = \theta_w^{-1}(U_\gamma)$ est un recouvrement ouvert affine de $B(w)$.

On a $k\,[B] = \bigoplus_{\mu \in P} \overset{\vee}{V}(\mu)$, de sorte que l'on a $\dim \mathrm{Hom}_{\underline{b}}(-\Lambda, k\,[B]) = 1$. On fixe une injection j du $\mathcal{U}(\underline{b})$-module $-\Lambda$ dans $k\,[B]$ (ici comme précédemment on confond $-\Lambda$ et l'unique $\mathcal{U}(\underline{b})$-module unidimensionnel ayant $-\Lambda$ pour poids). Ceci donne une injection $\mathcal{L}_w(-\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{L}_w(k\,[B])$. Prenant les sections globales de ces faisceaux, on obtient une injection $j_w : F_w(\Lambda) \hookrightarrow A_w$, où A_w désigne l'anneau $\Gamma(B(w), \mathcal{L}_w(k\,[B]))$. Je note $\overline{\xi}_\gamma$ l'image de ξ_γ dans A_w , pour chaque $\gamma \in \Gamma$ (on notera qu'en fait $\overline{\xi}_\gamma$ n'est défini qu'à un scalaire multiplicatif près). Il est clair que U_γ est le domaine de définition de la section ξ_γ et que V_γ est le domaine de définition de la fonction $\overline{\xi}_\gamma^{-1}$.

D'après un critère d'affinité ([10], ch. II, ex. 2.17), il suffit de montrer que la famille $\overline{\xi}_\gamma$ engendre l'idéal unité de A_w .

Soit $c_w : F_w(\Lambda) \to \mathcal{C}(\underline{B}(w))$ l'application composée $\alpha_w^{\#} \circ j_w$. Soit v^* un élément non nul de $F_w(\Lambda)_{-\Lambda}$. On a $c_w(v^*)(1) \neq 0$, de sorte que l'on peut choisir $c_w(v^*)(1) = 1$. Soit v l'unique élément de $E_w(\Lambda)_\Lambda$ tel que $(v^*|v) = 1$. Si $\xi \in F_w(\Lambda)$, $\beta \in \underline{B}(w)$, on a la formule

$$c_w(\xi)(\beta) = (\xi|\beta.v) \ .$$

On a $\dim \mathrm{Hom}_{\underline{h}}(L(\Lambda),\Lambda) = 1$, de sorte que l'on a $\dim_{\underline{b}}(L(\Lambda),\overset{\vee}{V}(\Lambda)) = 1$. Un générateur de cet espace vectoriel engendre donc un morphisme $j' : L(\Lambda) \to k\,[B]$. Comme on a $D_{s_i} L(\Lambda) = L(\Lambda)$ pour tous les indices i , on obtient une application naturelle $j'_w : L(\Lambda) \to A_w$, transformée de j sous le foncteur de Joseph D_w . Soit $c'_w : L(\Lambda) \to \mathcal{C}(\underline{B}(w))$ l'application composée $\alpha_w^{\#} \circ j'_w$. Je vais décrire cette nouvelle application, qui n'est, elle aussi, définie qu'à une constante multiplicative près. Soit $L^*(\Lambda)$ le dual restreint de $L(\Lambda)$, i. e. le sous-espace du dual $L(\Lambda)^*$ de $L(\Lambda)$ formé des vecteurs $\mathcal{U}(\underline{h})$-semi-simples. Je note encore v^* l'élément de $L^*(\Lambda)_{-\Lambda}$ tel que $(v^*|v) = 1$. On note que $L^*(\Lambda)$ est naturellement un $\underline{G}$-module. Si $m \in L(\Lambda)$, $\beta \in \underline{B}(w)$, on a la formule

$$c'_w(m)(\beta) = (\beta.v^*|m) \ .$$

Soit $\{m_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ la base de $E_w(\Lambda)$ duale de la base $\{\xi_\gamma\}$. Pour chaque $\gamma \in \Gamma$, je pose $\overline{m}_\gamma = j'_w(m_\gamma)$, et $\varphi = \Sigma\, \overline{m}_\gamma\, \overline{\xi}_\gamma$. Pour tout $\beta \in \underline{B}(w)$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_w^{\#}(\varphi)(\beta) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \alpha_w^{\#}(\overline{m}_\gamma)(\beta)\ \alpha_w^{\#}(\overline{\xi}_\gamma)(\beta) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} c_w'(m_\gamma)(\beta)\ c_w(\xi_\gamma)(\beta) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} (\beta v^*|m_\gamma)(\xi_\gamma|\beta v) \\
&= (\beta v^*| \sum_{\gamma\in\Gamma} (\xi_\gamma|\beta v)m_\gamma) \\
&= (\beta v^*|\beta v) \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Or par le lemme 69, $\alpha_w^{\#}$ est injective, on a donc $\varphi = 1$. Ainsi la famille $\overline{\xi}_\gamma$ engendre l'idéal unité de A_w , ce qui montre le lemme.

Dans les lemmes suivants, on va utiliser le fait que $k\,[B]$ est un injectif cogénérateur de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$. Ceci signifie que tout injectif de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ est un facteur direct d'une somme directe (finie ou infinie) de copies de $k\,[B]$. En fait il est facile de montrer que les injectifs de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ sont les sommes directes (finies ou infinies) de copies de divers modules $\overset{\vee}{V}(\lambda)$, $\lambda \in P$.

Lemme 71 :

Soient I un injectif de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$, u , w deux éléments de W avec $u \leq w$. Alors l'application naturelle $D_w\, I \to D_u\, I$ est surjective.

Démonstration :

Les foncteurs D_w et D_u commutent aux limites inductives, donc il suffit de montrer le lemme pour le module $I = k\,[B]$.

On a $D_u\, k\,[B] = \Gamma(B(u),\mathcal{O}_{B(u)})$, $D_w\, k\,[B] = \Gamma(B(w),\mathcal{O}_{B(w)})$ et le morphisme naturel $D_w\, k\,[B] \to D_u\, k\,[B]$ est le morphisme de restriction. Or le morphisme $B(u) \to B(w)$ est une immersion fermée. Comme par le lemme 70, $B(u)$ et $B(w)$ sont affines, il vient donc que $D_w\, k\,[B] \to D_u\, k\,[B]$ est surjective.

Lemme 72 :

Soient $v,w \in W$, $i \in \{1,\dots,N\}$ tels que l'on ait $w = s_i\, v$ et $s_i\, v \geq v$. Alors pour tout entier $k \geq 1$ et tout $M \in \mathcal{E}(\underline{b})$, on a une suite exacte fonctorielle

$$0 \to D^1_{s_i}\, D^{k-1}_v\, M \to D^k_w\, M \to D_{s_i}\, D^k_v\, M \to 0 .$$

Démonstration :

Par le lemme 71 , pour tout injectif $I \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$, l'application $D_{s_i} D_v I \to D_v I$ est surjective. Par le lemme 13, ceci implique que l'on a $D^q_{s_i} D_v I$, pour tout entier $q \geq 1$. On peut donc former la suite spectrale du foncteur composé $D_w = D_{s_i} D_v$. Cette suite spectrale a pour second terme $E_2^{p,q} = D^p_{s_i} D^q_v$ et converge vers D^{p+q}_w . Or le foncteur D_{s_i} est de dimension homologique un. Cette suite spectrale dégénère donc au terme E_2 , d'où, pour tout entier k , une suite exacte

$$0 \to D^1_{s_i} D^{k-1}_v M \to D^k_w M \to D_{s_i} D^k_v M \to 0 .$$

Lemme 73 :

Soient $u,v \in W$ et I un injectif de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$. Alors pour tout entier $q \geq 1$, on a

$$D^q_u D_v I = 0 .$$

Démonstration :

Je vais prouver le lemme par récurrence sur $\ell(u)$. Lorsque l'on a $u = 1$, on convient que D_u est le foncteur identité et dans ce cas, le lemme est trivial.

Je suppose que l'on a $u \neq 1$. Il existe un $i \in \{1,\dots,N\}$ et $u' \in W$ tel que l'on ait $u = s_i u'$ et $u' \leq u$.

Par le lemme 72, on a pour tout entier $q \geq 1$ une suite exacte

$$0 \to D^1_{s_i} D^{q-1}_{u'} D_v I \to D^q_u D_v I \to D_{s_i} D^q_{u'} D_v I \to 0 .$$

Par hypothèse de récurrence, on a $D^q_{u'} D_v I = 0$ pour tout entier $q \geq 1$. On en déduit donc que l'on a :

$$D^q_u D_v I = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 2$$

$$D^1_u D_v I = D^1_{s_i} D_{u'} D_v I \quad \text{pour} \quad q = 1 .$$

Il est clair qu'il existe un élément w tel que l'on ait un isomorphisme de foncteur $D_{u'} D_v \simeq D_w$. Par le lemme 71 , l'application $D_{s_i} D_w I \to D_w I$ est surjective, donc par le lemme 13 on a $D^1_{s_i} D_w I = 0$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Proposition 3 :

Soient $M \in \mathcal{E}(\underline{b})$, $w \in W$ et $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . Alors on a des isomorphismes naturels

$$D_w^* M \simeq H^*(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \simeq H^*(D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)) \ .$$

Démonstration :

Le second isomorphisme résulte du théorème 3. Je vais montrer le premier isomorphisme. Le foncteur $M \to H^*(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$ est un δ-foncteur, et l'on a $D_w^0 M \simeq H^0(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$. Il existe donc un morphisme naturel $D_w^* M \to H^*(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$ et pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, il suffit de montrer que l'on a $H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) = 0$, pour tout entier $q \geq 1$ et tout injectif $I \in \mathcal{E}(\underline{b})$. Comme le foncteur $\tilde{\mathcal{L}}_w$ commute aux limites inductives (lemme 64) et que l'espace $\tilde{S}_w$ est noethérien, les foncteurs $M \to H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$ commutent aux limites inductives. Comme le module $k\,[B]$ est cogénérateur, il suffit de montrer que l'on a $H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(k[B])) = 0$, pour tout $q > 0$. Or on a

$$\tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B]) = (\Theta_w)_* \mathcal{O}_{B(w)} \ .$$

Le morphisme Θ_w est affine, donc pour tout entier q , le morphisme $H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B])) \to H^q(B(w), \mathcal{O}_{B(w)})$ est un isomorphisme. Or $B(w)$ est affine par le lemme 10. Donc par le théorème d'annulation de Serre ([70]), on a $H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(k\,[B])) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Ceci montre le lemme.

Proposition 4 :

Soit $w \in W$.

1) Le foncteur D_w est de dimension homologique $\ell(w)$.

2) Soit $M \in \mathcal{E}(\underline{b})$, M de dimension finie. Pour tout entier q , $D_w^q M$ est de dimension finie et l'on a

$$\Sigma\ (-1)^q \ \mathrm{ch}(D_w^q M) = \Delta^w \ \mathrm{ch}(M) \ .$$

3) Pour tout ξ tel que $-\xi \in P^+$, on a

$$D_w^0 \ \xi = F_w(-\xi)$$

$$D_w^q \ \xi = 0 \ \text{ pour } \ q > 0 \ .$$

Démonstration :

Le point 1 résulte de la proposition 3. Le fait que $D_w^q M$ est de dimension finie résulte de la proposition 3 (car $\tilde{S}_w$ est une variété projective et $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est cohérent). La formule de caractère est déduite des lemmes 13 et 71 par récurrence sur $l(w)$.

Enfin, le point 3 provient des lemmes 57 et 64 et de la proposition 3.

Remarque :

A. Joseph a défini les dérivés des foncteurs D_w par une voie différente, lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie. Il utilisait des résolutions à l'aide de modules du type $L(\Lambda) \otimes k_{-M}$, où $\Lambda, M \in P^+$. Pour tout w , on a $D_w^* L(\Lambda) \otimes k_{-M} = L(\Lambda) \otimes D_w^* -M$, donc les résolutions utilisées par Joseph sont plates pour le foncteur D_w . Ainsi les dérivés des foncteurs sont les mêmes que ceux que j'utilise.

Une fois cette identification faite, il convient de noter que la proposition 4 était connue en dimension finie. En effet, elle a été montrée par A. Joseph dans [31], à l'exception du point 3 qui n'était connu de A. Joseph que pour les poids ξ suffisamment petits. Néanmoins l'argument de Joseph s'étend à tous les poids antidominants entiers dès que l'on connaît les résultats de Metha-Ramanan-Ramanathan.

La proposition 3 est nouvelle.

Proposition 5 :

Soient $u, v, w \in W$ avec $uv = w$ et $\ell(u) + \ell(v) = \ell(w)$. Soit $M \in \mathcal{E}(\underline{b})$. Alors il existe une suite spectrale dont le terme E_2 vaut

$$E_2^{p,q} = D_u^p D_v^q M$$

et qui converge vers $D_w^* M$.

Démonstration :

On a $D_w = D_u D_v$. Par le lemme 73, on peut construire la suite spectrale du foncteur composé $D_w = D_u D_v$. Cette suite spectrale converge vers $D_w^* M$ et son second terme est $E_2^{p,q} = D_u^p D_v^q M$.

Remarque :

On peut choisir des décompositions réduites $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ de u, v et de w (respectivement) de sorte que l'on ait $\tilde{w} = \tilde{u}\tilde{v}$. La suite spectrale de la proposition 5 s'identifie à la suite spectrale de Leray associée au morphisme $D(\tilde{w}) \to D(\tilde{u})$.

XII - GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE SCHUBERT

Soit $\mathcal{C}^n \underline{n}$ la suite centrale décroissante de l'algèbre de Lie $\underline{n}$, qui est définie par récurrence sur l'entier positif n par les formules ([6])

$$\mathcal{C}^o \underline{n} = \underline{n}$$

$$\mathcal{C}^{n+1} \underline{n} = [\underline{n} , \mathcal{C}^n \underline{n}]$$

Il est clair que les idéaux de la suite centrale décroissante sont de codimension finie dans $\underline{n}$. Comme ils sont stables par $\underline{h}$, on peut leur associer des groupes, que je note $\mathcal{C}^n N$. Par le théorème de Poincaré-Birkoff-Witt, l'action de $\mathcal{C}^n N$ sur N est libre, donc on peut considérer le groupe quotient

$$N^n = N/\mathcal{C}^n N \quad .$$

Pour chaque entier n , le groupe quotient est affine, et l'on a $k[N^n] = k[N]^{\mathcal{C}^n \underline{n}}$, i.e. $k[N^n]$ s'identifie aux vecteurs $\mathcal{C}^n \underline{n}$ - invariants de $k[N]$ (et ceci sans ambiguité car les invariants pour les actions à gauche et à droite sont les mêmes).

Soit X une B-variété. Je dis que l'action de B sur X est bonne, si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(a) Il existe un entier n pour lequel l'action de $\mathcal{C}^n N$ sur X est triviale

(b) Il existe un point rationnel $P \in X$, H-stable tel que $X = \overline{N.P}$.

Soit X une variété avec une bonne action de B . Pour simplifier, je vais supposer que X est normale. Soit P le point de la définition précédente. Le groupe N agit sur X comme le groupe nilpotent N^n , pour un certain entier n . Il est clair que l'orbite (au sens schématique) du point P, soit U , est un ouvert stable par B , et que U est l'unique orbite ouverte. Pour cette raison, on dira que U est la grosse orbite. Soit M le stabilisateur dans N^n du point P . Il est clair que l'on a un isomorphisme naturel $N^n/M \xrightarrow{\sim} U$ (ce qui résulte du théorème principal de Zariski, ou d'une propriété d'homogénéité). Par ailleurs la variété N^n/M est isomorphe à la variété sous-jacente à un espace vectoriel sur k .

Lemme 74 : On reprend les notations précédentes

1) Soient $Z_1,\dots,Z_m$ les composantes irréductibles du complémentaire Z de U dans X . Chacune de ces composantes Z_j est de codimension 1 dans X et définit donc un diviseur $[Z_j]$. Le morphisme naturel

$$\mathbb{Z}[Z_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[Z_m] \to C\ell\ X$$

est un isomorphisme.

2) Tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X possède une B-linéarisation naturelle $\mathcal{L}_{nat}$. Toute B-linéarisation de $\mathcal{L}$ est obtenue en tordant la linéarisation $\mathcal{L}_{nat}$ par un caractère de B .

Démonstration : 1) L'ouvert U est isomorphe à un espace vectoriel. Donc par un théorème de Serre ([26] proposition III.5.10) chacune des composantes Z_j est de codimension 1. Utilisant [27] (ch. II § 6) on obtient une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X^*(X) \to \mathcal{O}_X^*(U) \to \mathbb{Z}[Z_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}[Z_m] \to C\ell\ X \to C\ell\ U \to 0$$

Or on a $\mathcal{O}_X^*(U) = k$ (donc le morphisme $\mathcal{O}_X^*(X) \to \mathcal{O}_X^*(U)$ est un isomorphisme) et $C\ell\ U = \{0\}$. Ceci prouve le point 1 du lemme.

2) Soit $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur X . Par le point précédent, il existe des entiers (a_j) uniquement déterminés tels que l'on ait

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}) = \sum_{j=1}^{m} a_j [Z_j]$$

Or les diviseurs $[Z_j]$ sont stables par B . Donc ceci détermine une B-linéarisation naturelle $\mathcal{L}_{nat}$ de $\mathcal{L}$. Il est clair que toute B-linéarisation est uniquement déterminée par sa restriction à U , et ceci prouve le dernier point du lemme.

Soit J une partie de $\{1 \ldots N\}$, et soit $w \in W_J$. Suivant [24], je pose

$$\Phi_w = \{\alpha \in \Delta^+ , w^{-1}\alpha \in \Delta^-\}$$

$$\underline{n}_w = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_w} \underline{n}\,\alpha$$

L'ensemble Φ_w est constitué de $\ell(w)$ racines réelles, et le sous espace vectoriel $\underline{n}_w$ est une sous-algèbre de Lie de $\underline{n}$, de dimension $\ell(w)$, et stable sous l'action adjointe de $\underline{h}$. Soit $\Lambda \in P_J$. Je note e_w l'image réciproque du point $k\,e_{w\Lambda}$ par l'application $\tilde{S}_{w,J} \to S_{w,\Lambda}$ de sorte que e_w est un point de $\tilde{S}_{w,J}$ (e_w ne dépend pas de Λ). Soit N_w le groupe associé à l'algèbre de Lie $\underline{n}_w$. On pose

$$U_w = B.e_w$$

L'orbite U_w est un ouvert de $\tilde{S}_{w,J}$, et l'on a $U_w = N_w . e_w$. L'application $N_w \to U_w$ que l'on en déduit est un isomorphisme. Soit $i \in \{1,...N\}$ tel que l'on ait $s_i w \geqslant w$. Soit π le morphisme naturel $\pi : P_i X^B \tilde{S}_{w,J} \to \tilde{S}_{s_i w,J}$. Il induit clairement un isomorphisme $\pi^{-1}(U_{s_i w}) \xrightarrow{\sim} U_{s_i w}$. Aussi je note encore $U_{s_i w}$ et $e_{s_i w}$ les images réciproques de $U_{s_i w}$ et de $e_{s_i w}$ par π . Enfin on pose

$$S_J(w) = \{j \in \{1,...,N\}/J \mid w \geqslant s_j\}$$

$$\vartheta_J(w) = \{u \in W_J \mid u \leqslant w \text{ et } \ell(u) = \ell(w) - 1\}$$

et on note j l'immersion fermée $\tilde{S}_w \to P_i X^B \tilde{S}_w$.

Soit X une bonne variété, $\mathcal{F} \in Q\,\mathrm{coh}_B(X)$ et $\lambda \in P$. On obtient une nouvelle B-linéarisation de $\mathcal{F}$ en tordant la B-linéarisation de $\mathcal{F}$ par le caractère $\exp \lambda$ de B défini par λ . Je note $\mathcal{F} \otimes k_\lambda$ le faisceau $\mathcal{F}$ muni de sa nouvelle B-linéarisation.

L'action de B sur des variétés telles que les variétés de Schubert, les variétés de Demazure est bonne. Pour certains $\lambda \in P$, et certaines des variétés précédentes on a construit un faisceau inversible $\mathcal{L}(\lambda)$ B-équivariant. En général, cette linéarisation n'est pas la linéarisation naturelle du lemme 74.

Soit X une variété lisse en codimension 1 , et Y une sous-variété de codimension 1. Alors je note [Y] le diviseur Weil de X défini par Y . Je note aussi div l'application naturelle div : $\mathrm{Pic}(X) \to C\ell\, X$.

Lemme 75 : On conserve les notations précédentes.

(1) La variété $P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}$ est normale .

(2) On a des isomorphismes

$$C\ell\, \tilde{S}_{w,J} = \bigoplus_{u \in \vartheta_J(w)} \mathbb{Z}\, [\tilde{S}_{u,J}]$$

$$C\ell(P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}) = \mathbb{Z}\, [\tilde{S}_{w,J}] \oplus \bigoplus_{u \in \vartheta_J(w)} \mathbb{Z}\, [\tilde{S}_{u,J}]$$

(3) Il existe une application naturelle j^* : $C\ell(P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}) \to C\ell(\tilde{S}_{w,J})$ rendant commutatif le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
C\ell(P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}) \arrow[r, "j^*"] & C\ell(\tilde{S}_{w,J}) \\
\mathrm{Pic}(P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[u, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Pic}(\tilde{S}_{w,J}) \arrow[u, "\mathrm{div}"]
\end{tikzcd}$$

(4) On a $i^*[S_{w,J}] = 0$, et

$$i^*[P_i \times^B \tilde{S}_{u,J}] = [\tilde{S}_{u,J}] \text{ , pour tout } u \in \vartheta_J(w) \text{ .}$$

Démonstration : 1) On pose $U = F_i . \tilde{S}_{w,J}$ et $V = E_i\, s_i\, \tilde{S}_{w,J}$, de sorte que U et V sont deux ouverts de $P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}$, ces deux ouverts s'identifiant à $\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}_{w,J}$. Donc d'après [46] [27] ,

U et V sont deux ouverts normaux, donc $P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}$ est normale. On peut donc définir son groupe des classes.

2) Les composantes irréductibles du complémentaire de U_w dans $\tilde{S}_{w,J}$ sont les sous-variétés $\tilde{S}_{u,J}$ (où $u \in \vartheta_J(w)$), comme il résulte clairement de la décomposition de Bruhat. Le lemme 74 montre donc la première assertion du point 2. On déduit également du fait précédent que les composantes irréductibles du complémentaire de $U_{s_i w}$ dans $P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}$ sont les variétés $\tilde{S}_{w,J}$ et $P_i \times^B \tilde{S}_{u,J}$ (où $u \in \vartheta_J(w)$). Une nouvelle application du lemme 74 achève la démonstration du point 2.

3) On choisit un isomorphisme de $\mathbb{A}^1$ et de F_i qui identifie le point 0 de $\mathbb{A}^1$ à l'élément neutre 1 de F_i . Ceci fournit un isomorphisme de $\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}_{w,J}$ sur U .

4) Soient X,Y deux variétés. On suppose X et Y lisses en codimension un, et on suppose donné un morphisme $j : Y \to X$. Soit $\mathrm{Sing}\, X$ le lieu singulier de X . On suppose que $j^{-1}(\mathrm{Sing}\, X)$ est de codimension $\geqslant 2$ dans Y . Alors on va prolonger le morphisme naturel $j^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$ en un morphisme $j^* : C\ell(X) \to C\ell(Y)$. Soit $\Omega = \mathrm{Reg}\, X$ le lieu régulier de X , on pose $\omega = j^{-1}\Omega \cap \mathrm{Reg}\, Y$, où $\mathrm{Reg}\, Y$ est le lieu régulier de Y . Soit $j' : \omega \to \Omega$ le morphisme naturel. Alors on a un diagramme naturel commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}(\Omega) \arrow[r, "j'^*"] & \mathrm{Pic}(\omega)
\end{tikzcd}$$

Comme Ω et ω sont lisses, et que les complémentaires de Ω dans X, et de ω dans Y sont de codimension $\geqslant 2$, on a :

$$\mathrm{Pic}(\Omega) \simeq C\ell\ \Omega \simeq C\ell\ X$$

$$\mathrm{Pic}(\omega) \simeq C\ell\ \omega \simeq C\ell\ Y$$

et ces isomorphismes sont par construction compatibles aux morphismes div. Ceci donne donc un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Pic}(Y) \arrow[d, "\mathrm{div}"] \\
C\ell\ X \arrow[r] & C\ell\ Y
\end{tikzcd}$$

ce qui définit le morphisme $j^* : C\ell\ X \to C\ell\ Y$ cherché.

On notera aussi qu'étant donné un ouvert θ de X qui contient l'image de Y, et en notant $\ell^* : Y \to \theta$ le morphisme déduit, la même construction s'applique au couple (Y,θ). Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C\ell(X) \arrow[rr, "j^*"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}"'] & & C\ell(Y) \\
& C\ell\ \theta \arrow[ur, "\ell^*"'] &
\end{tikzcd}$$

est clairement commutatif.

5) On applique la construction au cas $Y = \tilde{S}_{w,J}$, $X = P_i X^B \tilde{S}_{w,J}$, et $\theta = U$. Soit S le lieu singulier de $\tilde{S}_{w,J}$. On note que S est B-invariant. Par la description explicite de U et de V, le lieu

singulier de $P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}$ est $P_i \times^B S = T$. En particulier on a $T \cap \tilde{S}_{w,J} = S$, donc $T \cap S_{w,J}$ est de codimension $\geqslant 2$ dans $\tilde{S}_{w,J}$. Ainsi on dispose d'un morphisme naturel $j^* : C\ell(P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}) \to \tilde{S}_{w,J}$.

6) Pour montrer le lemme, il reste à montrer les formules du point 4. Soit $\ell : \tilde{S}_{w,J} \to U$ le morphisme d'inclusion. On veut montrer $i^*[\tilde{S}_{w,J}] = 0$. D'après ce qui précède, il suffit de monter que l'on a $\mathrm{Res}\ [\tilde{S}_{w,J}] = 0$. Dans l'identification $\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}_{w,J} \simeq U$, $[\tilde{S}_{w,J}]$ correspond au diviseur $[\tilde{S}_{w,J} \times \{0\}]$. Ce diviseur est principal, on a donc $\mathrm{Res}\ [\tilde{S}_{w,J}] = 0$, et donc $i^*[\tilde{S}_{w,J}] = \ell^*\ \mathrm{Res}\ [\tilde{S}_{w,J}] = 0$. De même dans l'identification $\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}_{w,J} \simeq U$, les diviseurs $\mathrm{Res}[P_i \times^B \tilde{S}_{u,J}]$ s'identifie à $[\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}_{u,J}]$. On a clairement $\ell^*[\mathbb{A}^1 \times \tilde{S}_{u,J}] = [\tilde{S}_{u,J}]$, ce qui montre les formules du point 4.

Soient J une partie de $\{1,\dots,N\}$, et w un élément de W_J . On a un morphisme naturel

$$P_J \to \mathrm{Pic}(\tilde{S}_{w,J})$$

donné par la formule : $\lambda \to \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)$. On pose $P^o_{w,J} = \{\lambda \in P_J\ ,\ \lambda(h_i) = 0$ pour tout $i \in S_J(w)\}$. Il est clair que si λ,μ sont deux éléments de P_J , avec $\mu \in P^o_{w,J}$, on a $\tilde{\mathcal{L}}_w(\mu+\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda) \otimes k_\mu$. Donc le morphisme précédent se factorise en un morphisme

$$\gamma_{w,J} : P^o_{w,J} \backslash P_J \longrightarrow \mathrm{Pic}(\tilde{S}_{w,J})$$

Lemme 76 : 1) Soient $\lambda \in P$, $j \in \{1,\dots,N\}$. Alors le faisceau inversible $\tilde{\mathcal{L}}_{s_j}(\lambda)$ sur P_j/B est libre si et seulement si $\lambda(h_j) = 0$.

2) Soient J une partie de $\{1,\dots,N\}$, $w \in W_J$ $w' \in W_J$, et $i \in \{1,\dots,N\}$ tels que $w' = s_i\, w$, $w' \geqslant w$ $i \notin S_J(w)$ et $i \notin J$. Soit π le morphisme naturel $\pi : P_i \times^B \tilde{S}_{w,J} \to \tilde{S}_{w',J}$. Alors le diviseur de $\pi^*(\tilde{\mathcal{L}}_{w'}(\rho_i))$ est équivalent à $-[S_{w,J}]$.

Démonstration : 1) La variété P_j/B est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et il est clair (par exemple en utilisant le théorème de Riemann-Roch) que le degré de $\tilde{\mathcal{L}}_{s_j}(\lambda)$ est $-\lambda(h_j)$. Ceci montre le point 1 du lemme.

2) On a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B \tilde{S}_{w,J} \arrow[d, "\tau'"] & \tilde{S}_{w,J} \arrow[l] \arrow[d, "\tau"] \\
P_i/B & \mathrm{Spec}(k) = B/B \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, on a $i \notin J$ et $i \notin S_J(w)$. Donc on a $\tilde{\mathcal{L}}_w(\rho_i) = \mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,J}} \otimes k_{\rho_i}$,

et on a donc $\tilde{\mathcal{L}}_w(\rho_i) = \tau^* k_{\rho_i}$. On a clairement $\mathcal{D}_{P_i}\, \tilde{\mathcal{L}}_w(\rho_i) = \tau^*\, \tilde{\mathcal{L}}_{w'}(\rho_i)$.
Donc par le lemme on a $\pi^*\, \tilde{\mathcal{L}}_{w'}(\rho_i) = (\tau')^*\, \tilde{\mathcal{L}}_{s_i}(\rho_i)$

$$= (\tau')^* \mathcal{O}_{P_i/B}(-[B/B])$$

$$= \mathcal{O}_{P_i \times^B \tilde{S}_{w,J}}(-[\tilde{S}_{w,J}])$$

ce qui montre le lemme.

Proposition 6 : Soient J une partie de $\{1,\dots,N\}$, $w \in W_J$. Alors le morphisme $\gamma_{w,J} : P^o_{w,J} \setminus P_J \to \mathrm{Pic}(\widetilde{S}_{w,J})$ est isomorphisme.

Démonstration : 1) Je vais d'abord prouver l'injectivité. Soit $\lambda \in P_J$. Je suppose que l'on a $\lambda \notin P^o_{w,J}$. Il existe donc un indice $i \in J$, tel que $i \in S_J(w)$ et $\lambda(h_i) \neq 0$. Soit $\sigma : \widetilde{S}_{s_i,J} \to \widetilde{S}_{w,J}$ l'immersion naturelle. On a $\sigma^* \widetilde{\mathcal{L}}_w(\lambda) = \widetilde{\mathcal{L}}_{s_i}(\lambda)$. Donc par le lemme 76, $\widetilde{\mathcal{L}}_{s_i}(\lambda)$ n'est pas libre. Donc $\widetilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)$ n'est pas libre, et on a donc $\gamma_{w,J}(\lambda) \neq 0$.

2) Je vais prouver la surjectivité par récurrence sur la longueur de w. Je suppose donnés $w' \in W_J$, $w \in W_J$ et $i \in \{1,\dots,N\}$ tels que

$$w' = s_i w \quad \text{et} \quad \ell(w') \geqslant \ell(w) .$$

Par récurrence, je suppose $\gamma_{w,J}$ bijective, et je veux montrer que $\gamma_{w',J}$ l'est aussi.

Je donne $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $\widetilde{S}_{w',J}$. Soit $j : \widetilde{S}_{w,J} \to \widetilde{S}_{w',J}$ l'immersion canonique. Le faisceau $j^*\mathcal{L}$ est isomorphe (comme faisceau de module) à un certain $\widetilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)$, où $\lambda \in P_J$, par hypothèse de récurrence. On a

$$j^*(\mathcal{L} \otimes \widetilde{\mathcal{L}}_{w'}(-\lambda)) = \mathcal{O}_{\widetilde{S}_{w,J}} ,$$

et je peux donc supposer que $j^*\mathcal{L}$ est trivial.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B \widetilde{S}_{w,J} \arrow[d, "\pi"] & \\
\widetilde{S}_{w',J} & \widetilde{S}_{w,J} \arrow[l, "j"] \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 75-2 il existe des entiers a_u et a bien déterminés par la relation

$$\mathrm{div}(\pi^* \mathcal{L}) = a[\widetilde{S}_{w,J}] + \sum_{u \in \vartheta_J(w)} a_u [P_i \times^B \widetilde{S}_{u,J}] \quad .$$

On a $\sigma \circ \pi = j$. Donc $j^* \pi^* \mathcal{L}$ est un faisceau libre sur $\widetilde{S}_{w,J}$. En appliquant les formules du lemme 75-4, on a donc :

$$a_u = 0 \quad , \quad \text{pour tout } u \in \vartheta_J(w) \quad .$$

A présent je considère deux cas :

3) On suppose d'abord que l'on a $i \in J \cup S_J(w)$. Soit $\mathbf{M}$ l'unique point B-invariant de $\widetilde{S}_{w,J}$. Je pose $S = P_i \cdot \mathbf{M}$, de sorte que l'on a

$$\begin{cases} S = \mathbf{M} & \text{si } i \in J \\ S = \widetilde{S}_{s_i,J} & \text{si } i \in S_J(w) \quad . \end{cases}$$

L'immersion $\tau : P \to \widetilde{S}_{w,J}$ détermine un morphisme naturel $\tau' : P_i / B \simeq P_i \times^B P \to P_i \times^B S_{w,J}$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
P_i \times^B \tilde{S}_{w,J} \arrow[d, "\pi"'] & P_i/B \arrow[l, "\tau'"'] \arrow[d, "\theta'"] \\
\tilde{S}_{s_i w,J} & S \arrow[l, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, on a $S \subset \tilde{S}_{w,J}$. On a donc $\theta^* \mathcal{L} = \mathcal{O}_s$, don $\theta'^* \theta^* \mathcal{L}$ est un fibré inversible libre de P_i/B .

Par ailleurs on a

$$\tilde{S}_{w,J} \cap P_i/B = B/B \quad .$$

Donc $(\tau')^* \pi^* \mathcal{L}$ est le fibré inversible de degré a . Donc on a $a = 0$, donc $\pi^* \mathcal{L}$ est trivial, donc $\mathcal{L}$ est trivial.

4) On suppose que l'on a $i \notin J \cup S_J(w)$. Donc par le lemme 76-2 , on a $\pi^* \mathcal{L} = \pi^* \tilde{\mathcal{L}}_{s_i w}(-a\rho_i)$. Donc $\pi^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_{s_i w}(a\rho_i))$ est libre, et donc on a $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}_{s_i w}(-a\rho_i)$. Ceci montre donc que l'on a $[\mathcal{L}] = \gamma_{w,J}(-a\rho_i)$, et ceci prouve la surjectivité de $\gamma_{w,J}$. Ceci montre la proposition.

Remarques : On conserve les notations de la proposition 6.

1) La proposition 6 classifie les faisceaux inversibles amples et les faisceaux engendrés par leurs sections globales sur la variété de Schubert. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $\tilde{S}_{w,J}$. Alors on a :

$\mathcal{L}$ est engendré par ses sections globales (respectivement amples) si et seulement si il existe $\lambda \in P_J \cap P$ (respectivement $\lambda \in P_J^+$) avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}_w(\lambda)$.

2) On peut ainsi réénoncer la plupart des résultats de manière plus intrinsèque. Par exemple,

ⓐ Soit S une variété de Schubert associée à une matrice de Cartan symmétrisable (ou plus faiblement satisfaisant Σ). Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample. Alors $\mathcal{L}$ est très ample.

ⓑ Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible engendré par ses sections globales sur une variété de Schubert S . Alors $H^q(S, \mathcal{L}) = 0$ pour $q \neq 0$.

3) Il résulte de l'injectivité de $\gamma_{w,J}$ (ce qui est le point facile de la démonstration) que l'on a l'inégalité suivante. Soient J une partie de $\{1,\dots,N\}$, $w \in W_J$. Alors on a

$$\# \ \vartheta_J(w) \geqslant \# \ S_J(w) \ .$$

En effet ces nombres sont (respectivement) le rang du groupe des classes de $\widetilde{S}_{w,J}$, et le rang de groupe de Picard de $\widetilde{S}_{w,J}$.

XIII - REPRÉSENTATION DES FONCTEURS DE JOSEPH

Le but de ce paragraphe est de représenter les foncteurs induits par les foncteurs $\tilde{\mathcal{L}}_w$, i.e. la cohomologie de $\tilde{\mathcal{L}}_w$ sur divers ouverts de $\tilde{S}_w$.

On étudie donc les δ-foncteurs $T^* = T^o, T^1, \ldots$ définis sur $\mathcal{C}(\underline{b})$, à valeur dans la catégorie des groupes abéliens. On suppose que ces foncteurs commutent aux limites inductives.

On obtient une suite spectrale pour une large classe de δ-foncteurs, qui permet en principe de retrouver T^* à partir des groupes $T^* k[B]$. Dans cette suite spectrale les termes E_1 , E_2 , E_∞ et la différentielle d_1 ne dépendent que du foncteur T^* . Je ne comprends pas si les différentielles d'ordre supérieur d_r $(r \geqslant 2)$ dépendent ou non de la réalisation choisie pour T^* .

L'application aux stricts foncteurs de Joseph ne réclame en fait que l'étude de δ-foncteurs cohomologiques. Néanmoins j'indique ici ces techniques, qui seront employées aux chapitres XIV et XVI.

Remarque : Un δ-foncteur T^* sur une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ sera ici une collection $T^o, T^1, \ldots$ de foncteurs covariants, tels que à toute suite exacte $0 \to M \to E \to N \to 0$ soit fonctoriellement associée une longue suite exacte $0 \to T^o M \to T^o E \to T^o N \to T' M \ldots$

Un δ-foncteur T^* est dit cohomologique si pour tout objet $M \in \mathcal{A}$, et tout entier $\ell > 0$, il existe un surobjet $N \supseteq M$ tel que l'application $T^\ell M \to T^\ell N$ soit nulle. Cela implique que les foncteurs dérivés $R^* T^o$ existent, et que le morphisme $R^* T^o \to T^*$ est un isomorphisme.

Soient $\underline{q}$ une algèbre de Lie, $\underline{s}$ une sous-algèbre de Lie. Soient $M(\underline{q})$ et $M_f(\underline{q})$ (respectivement) la catégorie des $\underline{q}$-modules et la catégorie des $\underline{q}$ modules M qui satisferont l'assertion suivante

$$\text{pour tout } m \in M \text{ , } \dim \underline{q}.m < \infty .$$

Soit $M \in M(\underline{q})$, J.L. Kozsul a défini une structure de complexe sur l'espace vectoriel gradué

$$C^*(\underline{q},\underline{s},M) = \oplus H_0(\underline{s} \text{ , } \mathrm{Hom}(\Lambda^n \underline{q}/\underline{s} \text{ , } M)).$$

On note $H^*(\underline{q},\underline{s},M)$ la cohomologie correspondante. Soit M $M_f(q)$. On note $\mathrm{Hom}_f(\Lambda^n \underline{q}/\underline{s},M)$ les éléments de rang fini, pour chaque entier n . La formule de Kozsul définit une structure de complexe sur l'espace vectoriel

$$C_f^*(\underline{q},\underline{s},M) = \oplus H_0(\underline{s} \text{ , } \mathrm{Hom}(\Lambda^n \underline{q}/\underline{s} \text{ , } M)).$$

Soit $H_f^*(\underline{q},\underline{s},M)$ la cohomologie correspondante. Il est naturel d'appeler $H_f^*(\underline{q},\underline{s},M)$ la cohomologie relative de Kozsul à support fini (on pose $H_f^*(\underline{q},M) = H_f^*(\underline{q},\underline{s},M)$ lorsque $\underline{s} = \{0\}$).

Les deux foncteurs précédents sont des δ-foncteurs. Il ne semble pas connu si ces foncteurs sont homologiques, i.e. s'ils sont isomorphes aux dérivés du foncteur H^0 dans une catégorie convenable, mais ceci est bien connu lorsque $\underline{s}$ est réductive.

Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $M(\underline{q})$ ayant suffisamment d'injectif, on note $H^*(\underline{q},\ )$ les dérivées du foncteur $H^0(\underline{q},\ )$ dans la catégorie $\mathcal{C}$.

Soit Ab la catégorie des groupes abéliens. Le lemme suivant donne les propriétés évidentes de la catégorie $\mathcal{C}(\underline{b})$.

Lemme 77 : Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$

1) Le module M possède une résolution $M \to \mathcal{C}^o(M) \to \mathcal{C}^1(M) \to \dots$ qui est injective et minimale dans $\mathcal{C}(\underline{b})$. Le complexe $H^o(\underline{n}, \mathcal{C}^o(M))$ a une différentielle nulle.

2) Cette résolution n'est pas canonique. Pour tout entier n , on a un isomorphisme non canonique

$$\mathcal{C}^n(M) \simeq \overset{\vee}{V}(0) \otimes H_f^n(\underline{n},M)$$

où $H_f^n(\underline{n},M)$ est muni de sa structure naturelle de $\underline{b}$-module (l'action de $\underline{n}$ étant d'ailleurs triviale).

3) En particulier, la dimension cohomologique de M dans $\mathcal{C}(\underline{b})$ est le plus grand entier (éventuellement $+\infty$) pour lequel $H_f^n(\underline{n},M) \neq 0$.

4) Les morphismes naturels de foncteurs

$$H^*_{\mathcal{C}(\underline{b})}(\underline{b},\ ) \to H_f^*(\underline{b},\underline{h},\ ) \to H^o(\underline{h},\ H_f^*(\underline{n},\ )$$

$$H^*_{\mathcal{C}(\underline{b})}(\underline{n},\ ) \to H_f^*(\underline{n},\ )$$

sont des isomorphismes.

Démonstration : Le point 1 se montre comme le théorème des Zyzigie d'Hilbert. On suppose avoir construit pour un entier n une résolution minimale injective $M \to \mathcal{C}^o(M) \to \dots \to \mathcal{C}^n(M)$, telle que le complexe

$H^o(\underline{n}, \mathcal{C}^o(M)) \to \dots \to H^o(\underline{n}, \mathcal{C}^n(M))$ ait une différentielle nulle. Soit C^n le conoyau du morphisme $\mathcal{C}^{n-1}(M) \to \mathcal{C}^n(M)$ si $n \geqslant 1$, du morphisme $M \to \mathcal{C}^o(M)$ si $n = 0$, et du morphisme $0 \to M$ si $n = -1$.

Le module $\mathcal{C}^{n+1}(M) = \check{V}(0) \otimes H^o(\underline{n}, \mathcal{C}^n)$ est injectif. Donc le morphisme natuel $H^o(\underline{n}, \mathcal{C}^n) \to \mathcal{C}^{n+1}(M)$ possède un prolongement $C^n \to \mathcal{C}^{n+1}(M)$. Par construction le noyau Z de ce morphisme satisfait $H^o(\underline{n}, Z) = 0$. Donc on a $Z = 0$, ce qui implique que $M \to \mathcal{C}^o(M) \to \dots \to \mathcal{C}^{n+1}(M)$ est une résolution de M.

Par minimalité pour $n \geqslant 1$, ou par un calcul direct si $n \leqslant 0$, ce complexe est minimal, et la différentielle du complexe $H^o(\underline{n}, \mathcal{C}^\bullet(M))$ est nulle. Ceci prouve le point 1. Les autres points en résultent trivialement C.Q.F.D. .

Soit M un $\mathcal{U}(b)$ - module. Soient Φ et $\overline{\Phi}$ les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathrm{End}(\mathcal{U}(\underline{b}), M)$ définis par les formules suivantes :

$$\Phi\,\Psi(u) = \sum_\alpha u_\alpha\,\psi(v_\alpha)$$

$$\overline{\Phi}\,\Psi(u) = \sum_\alpha \omega(u_\alpha)\,\psi(v_\alpha)$$

pour tout $\Psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}(\underline{b}), M)$, et tout $u \in \mathcal{U}(\underline{b})$ tel que $\Delta u = \Sigma\, u_\alpha \otimes v_\alpha$. Ici ω désigne l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{U}(\underline{b})$. La représentation gauche sur $\mathcal{U}(\underline{b})$, la représentation droite sur $\mathcal{U}(\underline{b})$, et l'action de $\underline{b}$ sur M induisent trois actions sur $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}(\underline{b}), M)$. Je note respectivement L, R et θ ces trois actions. Pour tout $g \in \underline{b}$, je note L_g, R_g et θ_g les trois opérateurs correspondants.

Lemme 78 : On conserve les notations précédentes.

1) Les morphismes Φ et $\overline{\Phi}$ sont inverses l'un de l'autre, i.e. on a $\Phi \circ \overline{\Phi} = \overline{\Phi} \circ \Phi = \mathrm{id}$.

2) Pour tout $g \in \underline{b}$, on a les formules

$$(L_g + \theta_g) \circ \Phi = \Phi \circ L_g$$

$$R_g \circ \overline{\Phi} = \overline{\Phi} \circ (R_g + \theta_g)$$

3) Si $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, le sous-espace vectoriel $k[B] \otimes M$ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}(\underline{b}),M)$ est laissé stable par Φ , $\overline{\Phi}$, et par les actions L , R et θ .

Le lemme 78 (bien connu) résulte de manipulations formelles sur les axiomes des algèbres de Hopf. C'est pourquoi je le laisse sans démonstration.

Dans la suite, je considèrerai un foncteur T défini sur la catégorie $\mathcal{C}(\underline{b})$, à valeur dans une certaine catégorie $\mathcal{A}$. Soit M un espace vectoriel. Si M est muni de diverses structures S , S' ... de $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module, je noterai M_S l'espace vectoriel M muni de la structure de $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module S . Si $M_S \in \mathcal{C}(\underline{b})$, je poserai alors $T_S(M) = T(M_S)$.

Lemme 79 : Soit $T : \mathcal{C}(\underline{b}) \to \mathrm{Ab}$ un foncteur covariant additif.

1) Soient E , $F \in \mathcal{C}(\underline{b})$ deux modules tels que l'action de $\underline{b}$ sur E soit triviale. Alors on a un morphisme naturel $E \otimes T(F) \to T(E \otimes F)$.

Ce morphisme est un isomorphisme dans les deux cas suivants :

(i) E est de dimension finie

(ii) T commute aux limites inductives

2) Soient M un $\mathcal{U}(\underline{b})$ - bimodule, et R et S les deux structures correspondantes. On suppose que M_R appartient à $\mathcal{C}(\underline{b})$. Alors $T_R(M)$ est naturellement un $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module. On note S cette structure.

On suppose en outre que M_S appartient à $\mathcal{C}(\underline{b})$. Alors $T_R(M)_S$ appartient à $\mathcal{C}(\underline{b})$ dans les deux cas suivants :

(i) M est de dimension finie

(ii) T commute aux limites inductives .

3) Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. On note θ sa structure de $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module. On a un morphisme naturel

$$M \otimes T_L(k[B])_{\theta+R} \rightarrow T_{\theta+L}(M \otimes k[B])_R \quad .$$

Ce morphisme est un isomorphisme dans les deux cas suivants :

(i) M est de dimension finie

(ii) T commute aux limites inductives.

4) Soient M un $\mathcal{U}(\underline{b})$ - bimodule, R et S les deux structures de $\mathcal{U}(\underline{b})$ - modules. On suppose que M_R appartient à $\mathcal{C}(\underline{b})$. Alors on a un morphisme naturel

$$T_R\, H^o_S(\underline{b},M) \rightarrow H^o_S(\underline{b}\ ,\ T_R\ M) \quad .$$

Ce morphisme est un isomorphisme dans les deux cas suivants :

(i) T est exact à gauche, et M est de dimension finie.

(ii) T est exact à gauche, commute aux limites inductives et M_S est un $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module localement fini.

Démonstration : 1) Je vais montrer le point 1. Tout élément $e \in E$ induit un morphisme naturel $\mu_e : F \to E \otimes F$ donné par la formule $\mu_e(f) = e \otimes f$, pour tout $f \in F$. Si e, e' sont éléments de E, $\lambda \in k$, on a $\mu_{e+e'} = \mu_e + \mu_{e'}$, $\mu_{\lambda e} = \lambda\, \mu_e$. On a donc une application bilinéaire $M : E \times T(F) \to T(E \otimes F)$ donnée par la formule $M(e,t) = T(\mu_e)(t)$, pour tout $e \in E$, $t \in T(E)$. Cette application induit le morphisme naturel cherché $E \otimes T(F) \to T(E \otimes F)$. Par additivité, ce morphisme est un isomorphisme lorsque E est de dimension finie, ce qui prouve le point 1(i). Le point 1(ii) en résulte aussitôt.

2) Je vais prouver le point 2. Pour tout $u \in \mathcal{U}(\underline{b})$ le morphisme $S(u)$ de M_R induit une application $T_R(S(u)) : T_R(M) \to T_R(M)$ qui fournit la structure de $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module cherchée.

On suppose en outre que M_S appartient à $\mathcal{C}(\underline{b})$, et est de dimension finie. Il existe un idéal bilatère $J \subset \mathcal{U}(\underline{n})$ de codimension finie tel que $S(J).M = 0$. On a donc $S(J).T_R(M)) = 0$, ce qui prouve que $T_R(M)$ est $\mathcal{U}(\underline{n})$ - localement fini. Il existe un ensemble fini Θ dans P, tel que pour tout $h \in \underline{h}$, on ait :

$$S(\prod_{\lambda \in \Theta} (h - \lambda(h))).M = 0 \quad .$$

On a donc aussi

$$S(\prod_{\lambda\in\Theta} h - \lambda(h)) \, . \, T_R(M) = 0$$

et ceci prouve que $T_R(M)$ appartient à $\mathcal{C}(\underline{b})$. Les points (i) et (ii) sont donc montrés.

3) Je vais prouver le point 3. On applique le point 1. On a donc un morphisme naturel $M \otimes T_L(k[B]) \to T_L(M \otimes k[B])$. Par naturalité ce morphisme induit des morphismes

$$M \otimes T_L(k[B])_\theta \longrightarrow T_L(M \otimes k[B])_\theta$$

$$M \otimes T_L(k[B])_R \longrightarrow T_L(M \otimes k[B])_R$$

et les actions R et θ dans les précédents espaces vectoriels commutent. On obtient donc un morphisme naturel

(a) $\qquad M \otimes T_L(k[B])_{\theta+R} \longrightarrow T_L(M \otimes k[B])_{\theta+R}$.

On applique le lemme 78. Le morphisme Φ est un isomorphisme

$$\Phi \; : \; (M \otimes k[B])_{\theta+R,L} \xrightarrow{\sim} (M \otimes k[B])_{R,\theta+L}$$

Donc Φ induit un isomorphisme $\Phi^{\#}$

$$\Phi^{\#} : T_L(M\otimes k[B])_{\theta+R} \xrightarrow{\sim} T_{\theta+L}(M \otimes k[B])_R$$

En composant le morphisme naturel (a) et $\Phi^{\#}$ on obtient le morphisme cherché. Pour que ce dernier morphisme soit un isomorphisme il suffit que le morphisme (a) le soit. Donc les assertions (i) et (ii) résulte du point 1.

4) Je vais prouver le point 4. Le morphisme naturel (b) : $H^o_S(\underline{b},M) \to M$ induit donc un morphisme $T_R\ H^o_S(\underline{b},M) \to T_R(M)$. Comme le morphisme (b) commute aux structures R et S , le morphisme naturel $T_R\ H^o_S(\underline{b},M) \to T_R(M)$ est un morphisme de module pour la structure S , et l'on a

$S(\underline{b})\ T_R\ H^o_S(\underline{b},M) = 0$.

On obtient donc un morphisme naturel (c) : $T_R\ H^o_S(\underline{b},M) \to H^o_S(\underline{b}\ ,\ T_R(M))$.

On suppose maintenant que M est de dimension finie. Il existe donc un entier n , et des éléments $x_1,\dots,x_n$ dans $\underline{b}$, tel que le complexe

$$0 \to H^o_S(\underline{b},M) \to M \xrightarrow{\oplus\ S(x_i)} M^n$$

soit exact. Si T est exact à gauche, le complexe

$$0 \to T_R\ H^o_S(\underline{b},M) \to T_R(M) \xrightarrow{\oplus\ S(x_i)} T_R(M)^n$$

est exact, ce qui prouve que le morphisme (c) est un isomorphisme. Les points (i) et (ii) en résultent aussitôt.

<u>Remarque</u> : Dans la suite immédiate, je ne vais pas utiliser le point 4. On se place dans les hypothèses 4(ii). Ceci implique aussitôt que l'on a, pour tout entier n , et tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$

$$R^n\ T\ M = H^n_{\mathcal{C}(\underline{b})}(\underline{b}\ ,\ k[B] \otimes M)\ .$$

En fait ce résultat n'est pas spécifique à la catégorie $\mathcal{C}(\underline{b})$. Soit G un groupe affine sur un corps k . Soit $\mathcal{C}[G]$ la catégorie des G-modules, au sens algébrique. Soit $T : \mathcal{C}[G] \to Ab$ un foncteur covariant exact à gauche, qui commute aux limites inductives.

On a alors pour tout entier n , et tout $M \in \mathcal{C}(G)$

$$R^n T = H^n_{\mathcal{C}(G)}(G , T(k[G]) \otimes M) .$$

Ce qui prouve que l'on a une équivalence de catégorie entre les foncteurs covariants exacts à gauche, et qui commutent aux limites inductives, et la catégorie des G-modules. Cette équivalence est la suivante. A un tel foncteur T , on associe le module $T(k[G])$. Et réciproquement un module X donne le foncteur $M \to H^o(G , X \otimes M)$.

J'ai indiqué le point 4 pour la raison suivante. Le point 4 suggère que pour une large classe de δ-foncteurs $T^o , T^1 ,T^2 \dots : \mathcal{C}[G] \to Ab$, on pourrait trouver une suite spectrale fonctorielle E , telle que pour tout module $M \in \mathcal{C}[G]$, on ait

$$E_2^{p,q}(M) = H^p_{\mathcal{C}[G]}(G , T^q(k[G]) \otimes M)$$

(cette expression a un sens lorsque chacun des foncteurs T^q commute aux limites inductives), et qui converge vers $T^{p+q}(M)$.

Tel sera le cas lorsque le δ-foncteur $T^o,T^1,\dots$ sera obtenu de la façon suivante. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, stable par limite inductive, $\mathcal{L} : \mathcal{C}[G] \to \mathcal{A}$ un foncteur exact, qui commute aux limites inductives, et $\hat{T} : \mathcal{A} \to Ab$ un foncteur covariant additif, qui possède des dérivés $R^n \hat{T}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $T^n = R^n \hat{T} \circ \mathcal{L}$, et que T^* commute aux limites inductives.

Il est alors aisé de construire une suite spectrale pour un tel δ-foncteur $T^o,T^1,T^2 \dots$, et elle converge vers T^n . Je ne sais pas si un δ-foncteur qui commute aux limites inductives peut toujours être obtenu de la façon précédente, ni même montrer que les suites spectrales obtenues ne dépendent pas des choix faits $(\mathcal{L}, \mathcal{A}, \hat{T})$. Enfin pour un δ-foncteur arbitraire (mais qui commute aux limites inductives) je ne suis pas parvenu à construire une suite spectrale.

On va énoncer le lemme suivant dans un cas particulièrement simple. Premièrement on va considérer le groupe B (au lieu d'un groupe général G) pour lequel la précence d'un complexe de Kozsul calculant l'homologie apporte une simplification. Deuxièmement, on va considérer pour $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs.

Lemme 79 : Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs, et stable par limite inductive. Soit $\mathcal{L} : \mathcal{C}(\underline{b}) \to \mathcal{A}$ un foncteur covariant exact et commutant aux limites inductives. Soit $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ un foncteur covariant exact à gauche, tel que pour tout entier n , $R^n\,\Gamma \circ \mathcal{L}$ commute aux limites inductives. Pour chaque entier n , on pose $T^n = R^n\,\Gamma \circ \mathcal{L}$.

Alors il existe une suite spectrale fonctorielle E(M) qui converge vers $T^*(M)$, et dont le second terme $E_2(M)$ vaut

$$E_2^{p,q}(M) = H_f^q(\underline{b}, \underline{h}, T^p(k[B]) \otimes M)$$

pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, et tous entiers p,q .

<u>Démonstration</u> : Soit $M \in \mathcal{C}(b)$. Je note $N^{\bullet}$ le complexe $N^{\bullet} = C_f^{\bullet}(\underline{b},\underline{h}, k[B] \otimes M)$. La démonstration du lemme consiste à examiner les deux suites spectrales calculant le groupe d'hypercohomologie $R\,\Gamma\,\mathcal{L}(N^{\bullet})$.

① La première suite spectrale [17] pour calculer le groupe d'hypercohomologie a un second terme E_2 égal à

$$E_2 = R^{*}\Gamma\ h^{*}\mathcal{L}(N^{\bullet})$$

Comme $\mathcal{L}$ est supposé exact, on a $h^{*}\mathcal{L}(N^{\bullet}) = \mathcal{L}(h^{*}N^{\bullet})$. Par le lemme 78, $k[B] \otimes M$ est injectif dans $\mathcal{C}(\underline{b})$.

Donc par le lemme 77 on a $h^{q}(N^{\bullet}) = 0$ pour $q \neq 0$, et par le lemme 78 on a $h^{o}(N^{\bullet}) = H^{o}(\underline{b}\ , k[B] \otimes M) = M$. Aussi la première suite spectrale dégénère, et l'on a $R\,\Gamma\,\mathcal{L}(N^{\bullet}) = T^{*}M$.

② Soient $p,q \in \mathbb{N}$. Par hypothèse le foncteur $T^{p} : \mathcal{C}(\underline{b}) \to Ab$ est additif et commute aux limites inductives. Donc par le lemme 78-3, on a $T^{p}(N^{q}) = C_f^{q}(\underline{b}\ , \underline{h}\ , T^{p}(k[B]) \otimes M)$.

La seconde suite spectrale calculant l'homologie a donc pour terme $E_1(M) = C_f^{*}(\underline{b}\ , \underline{h}\ , T^{*}(k[B]) \otimes M)$. Par naturalité la différentielle d_1 est la différentielle de Kozsul. On a donc

$$E_2^{p,q}(M) = H_f^{q}(\underline{b}\ , \underline{h}\ , T^{p}(k[B]) \otimes M)\ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Remarque</u> : On notera que dans la seconde suite spectrale $E(M)$, la différentielle d_1 ne dépend que du foncteur T^{*} , et non du choix

de la catégorie $\mathcal{A}$ et des foncteurs Γ et $\mathcal{L}$. Je ne sais pas si les différentielles d'ordre supérieur d_r , $r \geq 2$ possèdent la même propriété.

Le lemme suivant résulte des propriétés générales des suites spectrales [17]. On conserve les mêmes notations.

Lemme 80 : Soient $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $T^i(k[B])$ pour tout entier $0 < i \leq n$.

Alors les morphismes naturels ("edge morphism")

$$H_f^i(\underline{b}, \underline{h}, T^o k[B] \otimes M) \to T^i M$$

sont des isomorphismes pour $0 \leq i \leq n$, et on a une suite exacte (la suite exacte d'Hoschssild-Serre)

$$0 \to H_f^{n+1}(\underline{b}, \underline{h}, T^o k[B] \otimes M) \to T^{n+1} M \to H^o(\underline{b} , T^{n+1} k[B] \otimes M)$$

$$H_f^{n+2}(\underline{b}, \underline{h}, T^o k[B] \otimes M) \to T^{n+2} M .$$

On en déduit le lemme suivant

Lemme 81 : Soient $0 \leq \ell \leq n$ deux entiers. On suppose que l'on a $T^i k[B] = 0$ pour tout entier $0 < i \leq n$, $T^\ell \neq 0$ et $T^{\ell+1} = 0$. Alors le $\mathcal{U}(\underline{b})$-module $T^o(k[B])$ est de dimension cohomologique dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ exactement ℓ .

Démonstration : Il existe un module M tel que $T^\ell M$ soit non nul. Il résulte du lemme précédent que l'on a $H_f(\underline{b}, \underline{h}, T^o k[B] \otimes M) \neq 0$.

Donc $T^o k[B]$ est de dimension cohomologique $\geqslant \ell$. Soit $M = \bigoplus_{\lambda \in P} k_\lambda$.

Par le lemme précédent, on a $H^{\ell+1}(\underline{b}, \underline{h}, T^o\ k[B] \otimes M) = 0$. Par le lemme 77-4, on a donc $H_f^{\ell+1}(\underline{n}, T^o\ k[B]) = 0$, et par le lemme 77-2 il vient que $T^o\ k[B]$ est de dimension cohomologique $\leqslant \ell$. C.Q.F.D.

Soient X un schéma, $w \in W$, $i : X \to \tilde{S}_w$ un morphisme de schéma, $Y = X \times_{\tilde{S}_w} B(w)$. On a ainsi un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mu"'] & B(w) \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "i"] & \tilde{S}_w \end{tikzcd} .$$

Soit $\mathcal{L}_X$ le foncteur $\mathcal{L}_X : \mathcal{C}(\mathcal{B}) \to \underline{\underline{\mathrm{Qcoh}}}(X)$ défini par la formule $\mathcal{L}_X(M) = i^* \tilde{\mathcal{L}}_w(M)$.

Lemme 82 : On suppose l'espace topologique X noethérien. Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Il existe une suite spectrale $E(M)$ fonctorielle en M qui converge vers $H^*(X, \mathcal{L}_X(M))$ et dont le terme $E_2(M)$ vaut

$$E_2(M) = H_f^*(\underline{b}, \underline{h},\ H^q(Y, \mathcal{O}_Y) \otimes M\ .$$

Démonstration : Le foncteur $\tilde{\mathcal{L}}_w$ est exact et à valeur des $\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}$ - modules plats. Donc $\mathcal{L}_X$ est exact. Comme $\tilde{\mathcal{L}}_w$ commute à la limite inductive, $\mathcal{L}_X$ aussi. Enfin comme l'espace topologique X est noethérien, la cohomologie des faisceaux commute à la limite inductive.

Enfin comme π est affine, on a $\mu_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{L}_X(k[B])$. On a donc aussi comme μ est affine $H^*(Y, \mathcal{O}_Y) = H^*(X, \mathcal{L}_X(k[B]))$. Donc le lemme 82 résulte du lemme 79.

La proposition suivante est le but de ce paragraphe, à savoir représenter les foncteurs de Joseph.

<u>Proposition 7</u> : Soit $w \in W$.

① Le $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module à gauche (respectivement à droite) $k[B(w)]$ est de dimension cohomologique exactement $\ell(w)$.

② Pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, on a

$$D_w^* M = H_f^*(\underline{b}, \underline{h}, k[B(w)] \otimes M) .$$

<u>Démonstration</u> : Par le lemme, on a $H^q(B(w), \mathcal{O}_{B(w)}) = 0$ pour $q \neq 0$, car $B(w)$ est affine. La suite spectrale du lemme 82 dégénère, et on a donc

$$D_w^* M = H_f^*(\underline{b}, \underline{h}, k[B(w)] \otimes M) ,$$

ce qui prouve la seconde assertion.

Par la proposition 3, D_w est de dimension homologique exactement $\ell(w)$. Donc il résulte du lemme 81 appliqué à $\ell = \ell(w)$, et n un entier arbitraire $n \geqslant \ell$ tel que $k[B(w)]$ est un $\mathcal{U}(\underline{b})$ - module à droite de dimension cohomologique $\ell(w)$. En outre le module à gauche $k[B(w)]$ est isomorphe au module à droite $k[B(w^{-1})]$. Ceci prouve la proposition.

Je vais donner une seconde application de la suite spectrale.

Lemme 83 : 1) Soit Y un fermé de $\tilde{S}_w$. Alors pour tout entier p,q , $q \neq 0$, on a

$$H^q(\tilde{S}_w ,\mathcal{H}^p_Y(\tilde{\mathcal{L}}_w(k[B])) = 0$$

2) Soit $U = \tilde{S}_w \setminus Y$. Soit r la codimension de Y . Soit M $\mathcal{C}$ $(\underline{b})$. Alors pour tout entier $n \leqslant r-2$, le morphisme $H^n(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \to H^n(U,\tilde{\mathcal{L}}_w(M))$ est un isomorphisme.

Démonstration : On pose $V = \pi^{-1}(U)$, $Z = \pi^{-1}(Y)$. On notera que comme π est affine, le morphisme $V \to B(w)$ est quasicompact. Donc par une proposition de Grothendieck (proposition 2.1 de 22) $\mathcal{H}^p_Z(\mathcal{O}_{B(w)})$ est quasi-cohérent. Comme π est affine, la dégénérescence de la suite spectrale de Leray prouve que l'on a:

$\pi_*\mathcal{H}^p_Z(\mathcal{O}_{B(w)}) = \mathcal{H}^p_Y(\tilde{\mathcal{L}}_w(k[B]))$ et $R^q\pi_*\mathcal{H}^p_Z\mathcal{O}_{B(w)} = 0$ pour $q>0$.

On a donc $H^q(\tilde{S}_w,\mathcal{H}^p_Y\tilde{\mathcal{L}}_w(k[B])) = H^q(B(w) ,\mathcal{H}^p_Z\mathcal{O}_{B(w)}) = 0$ car $B(w)$ est affine. Ceci prouve le point 1 .

Le point 2 résulte du fait que S_w est Cohen-Mc Caulay (22) .

Enfin je vais indiquer comment la proposition 7 permet de retrouver la suite spectrale de Leray.

Soient $w \in W$, M et M' deux $\mathcal{U}(b)$-modules dans $\mathcal{C}(b)$. Je note L_w , R_w , θ , θ' les actions de $\underline{b}$ à gauche sur $k[B(w)]$, à droite sur $k[B(w)]$, sur M et sur M' respectivement. On concerve les notations.

Lemme 84 : Il existe deux suites spectrales $'E$ et $''E$ qui convergent vers $H^*_{f,\theta'+L_w,R_w+\theta}(\underline{b}x\underline{b} , \underline{h}x\underline{h} , M' \otimes k[B(w)] \otimes M)$ telles que l'on ait

$$'E_2^{p,q} = H_f^q(\underline{b},\underline{h} \; , \; M' \otimes D_w^p M)$$

$$''E_2^{p,q} = H_f^p(\underline{b},\underline{h} \; , \; D^p_{w^{-1}} M' \otimes M) \; .$$

Démonstration : Ces deux suites spectrales sont obtenues en considérant successivement chacun des facteurs de $\underline{b} \times \underline{b}$ comme un idéal. Ceci montre le lemme.

Soient $u,v,w \quad W$ tels que $uv = w$ et $\ell(u) + \ell(v) = \ell(w)$. On examine les deux suites spectrales qui convergent vers $H_f^*(\underline{b}x\underline{b} \; , \; \underline{h}x\underline{h} \; , \; k[B(u)] \otimes k[B(v)] \otimes M)$. La première de ces suites spectrales $'E$ a pour termes $'E_2$

$$'E_2^{p,q} = D_u^q \, D_v^p \, M$$

Compte-tenu des égalités $D_u k[B(v)] = k[B(w)]$ et $D_u^q(k[B(v)]) = 0$ pour $q \neq 0$, le terme $''E_2$ de la suite spectrale dégénère, et l'on a

$$''E_2^{p,q} = 0 \quad \text{si} \quad p \neq 0$$

$$''E_2^{o,q} = D_w^q \, M \; .$$

Ceci redonne la suite spectrale de Leray.

⁂

ANNEXE : Une condition pour qu'un δ - foncteur de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ soit homologique.

Soit $F : \mathcal{C}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Ab}$ un foncteur additif covariant. Soient $X \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, et Y un espace vectoriel. Je définis les foncteurs F_X et F^Y par les relations

$$F_X(M) = F(X \otimes M)$$

$$F^Y(M) = Y \otimes F(M)$$

pour tout $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$.

Lemme 85 : Soient F , X , Y comme ci-dessus. On suppose que F commute aux limites inductives. Soit R un sous-ensemble de P . On suppose

(a) Pour tout $\lambda \in R$, on a $H^o(\underline{b} , X \otimes k_\lambda) \neq 0$

(b) Pour tout $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ de dimension finie, il existe $\lambda \in R$ tel que $F(M \otimes k_\lambda) = 0$

(c) Il existe un morphisme injectif de foncteur $\theta : F_X \to F^Y$

Alors $F(I) = 0$ pour tout objet injectif $I \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$.

Démonstration : Comme F commute à la limite inductive, il s'agit de montrer que pour tout sous-module E de I de dimension finie, l'application $F(E) \to F(I)$ est nulle. Soit donc $\lambda \in R$ tel que $F(E \otimes k_\lambda) = 0$. Comme $H^o(\underline{b} , X \otimes k_\lambda) \neq 0$, on peut fixer une injection ε du module trivial dans $X \otimes k_\lambda$. On a donc un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
F(E) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha"'] & F(I) \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\beta"] \\
F_X(E\otimes k_\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & F_X(I \otimes k_\lambda) \arrow[d] \\
F^Y(E\otimes k_\lambda) \arrow[r] & F^Y(I \otimes k_\lambda)
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse l'application α est nulle. Comme I est injectif, l'injection $id_I \times \varepsilon : I \to I \otimes X \otimes k_\lambda$ est scindée. En particulier l'application $F(I) \to F_X(I \otimes k_\lambda)$ est injective. Comme par hypothèse θ est injectif on en déduit que β est injectif. Donc l'application $F(E) \to F(I)$ est nulle. C.Q.F.D

Un point délicat du chapitre XI était de montrer que $B(w)$ est affine. Je vais montrer comment ce lemme permet de montrer des conséquences de ce fait sans utiliser le fait que $B(w)$ est affine.

On choisit pour ensemble $R = -P^+$, pour module $X = \bigoplus_{\Lambda \in P^+} L(\Lambda)$, et $Y = X$ comme ensemble.

Soient $w,u \in W$ avec $u \leqslant w$.

① On choisit pour foncteur F le conoyau du morphisme $D_w \to D_u$. Comme D_w et D_u sont les sections globales de $\widetilde{\mathcal{L}}_w$ et de $\widetilde{\mathcal{L}}_u$ respectivement, le théorème de Serre implique que F satisfait la condition (b). Les conditions (a) et (b) étant triviales, on en déduit que $D_w I \to D_u I$ est surjective pour tout injectif $I \in \mathcal{C}(\underline{b})$ (lemme 71).

② Soit q un entier >0 . On choisit pour F le foncteur $F : M \longmapsto H^q(\widetilde{S}_w , \widetilde{\mathcal{L}}_w(M))$. La condition (b) résulte du théorème de Serre, les conditions (a) et (c) sont triviales. On obtient : $H^q(\widetilde{S}_w , \widetilde{\mathcal{L}}_w(I)) = 0$, pour tout injectif I (ce fait est utilisé dans la proposition 3).

③ Enfin on peut en déduire le lemme 83-1, par le même type de démonstration, passée aux faisceaux.

Remarque : La démonstration du lemme 84 est inspirée par l'article de Beilinson-Bernstein [4]. L'énoncé du point 4 du lemme 79 présente des analogies avec un théorème de représentation de P. Gabriel en algèbre commutative [22]. En fait ces résultats sont très différents le théorème de Gabriel utilise la commutativité de l'anneau, ici on utilise la structure de cogèbre.

⁂

XIV. Étude du morphisme $B(w) \longrightarrow \tilde{S}_w$.

Soit $w \in W$. On note $\pi : B(w) \longrightarrow \tilde{S}_w$ le morphisme correspondant. On veut montrer que B agit localement librement sur $B(w)$. On en déduira que $B(w)$ est intégralement clos.

Soit U un ouvert de $\tilde{S}_w$. L'application $P \longrightarrow \mathrm{Pic}(\tilde{S}_w)$ induit donc une application $P \longrightarrow \mathrm{Pic}(U)$. On veut montrer la proposition suivante (on conserve les notations précédentes) :

Proposition 8 : On suppose

(a) L'application $P \longrightarrow \mathrm{Pic}(U)$ est nulle.

(b) On a $H^1(U,\mathcal{O}_U) = 0$.

Alors on a

(1) Pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, $\mathcal{L}_w(M)|_U$ est un faisceau libre.

(2) B agit librement à droite sur $\pi^{-1}(U)$, i.e. $\pi^{1}(U)$ est isomorphe à $U \times B$.

On remarquera que cela implique que B agit localement librement à droite (et donc aussi à gauche) sur $B(w)$. En effet comme P est de type fini, la condition (a) est satisfaite pour tout ouvert U suffisamment petit. La condition (b) est satisfaite par exemple sur tout ouvert affine. Donc B agit librement au-dessus de tout ouvert affine suffisamment petit.

Démonstration du point 1. Je vais d'abord prouver ce point lorsque M est de dimension finie, par récurrence sur la dimension.

Lorsque M est de dimension 1, $\mathcal{L}_w(M)|_U$ est libre par la condition (a). On suppose M de dimension > 1. On peut trouver une suite exacte de $U(\underline{b})$-module $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$, où E et F sont non nuls. Par hypothèse de récurrence on a des isomorphismes

$$\tilde{\mathcal{L}}_w(E)\big|_U \simeq \mathcal{O}_U^p$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_w(F)\big|_U \simeq \mathcal{O}_U^q$$

où p et q sont les dimensions de E et F. Par la condition (b), l'extension $0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(E)\big|_U \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(M)\big|_U \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(F)\big|_U \longrightarrow 0$ est donc scindée. Ainsi $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)\big|_U$ est libre.

Enfin le cas où M est de dimension infinie en résulte facilement.

Je vais maintenant donner la démonstration de la proposition 8 lorsque $\underline{g}$ est de dimension finie. Ceci donnera aussi une indication sur la démonstration du cas général.

Les ensembles de cohomologie non abélienne considérés plus bas seront relatifs à la topologie Zarisky.

Pour simplifier on supposera que l'on a $w \geq s_i$, pour tout i (on peut facilement se ramener à ce cas).

Pour chaque ouvert V, soit π_V la restriction de π à $\pi^{-1}(V)$. L'action de B sur le groupe G associé à G est localement libre. Donc l'action de B sur $B(w)$ est aussi localement libre. Donc pour tout ouvert V de $\tilde{S}_w$, π_V détermine un élément, que je note $[\pi_V]$ de $H^1(V,B)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(\tilde{S}_w,B) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & H^1(\tilde{S}_w,H) \arrow[d] \\
H^1(U,N) \arrow[r] & H^1(U,B) \arrow[r, "j_U"] & H^1(U,H)
\end{tikzcd}$$

Comme H est un tore, il est clair que l'on a $H^1(\tilde{S}_w,H) = \tilde{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}(\tilde{S}_w)$, donc $H^1(\tilde{S},H)$ est isomorphe à $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(P)$. Il est clair que $j([\pi])$ est l'élément identité de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(P)$. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait que $j_U([\pi_U]) = 0$ est la condition (a). Comme N est nilpotent, un dévissage trivial indique que pour que $H^1(U,N)$ soit réduit à un point, il suffit que l'on ait $H^1(U,\mathcal{O}_U) = 0$, i.e. la condition (b).

Ainsi si les conditions (a) et (b) sont satisfaites, $[\pi_U]$ est l'élément trivial, ce qui prouve la proposition.

Soit $\underline{m} = \bigoplus_{i \leq 0} \underline{m}_i$ une algèbre de Lie positivement graduée, telle que $\dim \underline{m}_i < \infty$ pout tout i .Je note $\underline{m}'$ (respectivement $k[M]$) les combinaisons linéaires d'éléments homogènes dans $\underline{m}^*$ (respectivement dans $U(\underline{m})^*$) . Soit R l'action de $\underline{m}$ à droite sur $\underline{m}'$ et sur $k[M]$. Soit $E(\underline{m})$ l'extension canonique de $\underline{m}$-modules gradués

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow E(\underline{m}) \longrightarrow \underline{m}' \longrightarrow 0$$

le module trivial k étant gradué en degré 0 . Je note encore R l'action de $\underline{m}$ sur $E(\underline{m})$. Tout élément de $E(\underline{m})$ est donc un couple (λ, v), $\lambda \in K$, $v \in \underline{m}'$, et on a la formule

$$R(g)(\lambda, v) = (\langle v | g \rangle, R(g)v)$$

pour tout $g \in \underline{m}$.

Si Σ est une algèbre de polynôme (à un nombre fini ou infini d'indéterminées) j'appelle système de générateurs (respectivement quasi-système de générateur) un sous-espace vectoriel V de Σ tel que l'application $SV \longrightarrow \Sigma$ soit un isomorphisme d'algèbre (respectivement tel que $V = V' \oplus k1$, où V' est un système de générateur). Lorsque Σ est graduée, on a une notion évidente de système de (quasi)-générateurs gradués.

On notera que $k[M]$ est une sous-algèbre de $U(\underline{m})^*$.

On conserve les notations précédentes.

Lemme 86 : L'algèbre $k[M]$ est une algèbre de polynôme. Il y a une bijection entre les systèmes de quasi-générateurs gradués de $k[M]$ stable sous l'action droite de $\underline{m}$, et les $U(\underline{b})$-morphismes $E(\underline{m}') \longrightarrow k[M]$ qui prolonge le morphisme naturel $k \longrightarrow k[M]$.

Démonstration : Soit $\mathcal{C}_R(\underline{m})$ la catégorie des $U(\underline{m})$-modules gradués, $U(\underline{m})$-localement finis. Il est clair que $k[M]$ est un injectif de $\mathcal{C}_R(\underline{m})$. Il existe donc un morphisme de $U(\underline{m})$-module à droite respectant la graduation, $\varphi : E(\underline{m}) \longrightarrow k[M]$, qui prolonge le morphisme naturel $k \longrightarrow k([M]$.

Pour tout espace vectoriel gradué $X = \oplus X_n$, je note ch(X) l'expression formelle $ch(X) = \Sigma \dim(X_n)t^n$. Soit $V = \oplus E(\underline{m})_i$. L'application φ détermine donc un morphisme d'algèbre $\Psi : SV \longrightarrow k[M]$. Je veux prouver que Ψ est un isomorphisme. On a

$$ch(k[M])(t) = ch(U(\underline{m}))(1/t)$$

donc on a $ch(k[M]) = ch(Sm') = ch(SV)$. Comme les dimensions des composantes homogènes de SV et de k[M] sont finies, il suffit donc de prouver que Ψ est injective. Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base d'éléments homogènes de V (et donc de $\underline{m}$'), telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $\deg \xi_{i+1} \leq \deg \xi_i$. On suppose par l'absurde Ψ non injective. Il existe donc un élément P homogène et de degré maximal, tel que $\Psi(P) = 0$. Il existe des entiers n et m tels que l'on ait $P = \sum_{m\geq i\geq 0} \xi_n^i a_i$, où $a_i \in k([\xi_o,\dots\xi_{n-1}]$ et $a_m \neq 0$. Soit $\{g_i\}$ la base duale de la base de $\underline{m}$' déterminée par la base $\{\xi_i\}$. On notera que pour tout entier i, j on a $R(g_j)(\xi_i) = 0$ pour $j > i$ et $R(g_i)(\xi_i) = 1$. On a donc $R(g_n)^m . P = m!\, a_m$. Donc on a $\Psi(a_m) = 0$, ce qui contredit la maximalité du degré de P.

Ainsi k[M] est une algèbre de polynômes, et l'image de tout morphisme gradué $\varphi : E(\underline{m}) \longrightarrow k[M]$ qui prolonge le morphisme $k \longrightarrow k[M]$ est un système de quasi-générateurs gradués $R(\underline{m})$-stable.

Réciproquement, soit E un système de quasi-générateurs gradués stable sous $R(\underline{m})$. On a nécessairement $H^o(\underline{m},E) = k = E_o$. Soit $\nu : E \longrightarrow k$ l'applicaction d'espace vectoriel qui à tout élément $e \in E$ associe sa composante homogène $\nu(e)$ de degré 0 . L'application ν induit un morphisme de $U(\underline{m})$-module gradué $\mu : E \longrightarrow \underline{m}'$, par la formule

$$\langle\mu(e)|g\rangle = \nu(R(g)e)$$

pour tout $g \in \underline{m}$, $e \in E$, et ceci implique que les $U(\underline{m})$-modules E et $E(\underline{m})$ sont isomorphes, ce qui achève la démonstration du lemme.

<u>Démonstration du point 2 de la proposition</u> 1) Soient X le $U(\underline{b})$-module $X = \oplus_{\lambda \in P} k_\lambda$, et $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathcal{A} = \Gamma(U, \tilde{\mathcal{L}}_w(X))$. Par l'assertion (a) les faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)|_V$ et $\mathcal{O}_U$ sont (non naturellement) isomorphes. On a donc un isomorphisme d'algèbre

$$\chi = k[P] \otimes \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \mathcal{A}$$

tel que pour tout $\lambda \in P$, $\chi(e^\lambda) \in \Gamma(U, \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda))$.

2) Soit $T^* : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab$ le δ-foncteur donné par la formule $T^*M = H^*(U, \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$ pour $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Par les hypothèse (a) et (b), on a $T^1 \, k_\lambda = 0$, pour tout $\lambda \in P$. Comme T^1 commute à la limite inductive le lemme si implique que le $U(\underline{b})$-module $\mathcal{B} = T^0 k[B]$ est injectif (appliqué au cas $n = \ell = 1$) .

On notera que $E(\underline{n})$ est naturellement un $\underline{b}$-module, avec action adjointe de $\underline{h}$. Comme $\mathcal{B}$ est injectif, il existe une application de $\underline{b}$-module à droite $\Psi : E(\underline{n}) \longrightarrow \mathcal{B}$, qui prolonge le morphisme $k \longrightarrow \mathcal{B}$. Donc Ψ détermine par le lemme 86 un morphisme de $U(\underline{b})$-algèbres $\Psi : k[N] \longrightarrow \mathcal{B}$ (où $\underline{n}$ agit à droite sur $k[N]$, et $\underline{h}$ agit par action adjointe).

3) Pour chaque $\lambda \in P$, l'application naturelle $H^0(U, \tilde{\mathcal{L}}_w(\lambda)) \longrightarrow \mathcal{B}$ se factorise à travers $H^0(\underline{b}, \mathcal{B} \otimes k_{-\lambda})$. Donc χ induit un morphisme de $U(\underline{b})$-algèbre $\tau : k[P] \longrightarrow \mathcal{B}$ (où $\underline{n}$ agit trivialement sur $k[P]$, et $\underline{h}$ par l'action à droite).

4) L'isomorphisme de schémas $B = H \times N$ induit un isomorphisme de $U(\underline{b})$-algèbre $k[B] \simeq k[P] \otimes k[N]$. Donc $\tau \otimes \chi$ est un morphisme de $U(\underline{b})$-algèbre $k[B] \longrightarrow \mathcal{B}$. Comme on a $H^0_R(\underline{b}, k[B]) = k$, ce morphisme est

injectif. Soit μ la multiplication de $\mathcal{B}$. Par le lemme 79-4, on a

$$\begin{aligned} H^o(\underline{b},\mathcal{B}) &= H^o(\underline{b},T^o k[B]) \\ &= T^o\ H^o(\underline{b},k[B]) \\ &= T^o\ k \\ &= \Gamma(U,\mathcal{O}_U)\ . \end{aligned}$$

Il est clair que la multiplication μ induit un isomorphisme de $U(\underline{b})$-algèbres $\mathcal{B} = k[B] \otimes \Gamma(U,\mathcal{O}_U)$. Ceci implique que l'action de B sur $\pi^{-1}(U)$ est libre C.Q.F.D..

Soient $\mathcal{A}$ un anneau commutatif intègre, K son corps des factions. On rappelle que l'on définit la clôture intégrale $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ comme l'ensemble des $x \in K$, tel qu'il existe $a \in \mathcal{A}-\{0\}$ avec $ax^n \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \geq 0$. On dit aussi que $\mathcal{A}$ est intégralement clos (ou que Spec $\mathcal{A}$ est intégralement clos) si l'on a $A = \tilde{A}$. On notera que $\mathcal{A}$ n'est pas supposée noethérienne [46].

Proposition 9 : Pour tout $w \in W$, $B(w)$ est intégralement clos.

Démonstration : Il est clair qu'il suffit de montrer qu'il existe un recouvrement de $B(w)$ par des ouverts affines $\{V_\alpha\}$, tels que chacun des V_α soit intégralement clos. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert affine de $\tilde{S}_w$, tel que chacun des U_α satisfasse la condition (a) de la proposition 9. Soit $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Comme $\tilde{S}_w$ est normale et irréductible, U_α est intégralement clos. Comme B agit librement sur V_α, on a un isomorphisme non canonique $V_\alpha = U_\alpha \times B$. On a donc $\Gamma(V_\alpha \mathcal{O}_{V_\alpha}) \simeq \Gamma(U_\alpha,\mathcal{O}_{U_\alpha}) \otimes k[B]$. Comme $K[B]$ est produit d'une algèbre de polynômes de Laurent par une algèbre de polynôme un classique théorème d'Hilbert prouve que $\Gamma(V_\alpha,\mathcal{O}_{V_\alpha})$ est intégralement clos.

Remarque : On peut espérer une démonstration plus simple de la démonstration

XV. Le foncteur D , et le théorème de Borel-Weil-Bott.

Le but de ce paragraphe est de montrer une généralisation du théorème de Borel-Weil-Bott.

§1. Un lemme à la Demazure ([9])

Lemme 87 : Soient V un injectif de $\mathcal{C}(\underline{b})$, $i \in \{1,\dots,N\}$, et $0 \longrightarrow D_{s_i} V \longrightarrow V_o \longrightarrow V_1 \longrightarrow \dots$ une résolution injective de $D_{s_i} V$ dans $\mathcal{C}(\underline{b})$. Alors le complexe de $U(\underline{p}_i)$-modules $0 \longrightarrow D_{s_i} V \longrightarrow D_{s_i} V_o \longrightarrow D_{s_i} V_1 \dots$ est exact et scindé.

En outre $D_{s_i} V$ est de dimension cohomologique ≤ 1 .

Démonstration : 1) Soit $\lambda \in P$. On veut d'abord prouver que l'on a

$$D_{s_i} \mathcal{V}(\lambda) = \bigoplus_{n \geq o} \mathcal{V}_i(\lambda + n\alpha_i) \text{ , si } \lambda(h_i) \geq 0$$

$$D_{s_i} \mathcal{V}(\lambda) = \bigoplus_{n \geq o} \mathcal{V}_i(s_i\lambda + n\alpha_i) \text{ , si } \lambda(h_i) \leq 0$$

suivant les notations du chapitre I de la première partie. Lorsque $\underline{m}$, $\underline{m}'$ sont deux sous-algèbres de $\underline{g}$, $\underline{h} \subseteq \underline{m} \subseteq \underline{m}'$, et si M un $U(\underline{m})$-module $\underline{h}$-semi-simple, soit $\mathcal{C}\, \mathrm{Coind}_{\underline{m}}^{\underline{m}'} M$ le sous-module de $\mathrm{Coind}_{\underline{m}}^{\underline{m}} M$ formé des vecteurs $U(\underline{h})$-semi-simples. Soit $v_1(\lambda) = \mathcal{C}\, \mathrm{Coind}_{\underline{h}}^{\underline{b}_i}(\lambda)$. On a donc $\mathcal{V}_i(\lambda) = \mathcal{C}\, \mathrm{Coind}_{\underline{b}_i}^{\underline{b}}\ \mathcal{C}\, \mathrm{Coind}_{\underline{h}}^{\underline{b}_i}\lambda$. Soit $K_i(\lambda)$ le module

$$K_i(\lambda) = \bigoplus_{n \geq o} \ell_i(\lambda + n\alpha_i) \qquad \text{si } \lambda(h_i) \geq 0$$

$$K_i(\lambda) = \bigoplus_{n \geq o} \ell_i(s_i\ \lambda + n\alpha_i) \quad \text{si } \lambda(h_i) \leq 0 \text{ .}$$

Il est clair que l'on a $K_i(\lambda) = D_{s_i} v(\lambda)$. Comme $K_i(\lambda)$ est réalisé comme un $U(\underline{a}_i)$-sous-module de $\mathrm{Coind}_{\underline{h}_i}^{\underline{a}_i} k_\lambda$ (et exactement comme le sous-module des vecteurs $\underline{h}$-semi-simples, $\underline{a}_i$-finis), on a une application naturelle

$\mathcal{C}\ \mathrm{Coind}_{\underline{a}_i}^{\underline{p}_i} K_i(\lambda) \longrightarrow \mathcal{C}\ \mathrm{Coind}_{\underline{h}}^{\underline{p}_i}(k_\lambda) \longrightarrow \mathcal{C}\ \mathrm{Coind}_{\underline{b}}^{\underline{p}} \check{V}(1)$, qui identifie les vecteurs $U(\underline{p}_i)$-finis. Cette identification laisse la formule $D_{s_i} \check{V}(\lambda) = \check{V}_i(0) \otimes K_i(\lambda)$, ce que je cherchais à prouver.

2) Maintenant je vais prouver que pour tout $\lambda \in P$, $\lambda(h_i) \geq 0$, il existe une résolution injective $0 \longrightarrow \check{V}_i(\lambda) \longrightarrow I_o \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$ de $\check{V}_i(\lambda)$, telle que le complexe de $U(\underline{p}_i)$-modules $0 \longrightarrow \check{V}_i(\lambda) \longrightarrow D_{s_i} I_o \longrightarrow D_{s_i} I_1 \longrightarrow 0$ soit exact et scindé.

En effet on a une résolution injective :

$0 \longrightarrow \check{V}_i(\lambda) \longrightarrow \check{V}(\lambda) \longrightarrow \check{V}(s_i(\lambda+\rho)-\rho) \longrightarrow 0$, qui induit le complexe exact et scindé (comme $U(\underline{p}_i)$-complexe)

$0 \longrightarrow \check{V}_i(\lambda) \longrightarrow D_{S_i} \check{V}(\lambda) \longrightarrow D_{s_i} \check{V}(s_i(\lambda+\rho)-\rho) \longrightarrow 0$, car ce complexe est naturellement isomorphe au complexe

$0 \longrightarrow \check{V}_i(0) \otimes \ell_i(\lambda) \longrightarrow \check{V}_i(0) \otimes k_i(\lambda) \longrightarrow \check{V}_i(0) \otimes k_i(\lambda+\alpha_i) \longrightarrow 0$ ..

3) On veut prouver le lemme. Comme toutes les résolutions injectives sont homotopes, il suffit de prouver le lemme pour une résolution injective de $D_{s_i} V$. Comme le foncteur D_{s_i} commute aux limites inductives, comme V est somme directe de modules $\check{V}(\mu)$ la formule prouvée au point 1 prouve que $D_{s_i} V$ est somme directe de $U(\underline{p}_i)$-modules $\check{V}_i(\lambda)$, où $\lambda \in P$ et $\lambda(h_i) \geq 0$. On peut donc écrire $D_{s_i} V = \oplus_\alpha \mathcal{M}^\alpha$, où chacun des $\mathcal{M}^\alpha$ est un $U(\underline{p}_i)$-module isomorphe à $\check{V}_i(\lambda)$, pour un certain λ . On choisit alors la résolution injective trouvée au point 2

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^\alpha \longrightarrow \mathcal{I}_o^\alpha \longrightarrow \mathcal{I}_1^\alpha \longrightarrow 0$$

telle que pour chaque indice α le complexe de $U(\underline{p}_i)$-module

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^\alpha \longrightarrow D_{s_j}\, \mathcal{I}_o^\alpha \longrightarrow D_{s_i}\, \mathcal{I}_1^\alpha \longrightarrow 0$$

soit exact et scindé.

Il vient alors que $0 \longrightarrow D_{s_i} V \longrightarrow \bigoplus_\alpha \mathcal{I}_o^\alpha \longrightarrow \bigoplus_\alpha \mathcal{I}_1^\alpha \longrightarrow 0$ est une résolution injective de $D_{s_i} V$, ce qui prouve que la dimension cohomologique de $D_{s_i} V$ est ≤ 1. En outre le complexe

$$0 \longrightarrow D_{s_i} V \longrightarrow D_{s_i} \bigoplus_\alpha \mathcal{I}_o^\alpha \longrightarrow D_{s_i} \oplus \mathcal{I}_1^\alpha \longrightarrow 0$$

est exact et scindé, ce qui prouve le lemme.

Soit $\Psi : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow \mathcal{A}$ un foncteur covariant exact à gauche à valeur dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Le morphisme de foncteur $D_{s_i} \longrightarrow \mathrm{Id}$ induit un morphisme de foncteurs $\Psi \circ D_{s_i} \longrightarrow \Psi$.

<u>Lemme 88</u> : On suppose que le morphisme de foncteurs $\Psi \circ D_{s_i} \longrightarrow \Psi$ est un isomorphisme. Alors il existe une longue suite exacte de foncteurs

$$0 \longrightarrow \Psi^1 \circ D_{s_i} \longrightarrow \Psi^1 \longrightarrow \Psi \circ D_{s_i}^1 \longrightarrow \Psi^2 \circ D_{s_i} \longrightarrow \Psi^2 \longrightarrow \cdots$$

<u>Démonstration</u> : Soit V un injectif de $\mathcal{C}(\underline{b})$. Je vais d'abord prouver que l'on a $\Psi^q D_{s_i} V = 0$, pour tout $q > 0$.

Par le lemme 87, on peut trouver une résolution injective

$$0 \longrightarrow D_{s_i} V \longrightarrow I_o \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0 .$$

Comme le complexe $0 \longrightarrow D_{s_i} V \longrightarrow D_{s_i} I_o \longrightarrow D_{s_i} I_1 \longrightarrow 0$ est exact et scindé, on obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Psi \circ D_{s_i} V \longrightarrow \Psi \circ D_{s_i} I_o \longrightarrow \Psi \circ D_{s_i} I_1 \longrightarrow 0$$

et on obtient donc un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \circ D_{s_i} V \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \circ D_{s_i} I_o \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \circ D_{s_i} I_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \circ D_{s_i} V \arrow[r] & \mathcal{F} \circ I_o \arrow[r] & \mathcal{F} \circ I_1 \arrow[r] & \mathcal{F}^1 \circ D_{s_i} V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{F} \circ D_{s_i} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme, ceci implique que l'on a $\mathcal{F}^1 \circ D_{s_i} V = 0$, et on a donc $\mathcal{F}^q D_{s_i} V = 0$ pour tout entier $q > 0$ par le lemme 87 .

Ainsi on peut former la suite spectrale du foncteur composé $\mathcal{F} \circ D_{s_i}$. Cette suite spectrale a pour terme E_2 : $E_2^{p,q} = \mathcal{F}^q \circ D_{s_i}^p$, et converge vers $\mathcal{F}^*$(puisque $\mathcal{F} = \mathcal{F} \circ D_{s_i}$) . Comme D_{s_i} est de dimension 1 , la suite spectrale dégénère et donne lieu à la longue suite du lemme.

<u>Lemme 89</u> : Soient $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab$ un foncteur covariant exact à gauche, et $i \in \{1,...N\}$ tel que $D_{s_i} \circ \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ soit un isomorphisme. Soit $\lambda \in P$, tel que $\lambda(h_i)$ soit ≥ 0 .

Alors pour tout entier k , il existe un isomorphisme (naturellement défini à un signe près)

$$\mathcal{F}^{k+1} k_{\lambda+\alpha_i} \simeq \mathcal{F}^k k_{s_i\lambda} .$$

En outre si $\lambda(h_i) = 1$, on a $\mathcal{F}^* k_\lambda = 0$.

<u>Démonstration</u> : On a $D_{s_i} k_{\lambda+\alpha_1} = 0$, et $D_{s_i}^{(1)} k_{\lambda+\alpha_i} = \ell_i(\lambda)$.

La longue suite exacte du lemme 88 appliquée au module $k_{\lambda+\alpha_i}$ donne donc un isomorphisme

(a) $\mathcal{F}^{\ell+1} k_{\lambda+\alpha_i} \simeq \mathcal{F}^{\ell} \ell_i(\lambda)$.

On a aussi $D_{s_i} k_{s_i\lambda} = \ell_i(\lambda)$, et $D_{s_i}^{(1)} k_{s_i\lambda} = 0$. La même longue suite exacte, appliquée au module $k_{s_i\lambda}$ donne donc un isomorphisme

(b) $\Psi^{\ell} k_{s_i \cdot \lambda} \simeq \Psi^{\ell}\ \mathcal{E}_i(\lambda)$.

Composant les deux isomorphismes précédents, on obtient l'isomorphisme cherché. En fait les isomorphismes (a) et (b) ne sont pas canoniques, et dépendent du choix de vecteurs de plus haut poids et de plus bas poids dans $\mathcal{E}_i(\lambda)$, donc l'isomorphisme cherché est bien défini au signe près.

<u>Remarque</u> : Le lemme 89 n'est en fait qu'une formalisation de deux lemmes bien connus. Le premier de ces lemmes, du à Demazure, s'énonce ainsi. On suppose que $\underline{g}$ est semi-simple, soit G le groupe algébrique (simplement connexe) associe. Si w_o est l'élément maximal du groupe de Weyl on note $\mathcal{L}(\lambda)$ le faisceau de $\mathcal{O}_{G/B}$-modules $\widetilde{\mathcal{L}}_{w_o}(\lambda)$. Soit $\pi : G/B \longrightarrow G/P_i$ le morphisme naturel.

<u>Lemme</u> (M. Demazure) : Soit $\lambda \in P$, $\lambda(h_i) \geq 0$. Alors on a un isomorphisme $R^{\ell+1}\pi_* \mathcal{L}(\lambda+\alpha_i) \simeq R_*^{\ell}\mathcal{L}(s_i\lambda)$. En outre on a $R^*\pi_*\mathcal{L}(\lambda) = 0$ lorsque $\lambda(h_i) = 1$.

Le second de ces lemmes m'a été appris par M. Duflo. On suppose à nouveau que $\underline{g}$ est une algèbre de Kac-Moody générale.

<u>Lemme</u> : Soit M un $U(\underline{p}_i)$-module localement fini, $U(\underline{h})$-semi-simple à poids entier. Soit $\lambda \in 0$, $\lambda(h_i) \geq 0$. Alors on a $H_{\underline{p}}^{\ell+1}(\underline{b},\underline{h},M \otimes k_{\lambda+\alpha_1}) = H_{\underline{p}}^{\ell}(\underline{b},\underline{h},M \otimes k_{s_i\lambda})$. En outre si $\lambda(h_i) = 1$, on a $H_{\underline{p}}^{*}(\underline{b},\underline{h},M \otimes k_{\lambda}) = 0$.

<u>§2 Limites projectives</u>

Soient X un ensemble ordonné, et $\mathcal{A}$ une catégorie. Je note $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(X,\mathcal{A})$

la catégorie des systèmes projectifs indexés par X et $\mathcal{A}$-values. Les objets de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(X,\mathcal{A})$ sont donc les paires $(\mathscr{F}_x, d_{x,y})$, où $(\mathscr{F}_x)_{x \in X}$ est une collection d'objets de $\mathcal{A}$, $(d_{x,y})$ est une collection, indexée par les couples $(x,y) \in X^2$ avec $x \geq y$, de morphismes de $\mathcal{A}$ $d_{x,y} : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}_y$ tels que l'on ait la condition de transitivité $d_{x,y}\, d_{y,z} = d_{x,z}$ pour tous $x,y,z \in X$ avec $x \geq y \geq z$. Un morphisme entre deux objets $(\mathscr{F}_x, d_x)$, $(\mathscr{G}_x, d_x)$ est donc une collection (f_x) de morphismes de $\mathcal{A}$, $f_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$, satisfaisant la règle de commutativité évidente.

Les lemmes 90, 91, 92 qui suivent sont bien connus (cf. A. Grothendieck [23], J.E. Roos [53], J.L. Verdier [64]).

Dans la suite, on choisira comme ensemble ordonné W avec l'ordre de Bruhat. Si l'on suppose en outre que $\mathcal{A}$ est abélienne $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$ est abélienne.

On supposera en outre que la limite projective d'éléments de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$ existe. Cette limite projective définit un foncteur covariant exact à gauche, que je note $\underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}$. Dans le cas spécial où la catégorie $\mathcal{A}$ est la catégorie des groupes abéliens $\underline{\underline{\mathrm{Ab}}}$ (respectivement des faisceaux de groupes abéliens sur un certain espace topologique U) on note $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}$ (respectivement $\underleftarrow{\mathscr{L}\mathrm{im}}$) la limite projective.

Dans la suite on supposera que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectifs. On va montrer simultanément les deux lemmes suivants :

Lemme 90 : La catégorie $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$ possède suffisamment d'injectifs. En outre si $\mathcal{J}$ est un injectifs de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$, alors $\underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}\ \mathcal{J}$ est un injectfif de $\mathcal{A}$.

Corollairement, on peut définir les dérivés des foncteurs $\underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}$. Un foncteur covariant $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ induit un foncteur, que je note encore Γ , $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A}) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathrm{Ab})$, ainsi qu'un morphisme de foncteurs $\theta : \Gamma \circ \underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}} \longrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \circ \Gamma$. On dit alors que Γ commute aux limites projectives si θ est un isomorphisme.

<u>Lemme 91</u> : Soit $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ un foncteur additif covariant, exact à gauche et qui commute aux limites projectives. Soit donc P le foncteur composé

$$P = \underleftarrow{\lim} \circ \Gamma = \Gamma \circ \underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}} .$$

Il existe deux suites spectrales ${}^{I}E$ et ${}^{II}E$ (les suites spectrales des foncteurs composés) qui convergent vers P^* . La première de ces suites spectrales dégénère en des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \underleftarrow{\lim}^1 \circ \Gamma^{\ell-1} \longrightarrow P^{\ell} \longrightarrow \underleftarrow{\lim} \circ \Gamma^{\ell} \longrightarrow 0 .$$

La seconde suite spectrale a pour terme ${}^{II}E_2$:

$${}^{II}E_2^{p,q} = \Gamma^q \circ \underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}^p .$$

<u>Démonstration</u> : 1) Je vais décrire les injectifs de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$. Soit (ξ_w) un objet de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$. Je note $V_w(\xi)$, pour chaque $w \in W$, l'objet suivant de $\mathcal{A}$. Pour chaque triplet v, v', u d'éléments de W avec

$$u \leq v, v' \leq w$$

$$\ell(w) = \ell(v) + 1 = \ell(v') + 1 = \ell(u) + 2$$

je note $\varepsilon(u,v,v')$ l'application naturelle $\varepsilon(u,v,v')M_w(\xi) \longrightarrow \xi_u$ (où $M_w(\varepsilon) = \bigoplus_{\substack{\ell(x) = \ell(w)-1 \\ x \leq w}} \xi_x)$ telle que les restrictions $\varepsilon(u,v,v') : \xi_x \longrightarrow \xi_u$ soient nulles pour tout x avec $\ell(x) + 1 = \ell(w)$ et $x \neq v, v'$, et telle que la restriction de $\varepsilon(u,v,v')$ a ξ_v (respectivement $\xi_{v'}$) soit égale à $d_{v,u}$ (respectivement $-d_{v',u}$) . Je définis enfin $V_w(\xi)$ comme le sous-objet de $M_w(\xi)$ noyau du morphisme $\oplus\, \varepsilon(u,v,v')$. Dans une description ensembliste "naïve", $V_w(\xi)$ est simplement l'ensemble des uplets $(\eta_v)_{\substack{\ell(V)=\ell(w)-1\\ v\leq w}}$, tels que pour tout triplet u,v,w' comme ci-dessus on ait $d_{v,u}\,\eta_v = d_{v',u}\,\eta_{v'}$. L'application naturelle $\xi_w \longrightarrow M_w(\xi)$ est en fait à image dans $V_w(\xi)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (ξ_w) soit injectif est la suivante. Pour chaque $w \in W$, le morphisme $\xi_w \longrightarrow V_w(\xi)$ est surjectif, et le noyau de ce morphisme est injectif dans $\mathcal{A}$. Egalement tout objet de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$ est un sous-objet d'un injectif. La preuve de ces assertions vient immédiatement d'une récurrence croissante "sur $\ell(w)$" . je vais montrer par exemple la dernière assertion. Soit (ξ) un objet de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$. On note $W(n) = \{w \in W/\ell(w) \leq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose avoir construit un objet $(J) \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W(n),\mathcal{A})$ tel que pour tout $w \in W(n)$ l'application $J_w \longrightarrow V_w(\xi)$ est surjective à noyau injectif, et une inclusion $\varepsilon_n : \xi|_{W(n)} \longrightarrow J$ où $\xi|_{W(n)}$ désigne la restriction de ξ à $W(n)$. On choisit pour tout $w \in W$ de longueur $n + 1$ un injectif $\mathcal{J}_w$ qui contienne ξ_w , et l'on définit l'objet $J' \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W(n+1)\ ,\ \mathcal{A})$ par

$$J'_w = J_w \quad \text{si} \quad \ell(w) \leq n$$

$$J'_w = V_w(J) \oplus \mathcal{J}_w$$

de sorte que l'on a une inclusion naturelle $\xi|_{W(n+1)} \longrightarrow J'$. Poursuivant indéfiniment la construction on obtient l'assertion cherchée.

2) Soit $\xi \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}\ (W,\mathcal{C})$. D'après [23], on définit les conditions de Mittag-Leffler pour ξ comme suit:

Pour tout couple u , w d'élément de W avec $u \geq w$, soit $V_{w,u}(\xi)$ l'image du morphisme naturel $\xi_u \longrightarrow \xi_w$. Je dis que ξ satisfait les conditions de Mittag-Leffler si et seulement si pour tout $w \in W$, les sous-objets $V_{w,u}(\xi)$ forment une suite stationnaire dans ξ_w .

Comme $\mathbb{N}$ est cofinal dans W , il est aisé de vérifier que si $(\xi) \in \underline{\underline{\text{Pro}}}(W,\mathcal{A})$ satisfait les conditions de Mittag-Leffler, alors on a

$$\underleftarrow{\lim}^{(q)} \xi = 0 \text{ , pour } q \neq 0.$$

3) Si (ξ) est injectif dans $\underline{\underline{\text{Pro}}}(W,\mathcal{A})$, alors pour tout couple w , u avec $u \geq w$, le morphisme $\xi_u \longrightarrow \xi_w$ est surjectif, et le noyau est injectif. Ce fait implique les points 4, 5 et 6 suivants.

4) Soit $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\text{Pro}}}(W,\mathcal{A})$. On construit une suite exacte

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$, où $\mathcal{G}$ est injective.

Par le point 3, les applications $\mathcal{G}_u \longrightarrow \mathcal{G}_w$ sont surjectives, donc par le lemme du serpent il est de même pour les morphismes $\mathcal{H}_u \longrightarrow \mathcal{H}_w$ (pour $u \geq w$) . Donc $\mathcal{H}$ satisfait aussi les conditions de Mittag-Laffler.

Dans le cas spécial où $\mathcal{A}$ est la catégorie Ab, le point 2 implique alors que l'on a

$$\underleftarrow{\lim}^{(\ell)} = 0 \text{ pour } \ell \geq 2 \text{ .}$$

5) Soient $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Ab}$ un foncteur covariant additif, un (ξ) un injectif de Pro $(W,\mathcal{C})$. Comme pour tout couple (u,w) avec $u \geq w$ l'application $\xi_u \longrightarrow \xi_w$ est surjective et scindée (point 3) , ceci implique également que $\Gamma(\xi_u) \longrightarrow \Gamma(\xi_w)$ est surjective. Donc $\Gamma(\xi)$ satisfait les conditions de Mittag-Leffler, et l'on a donc $\underleftarrow{\lim}^{(\ell)} \Gamma(\xi) = 0$ pour $\ell \neq 0$.

6) Soient ξ un injectif de Pro$(W,\mathcal{A})$, et $X = \{w_n\}$ une suite croissante d'éléments de W . Pour tout entier n , soit J_n le noyau de $\xi_{w_n} \longrightarrow \xi_{w_{n-1}}$. On suppose X cofinal dans W . Comme la limite projective $\mathcal{A}\,\underleftarrow{\text{Lim}}\, \xi$ s'identifie à la même limite projective calculée sur X , un système de choix de supplémentaire de J_n dans ξ_{w_n} induit un isomorphisme

$$\underleftarrow{\mathcal{A}\text{ Lim}}\, \xi = \prod_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

ce qui prouve que $\underleftarrow{\mathcal{A}\text{ Lim}}\, \xi$ est injectif.

7) Je vais maintenant indiquer la démonstration des lemmes 90 et 91. Les deux assertions du lemme 90 sont prouvées aux points 1 et 6 respectivement.

Pour obtenir les suites spectrales des foncteurs composés au lemme 91, il faut prouver que si ξ est un injectif de $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{A})$ on a

$$\text{(a)}\quad \varprojlim^{(\ell)} \Gamma(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \neq 0 \ .$$

$$\text{(b)}\quad \Gamma^{(\ell)} \underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}\ \xi = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \neq 0 \ .$$

Ces assertions résultent des points 5 et 6. Le foncteur P s'écrit comme un foncteur composé $P = \varprojlim \circ \Gamma$. L'assertion (a) implique qu'il existe une suite spectrale ${}^{I}E$ qui converge ver P^* , et telle que

$${}^{I}E_2^{p,q} = \varprojlim^q \circ \Gamma^p \ .$$

Par le point (a), on a $\varprojlim^q = 0$ pour $q \geq 2$, ce qui montre que cette suite spectrale dégénère en des suites exactes courtes du lemme 91.

Le foncteur P s'écrit aussi comme un foncteur composé $P = \Gamma \circ \underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}$. L'assertion(b) prouve qu'il existe une suite spectrale ${}^{II}E$ qui converge vers P^* , et telle que

$${}^{II}E_2^{p,q} = \Gamma^q \circ \underleftarrow{\mathcal{A}\ \mathrm{Lim}}^p$$

ce qui achève la preuve du lemme 91 .

On notera que pour tout espace topologique X , le foncteur de sections globales Γ commute aux limites projectives. Le comportement de la cohomologie vis à vis des limites projectives est étudié dans [23], [53], [64].

<u>Lemme 92</u> Soient X un espace topologique $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathrm{Ab}(X))$, et $J_o \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots$ une résolution injective de $\mathcal{F}$ dans $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathrm{Ab}(X))$.

1) $\underline{\underline{\mathcal{L}\mathrm{im}}}^* \mathcal{F}$ est la famille des faisceaux associés aux préfaisceaux

$U \longrightarrow R \varprojlim J_\bullet(U)$.

2) Pour tout ouvert U de X , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{lim}^{(1)} H^{\ell-1}(U,\mathcal{F}) \longrightarrow [R \underleftarrow{\mathrm{lim}}\ J_{\bullet}(U)]_{\ell} \longrightarrow \underleftarrow{\mathrm{lim}}\ H^{\ell}(U,\mathcal{F}) \longrightarrow 0 .$$

<u>Démonstration</u> : Pour chaque ouvert U on considère les groupes d'hyper limites projectives $R \underleftarrow{\mathrm{lim}}\ J_{\bullet}(U)$. On notera que l'association $U \longrightarrow \underleftarrow{\mathrm{lim}}\ J_{\bullet}(U)$ est un préfaisceau. En appliquant au foncteur $\Gamma(U, \ )$ le lemme 91 (ou plus simplement le point 5 de sa démonstration) on a

$$\underleftarrow{\mathrm{lim}}^{(\ell)} J_p(U) = 0$$

pour tout entier p , et tout $\ell \neq 0$.

Donc la première suite spectrale pour calculer l'hyper limite projective dégénère, et l'on a

$$(R\ \underleftarrow{\mathrm{lim}})J_{\bullet}(U) = h^*(\underleftarrow{\mathrm{lim}}\ J_{\bullet}(U))$$

ce qui prouve que $\underleftarrow{\mathcal{L}im}^* \mathcal{F}$ est la famille des faisceaux associés aux préfaisceaux $U \longrightarrow R\ \underleftarrow{\mathrm{lim}}\ J_{\bullet}(U)$, et ceci prouve le point 1 .

On utilise alors la seconde suite spectrale pour l'hyperlimite projective. Cette seconde suite spectrale E a pour terme E_2

$$E_2(U) = \underleftarrow{\mathrm{lim}}^*(h^* J_{\bullet}(U)) .$$

Comme pour chaque $w \in W$, $J_o(U)_w$ est une résolution injective de $\mathcal{F}_w$, on a donc $E_2(U) = \underleftarrow{\mathrm{lim}}^*\ H^*(U,\mathcal{F})$. Comme on $\underleftarrow{\mathrm{lim}}^{(\ell)} = 0$ pour $\ell \geq 2$, cette suite spectrale dégénère donc en les suites exactes du point 2 du lemme. C.Q.F.D..

Un élément $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,Ab(X))$ est donc dit calibré, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de la topologie de X , tel que $H^{\ell}(U,\mathcal{F}_w) = 0$ pour tout $U \in \mathcal{B}$, $w \in W$ et $\ell \neq 0$. On obtient alors comme corollaire au lemme 92.

<u>Lemme 93</u> : Soit $\mathcal{F} \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,Ab(X))$. Si $\mathcal{F}$ est calibré, alors pour tout entier ℓ $\underleftarrow{\mathcal{L}im}^{\ell} \mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \longrightarrow \underleftarrow{\mathrm{lim}}^{\ell} \mathcal{F}(U)$. En particulier $\underleftarrow{\mathcal{L}im}^{\ell} \mathcal{F} = 0$ pour $\ell \geq 2$.

§3 Le foncteur D.

Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, et $\{A_w\}$ un système projectifs de foncteurs covariants de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, i.e. la donnée d'une collection de foncteurs $A_w : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(w \in W)$ et une collection de morphisme de foncteurs $\theta_{w,u} : A_w \longrightarrow A_u$ pour tout $w \geq U$, avec les propriétés de commutativité usuelles.

Alors $\{A_w\}$ définit de manière naturelle un foncteur $\tilde{A} : \mathcal{A} \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,\mathcal{B})$. Le foncteur $\tilde{A}$ est additif (respectivement exact à gauche) si et seulement tous les foncteurs A_w le sont. Et lorque A est additif, on a la formule évidente

$$R^*\tilde{A} = R^*A_w \ .$$

On définit le foncteur $D : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab$ par la formule $DM = \varprojlim D_wM$, pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Avec les notations précédentes, on a $D = \varprojlim \circ \tilde{D}$.

<u>Lemme 94</u> : Le foncteur D est covariant exact à gauche, et pour tout entier ℓ on a une suite exacte de foncteurs :

$$0 \longrightarrow \varprojlim^{(i)} \circ D_w^{\ell-i} \longrightarrow D^{\ell} \longrightarrow \varprojlim \circ D_w^{\ell} \longrightarrow 0 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit I un injectif de $\mathcal{C}(\underline{b})$. Par le lemme 69, le système projectif D_wI satisfait les conditions de Mittag-Leffler. On a donc $\varprojlim^{(\ell)} D_wI = 0$ pour $\ell \neq 0$. Donc on peut former la suite spectrale du foncteur composé $D = \varprojlim \circ \tilde{D}$. Comme on a $\varprojlim^{\ell} = 0$ pour $\ell \geq 2$, cette suite spectrale dégénère en la suite exacte du lemme.

<u>Lemme 95</u> : Soit $\xi \in P$.

(i) Si il existe $\Lambda \in P^+$, et $v \in W$ tels que $-\xi = v(\Lambda+\rho) - \rho$, on a

$$D^pk_\xi = 0 \text{ pour } p \neq \ell(v)$$
$$D^{\ell(v)}k_\xi = L(\Lambda)^*$$

où $L(\Lambda)^*$ est le dual ordinaire de $L(\Lambda)$.

(2) Si ξ ne satisfait pas aux conditions précédentes, on a $D^*k_\xi = 0$.

Démonstration : On suppose d'abord que l'on a $-\xi \in P^+$. Par le lemme 94, on a pour tout entier p une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 D_w^{p-1}k_\xi \longrightarrow D^p k_\xi \longrightarrow \varprojlim D_w^p k_\xi \longrightarrow 0 .$$

Les espaces vectoriels $D_w^q k_\xi (q \in \mathbb{N})$ sont de dimension finie, donc le système projectif $D_w k_\xi$ satisfait les conditions de Mittag-Leffler. On a donc $\varprojlim^1 D_w^q k_\xi = 0$. Comme par ailleurs on a

$$D_w^p k_\xi = 0 \text{ si } p \neq 0$$

$$D_w^o k_\xi = F_w(-\xi)$$

on obtient dans ce cas

$$D^p k_\xi = 0 \text{ si } p \neq 0$$

$$D\ k_\xi = L(-\xi)^* \ .$$

Ensuite on remarque que pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ on a $D = D \circ D_{s_i}$.

Donc si on peut écrire

$$-\xi = v(V+\rho) - \rho$$

comme au point 1 du lemme, une récurrence évidente sur $\ell(v)$, et une application répétée du lemme 89 prouve que l'on a

$$D^p k_\xi = D^{p-\ell(v)} k_{-\Lambda}$$

pour tout entier p (on convient que l'on a $D^q = 0$ pour un entier $q < 0$) .

Enfin on fixe un poids ξ comme au point 2. On veut prouver que l'on $D^p k_\xi = o$ pour tout entier p. On construit par récurrence des entiers $i_1,\dots i_p \in \{1,\dots N\}$, et des poids $\xi_o,\dots,\xi_p \in P$ définis par les relations de récurrence.

$$\xi_o = \xi$$

$$\xi_j = s_{i_j}(\xi_{j-1}-\rho) + \rho$$

tels que l'on ait $\xi_j(h_{i_j}) \geq -1$, pour tout entier $1 \geq j \geq p$. Le lemme 89 implique alors que l'on a

$$D^pk_\xi = D^pk_{\xi_o} = D^ok_{\xi_p} = 0$$

car $-\xi_p$ n'est pas dominant.

§4 Espace de drapeaux, et leur topologie.

Soit E un ensemble ordonné inductif, et $\{X_\alpha\}$ un système inductif d'espaces topologiques. Il est connu et simple que la limite inductive existe dans la catégorie des espaces topologiques. On note alors $\underrightarrow{\lim}\, X_\alpha$ la limite inductive.

La limite inductive existe aussi dans la catégorie des espaces annelés, mais non dans la catégorie des schémas. On suppose que le système inductif $\{X_\alpha\}$ est en fait un système inductif de schémas. On peut alors définir sur l'espace topologique $\underrightarrow{\lim}\, X_\alpha$ la notion d'ouvert affine généralisé.

On pose $X = \underrightarrow{\lim}\, X_\alpha$. Pour tout indice $\alpha \in E$, on a une application continue $j_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$. Soit U un ouvert de X . Alors je dis que U est un affine généralisé, s'il existe un indice $\beta \in E$ tel que pour tout $\alpha \geq \beta$, $j_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert affine de X_α .

Lorsqu'on se donne un système inductif $\{X_\alpha\}$ de schémas analytique, on définit de même les ouverts de Stein généralisés dans la limite inductive.

Je vais maintenant définir les espaces de drapeaux . Je pose $G/B = \underrightarrow{\lim}\, \tilde{S}_w$, la limite étant calculée dans la catégorie des espaces topologiques.

Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, la variété algébrique $\tilde{S}_w$ définit une variété analytique $\tilde{S}_w^{an}$, . Les immersions fermées $\tilde{S}_u \longrightarrow \tilde{S}_w$ définissent elles aussi des immersions fermées $\tilde{S}_u^{an} \longrightarrow \tilde{S}_w^{an}$. Je pose G/B^{an} la limite inductive des espaces topologiques $\tilde{S}_w^{an}$.

Le but de cette section est de prouver le lemme suivant.

Lemme 96 : 1) L'ensemble des ouverts affines généralisés forment une base de la topologie de G/B .

2) Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, l'ensemble des ouverts de Stein généralisés forment une base de la topologie de G/B^{an} .

Pour montrer ce lemme, j'aurai besoin de deux nouveaux lemmes.

Lemme 97 : Soient $\{X_w\}$ un système inductif de schémas affines, et X l'espace topologique $X = \varinjlim X_w$ (comme précédemment cette limite est calculée dans la catégorie des espaces topologiques). On suppose que pour tout couple u , w d'éléments de W , avec $u \geq w$, le morphisme $X_u \longrightarrow X_w$ est une immersion fermée.

Alors les ouverts affines généralisés forment une base de la topologie de X .

Démonstration : Soient $z \in X$ et U un ouvert de X tel que $z \in U$. Il s'agit de prouver qu'il existe un ouvert affine généralisé V avec $z \in V$ et $V \subseteq U$.

On notera que pour tout $w \in W$, l'application $X_w \longrightarrow X$ est une injection continue fermée. Il existe $u \in W$, tel que l'on ait $z \in X_w$. Par le lemme II, il est possible de choisir une suite $W\ w_o \leq w_1 \geq w_2 \dots$ d'éléments de W , avec $u = w_o$ telle que l'ensemble $\{w_n\}$ soit plein. Pour tout entier n , on pose

$$X_n = X_{w_n} \quad U_n = X_n \cap U \ , \ Z_n = X_n \backslash U_n \ , \ A_n = \Gamma(X_n , \mathcal{O}_{X_n}) \ .$$

Je vais construire une suite d'élément f_o , f_i ... tels que l'on ait

(a) $f_n \in A_n$,

(b) f_n est nulle sur Z_n ,

(c) la restriction de f_n à U_m est une puissance de f_m ,

(d) $f_o(z) \neq 0$,

pour tous entiers n , m avec $m \geq n$, et ce par récurrence sur n .

Pour $n = 0$ on choisit un élément f_o de l'idéal associé à Z_o , avec $f_o(z) \neq 0$. On suppose construit $f_o, \dots f_n$. Soient $I = \sqrt{f_n A_n}$, et Y le fermé correspond à I . Soient $Y' = Y \cup Z_{n+1}$, et I' l'idéal réduit de A_{n+1} associé à Y' . Par construction, on a $Y' \cap X_n = Y$. On a donc $I = \sqrt{A_n I'}$. Donc il existe un entier $\ell \geq 1$, et un élément $f_{n+1} \in I'$ tel que la restriction de f_{n+1} à X_n soit égale à f_n^{ℓ} . La suite ainsi construite satisfait les conditions (a) (b) (c) (d). Pour tout entier $n \geq 0$, soient $D(f_n)$ l'ouvert de X_n où $f_n \neq 0$, et $V = \varinjlim D(f_n)$. Par construction, on a $z \in V$, et $V \cap X_n = D(f_n)$. Donc V est un ouvert affine généralisé, il satisfait $z \in V$, $V \subseteq U$, ce qui prouve le lemme.

<u>Lemme 98</u> : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, de dimension dénombrable, muni de la topologie limite inductive de la $\mathbb{C}$-topologie de ses sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors les ouverts de Stein généralisé forment une base de la topologie.

<u>Démonstration</u> : Il s'agit de montrer que si l'on fixe $z \in E$, et Z un fermé de E , tels que $z \notin Z$ il existe un ouvert de Stein généralisé U tel que $z \in U$ et $U \cap Z = \emptyset$.

Pour simplifier, on pourra supposer que l'on a $z = 0$, et que E est de dimension infinie.

On fixe une base $e_o, e_1, e_2 \dots$ de E ; et on pose $E_n = \mathbb{C}\, e_o \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\, e_n$, $Z_n = Z \cap E_n$, pour tout entier $n \geq 0$. On va construire une suite de réels < 0 $a_o, a_1, \dots$ tels que

(*) Posant q_n la forme hermitienne positive de E_n $q_n = \sum_{i=o}^{i=n} a_i |x_i|^2$, et B_n la boule ouverte unité de E_n qui lui correspond, on a $B_n \cap Z_n = \emptyset$.

On construit ces entiers par récurrence sur n de manière triviale. On pose alors $B = \varinjlim B_n$. On a $B \cap E_n = B_n$ pour tout entier n , donc B est un ouvert de Stein généralisé. En outre on a $0 \in B$, et $Z \cap B = \emptyset$, ce qui prouve le lemme . C.Q.F.D..

On va maintenant prouver le lemme 96. Soient $w \in W$, et $M \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$. L'application naturelle $\tilde{S}_w \longrightarrow G/B$ (respectivement $\tilde{S}_w^{an} \longrightarrow G/B^{an}$ lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$) est un homéomorphisme sur son image. Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, je note $\tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(M)$ le faisceau analytique qui étend $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ à $\tilde{S}_w^{an}$. Donc le faisceau $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ (respectivement $\tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(M)$) peut être considéré comme un faisceau sur G/B (respectivement sur G/B^{an}) . Je pose donc

$$\tilde{\mathcal{L}}(M) = \varprojlim \tilde{\mathcal{L}}_w(M)$$

$$(\text{respectivement } \tilde{\mathcal{L}}^{an}(M) = \varprojlim \tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(M)) .$$

On fixe Λ un poids dominant régulier (par exemple $\Lambda=\rho$).

1) Je vais montrer le point 1 du lemme. Pour chaque $\sigma \in H^0(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(-\Lambda))$, je note σ_w sa restriction à $\tilde{S}_w$, plus précisément son image par l'application

$$H^0(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(-\Lambda)) \longrightarrow H^0(G/B), \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = H^0(\tilde{S}_w, \mathcal{L}_w(-\Lambda))$$

pour tout $w \in W$. Soit alors $D_w(\sigma)$ de $\tilde{S}_w$ où $\sigma_w \neq 0$, et $D(\sigma) = \varinjlim D_w(\sigma)$. Comme on a $D(\sigma) \cap \tilde{S}_w = D_w(\sigma)$, $D(\sigma)$ est un ouvert de G/B . Pour tout $w \in W$, $D_w(\sigma)$ est un ouvert affine de $\tilde{S}_w$, et l'application $D_w(\sigma) \longrightarrow D_u(\sigma)$ pour $w \leq u$ est une immersion fermée. Par le lemme 97, les ouverts affines généralisés forment une base de la topologie de $D(\sigma)$.

$$\text{On a } H^0(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(-\Lambda)) = \varprojlim H^0(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda))$$
$$= L(\Lambda)^* .$$

Donc les applications $H^0(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(-\Lambda)) \longrightarrow H^0(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda))$ sont toutes surjectives, donc l'ensemble des ouverts $D(\sigma)$ $(\sigma \in L(\Lambda)^*)$ forment un recouvrement ouvert de G/B . Ainsi les ouverts affines généralisés forment une base de topologie de G/B .

2) Je vais prouver le point 2 du lemme 96. Soit $\sigma \in H^0(G/B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(-\Lambda))$. Pour

tout $w \in W$, soient de même σ_w la restriction de σ à $\tilde{S}_w^{an}$, et $D_w^{an}(\sigma)$ l'ouvert de $\tilde{S}_w$ où $\sigma_w \neq 0$. On pose $D^{an}(\sigma) = \varinjlim D_w^{an}(\sigma)$. Les différentes sections σ_w déterminent des applications continues

$$\varphi_w : D_w^{an}(\sigma) \longrightarrow E_w(\Lambda)$$

compatibles entre elles, ce qui donne une application continue φ : $D^{an}(\sigma) \longrightarrow L(\Lambda)$. On pose pour $w \in W$ $Z_w = \varphi(D_w^{an}(\sigma))$, et $Z = \bigcup_w Z_w$.

Les morphismes $\tilde{S}w \longrightarrow S_{w,\Lambda}$ sont finies, donc les applications $\tilde{S}_w^{an} \longrightarrow S_{w,\Lambda}^{an}$ sont topologiquement propres ($S_{w,\Lambda}^{an}$ est l'analytisé de $S_{w,\Lambda}$), donc les applications φ_w sont des morphismes analytiques propres, donc Z_w est un fermé analytique de $E_w(\Lambda)$.

On a en outre $\varphi^{-1}(E_w(\Lambda)) = D_w(\sigma)$, donc on a $Z_w = E_w(\Lambda) \cap Z$. Donc Z est un fermé analytique généralisé de $L(\Lambda)$.

Par le lemme 98, les ouverts de Stein généralisés forment une base de la topologie de $L(\Lambda)$. Il en est donc de même pour Z. Enfin les morphismes φ_w sont finis. Donc l'image réciproque par φ d'un ouvert de Stein généralisé est également un ouvert de Stein généralisé. Donc il en est de même pour $D(\sigma)$.

Enfin on a $H^o(G.B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(-\Lambda)) = \varprojlim H^o(\tilde{S}_w^{an}, \tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(-\Lambda))$ et donc par le théorème GAGA de Serre [55] on a : $H^o(G/B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(-\Lambda)) = L(\Lambda)^*$, et le morphisme de restriction $H^o(G/B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(-\Lambda)) \longrightarrow H^o(\tilde{S}_w^{an}, \tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(-\Lambda))$ sont surjectifs. Donc les ouverts $D(\sigma)$ $(\sigma \in L(\Lambda)^*)$ forment un recouvrement ouvert de G/B^{an}. Ainsi les ouverts de Stein généralisés forment une base de la topologie de G/B^{an}.

§5. Les généralisations du théorème de Borel-Weil-Bott.

Au paragraphe précédent, on a associé à tout $M \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$, un faisceau $\tilde{\mathcal{L}}(M) \in Ab(G/B)$ (et lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, un faisceau

$\tilde{\mathfrak{L}}^{an}(M) \in Ab(G/B^{an}))$. Il est clair que l'association $M \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}(M)$ est un foncteur (ibid. pour $\tilde{\mathfrak{L}}^{an}(M)$) et on a ainsi défini un foncteur $\tilde{\mathfrak{L}}$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{L}}^{an}$) qui est covariant exact à gauche.

<u>Lemme 99</u> : Soit $M \in \mathfrak{C}(\beta)$. Alors on a $\underleftarrow{\mathfrak{L}\mathrm{im}}^{\ell}\, \tilde{\mathfrak{L}}_w(M) = 0$ (respectivement $\underleftarrow{\mathfrak{L}\mathrm{im}}^{\ell}\, \tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}(M) = 0$) pour tout entier $\ell \geq 1$. Corollairement le foncteur $\tilde{\mathfrak{L}} : \mathfrak{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab(G/B)$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{L}}^{an} : \mathfrak{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab(G/B^{an})$) est exact.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des ouverts affines généralisés (respectivement de Stein généralisés). Soit $M \in \mathfrak{C}(\mathrm{B})$. Par le lemme 96 $\mathfrak{B}$ forme une base de la topologie de G/B (respectivement G/B^{an}) . Comme les faisceaux $\tilde{\mathfrak{L}}_w(M)$ ($\tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}$ (M)) sont quasi-cohérent, le système projectif de faisceau $\tilde{\mathfrak{L}}_w(M)$ ($\tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}(M)$) est calibré relativement à $\mathfrak{B}$. En outre pour tout ouvert $U \in \mathfrak{B}$, la restriction $\tilde{\mathfrak{L}}_w(M)(U) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}_v(M)(U)$ ($\tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}(M)(U) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}(M)(U)$) est surjective par un théorème de Serre (Cartan et Serre) . Donc le système de groupes abéliens $\tilde{\mathfrak{L}}_w(M)(U)$ ($\tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}(M)U$) satisfait aux conditions de Mittag-Leffler.

Par le lemme 93, on a donc $\underleftarrow{\mathfrak{L}\mathrm{im}}^{\ell}\, \tilde{\mathfrak{L}}_w(M) = 0$ ($\underleftarrow{\mathfrak{L}\mathrm{im}}^{\ell}\, \tilde{\mathfrak{L}}_w^{an}(M) = 0$) , pour tout entier $\ell \geq 1$, puisque un préfaisceau nul sur une base de topologie définit un faisceau nul.

Enfin si $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathfrak{C}(\underline{b})$, la suite exacte $0 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}(M) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}(E) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}(N) \longrightarrow \underleftarrow{\mathfrak{L}\mathrm{im}}^{1}\, \tilde{\mathfrak{L}}_w(M)$ ($0 \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}^{an}(M) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}^{an}(E) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{L}}^{an}(N) \longrightarrow \underleftarrow{\mathfrak{L}\mathrm{im}}^{1}\, \tilde{\mathfrak{L}}_w(M)$) prouve que le foncteur $\tilde{\mathfrak{L}}$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{L}}^{an}$) est exact. C.Q.F.D..

On en déduit que la suite de foncteur T^* :

$$M \longrightarrow H^*(G/B, \tilde{\mathfrak{L}}(M))$$

$$(M \longrightarrow H^*(G/B, \tilde{\mathfrak{L}}(M)))$$

est un δ-foncteur. On a donc un morphisme naturel de δ-foncteurs $D^* \longrightarrow T^*$.

Soient X un espace topologique, et $\underline{a}$ une algèbre de Lie. Je note $Ab_{\underline{a}}(X)$ la catégorie des faisceaux de $U(\underline{a})$-modules. Soit $\mathcal{F} \in Ab_{\underline{a}}(X)$. Alors la résolution canonique de Godement $C^{\bullet}(\mathcal{F})$ est une résolution flasque de $\mathcal{F}$ dans $Ab_{\underline{a}}(X)$. Donc les groupes de cohomologie $H^*(X,\mathcal{F})$ sont naturellement des $U(\underline{a})$-module. En outre si $u \in U(\underline{a})$, u définit un élément $u' \in Hom_X(\mathcal{F},\mathcal{F})$, et l'action de u sur $H^*(X,\mathcal{F})$ est la même que celle induite par u'.

Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie produit amalgamé des algèbres $\underline{p}_i$ $(i \in \{1,\dots,N\})$ suivant $\underline{b}$ (définie au chapitre VI). Il est clair que pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, $\breve{\mathcal{L}}(M)$ (et $\breve{\mathcal{L}}^{an}(M)$ lorsque $k = \mathbb{C}$) est fonctoriellement un faisceau de $\tilde{\mathfrak{g}}$-modules. De même DM est fonctoriellement un $\tilde{\mathfrak{g}}$-module, ce qui prouve que tous les goupes D^*M sont en fait des $\tilde{\mathfrak{g}}$-modules. On verra en annexe que l'action de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur ces différents objets factorise à travers $\mathfrak{g}$.

<u>Lemme 100</u> : Soit $M \in \mathcal{C}(\mathbf{B})$

1) Les applications naturelles $D^*M \longrightarrow H^*(G/B, \breve{\mathcal{L}}(M))$ sont des isomorphismes de $\tilde{\mathfrak{g}}$-modules.

2) Lorsque $k = \mathbb{C}$, l'application naturelle $D^*M \longrightarrow H^*(G/B^{an}, \breve{\mathcal{L}}^{an}(M))$ est un isomorphisme de $\tilde{\mathfrak{g}}$-modules.

<u>Démonstration</u> : Je vais montrer le point 1 . Pour cela, il s'agit de montrer que l'on a

$$H^{\ell}(G/B), \tilde{\mathcal{L}}(I)) = 0 \text{ , pour tout entier } \ell \neq 0$$

pour tout injectif $I \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Soit $P : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab$ le foncteur composé : $PM = H^0(G/B, \underleftarrow{\mathcal{L}im}\, \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) = \underleftarrow{\lim}\, H^0(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$. Par le lemme 99, on a $\underleftarrow{\mathcal{L}im}^{\ell}\, \breve{\mathcal{L}}_w(M) = 0$, pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, et tout entier $\ell \neq 0$. Donc la seconde suite spectrale du lemme 91 dégénère, et l'on a

$$P^*M = H^*(G/B), \breve{\mathcal{L}}(M)) \text{ , pour tout } M \in \mathcal{C}(\underline{b}) \text{ .}$$

Par le lemme 71 et la proposition 3, les applications

$H^o(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) \longrightarrow H^0(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_u(I))$ sont surjectives pour tout w , $u \in W$ avec $w \geq u$, et l'on a $H^\ell(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) = 0$ pour $\ell \neq 0$. Donc le système projectif $H^o(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_w(I))$ satisfait aux conditions de Mittag-Leffler et l'on a

$$\varprojlim{}^p H^q(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) = 0 ,$$

pour tout couple d'entiers p, q avec $p \neq 0$ ou $q \neq 0$. Donc la première suite spectrale du lemme 91 dégénère, et l'on a $P^\ell I = 0$ pour $\ell \neq 0$.

On a donc $H^\ell(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(I)) = 0$ pour $\ell \neq 0$, et ceci prouve que le morphisme du point 1 est un isomorphisme.

Lorsque $k = \mathbb{C}$, la même démonstration vaut. Il suffit de remarquer par le théorème GAGA de Serre [61] l'application naturelle

$$H^*(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow H^*(\tilde{S}_w^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(M))$$

est un isomorphisme (pour tout $w \in W$ et $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$), et donc $H^*(G/B, \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow H^*(G/B^{an} , \tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(M))$ est également un isomorphisme.

On obtient les généralisations suivantes du théorème de Borel-Weil-Bott (cf. [42]).

<u>Théorème 4-AL</u>. Soit $\xi \in P$.

1) Si il existe $\Lambda \in P^+$, $v \in W$ tels que $-\xi = v(\Lambda+\rho) - \rho$, alors on a

$$H^p(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(\xi)) = 0 \text{ pour } p \neq \ell(v)$$
$$H^{\ell(v)}(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(\xi)) = L(\Lambda)^* .$$

2) Si ξ ne satisfait pas aux conditions précédentes, on a

$$H^*(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(\xi)) = 0 .$$

<u>Théorème 4-AN</u> : Soit $\xi \in P$. On suppose que l'on a $k = \mathbb{C}$.

1) Si il existe $\Lambda \in P^+$, $v \in W$ tels que $-\xi = v(\Lambda+\rho) - \rho$, alors on a

$$H^p(G/B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(\xi)) = 0 \text{ , pour } p \neq \ell(v)$$
$$H^{\ell(v)}(G/B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(\xi)) = L(\Lambda)^* .$$

2) Si ξ ne satisfait pas aux conditions précédentes, on a

$$H^*(G/B^{an}, \tilde{\mathcal{L}}^{an}(\xi)) = 0 .$$

Démonstration : Ces théorèmes résultent des lemmes 95 et 100.

Je vais indiquer une autre généralisation possible du théorème de Borel-Weil-Bott. Soit U un ouvert de G/B , et Z son complémentaire. Pour tout $w \in W$, je pose $c_w(U) = \operatorname{codim}_{\tilde{S}_w}(Z_w)$, où $Z_w = Z \cap \tilde{S}_w$.

Je note $\mathcal{T}$ la topologie de la limite inductive sur G/B . Soient $\mathcal{T}_\infty$ et $\mathcal{T}_m$ les deux topologies de G/B définies comme suit. Si U est une partie de G/B, on a :

1) U appartient à $\mathcal{T}_m$ si et seulement si $U \in \mathcal{T}$ et il existe $w \in W$ tel que $Z \subseteq \tilde{S}_w$.

2) U appartient à $\mathcal{T}_\infty$ si et seulement si $U \in \mathcal{T}$ et $\lim\limits_{w \to \infty} c_w(U) = \infty$ (lorsque W est fini cette dernière condition est vide).

On a ainsi $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}$, avec égalités si et seulement si $\underline{g}$ est de dimension finie. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B, avec $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Pour tout w , l'application naturelle $\tilde{S}_w \longrightarrow (G/B, \mathcal{T}')$ est encore un homéomorphise sur son image. Pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, $w \in W$, je note $\tilde{C}^\bullet_w(M)$ la résolution canonique de Godement de $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$, de sorte que je peux considérer que $\tilde{C}^\bullet_w(M)$ est un complexe de faisceaux sur $(G/B, \mathcal{T}')$ [17] . Je note $\tilde{C}^\bullet(M,\mathcal{T}')$ le complexe de faisceaux sur $(G/B,\mathcal{T}')$: $\tilde{C}^\bullet(M,\mathcal{T}') = \varprojlim \tilde{C}^\bullet_w(M)$ (la limite étant calculée dans la topolgoie $\mathcal{T}'$).

Lemme 101 : Soient $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B telle que $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B telle que $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, et $j = (G/B,\mathcal{T}) \longrightarrow (G/B,\mathcal{T}')$ l'inclusion correspondante.

1) Pour tout entier ℓ , le foncteur $M \longrightarrow \tilde{C}^\ell(M,\mathcal{T}')$ est exact.

2) Pour tout module M , on a un isomorphisme factoriel

$\tilde{C}^\bullet(M,\mathcal{T}') \simeq j_*\tilde{C}^\bullet(M,\mathcal{T})$.

3) Le complexe augmenté $\tilde{\mathcal{L}}(M) \longrightarrow \tilde{C}^{\cdot}(M,\mathcal{T})$ est une résolution de $\tilde{\mathcal{L}}(M)$.

4) Le morphisme naturel $R^{*}j_{*}\tilde{\mathcal{L}}(M) \longrightarrow h^{*}\tilde{C}^{\cdot}(M,\mathcal{T}')$ est un isomorphisme. On a en outre $h^{*}\tilde{C}^{\cdot}(M,\mathcal{T}') = \underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}^{*}j_{*}\tilde{\mathcal{L}}(M)$.

<u>Démonstration</u> : (1) Soient w , $u \in W$, avec $u \leq w$. Comme le morphisme $\tilde{\mathcal{L}}_{w}(M) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{u}(M)$ est surjectif, il vient que pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$, et tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'application $\tilde{C}_{w}^{\ell}(M)(U) \longrightarrow \tilde{C}_{u}^{\ell}(M)(U)$ est surjective. En particulier on obtient que l'on a $\varprojlim^{q} \tilde{C}_{w}^{\ell}(M)(U) = 0$, pour tout entier $q \neq 0$.

2) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, et $w \in W$, le faisceau $\tilde{C}_{w}^{\ell}(M)$ est flasque, donc le système projectif $\tilde{C}_{w}^{\ell}(M)$ $(w \in W)$ est calibré pour la base de topologie $\mathcal{T}'$ de $(G/B, \mathcal{T}')$. En particulier par le point 1 il vient que l'on a $\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}^{q} \tilde{C}_{w}^{\ell}(M) = 0$ pour tout entier $q \neq o$ (limite calculée en topologie $\mathcal{T}'$) , par le lemme 93.

3) Soit $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{C}(\underline{b})$, et ℓ un entier. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{C}^{\ell}(M,\mathcal{T}') \longrightarrow \tilde{C}^{\ell}(E,\mathcal{T}') \longrightarrow \tilde{C}^{\ell}(N,\mathcal{T}') \longrightarrow \underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}^{1}\ C_{w}^{\ell}(M) .$$

Donc par le point 2 , le foncteur $M \longrightarrow \tilde{C}^{\ell}(M,\mathcal{T}')$ est exact. Ceci prouve le point 1.

4) Soit U un ouvert affine généralisé de G/B. Pour tout $w \in W$, tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, le complexe $\tilde{C}_{w}^{\cdot}(M)(U)$ a pour cohomologie $H^{*}(U,\tilde{\mathcal{L}}_{w}(M))$. Comme on a $H^{\ell}(U, \tilde{\mathcal{L}}_{w}(M)) = 0$ pour $\ell \neq 0$, le complexe augmenté $0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{w}(M)(U) \longrightarrow \tilde{C}_{w}^{\cdot}(M)(U)$ est exact. Comme U est affine généralisé, pour tout $u \in W$ avec $u \leq w$ l'application $\tilde{\mathcal{L}}_{w}(M)(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{u}(M)(U)$ est surjective. Donc on aussi $\varprojlim^{q} \tilde{\mathcal{L}}_{w}(M)(U) = 0$, pour $q \neq 0$.

Donc par le point 1 et ce qui précède, le complexe augmenté $0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}(M)(U) \longrightarrow \tilde{C}^{\cdot}(M,\mathcal{T})(U)$ est exact. Comme les ouverts affines généralisés forment une base de la topologie $\mathcal{T}$ par le lemme 96, le complexe augmenté $0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}(M) \longrightarrow \tilde{C}^{\cdot}(M,\mathcal{T})$ est exact, ce qui prouve le point 3.

5) Le point 2 du lemme résulte des constructions faites les morphismes de bord.

$Rj_* \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}) \longrightarrow h^{\cdot\cdot *} \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ résultant fournissent par le point 4 de la démonstration des morphismes naturels

$$R^* j_* \tilde{\mathcal{L}}(M) \longrightarrow h^* \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}').$$

Les foncteurs $\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}} \circ j$ et $j \circ \underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}} : \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(W,G/B) \longrightarrow Ab(G/B,\mathcal{T}')$ sont égaux. Soit $\mathcal{P}$ ce foncteur. Par le lemme 90, on a $R^*\mathcal{P} = R^*j_* \circ R^*\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}} = R^*\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}} \circ R^*j_*$. On a donc d'autre part

$$\begin{aligned} R^*\mathcal{P}\, \tilde{\mathcal{L}}_w(M) &= R^*j_* \circ R^*\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}\, \tilde{\mathcal{L}}_w(M) \\ &= R^*j_*\, \breve{\mathcal{L}}(M) \text{ , par le lemme 99.} \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$R^*\mathcal{P}\, \breve{\mathcal{L}}_w(M) = R^*\, \underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}} \circ R^*j_*\, \breve{\mathcal{L}}_w(M)$$

Comme les morphismes $\tilde{S}_w \longrightarrow (G/B,\mathcal{T}')$ sont des homéomorphismes sur leur image, on a pour tout $w \in W$ $R^\ell j_* \breve{\mathcal{L}}_w(M) = 0$ pour tout $\ell \neq 0$. On a donc $R^*\mathcal{P}\, \tilde{\mathcal{L}}_w(M) = \underleftarrow{\tilde{\mathcal{L}}\mathrm{im}}^*\, \tilde{\mathcal{L}}_w(M)$. Or $\tilde{C}^\cdot_w(M)$ est une résolution du système projectif $\breve{\mathcal{L}}_w(M)$, et l'on a $\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}^q\, \breve{C}^\ell_w(M) = 0$ pour tout entier ℓ , et tout entier $q \neq 0$, par le point 2 de la démonstration. Donc le complexe $\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}\, \tilde{C}^\cdot_w(M)$ a pour homologie $\underleftarrow{\mathcal{L}\mathrm{im}}^*\, \breve{\mathcal{L}}_w(M)$. On a donc $R^*\mathcal{P}\, \breve{\mathcal{L}}_w(M) = h^*(\breve{C}^\cdot(M,\mathcal{T}'))$. On obtient donc l'isomorphisme cherché, ce qui achève la preuve du lemme.

Pour tout espace topologique X , soit $C(X)$ la catégorie des complexes de faisceaux en groupes abéliens $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on n'autorise pas de degrés négatifs). Soit $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B avec $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Le foncteur de $\mathcal{C}(\underline{b})$ dans $C(G/B,\mathcal{T}')$, qui à $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$ associe $\tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ est exact par le lemme 101-1 . Donc la série de foncteurs $T^* : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab$ donnés par la formule $T^*M = R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ est un δ-foncteur. L'augmentation naturelle $j_*\, \breve{\mathcal{L}}(M) \longrightarrow \breve{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ (pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$) défini donc un morphisme de foncteur $D^0 \longrightarrow T^0$, et par universalité de D un morphisme de δ-foncteurs $D^* \longrightarrow T^*$.

<u>Lemme 102</u> : Soient $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B avec $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, et $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Alors les morphismes naturels $D^*M \longrightarrow R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ sont des isomorphismes.

Démonstration : Soit $j : G/B \longrightarrow (G/B,\mathcal{T}')$ l'application continue naturelle.

Le second terme de la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = H^q(G/B,\mathcal{T}',R^p j_* \tilde{\mathcal{L}}(M))$ (permettant de calculer $H^*(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(M))$ et le second terme de la suite spectrale d'hypercohomologie $E_2^{p,q} = H^q(G/B,\mathcal{T}',h^p \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}'))$ sont fonctoriellement égaux, par le lemme 101-2, donc il en est de même de tous les termes suivants, ce qui prouve que l'on a $H^*(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(M)) = R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$.

Donc par le lemme 100, les morphismes naturels $D^*M \longrightarrow R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ sont des isomorphismes, ce qui montre le lemme.

On obtient ainsi une amélioration au théorème que j'ai montré dans [42], par le théorème suivant

Théorème 4-HYP : Soient $\xi \in P$, et $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B avec $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

1) Si il existe $\Lambda \in P^+$, $v \in W$ tels que $-\xi = v(\Lambda+\rho) - \rho$, alors on a $R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(k_\xi,\mathcal{T}') = [L(\Lambda)^*]^{[\ell(v)]}$.

2) Si ξ ne satisfait pas aux conditions précédentes, on a $R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(k_\xi,\mathcal{T}') = 0$.

Le théorème 4-HYP résulte des lemmes 102 et 95.

Je vais montrer un phénomène amusant qui se produit lorque $\underline{g}$ est de dimension infinie, hypothèse que je garderai dans la fin de ce chapitre (cf.[16]) .

Proposition 10 Soient $\mathcal{T}'$ une topologie de G/B avec $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, et $M \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$. Il existe une suite spectrale E , qui converge vers $R\Gamma\, \tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$, et dont le terme E_2 vaut

$$E_2^{p,q} = H^q(G/B,\mathcal{T}',h^p\,\tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}'))\ .$$

1) On suppose que l'on a $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Alors on a $E_2^{p,q} = 0$ pour tout couple d'entiers p , q avec $p \neq 0$.

2) On suppose que l'on a $\mathcal{T}_m \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_\infty$. Alors on a $E_2^{p,q} = 0$ pour tout couple d'entiers p , q avec $q \neq 0$.

<u>Démonstration</u> : Le point 1 de la proposition résulte du lemme 101-3 , et n'utilise pas que $\underline{g}$ est de dimension infinie.

Je vais prouver le point 2 . Soient p un entier, U un ouvert de $\mathcal{T}'$, Z le complémentaire de U dans G/B , et pour tout $w \in W$, soient $Z_w = Z \cap \tilde{S}_w$, $U_w = U \cap \tilde{S}_w$. Par définition, il existe $u \in W$, tel que pour tout $w \geq u$, on ait $\operatorname{codim}_{\tilde{S}_w} Z_w \geq p + 2$.

Par le lemme 83-2, pour tout $w \geq 2$, les morphismes

$$H^p(\tilde{S}_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow H^p(U_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$$
$$H^{p-1}(\tilde{S}_w,\tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow H^{p-1}(U_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$$

sont des isomorphismes. Par le lemme 92, $\mathcal{L}im^p j_*\,\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est un faisceau associé à une série de préfaisceaux $\mathcal{G}^p$ tel que l'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1 H^{p-1}(U,\mathcal{T}',\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow \mathcal{G}^p(U) \longrightarrow \varprojlim H^p(U,\mathcal{T}',\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow 0\ .$$

D'où on obtient en une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1\ H^{p-1}(\tilde{S}_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow \mathcal{G}^p(U) \longrightarrow \varprojlim H^p(\tilde{S}_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M)) \longrightarrow 0\ .$$

Donc le préfaisceau $U \longrightarrow \mathcal{G}^p(U)$ est constant. Comme l'espace topologique $(G/B,\mathcal{T}')$ est connexe, ceci montre que $\underleftarrow{\mathcal{L}im}^p j_*\,\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est un faisceau constant, et même flasque car $(G/B,\mathcal{T}')$ est clairement irréductible. Par le lemme 101-4, il vient donc que $h^p\,\tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')$ est flasque. Ceci implique que l'on a $H^q(G/B,\mathcal{T}',\ h^p\,\tilde{C}^\cdot(M,\mathcal{T}')) = 0$ pour $q \neq 0$, i.e. on a $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$, ce qui prouve la proposition 11.

<u>Remarque</u> : On remarque que G/B n'est pas un schéma, excepté lorsque $\underline{g}$ est

de dimension finie. Je donnerai des énoncés plus précis au chapitre suivant.

§6 Annexe : structures de $\mathfrak{g}$-modules.

Soit W_o l'ensemble ordonné $W \cup \{0\}$, avec pour ordre l'ordre de Bruhat et la relation $0 \leq w$ pour tout $w \in W_o$.

Lemme 103 : Soit $i \in \{1,\dots,N\}$. On suppose W infini. Alors il existe une fonction croissante $\psi_i : W_o \longrightarrow W_o$ telle que

(a) pour tout $w \in W_o$, $w \geq \psi_i(w)$,

(b) $\psi_i(W_o) \subseteq \{0\} \cup {}^iW$,

(c) $\lim\limits_{w\to\infty} \psi_i(w) = \infty$,

(d) $\psi_i \circ \psi_i = \psi_i$.

Démonstration : Par le lemme 1, il existe une suite infinie d'éléments $w_o < w_1 < \dots$ dans ${}^iW$, tels que l'ensemble $X = \{w_n / n \in \mathbb{N}\}$ soit cofinal. Je pose donc $\psi_i(w) = \mathrm{Max}\{x \in X \text{ , } x \leq w\}$, avec la convention $\mathrm{Max}(\emptyset) = 0$. Les conditions (a) (b) (c) (d) sont alors automatiquement satisfaites.

Soit X un espace topologique; Je note $\underline{\underline{\mathrm{Pro}}}_o(X)$ la catégorie des systèmes projectifs $(\mathcal{F}_w)$ de faisceaux abéliens sur X indexés par W_o , tels que $\mathcal{F}_o = 0$. Je note $\underline{\underline{\widetilde{\mathrm{Pro}}}}(X)$ la catégorie des systèmes projectifs de $\underline{b}$-faisceaux $(\mathcal{F}_w) \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}_o(X)$ tels que l'on ait

(1) Pour tout $i \in \{1,\dots N\}$ et $w \in {}^iW$, $\mathcal{F}_w$ est muni d'une structure de $\underline{p}_i$-faisceau qui prolonge sa structure de $\underline{b}$-faisceaux.

(2) Pour tout couple $u, w \in {}^iW$ le morphisme $\mathcal{F}_w \longrightarrow \mathcal{F}_u$ commute aux structures de $\underline{p}_i$-modules.

Dans la suite de ce paragraphe, les limites projectives seront calculées sur divers sous-ensembles pleins X de W_0, et seront alors notées $\varprojlim_X$. On notera que si $(\mathcal{F}_w) \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}_0(X)$, le morphisme naturel

$$\underleftarrow{\mathcal{L}im}_{W_0} \mathcal{F}_w \longrightarrow \underleftarrow{\mathcal{L}im}_X \mathcal{F}_w$$

est un isomorphisme. Donc si $(\mathcal{F}_w) \in \underline{\underline{\mathrm{Pro}}}(X)$, pour tout $i \in \{1,\dots,N,\}$, l'identification $\underleftarrow{\mathcal{L}im}_{W_0} \mathcal{F}_w \longrightarrow \underleftarrow{\mathcal{L}im}_W \mathcal{F}_w$ induit une structure naturelle de $\underline{b}$-faisceau. Ainsi $\mathcal{F}$ est naturellement un faisceau de $\underline{\tilde{g}}$-module.

Je vais donner une régle plus pratique pour calculer l'action des opérateurs de $\tilde{\varphi}$ sur $\mathcal{F}$. Une séquence α de longueur n est la donnée d'une séquence $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ d'éléments de $\{1,\dots,N\}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des séquences de diverses longueur, et $*:\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ l'opérateur d'assemblage des séquences . Si $\alpha = \alpha_1\dots\alpha_n$ et $\beta_1\dots\beta_n$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$ de longueur n et m, je pose $\gamma = \alpha*\beta$ où γ est la séquence $\gamma = \gamma_1\dots\gamma_{n+m}$ de longueur n+m telle que

$$\gamma_j = \alpha_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

$$\gamma_j = \beta_{j-n} \text{ pour } n+1 \leq j \leq n+m.$$

Tout élément $i \in \{1,\dots,N\}$ défini une une séquence de longueur 1, notée encore i.

Dans la suite je fixe pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ une fonction $\psi_i:W_0 \longrightarrow W_0$ satisfaisant aux conditions (a), (b), (c) du lemme 103.

Je vais définir, par récurrence sur sa longueur pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ des fonctions $\psi_\alpha:W_0 \longrightarrow W_0$, et un sous-espace $\underline{\tilde{g}}_\alpha$ par les régles suivantes

1) $\underline{\tilde{g}}_i = \underline{p}_i$, pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$

2) Si $\alpha = i*\beta$ est un élément de longueur ≥ 2 de $\mathcal{S}$, où $i \in \{1,\dots,N\}$ et $\beta \in \mathcal{S}$, je pose $\psi_\alpha = \psi_i\, \psi_\beta\, \psi_i$ et $\underline{\tilde{g}}_\alpha = \mathrm{Ad}(U(\underline{p}_i))(\underline{\tilde{g}})$.

Par définition de $\underline{\tilde{g}}$, on a $\underline{\tilde{g}} = \cup\, \underline{\tilde{g}}_\alpha$. Si $\alpha \in \mathcal{S}$, ψ_α est croissante, et l'on a $\lim\limits_{w \to \infty} \psi_\alpha(w) = \infty$ (on remarquera qu'il existe des fonctions croissantes non bornées $\psi:W_0 \longrightarrow W_0$ qui n'ont pas de limite à l'infini, pour des groupes de Weyl suffisament gros).

Soit $\mathcal{F} \in \underline{\mathrm{Pro}}_0(W_0)$, et $\psi:W_0 \longrightarrow W_0$ une fonction croissante telle que $\lim\limits_{w \to \infty} \psi(w) = \infty$. Comme le sous-ensemble $\psi(W_0)$ est cofinal dans W_0,le morphisme naturel $\varprojlim_{W_0} \mathcal{F}_w \longrightarrow \varprojlim_{\Psi(W_0)} \mathcal{F}_w$ est un isomorphisme.

<u>Lemme 104</u> Soit $\alpha \in \mathcal{S}$

1) La fonction Ψ_α est croissante, et l'on a $\lim\limits_{w \to \infty} \Psi(w) = \infty$

2) Soit $(\mathcal{F}_w) \in \underline{\underline{\tilde{Pro}}}(X)$. Pour tout $w \in W_0$, il existe un morphisme naturel de $\underline{b}$-module $\tilde{\underline{g}}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{F}_{\Psi_\alpha(w)})$, toutes les compatibilités possibles étant satisfaites.

3) Le morphisme induit par limite projective $\check{\tilde{\underline{g}}}_\alpha \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F} = \varprojlim_{W_0} \mathcal{F}_w$ est la restriction à $\check{\tilde{\underline{g}}}_\alpha$ de l'action de $\check{\tilde{\underline{g}}}$ sur $\underline{F}$.

<u>Démonstration</u> Le point 1 du lemme résulte d'une récurrence immédiate sur la longueur de α, et du lemme 103.

Lorsque α est de longueur 1, on pose $\alpha = i$, le morphisme naturel $\underline{p}_i \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{F}_{\Psi_i(w)})$ est obtenu comme suit. Soit r le morphisme de restriction $\mathcal{F}_w \longrightarrow \mathcal{F}_{\Psi_i(w)}$. Comme on a $\Psi_i(w) \in {}^iW \cup \{0\}$, $\mathcal{F}_{\Psi_i(w)}$ est naturellement un $\underline{p}_i$-faisceau, d'où un morphisme naturel $\underline{p}_i \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{F}_{\Psi_i(w)})$. Composant avec r, on obtient un morphisme naturel $\underline{p}_i \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_w, \mathcal{F}_{\Psi_i(w)})$.

On suppose que α est de longueur ≤ 2, soit $\alpha = i * \beta$ pour certains $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\beta \in \mathcal{S}$. Par récurrence, on a un morphisme naturel $\tilde{\underline{g}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{\Psi_i(w)}, \mathcal{F}_{\Psi_\beta \Psi_i(w)})$. Utilisant la restriction $\mathcal{F}_{\Psi_\beta \Psi_i(w)} \longrightarrow \mathcal{F}_{\Psi_\alpha(w)}$ on obtient un morphisme naturel $\tilde{\underline{g}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{\Psi_i(w)}, \mathcal{F}_{\Psi_\alpha(w)})$. Le terme de droite étant un $U(\underline{p}_i)$-module, on obtient un $U(\underline{p}_i)$-morphisme
φ: $U(\underline{p}_i) \otimes_{U(\underline{b})} \tilde{g}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{\Psi_i(w)}, \mathcal{F}_{\Psi_\alpha(w)})$.

Soit Γ l'ensemble des éléments $\gamma \in \mathcal{S}$ tels que

1) $\gamma = i * \gamma'$ pour un certain $\gamma' \in \mathcal{S}$, ou $\gamma = i$,

2) $\beta = \gamma'' * \gamma$ pour un certain $\gamma'' \in \mathcal{S}$, ou $\beta = \gamma$.

Par construction $\tilde{g}_\alpha$ est le quotient de $U(\underline{p}_i) \otimes_{U(\underline{b})} \tilde{g}_\beta$ par les relations triviales suivantes

(a) $f_i.u - [f_i,u]$, où $u \in \underline{u}_i^+$

(b) $f_i.h$, où $h \in \underline{h}$ et $\alpha_i(h) = 0$

(c) $f_i^2.h$

(d) $f_i.v - [f_i,v]$ où $v \in \cup_{\gamma\in\Gamma} \tilde{g}_\gamma$

Par naturalité des constructions, ces relations sont dans le noyau du morphisme ψ. Composant une dernière fois avec la restriction $\mathcal{F}_w \longrightarrow \mathcal{F}_{\psi_i(w)}$, on obtient le morphisme naturel $\tilde{g}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_w,\mathcal{F}_{\psi_\alpha(w)})$ cherché.

Cette même récurrence prouve le point 3.

Dans la suite je noterai $\tilde{S}_0$ la variété vide, et lorsque $k = \mathbb{C}$ je noterai $\tilde{S}_0^{an}$ la variété analytique vide. Le faisceau structural de ces variétés est réduit à l'élément 0.

Soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Je pose alors de même $\tilde{\mathcal{L}}_0(M) = 0$, $D_0M = 0$, (et $\tilde{\mathcal{L}}_0^{an}(M) = 0$ lorsque $k = \mathbb{C}$), de sorte que $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ est naturellement un élément de <u>Pro</u>(G/B) (respectivement $\tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(M) \in$ <u>Pro</u>(G/B^{an})). Le lemme 104 s'applique alors à un tel système projectif.

<u>Lemme 105</u>: On suppose que l'on a $k = \mathbb{C}$. Soient $\alpha \in \varphi$, $y \in \tilde{g}_\alpha$, $w \in W_0$. L'image de l'opérateur y dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}\mathrm{an},\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}\mathrm{an})$, où $v = \psi_\alpha(w)$, est continu (en topologie de la convergence compacte).

<u>Démonstration</u> 1) Soient $u \in W$, $\tilde{u} \in \tilde{W}$, i u $\{1,\dots,N\}$ et $x \in \underline{p}_i$, tels que $s_iu \leq u$, $s_i\tilde{u} \leq \tilde{u}$, où $\tilde{u}$ est une décomposition réduite de u. Comme $\tilde{S}_u$ et $D(\tilde{u})$ sont des P_i-variétés, x définit un opérateur $\Theta(x)$ (respectivement $\Theta'(x)$) sur $\tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{S}_u}$ (respectivement sur $\mathcal{O}_{\tilde{S}_u}\mathrm{an}$. Comme $\Theta'(x)$ est un champ de vecteur holomorphe sur la variété analytique lisse $D(\tilde{u})$, il est continu en topologie de la convergence compacte. Comme le morphisme $\pi:D(\tilde{u})\longrightarrow\tilde{S}_u$ est propre, et que l'on a

$\pi_* \mathcal{O}_{D(\tilde{u})} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_u}$, Θ(x) est également continu.

2) Si u, u' ∈ W_0 avec $u \geq u'$, l'opérateur de restriction r ∈ Hom($\mathcal{O}^{an}_{\tilde{S}_u}$,$\mathcal{O}^{an}_{\tilde{S}_{u'}}$), est également continu.

3) L'image Θ(y) ∈ Hom($\mathcal{O}^{an}_{\tilde{S}_w}$,$\mathcal{O}^{an}_{\tilde{S}_v}$) de l'élément y est obtenue par composition et combinaisons linéaires finies d'opérateurs étudiés au point 1 et 2. Donc Θ(y) est également continu.

<u>Lemme 106</u> Soit M ∈ $\mathcal{C}(\underline{b})$. Alors l'action de $\tilde{\underline{g}}$ sur $\tilde{\mathcal{X}}(M)$, D^*M (et $\tilde{\mathcal{X}}^{an}(M)$ lorsque k = ℂ) factorise à travers $\underline{g}$.

<u>Démonstration</u> Soient i, j deux éléments distincts de {1,...,N}, et $y = ad^n(f_i)(f_j)$ une des relations de Serre, où $n = -\alpha_j(h_i)+1$, et α = i*j. On a donc $y \in \tilde{\underline{g}}_\alpha$.

Soient w ∈ W_0, $u = \Psi_i(w)$ et $v = \Psi_\alpha(w)$, de sorte que l'on a $w \geq u \geq v$, u, v ∈ ${}^iW$ et $v = \Psi_\alpha(u)$.

1) Je vais d'abord prouver que pour tout N ∈ $\mathcal{C}(\underline{b})$, l'image Θ de y dans Hom(D_uN,D_vN) défini par le lemme 104 est nulle.

Soient n un élément de D_uN, E = U($\underline{p}_i$).n, F' = Θ(E) et F = U($\underline{p}_i$).F'. Comme D_uN et D_vN sont U($\underline{p}_i$)-localement finis, E et F sont des U($\underline{p}_i$)-modules de dimension finie, et par restriction Θ définit un morphisme $\Theta' : E \longrightarrow F$.

Dans le U($\underline{p}_i$)-module Hom(E,F), on a $e_i.\Theta' = 0$ et $h_i\Theta' = m\Theta'$, pour un certain entier m<0. Comme Hom(E,F) est de dimension finie, cela implique que l'on a Θ' = 0, donc on a Θ.n = 0. Cette dernière relation étant vérifiée pour tout n ∈ D_uN, on a Θ = 0, ce qui prouve l'assertion

Par construction, cela implique que l'image de y dans Hom(D_wN,D_vN) est aussi nulle.

2) On fixe un poids dominant entier Λ tel que les faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}_v(-\Lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)$ soient très amples. Soit N ∈ $\mathcal{C}(\underline{b})$ Je pose pour tout z ∈ W_0

$M(z,N) = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} H^0(\tilde{S}_z,\tilde{\mathcal{L}}(N \otimes k_{-n\Lambda}))$. Tout élément $x \in g_\alpha$ agit comme une dérivation de $\tilde{A}(w,\Lambda)$ dans $\tilde{A}(v,\Lambda)$ et de $\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}$. Comme $\tilde{S}_w$ et $\tilde{S}_v$ sont les espaces projectifs associés aux anneaux gradués $\tilde{A}(w,\Lambda)$ et $\tilde{A}(v,\Lambda)$, et que y a une image non nulle dans $\mathrm{Hom}(\tilde{A}(w,\Lambda),\tilde{A}(v,\Lambda))$ par le point 1, y a une image non nulle dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\tilde{S}_w},\mathcal{O}_{\tilde{S}_v})$. Lorsque N est de dimension finie, $\tilde{\mathcal{L}}_w(N)$ et $\tilde{\mathcal{L}}_v(N)$ sont les faisceaux cohérents associés aux $\tilde{A}(w,\Lambda)$-modules $M(w,N)$ et $M(v,N)$ respectivement. On remarque que l'image de y est à valeur dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}}(\tilde{\mathcal{L}}_w(N),\tilde{\mathcal{L}}_v(N))$. Donc par le point précédent, cet image est nulle. Par un argument de limite , ce résultat vaut également lorsque N est de dimension infinie.

3) On suppose que l'on a $k = \mathbf{C}$, et l'on fixe $N \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Par densité, et la continuité montrée au lemme 105, l'image de y dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}an,\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}an)$ est nulle. Cela prouve que y est à image dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}^{an}}(\tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(N),\tilde{\mathcal{L}}_v^{an}(N))$. Par le théorème GAGA de Serre, l'application naturelle [55]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}}(\tilde{\mathcal{L}}_w(N),\tilde{\mathcal{L}}_v(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}_w}^{an}}(\tilde{\mathcal{L}}_w^{an}(N),\tilde{\mathcal{L}}_v^{an}(N))$$

est bijective. Donc l'image de y dans ce dernier groupe est également nulle.

4) Comme les points 1, 2, 3 sont valables pour tout $w \in W_0$, le lemme 104 prouve que y agit de manière nulle sur $\tilde{\mathcal{L}}(M)$ (et sur $\tilde{\mathcal{L}}^{an}(M)$ lorsque $k = \mathbf{C}$). Enfin en utilisant le théorème 4-AL il vient que y agit de manière nulle sur D^*M (ceci résulte aussi du fait que D^* est le foncteur dérivé de D).

5) Enfin comme le résultat précédent est vrai pour tout couple d'éléments i, j, cela prouve le lemme.

<u>Remarque:</u> G. Segal a donné une autre version du théorème de Borel-Weil pour les groupes de lacets [54].

XVI Le foncteur F

Soit $T^* = T^0, T^1 \ldots$ un δ-foncteur covariant de $\mathcal{C}(\underline{b})$ dans Ab qui commute aux limites inductives. On appelle réalisation de T^* la donnée d'un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{L}, \Gamma)$, où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs et stable par limite inductive, où $\mathcal{L} : \mathcal{C}(B) \longrightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur exact qui commute aux limites inductives, et où $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est un foncteur covariant exact à gauche, tels que l'on ait un isomorphisme de δ-foncteurs $T^* = \Gamma^* \circ \mathcal{L}$.

Par le lemme 79, on peut retrouver alors T^* à l'aide d'une suite spectrale, et des groupes $T^*k[B]$.

On notera d'abord que le foncteur D^* commute à la limite inductive si et seulement si $\underline{g}$ est de dimension finie. En effet, on suppose $\dim \underline{g} = \infty$. Soit Λ un poids dominant et régulier. On constate aisément que le module $\check{V}(\Lambda)$ n'a aucun poids antidominant. Par le lemme 95, on a donc $DE = 0$, pour tout sous-module $E \subset \check{V}(\Lambda)$ de dimension finie. En revanche le lemme 71 implique que l'application naturelle $D\check{V}(\Lambda) \longrightarrow \check{V}(\Lambda)$ est surjective.

Donc D ne commute pas aux limites inductives lorsque $\underline{g}$ est de dimension infinie. Il est aisé d'en déduire que les foncteurs $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ introduits aux chapitres précédents ne commutent pas non plus aux limites inductives. C'est pourquoi, pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, on pose

$$F^*M = \varinjlim D^*E$$

$$C^\bullet(M, \mathcal{T}') = \varinjlim \tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{T}') ,$$

les limites étant prises sur l'ensemble des sous-modules $E \subset M$ de dimension finie, et $\mathcal{T}'$ étant une topologie de G/B avec $\mathcal{T}_m \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

En l'absence de précision, G/B désigne l'espace topologique G/B avec sa topologie $\mathcal{T}_\infty$.

§ 1. Les foncteurs F et $\hat{F}$

Soit $\mathcal{M}(\underline{h})$ la catégorie des $\mathcal{U}(\underline{h})$-modules, et $\mathcal{C}(H)$ la sous-catégorie des $\mathcal{U}(H)$-modules semi-simples à poids dans P . Soit $\Gamma_{\underline{h}} : \mathcal{M}(\underline{h}) \longrightarrow \mathcal{M}(\underline{h})$ le foncteur de Ducloux, qui à tout module M associe le sous-module $\Gamma_{\underline{h}}M$ des vecteurs $\mathcal{U}(\underline{h})$-finis [13] ($\Gamma_{\underline{h}}$ est aussi le foncteur des sections à support fini, lorsqu'on considère M comme un faisceau sur $\underline{h}^*$ [22]).

Soit $\mathcal{V}_\mu(\underline{h}) = \{h \in \underline{h}\ ,\ (\mu+\lambda)(h) \neq 0$ pour tout $\lambda \in P\}$, pour $\mu \in \underline{h}^*$. Soient $M \in \mathcal{M}(\underline{h})$, et $\lambda \in \underline{h}^*$. Je pose

$$K_M(\lambda) = \sum_{h \in \underline{h}^*} (h - \lambda(h)) \ . \ M \ .$$

On suppose d'abord k algébriquement clos. On note alors $\mathfrak{B}(\underline{h})$ la catégorie des $\mathcal{U}(\underline{h})$-modules M qui satisfont aux propriétés suivantes, pour tout $\lambda \in P$.

a) On a $\Gamma_{\underline{h}}M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$.

b) On a $K_M(\lambda) = M$ si $\lambda \notin P$.

c) On a $(\lambda(h) - h)K_M(\lambda) = K_M(\lambda)$ pour tout $h \in \mathcal{V}_\lambda$.

d) M_λ est le noyau de $(h - \lambda(h))$, pour tout $h \in \mathcal{V}_\lambda$.

Dans le cas général, soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de k . Je note $\mathfrak{B}(\underline{h})$ la catégorie des modules M tels que $\bar{k} \otimes M \in \mathfrak{B}(\bar{k} \otimes \underline{h})$.

Lemme 107 : La catégorie $\mathfrak{B}(\underline{h})$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{M}(\underline{h})$, stable par limite inductive. La restriction du foncteur de Ducloux à $\mathfrak{B}(\underline{h})$ est exacte.

Démonstration : On peut supposer que k est algébriquement clos. Je vais d'abord montrer que $\mathfrak{B}(\underline{h})$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{M}(\underline{h})$. Soit $\nu : E \longrightarrow E'$ un morphisme de $\mathcal{U}(\underline{h})$-modules entre deux modules $E\ , E' \in \mathfrak{B}(\underline{h})$.

Soient X et Y le noyau et le conoyau de ν. Il s'agit de prouver que l'on a $X \in \mathfrak{B}(\underline{h})$ et $Y \in \mathfrak{B}(\underline{h})$.

On notera que, pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$, on a $\mathcal{V}_\lambda \neq \emptyset$. On suppose d'abord que l'on a $\lambda \notin P$, et soit $h \in \mathcal{V}_\lambda$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, "S"] & E' \arrow[r] \arrow[d, "S"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & E \arrow[r] & E' \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les multiplications par $(h - \lambda(h))$ prouve que $(h - \lambda(h))$ est un isomorphisme sur X et sur Y. On en déduit les assertions (b)(c)(d) lorsque $\lambda \notin P$.

Lorsque $\lambda \in P$, on déduit les assertions du fait que l'on peut écrire E et E' comme somme directe du noyau de $(h - \lambda(h))$ et de son image, et que $(h - \lambda(h))$ est bijectif sur $K_E(\lambda)$ et $K_{E'}(\lambda)$, pour tout $h \in \mathcal{V}_\lambda$

Il est clair que $\mathfrak{B}(\underline{h})$ est stable par limite inductive. Enfin, pour tout $h \in \mathcal{V}_\lambda$, et tout $E \in \mathfrak{B}(\underline{h})$, le morphisme naturel $E_\lambda \longrightarrow E/(h - \lambda(h))E$ est un isomorphisme. Donc $\Gamma_{\underline{h}}$ est exact sur $\mathfrak{B}(\underline{h})$. C.Q.F.D.

Pour tout M $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, je pose $\hat{F}^*M = \Gamma_{\underline{h}} \circ F^*M$. Lorsque M est de dimension finie, on a aussi $\hat{F}^*M = \varprojlim D_w M$, limite calculée dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Cette formule implique aussitôt le lemme suivant :

<u>Lemme 108</u> : Pour tout $M \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, on a $F^*M \in \mathfrak{B}(\underline{h})$. Corollairement $\hat{F}^*$ est un δ-foncteur.

Soit $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\underline{g})$ $(\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{int}}(\underline{g}))$ la catégorie des $\mathcal{U}(\underline{g})$-modules intégrables, $\mathcal{U}(\underline{h})$-semi-simples à poids entiers, et $\mathcal{U}(\underline{b})$ (respectivement $\mathcal{U}(\underline{b}^-)$) localement finis.

Lemme 109 : La structure naturelle de $\mathcal{U}(\underline{b})$-module à droite sur $D\ k[B]$ et $F^*\ k[B]$ se prolonge naturellement en une structure de $\mathcal{U}(\underline{g})$-module. Comme $\mathcal{U}(\underline{g})$-module à droite, on a $F^*\ k[B] \in \mathcal{O}_{int}(\underline{g})$. En outre, on a $\hat{F}^*\ k[B] \in \tilde{\mathcal{O}}_{int}(\underline{g})$ comme $\mathcal{U}(\underline{g})$-module à gauche.

Démonstration : Pour tout $w \in W$, on a $D_w\ k[B] = k[B(w)]$. Donc il existe un isomorphisme naturel (sorte d'inversion)

$$\omega_w : D_w\ k[B] \longrightarrow D_{w^{-1}}\ k[B]$$

qui échange les structures de $\underline{b}$-modules à droite et à gauche. On obtient donc un isomorphisme naturel

$$\omega : D\ k[B] \longrightarrow D\ k[B]$$

qui échange de même les structures gauches et droites. Par le lemme 106, $D\ k[B]$ est naturellement un $\mathcal{U}(\underline{g})$-module à gauche. Ainsi $D\ k[B]$ est naturellement un $\mathcal{U}(\underline{g})$-module à droite.

Soit $M \in \mathcal{C}(B)$ un $\mathcal{U}(\underline{b})$-module de dimension finie. La proposition 5, passée à la limite projective, donne une longue suite exacte, pour tout $i \in \{1 , \dots , N\}$

$$\dots \longrightarrow F^{\ell} M \longrightarrow F^{\ell-1} D^1_{s_i} M \longrightarrow F^{\ell+1} D_{s_i} M \longrightarrow F^{\ell+1} M \longrightarrow \dots$$

Lorsque M décrit l'ensemble des $\mathcal{U}(\underline{b})$-sous-modules de dimension finie de $k[B]$, le fait que $D^*_{s_i}$ commute à la limite inductive implique que l'on a

$$F^*\ k[B] \simeq F^*\ k[P_i]$$

car on a $D^1_{s_i}\ k[B] = 0$. Or $k[P_i]$ est naturellement un $\mathcal{U}(\underline{p}_i)$-module intégrable à droite. Comme F^* commute à la limite inductive, la structure naturelle de $\mathcal{U}(\underline{b})$-module à droite sur $F^*\ k[B]$ se prolonge en une structure de $\mathcal{U}(\underline{p}_i)$-module intégrable. Par recollement et intégrabilité, on obtient que $F^*\ k[B]$ est naturellement un $\mathcal{U}(\underline{g})$-module intégrable à droite.

Enfin, on a $\hat{F}^* M \in \tilde{\mathcal{O}}_{int}(\underline{g})$ pour tout module M de dimension finie, donc également pour tout module. Donc $\hat{F}^* k[B]$ est un $\underline{g}$-module à gauche dans $\tilde{\mathcal{O}}_{int}(\underline{g})$. C.Q.F.D.

Soit G le groupe (discret) de Kac-Moody. Suivant la construction de Tits, on a par définition [59]

$$G = \varinjlim \underline{B}(w)$$

(suivant les définitions du chap. XI). Le groupe considéré ici est aussi le même que celui construit par Kac et Peterson [49] , au sous-groupe de Cartan $\underline{H}$ près. Par exemple le groupe G construit ici n'opère que sur les modules intégrables $L(\Lambda)$ avec $\Lambda \in P$ (puisque l'on a choisi ici un réseau des poids entiers).

Suivant les notations usuelles, G contient un "groupe de Borel" $\underline{B}$, et un "groupe de Borel opposé" $\underline{B}^-$ (toutes ces notions étant prises au sens discret).

Pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, on a un morphisme de groupe discret $A_i(k) \longrightarrow G$, où $A_i(k)$ désigne le groupe des K-points de A_i . On notera que A_i est un groupe algébrique. Suivant Kac et Peterson, [34] on définit l'ensemble $k_f[G]$ des fonctions faiblement régulières de G comme suit. Une fonction $\varphi : G \longrightarrow k$ appartient à $k_f[G]$ si et seulement si pour toute famille $i_1,\dots,i_n$ finie d'éléments de $\{1,\dots,N\}$ la fonction

$$A_{i_1}(k) \times \dots \times A_{i_n}(k) \longrightarrow k$$

$$(a_1,\dots,a_n) \longrightarrow \varphi(a_1 \dots a_n)$$

est la restriction d'une fonction régulière de $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n}$ (et ce, de manière unique, car il est clair que $A_{i_1}(k) \times \dots \times A_{i_n}(k)$ est dense dans $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n}$) .

On pose $\underline{U} = (\underline{B},\underline{B})$, $\underline{U}^- = (\underline{B}^-,\underline{B}^-)$. L'anneau $k_f[G]$ est un $G \times G$-module.

Soit L et R les actions de G sur cet anneau.

Suivant Kac et Peterson [34] , on appelle anneau des fonctions fortement régulières le sous-anneau de $k_f[G]$ des fonctions $\varphi \in k_f[G]$ tel qu'il existe un entier n tel que l'on ait

$$L(u^-)\, R(u)\, \varphi = \varphi$$

pour tout $u^- \in \mathscr{C}^n\, \underline{U}^-$, $u \in \mathscr{C}^n\, \underline{U}$ ($\mathscr{C}^\bullet$ désigne la série centrale descendante). On note cet anneau $k_F[G]$.

Lemme 110 : On a un isomorphisme naturel

$$\hat{F}\ k[B] \simeq k_F[G] \ .$$

Démonstration : On a, pour tout $w \in W$, $D_w\, k[B] = \Gamma(B(w)\, , \mathcal{O}_{B(w)})$. Par passage à la limite projective, on en déduit une application $D\ k[B] \longrightarrow k_f[G]$, qui est injective par le lemme 69.

Par restriction, on en déduit une application injective $\hat{F}\ k[B] \longrightarrow k_f[G]$, qui par le lemme 109 donne une application naturelle $\hat{F}\ k[B] \longrightarrow k_F[G]$. Par construction, la restriction d'un élément $\psi \in k_F[G]$ à $\underline{B}$ détermine un élément de $k[B]$. Le diagramme obtenu

$$\begin{tikzcd}
\hat{F}\ k[B] \arrow[r] \arrow[d] & k_F[G] \arrow[dl, "\pi"] \\
k[B] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Par propriété universelle du foncteur D , on obtient un morphisme $k_F[G] \longrightarrow D\ k[B]$. Soient $\varphi \in k_F[G]$, et $V = \mathcal{U}(\underline{n}^-)\, .\, \varphi$. Par construction, on a $\dim V < \infty$. Soit $V' = \mathcal{U}(\underline{g})\, .\, \varphi$. On a $\pi(V') = \pi(U(\underline{b})\, .\, V) = U(\underline{b})\, \pi(V)$, donc on a $\dim \pi(V') < \infty$. Donc le morphisme $k_F[G] \longrightarrow D(k[B])$ factorise à travers $F\ k[B]$, et donc à travers $\hat{F}\ k[B]$.

Ainsi le morphisme $\hat{F}\ k[B] \longrightarrow k_F[G]$ est un isomorphisme. C.Q.F.D.

On verra dans le dernier paragraphe de ce chapitre que le morphisme $D\ k[B] \longrightarrow k_f[G]$ construit dans la démonstration n'est pas un isomorphisme.

Lemme 111 : On suppose construite une réalisation de F . Soit $M \in \mathcal{C}(B)$. Alors la suite spectrale $E(M)$ du lemme 79 dont le terme $E_2(M)$ est $H^*_f(\underline{b},\underline{h},F^*\ k[B] \otimes M)$, induit une suite de complexes $\hat{E}_2(M),\hat{E}_3(M)\ldots$ (chacun de ces complexes étant l'homologie du précédent) qui convergent vers une filtration convenable de $\hat{F}M$, et tels que $\hat{E}_2(M) = H^*(\underline{b},\underline{h},\hat{F}^*\ k[B] \otimes M)$.

Démonstration : Les différentielles d_2 , d_3 ... des complexes $E_2(M),E_3(M)\ldots$ commutent aux actions de $\underline{b}$. On pose donc pour chaque entier $r \geq 2$ $\hat{E}_r(M) = \Gamma_{\underline{h}}\ E_r(M)$.

Par le lemme 108, on a $E_2(M) \in \mathcal{B}(\underline{h})$. Donc par le lemme 107, on a $E_r(M) \in \mathcal{B}(\underline{h})$ pour tout entier $r \geq 2$, et le morphisme naturel

$$h^*\ \hat{E}_r(M) \longrightarrow \hat{E}_{r+1}(M)$$

est un isomorphisme. Ceci prouve le lemme.

On va montrer comment l'existence d'une réalisation implique dans certains cas un résultat de nullité. On constatera que dans le cas où A est symétrisable, ceci conduit à une démonstration simple du résultat de nullité du §5 (la première réalisation de F étant purement formelle).

Lemme 112 : On suppose construite une réalisation de F , et A symétrisable. Alors on a $F^\ell\ k[B] = 0$, pour tout entier $\ell > 0$.

Démonstration : Soit Λ un poids dominant. Pour chaque entier ℓ , le théorème de semi-simplicité de la catégorie $\mathcal{O}_{int}(\underline{g})$ (théorème de Deodhar, Gabber et Kac [11]) et le lemme 109 impliquent que $F^\ell\ k[B]$ est somme directe de modules $L(\lambda)$ comme module à droite (λ dominant). La formule de Kostant (due à H. Garland et J. Lepowsky [16] dans le cas présent) implique donc que l'on a

$$H^q_f(\underline{b},\underline{h},F^{\ell}\ k[B] \otimes k_{-\Lambda}) = 0\ ,$$

pour tout entier $q \neq 0$.

Ainsi la suite spectrale $E(k_{-\Lambda})$ dégénère et l'on a

$$F^*(k_{-\Lambda}) = H^o(\underline{b},F^*\ k[B] \otimes k_{-\Lambda})\ .$$

Par le lemme 95, on a $F^{\ell}(k_{-\Lambda}) = 0$ pour $\ell \neq 0$. Donc une nouvelle application de l'intégrabilité du module à droite $F^{\ell}\ k[B]$ implique que l'on a

$$F^{\ell}\ k[B] = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \neq 0\ .$$

§ 2. La réalisation de F^*

Lemme 113 : L'espace topologique $(G/B,\mathcal{T}_m)$ est noethérien (i.e. tout ouvert est quasi-compact).

Le lemme 113 est évident. Soit X un espace topologique. On rappelle que C(X) (la catégorie des complexes de faisceaux indexés par $\mathbb{N}$) est une catégorie abélienne, ayant suffisamment d'injectifs. Si $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \longrightarrow \mathfrak{F}_1 \longrightarrow \ldots$ est un élément de C(X) , on rappelle que $R\Gamma(X,\mathfrak{F})$ n'est autre que la famille des foncteurs dérivés du foncteur covariant exact à gauche

$$\mathfrak{F} \longrightarrow [\text{le noyau de } \mathfrak{F}_0(X) \longrightarrow \mathfrak{F}_1(X)]\ .$$

On généralise sans difficulté à l'hypercohomologie le théorème 4.12.1 [40], à savoir : sur un espace noethérien, l'hypercohomologie commute à la limite inductive. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 11 : Le triplet $(C(G/B,\mathcal{T}_m)\ ,\ C'(\ ,\mathcal{T}_m)\ ,\ R\ \ )$ est une réalisation du δ-foncteur F .

Proposition 12 : On suppose $\mathfrak{g}$ symmétrisable. Alors pour tout $M \in \mathcal{C}(b)$, on a des isomorphismes

$$F^* \; M \simeq \bigoplus_{\Lambda \in P^+} L(\Lambda)^* \otimes H_f^*(\underline{b},\underline{h},L(\Lambda) \otimes M)$$

$$\hat{F}^* \; M = \bigoplus_{\Lambda \in P^+} L^*(\Lambda) \otimes H_f^*(\underline{b},\underline{h},L(\Lambda) \otimes M) \; .$$

Le morphisme naturel $\pi : F \; M \longrightarrow M$ est alors donné par la formule suivante : si $\Sigma \, \xi_j \otimes m_j$ est un élément de $H^\circ(\underline{b},L(\Lambda) \otimes M)$ (où $\xi_j \in L(\Lambda)$, $m_j \in M$ pour tout indice j) pour un certain $\Lambda \in P^+$, et si $\eta \in L(\Lambda)$, on a

$$\pi \; (\eta \cdot \otimes \Sigma \xi_j \otimes m_j) = \Sigma <\eta \mid \xi_j> m_j \quad .$$

Démonstration : Soit T^* le foncteur $\mathcal{C}(b) \longrightarrow Ab$ défini par la formule $T^* \; M = \bigoplus_{\Lambda \in P^+} L(\Lambda)^* \otimes H_f^*(\underline{b},\underline{h},L(\Lambda) \otimes M)$ pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. La formule de la proposition définit un morphisme naturel de foncteur $T^\circ \longrightarrow Id$. Comme pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$, $T^\circ \; M$ est intégrable, on en déduit par réccurence sur w un morphisme $T^\circ \longrightarrow D_w$, pour tout $w \;\; W$. On a donc un morphisme naturel $T^\circ \longrightarrow D$, qui factorise clairement en un morphisme $T^\circ \longrightarrow F^\circ$. Il est clair que ce morphisme est un isomorphisme.
Par le lemme 112, le foncteur F^* est homologique, et par construction T^* l'est aussi.
On a donc : $T^* = F^*$. La formule de $\hat{F}^*$ s'en déduit aussitôt.

§3. Une version faible du théorème de Peter-Weyl :

Dans ce paragraphe, on suppose que A est un produit de matrices de Cartan indécomposables, toutes de type infini. L'ensemble P^+ est dénombrable, et l'on peut alors écrire $P^+ = \{\Lambda_0,\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3 \ldots\}$, tels que pour tout couple d'entiers i , j on ait $\Lambda_i \leq \Lambda_j \Rightarrow i \leq j$. En effet, dans ce cas, tout élément $\Lambda \in P^+$ s'écrit

$$\lambda = \Sigma\, x_i\, \alpha_i + \mu \text{ , où } x_j \in Q \text{ , } x_j \leq 0 \text{ et } \mu(h_j) = 0 \text{ pour tout } j \text{ .}$$

Etant donné un module $M \in \tilde{\mathcal{O}}_{int}(\mathfrak{g})$, on construit sa filtration canonique comme suit: pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\mathcal{E}_n\, M = \{m \in M \text{ , } H^0(\underline{b}^-, U(\underline{b}^-) \text{ . } m \otimes k_{\Lambda_i}) = 0 \text{ , pour tout } i < n\} \text{ ,}$$

de sorte que, pour tout n , $\mathcal{E}_n\, M$ est un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-sous-module de M , et l'on a $\mathcal{E}_{n+1}\, M \subset \mathcal{E}_n\, M$. En outre, pour tout couple d'entiers $n \geq m$, on a une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H^0(\underline{n}^-, \mathcal{E}_m\, M) \longrightarrow H^0(\underline{n}^-, \mathcal{E}_n\, M) \longrightarrow H^0(\underline{n}^-, \mathcal{E}_n\, M/\mathcal{E}_m\, M) \longrightarrow 0 \text{ .}$$

<u>Lemme 114</u> : Soit $M \in \tilde{\mathcal{O}}_{int}(\mathfrak{g})$. Pour tout entier $j \geq 0$, je pose $d_j(M) = \dim H^0(\underline{b}^-, M \otimes k_{\Lambda_j})$. On suppose $d_j(M) < \infty$ pour tout entier $j \geq 0$. Alors on a $\dim M_\lambda < \infty$ pour tout λ , et

$$\operatorname{ch}(M) \leq \sum_{j=0}^{\infty} d_j(M) \operatorname{ch} L^*(\Lambda_j) \text{ .}$$

On a en outre égalité dès que $\mathfrak{g}$ satisfait Σ .

<u>Démonstration</u> : En utilisant la suite exacte (*), il vient que le seul poids de $H^0(\underline{n}^-, \mathcal{E}_n\, M/\mathcal{E}_{n+1}\, M)$ est $- \Lambda_n$, avec la multiplicité $d_n(M)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc $\mathcal{E}_n\, M/\mathcal{E}_{n+1}\, M$ est un sous-module de $d_n(M)$ copie de $L^*(\Lambda_n)$, avec égalité lorsque $L^*(\Lambda_n)$ est simple. On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(M) &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch}(\mathcal{E}_n\, M/\mathcal{E}_{n+1}\, M) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} d_n(M) \operatorname{ch} L^*(\Lambda_n) \text{ ,} \end{aligned}$$

avec égalité dès que $\mathfrak{g}$ satisfait Σ . En particulier dim $M_\lambda < \infty$ pour tout λ .

Proposition 13 : Les multiplicités du $\underline{h} \times \underline{h}$-module $k[G]$ sont finies, et l'on a

$$\mathrm{ch}\ k_F[G] \leq \sum_{\Lambda \in P^+} \mathrm{ch}(L^*(\Lambda) \otimes L(\Lambda)) .$$

Lorsque $\mathfrak{g}$ satisfait Σ , on a égalité.

Démonstration : On a $H^0(\underline{b},k[G] \otimes k_{-\Lambda}) = L^*(\Lambda)$, par le lemme 110, et on a donc

$$H^0(\underline{n}^- \times \underline{n}^+ , k_F[G]) = \oplus (k_{-\Lambda} \otimes k_\Lambda) .$$

La proposition 16 résulte alors du lemme 123, appliquée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ avec pour sous-algèbre "nilpotente" $\underline{n}^- \times \underline{n}^+$.

§ 4. Remarque : Dans cette remarque, on suppose A arbitraire.

1) Kac et Peterson ont montré que lorsque $\mathfrak{g}$ est symétrisable, on a $k_F[G] = \oplus L^*(\Lambda) \otimes L(\Lambda)$ [34]. Leur démonstration s'étend facilement au cas où $\mathfrak{g}$ satisfait Σ (car le théorème de semi-simplicité de $\mathcal{G}_{int}(\mathfrak{g})$ vaut aussi dans ce cas).

2) On dit que l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ est simple au sens de Gabber et Kac si l'on a $H^0(\underline{n}^+,\mathfrak{g}) \cap \underline{n}^- = 0$ [15]. Gabber et Kac ont montré que tel était le cas quand $\mathfrak{g}$ est symétrisable. On a aussi

Lemme 115 : Si $\mathfrak{g}$ satisfait Σ , $\mathfrak{g}$ est simple au sens de Gabber et Kac.

Démonstration : Soit $\xi \in H^0(n^+,\mathfrak{g}) \cap \underline{n}^-$. On peut supposer ξ homogène de poids $- \Sigma\, n_i\, \alpha_i$. On choisit un poids dominant Λ avec $\Lambda(h_i) \geq n_i$, pour tout i . Soit $v \in L(\Lambda)_\Lambda - \{0\}$. On a $\underline{n}^+ \xi . v = 0$, donc

$N = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\ \xi\ .\ v = U(\underline{b}^-)$. ξv satisfait $N_\Lambda = 0$. Comme $L(\Lambda)$ est simple, on a donc $\xi\ .\ v = 0$, i.e. $\xi \in \Sigma\ U(\underline{n}^-)\ f_i^{\Lambda(h_i)+1}$. Pour des raisons de poids, on a $\xi = 0$. C.Q.F.D.

3) Je profite de cette remarque pour donner une seconde démonstration simple du théorème de Gabber et Kac, démonstration que je n'ai jamais publiée [44], et qui a également été trouvée indépendamment par A. Fialovski.

Soit $\underline{m} = \bigoplus_{n>0} \underline{m}_n$ une algèbre de Lie positivement graduée, engendrée par le sous-espace vectoriel $\underline{m}_1$. Soit $\underline{k}$ l'algèbre de Lie libre engendrée par l'espace vectoriel $\underline{m}_1$, et soit $\underline{r}$ le noyau du morphisme naturel $\underline{k} \longrightarrow \underline{m}$. On notera que $\underline{r}$ et $\underline{k}$ sont naturellement des algèbres de Lie graduées.

Lemme 116 : On a un isomorphisme naturel d'espace vectoriel gradué $r / [\underline{k},\underline{r}] \simeq H_2(\underline{m})$.

Démonstration : On utilise la suite à 5 termes d'Hochschild - Serre [30]

$$H_2(\underline{k}) \longrightarrow H_2(\underline{m}) \longrightarrow H_0(\underline{m},H_1(\underline{r})) \longrightarrow H_1(\underline{k}) \longrightarrow H_1(\underline{m}) \longrightarrow 0 \ .$$

Par hypothèse, le morphisme $H_1(\underline{k}) \longrightarrow H_1(\underline{m})$ est un isomorphisme, et $\underline{k}$ étant libre, on a $H_2(\underline{k}) = 0$. Enfin, un calcul simple prouve que l'on a $H_0(\underline{m},H_1(\underline{r})) \simeq \underline{r} / [\underline{k},\underline{r}]$.

On en déduit alors le lemme suivant.

Lemme 117 : 1) Soit $\Lambda \in P^+$. On a $H_1(\underline{n}^-,L(\Lambda)) = \bigoplus_i k_{s_i(\Lambda+\rho)-\rho}$. Soit $L_{\min}(\Lambda)$ l'unique quotient simple de $L(\Lambda)$. Si $L_{\min}(\Lambda)$ satisfait la même formule, on a $L(\Lambda) = L_{\min}(\Lambda)$.

2) On a $H_\ell(\underline{n}^-) = \bigoplus_{\ell(v)=\ell} k_{v\rho-\rho}$, pour $\ell = 0$, 1 ou 2 . Soit $\mathfrak{g}_{\min}$ l'algèbre de Kac-Moody minimale [33]. Si l'image $\underline{n}^-_{\min}$ de $\underline{n}^-$ dans $\mathfrak{g}_{\min}$

satisfait la même formule, on a $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\min}$.

4) La même méthode s'applique à l'algèbre W_1 [33], [44]. Cette algèbre a pour base $\{e_n \,,\, n \geq -1\}$ avec pour crochet de Lie $[e_n , e_m] = (m-n)e_{n+m}$. Soit $\underline{m}$ la sous-algèbre de W_1 : $\underline{m} = \oplus\, k\, e_n$ (pour $n \geq 1$). Le groupe $H_2(\underline{m})$ a été calculé par L. Goncarova [18], et l'on a

Lemme 118 : L'algèbre de Lie $\underline{m}$ est l'algèbre de Lie engendrée par 2 éléments e_1 , e_2 soumis aux relations

$$ad^3(e_1)(e_2) = -6\ ad^2(e_2)(e_1)$$

$$ad^5(e_1)(e_2) = -60\ ad^3(e_2)(e_1)\ .$$

5) De l'existence de réalisation vient la suite spectrale

$$H^*_f(\underline{b},\underline{h},\hat{F}^*\ k[B] \otimes\ ) \Longrightarrow \hat{F}^*\ .$$

Il est aisé de montrer que cette suite spectrale ne dépend pas de l'une des deux réalisations choisies (par le lemme 122). Lorsque A est produit de matrices indécomposables de type infini, on aimerait déduire la formule

$$\Sigma(-1)^{\ell}\ \mathrm{ch}\ \hat{F}^{\ell}\ k[B] = \sum_{\Lambda \in P^+} \mathrm{ch}(L^*(\Lambda) \otimes L(\Lambda))\ .$$

Malheureusement, il n'est pas clair que le terme de gauche soit défini.

§ 5. Comparaison avec la construction de Kac et Peterson

Dans ce paragraphe, je vais montrer que les constructions déduites de celles de Kac et Peterson sont strictement différentes de celles construites ici. Ceci indique que les constructions ensemblistes des faisceaux $\tilde{\mathcal{L}}$, représentant le faisceau des fonctions sur le groupe de Kac-Moody satisfaisant une certaine propriété d'invariance, ne coïncident avec la construction adoptée ici que dans le cas de données associées aux algèbres de dimension finie.

Soient $w \in W$, et $s_{i_1} \dots s_{i_n}$ une décomposition réduite de w . Pour tout système d'indice $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_m)$, je note B_α l'espace topologique $B_{\alpha_1}(k) \times \dots \times B_{\alpha_m}(k)$ (avec la topologie induite de la topologie Zarisky). Soit $\varphi : \underline{B}(w) \longrightarrow k$ une fonction (respectivement U une partie de $\underline{B}(w)$). Je dis que φ est faiblement régulière (respectivement que U est ouvert) si, pour tout famille $\alpha_0 \dots \alpha_n$ de systèmes d'indice $\varphi \circ j$ (respectivement $j^{-1}U$) est régulière (respectivement un ouvert) dans X , où $X = B_{\alpha_0}(k) \times A_{i_1}(k) \times \dots \times A_{i_n}(k) \times B_{\alpha_n}(k)$, et où j est l'application naturelle $j : X \longrightarrow B(w)$. L'anneau des fonctions faiblement régulières de $\underline{B}(w)$ est noté $k_f[B(w)]$. On vérifie aisément qu'il ne dépend pas de la décomposition choisie pour w .

On a un morphisme naturel $k_f[G] \longrightarrow k_f[\underline{B}(w)]$. On note $k_f[B(w),G]$ son image. On a un morphisme naturel $k_F[G] \longrightarrow k[B(w)]$. On note $k_F[\underline{B}(w)]$ son image. On a donc les inclusions suivantes entre anneaux

$$k_F[\underline{B}(w)] \subset k[B(w)] \subset k_f[\underline{B}(w),G] \subset k_f[\underline{B}(w)] .$$

Je pose $k[G] = D\, k[B]$. On a aussi

$$k_F[G] \subset k[G] \subset k_f[G] .$$

J'appellerai dans la suite $k_F[\underline{B}(w)]$ (respectivement $k_f[\underline{B}(w)]$) anneau des fonctions fortement régulières (respectivement faiblement régulières) au sens de Kac et Peterson.

Proposition 14 : On suppose $\mathfrak{g}$ de dimension infinie. Alors, pour tout $w \in W$, on a $k_F[\underline{B}(w)] \neq k[B(w)]$ et $k[B(w)] \neq k_f[B(w),G]$. On a aussi $k_F[G] \neq k[G]$ et $k[G] \neq k_f[G]$.

Démonstration : 1) Je vais indiquer la démonstration du fait que l'on a $k_F[B(w)] \neq k[B(w)]$ et $k_F[G] \neq k[G]$, la démonstration des autres assertions étant montrées au point 2.

Soit Λ un poids dominant et régulier. Dans la suite de la démonstration, on ne considère que les structures de module à gauche. On a $k_F[G]_\Lambda = 0$, car $\mathfrak{g}$ est supposée de dimension infinie. On a donc $k_F[\underline{B}(w)]_\Lambda = 0$. Par ailleurs, l'application $k[B(w)] \longrightarrow k[B]$ est surjective. On a donc $k[B(w)]_\Lambda \neq 0$. Comme les différentes applications $k[B(u)] \longrightarrow k[B(v)]$ sont surjectives, on a aussi $k[G]_\Lambda \neq 0$. Ainsi on a

$$k_F[G] \neq k[G] \text{ ,}$$

$$k_F[\underline{B}(w)] \neq k[B(w)] \text{ .}$$

2) On fixe Λ un point dominant entier régulier (ou plus faiblement tel que $L(\Lambda)$ soit de dimension infinie). On pose $Y = A_1(k) \times \ldots \times A_N(k)$, et pour tout entier m : $X_m = Y \times \ldots \times Y$ (m facteurs). Soit v un vecteur non nul de $L^*(\Lambda)_{-\Lambda}$. On a une application naturelle $j : X_m \longrightarrow G$. On montre facilement que, pour tout entier $m \geq 0$, l'espace vectoriel $E_m \subset L^*(\Lambda)$ engendré par $j(X_m) \, . \, v$ est de dimension finie. Il est clair que, pour tout entier m , on a $E_m \neq E_{m+1}$. On peut donc choisir un élément ξ_m de $L(\Lambda)$, qui soit $\underline{h}$-propre, et tel que l'on ait

$$\langle \xi_m \mid E_m \rangle = 0$$

$$\langle \xi_m \mid E_{m+1} \rangle \neq 0 \text{ , pour tout } m \geq 0 \text{ .}$$

On a donc, pour tout $g \in G$: $\langle \xi_m \mid gv \rangle = 0$, pour m grand.
La fonction $\vartheta : \underline{G} \longrightarrow k$, définie par la formule

$$\vartheta(g) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \xi_m \mid gv \rangle$$

est bien définie, et elle est faiblement régulière. On a donc $\vartheta \in k_f[G]$. Soit η la restriction de ϑ à $\underline{B}(1)$. Il est clair que η n'est pas $\mathcal{U}(\underline{b})$-finie pour l'action à gauche. On a donc $\eta \in k_f[\underline{B}(1),G] \setminus k[B]$. Ceci prouve que l'on a $\vartheta \notin k[G]$. Ainsi on a

$$k[G] \neq k_f[G]$$

$$k\left[B(w)\right] \neq k_f\left[\underline{B}(w),G\right] .$$ C.Q.F.D

§6. Groupes de Picard de G/B

Lemme 119 : On suppose $\mathfrak{g}$ de dimension infinie. Alors tout ouvert non vide de G/B contient un ensemble discret infini. En particulier G/B n'est pas un schéma.

Démonstration : Soit $w_o \in W$ tel que $U_n \tilde{S}_{w_o}$ soit non vide. Par le lemme 11, il existe une suite infinie $\left\{w_n\right\}$ d'éléments de W avec $w_o<w_1<\dots$. Je choisis pour tout entier $n>0$ un point $P_n \in (U_n \tilde{S}_{w_n}) \setminus (U_n \tilde{S}_{w_{n-1}})$. L'ensemble $\left\{P_n,\ n>0\right\}$ est discret et infini.
Donc U n'est pas quasi-compact, et en particulier n'est pas le spectre d'un anneau. Donc G/B n'est pas un schéma.

Puisque G/B n'est pas un schéma, je dois préciser la définition de son groupe de Picard Pic G/B : c'est le groupe des classes d'isomorphies de $\mathcal{O}_{G/B}$-modules localement libre de rang un. Lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, on a $K(P) = 0$ et il est connu que le morphisme $P \longrightarrow \mathrm{Pic}\ G/B$ est un isomorphisme. Je vais généraliser ce fait.

Proposition 15 : Pour tout $\lambda \in P$ $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ est un module de $\mathcal{O}_{G/B}$-module localement libre de rang un. De plus $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{G/B}$ dès que λ appartient à $K(P)$. Le morphisme $P/K(P) \rightarrow \mathrm{Pic}\,G/B$ ainsi déduit est un isomorphisme.

Démonstration : 1) Je vais d'abord prouver que les faisceaux de $\mathcal{O}_{G/B}$-modules $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ sont localement libres. Il est clair qu'il suffit de le prouver lorsque λ est antidominant. Soit $\sigma \in L(-\lambda)^*$. Pour tout $w \in W$, soient σ_w la restriction de σ à $\tilde{S}_w$, $D_w(\sigma)$ l'ouvert de $\tilde{S}_w$ où $\sigma_w \neq 0$ et $D(\sigma) = \bigcup_{w \in \underset{\sim}{W}} D_w(\sigma)$. Par construction σ_w est un générateur du faisceau inversible $j^*_{\underset{\sim}{w}}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ sur $D_w(\sigma)$, donc σ engendre le faisceau de $\mathcal{O}_{G/B}$-modules $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ sur l'ouvert $D(\sigma)$. En particulier $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\big|_{D(\sigma)}$ est libre. l'assertion résulte du fait que les ouverts $D(\sigma)$ $(\sigma \in L(-\lambda)^* - \{0\})$ formentun recouvrement de G/B . En outre, lorsque $\lambda \in K(P)$ et $\sigma \neq 0$, on a $D(\sigma) = G/B$. Donc $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ est alors isomorphe à $\mathcal{O}_{G/B}$.

2) Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ un faisceau localement libre de rang un sur G/B . On fixe un élément de $w \in W$ tel que l'on ait $w \geqslant s_i$ pour tout $i \in \{1,\dots N\}$ (par exemple on choisira l'élément de Coxeter $w = \{s_i \dots s_n\}$). Par la proposition 6, il existe $\lambda \in P$ tel que l'on ait $j_w^* \mathcal{L} = \mathcal{L}_w(\lambda)$. Donc quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} \otimes \tilde{\mathcal{L}}(-\lambda)$, on peut supposer que l'on a $j_w^* \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_w}$. Soit $u \in W$, $u \geqslant w$. Par la proposition 6 l'application $\mathrm{Pic}\,(\tilde{S}_u) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(\tilde{S}_w)$ est un isomorphisme. Donc on aura aussi $j_u^* \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_u}$. Comme $\mathcal{L}$ est localement libre de rang un, on a $\mathcal{L} \simeq \underset{v \in W}{\underleftarrow{\mathrm{Lim}}}\, j_v^* \mathcal{L}$, donc on a $\Gamma(G/B, \mathcal{L}) = \underset{v}{\underleftarrow{\lim}}\, \Gamma(\tilde{S}_v, j_v^* \mathcal{L}) = k$. Soit $\sigma \in \Gamma(G/B, \mathcal{L}) - \{0\}$. Il est clair que σ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{G/B} \longrightarrow \mathcal{L}$ et ceci prouve la proposition.

XVII Dualité des foncteurs de Joseph et algèbres de Lie affines

§ 1. Non lissité des variétés générales de Schubert

Pour éviter des énoncés techniques, je n'étudierai que les variétés de Schubert "boréliennes" $\widetilde{S}_w$. Je simplifie les notations du chapitre XII en posant, pour tout w W:

$$S(w) = S_{\emptyset}(w) \quad (\ S(w) \ \text{est dit support de} \ w\ )$$

$$\mathfrak{V}(w) = \mathfrak{V}_{\emptyset}(w) \quad (\ \mathfrak{V} \ \text{pour voisin}).$$

Je dis que le groupe W est libre si l'on a

$$a_{ij}\ a_{ji} \geq 4 \ , \ \text{pour tous} \ i,j \in \{1 \, , \ldots , N\} \ .$$

Lorsque cette hypothèse est satisfaite, W est le groupe engendré par les éléments s_i satisfaisant aux seules relations $s_i^2 = 1$. Dans ce cas, un élément $w \in W$ est dit spécial s'il est de longueur ≤ 1 , ou s'il satisfait la condition suivante, à une permutation des indices $\{1 \, , \ldots , N\}$ près

(a) Il existe un entier $n \geq 2$ tel que $S(w) = \{1,2 \ldots n\}$.

(b) Il existe une fonction $\varphi : \{2 \, , \ldots n\} \longrightarrow \{1 \, , \ldots , N\}$ telle que l'on ait

(b_1) $\varphi(i) < i$ pour $2 \leq i \leq n$.

(b_2) $\varphi(i) \in \{i-1 \, , \varphi(i-1)\}$ pour $3 \leq i \leq n$.

(b_3) On a $w = w_n \ldots w_2$ où $w_i \in W(i,\varphi(i))$ pour $2 \leq i \leq n$, $\ell(w) = \sum_{j=2}^{n} \ell(w_j)$ et $s_\ell\, w_i \leq w_i$, pour $2 \leq i \leq n-1$, où $\ell = \varphi(i+1)$.

Dans la définition précédente $W(i,\varphi(i))$ désigne le sous-groupe de W engendré par s_i et $s_{\varphi(i)}$.

Lemme 120 : On suppose que W est libre. Soit $w \in W$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(a) On a $\# \mathcal{V}(w) = \# S(w)$;

(b) w est produit d'éléments spéciaux à support disjoint, i.e. on peut écrire $w = \omega_1 \dots \omega_m$, où $\omega_1 , \dots , \omega_m$ sont spéciaux et $S(\omega_i) \cap S(\omega_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ (et ceci implique que l'on a $\ell(w) = \sum_{i=1}^{m} \ell(\omega_i)$.

<u>Démonstration</u> : 1) On va d'abord montrer que l'assertion (b) implique l'assertion (a). On fixe donc w satisfaisant (b). Il est clair que l'on a

$$\mathcal{V}(w) = \bigcup_{i=1}^{m} \omega_1 \dots \omega_{i-1} \mathcal{V}(\omega_i) \omega_{i+1} \dots \omega_m .$$

Comme on a $\# \mathcal{V}(v) \geq \# S(v)$ pour tout $v \in W$ (remarque finale du chapitre 12), il suffit de montrer que si w est spécial, on a $\# \mathcal{V}(w) = \# S(w)$. On peut en outre supposer que l'on a $\ell(w) \geq 2$. On peut donc écrire $w = w_n \dots w_2$ comme dans la définition précédente. Il existe aussi deux entiers ℓ , ℓ' , et deux éléments $u , v \in W$ tels que l'on ait $w = s_\ell u = v s_{\ell'}$. Je dis que $\mathcal{V}(w)$ est constitué des éléments suivants : $u , v , w_n \dots w_{j+1} s_{\varphi(j+1)} w_j \dots w_2$, pour $n - 1 \geq j \geq 2$. En effet pour tout j , w_j est un élément du type $s_\alpha s_\beta s_\alpha \dots \{\alpha\ \beta\} \in \{1,\dots N\}$. Donc lorsqu'on enlève une réflexion élémentaire dans la décomposition réduite de w , cette réflexion étant à l'intérieur de l'un des w_i , le nouveau mot obtenu n'est pas réduit. En outre, soit j avec $n - 1 \leq j \leq 2$. On a alors

$$w_j = s_{\varphi(j+1)} \dots$$

$$w_{j+1} = \dots s_{\varphi(j+1)}\ s_{j+1} .$$

Donc lorsqu'on enlève la réflexion s_{j+1} dans la décomposition w (cette réflexion étant la réflexion la plus à droite dans w_{j+1}), le nouveau mot obtenu n'est pas réduit. Donc les seules possibilités pour obtenir une décomposition réduite de longueur $\ell(w) - 1$ est de supprimer la première réflexion de l'un des w_j , ou la dernière de w_2 . Ceci montre l'assertion, et prouve que l'on a $\# \mathcal{V}(w) \leq n$, ce qui prouve que (b) implique (a).

2) On va prouver la réciproque, par récurrence sur $\ell(w)$. On peut évidemment supposer que l'on a $\ell(w) \geq 2$. Il existe deux entiers i , j tels que l'on ait $w = s_i s_j w'$, pour un certain $w' \in W$, avec $\ell(w) = \ell(w') + 2$. Je pose alors $w = uv$, où u et v sont les éléments de W uniquement déterminés par les relations

$$\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$$

$$u \in W(i,j)$$

$$s_i v \geq v \ , \ s_j v \geq v \ .$$

On considère alors deux cas. On pose $w'' = s_j w'$.

3) On suppose d'abord que l'on a $\ell(u) \geq 3$. On a $\mathfrak{V}(w) \subset s_i \mathfrak{V}(w'') \cup \{w''\}$. On a $w' \in \mathfrak{V}(w'')$, et par hypothèse on a $s_i w' \leq w'$. Donc on a $\ell(s_i w') < \ell(w) - 1$. Par ailleurs, comme W est libre, on a $s_i x \geq x$ pour tout $x \in \mathfrak{V}(w'')$, $x \neq w'$. On a donc $\mathfrak{V}(w) = s_i(\mathfrak{V}(w') - \{w'\}) \cup \{w''\}$. Par hypothèse, on a $i \in S(w'')$. On a donc $S(w'') = S(w)$, d'où on a

$$\begin{aligned} \# S(w'') &= \# S(w) \\ &= \# \mathfrak{V}(w) \\ &= \# \mathfrak{V}(w'') \ . \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, w'' satisfait (b). Comme $\ell(u)$ est plus grand que 3 , on a aussi $w'' = s_j s_i u'$, pour un certain $u' \in W$, avec $\ell(u') = \ell(w'') - 2$. Il est alors clair que $w = s_i w''$ satisfait aussi l'assertion (b).

4) On suppose que l'on a $\ell(u) \leq 2$, i.e. $\ell(u) = 2$. On a donc $s_i u \geq u$, donc pour tout $x \in \mathfrak{V}(w'')$, on a $s_i x \geq x$. On a donc

$$\mathfrak{V}(w) = s_i \mathfrak{V}(w'') \cup \{w''\} \ ,$$

et donc on a

$$\begin{aligned} \# \mathfrak{V}(w'') &= \# \mathfrak{V}(w) - 1 \\ &= \# S(w) - 1 \ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\# S(w) - 1 \leq \# S(w'') \leq \# \mathcal{V}(w'') \ .$$

On a donc

$$\# S(w'') = \# S(w) - 1 \ .$$

Donc par hypothèse de récurrence w'' est produit d'éléments spéciaux de supports disjoints, soit $w'' = \omega_1 \ldots \omega_m$, et on a $w = s_i \omega_1 \ldots \omega_m$, et i n'appartient à aucun des supports des éléments ω_j. Ceci démontre le lemme.

Proposition 16 : On suppose que W est libre. Soit $w \in W$. Alors pour que les groupes $\mathrm{Pic}(\tilde{S}_w)$ et $\mathrm{Cl}(\tilde{S}_w)$ aient même rang, il est nécessaire et suffisant que w soit produit d'éléments spéciaux de support disjoint. (cf. aussi [45]).

Démonstration : Par le chapitre XII, $\# \mathcal{V}(w)$ et $\# S(w)$ sont respectivement les rangs du groupe de Picard et du groupe des classes. Donc la proposition résulte du lemme 120. On utilisera le lemme suivant, bien connu pour $\underline{g}$ de dimension finie.

Lemme 121 : Soient $w \in W$, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w. Alors le morphisme $D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S}_w$ est un isomorphisme si et seulement si on a $\ell(w) = \# S(w)$.

Démonstration : Les variétés $D(\tilde{w})$, $\tilde{S}_w$ sont normales, et le morphisme $D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S}_w$ est birationnel. Donc (en utilisant par exemple le théorème principal de Zarisky), il suffit de montrer que $D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S}_w$ est bijectif si et seulement si $\ell(w) = \# S(w)$. Si on a $\ell(w) = \# S(w)$, la bijectivité est claire. Si on a $\ell(w) > \# S(w)$, il existe des éléments $v \in W$, $\tilde{v} \in \tilde{W}$, $i \in \{1, \ldots N\}$ avec $v \leq w$, $\tilde{v} \leq \tilde{w}$, si $\tilde{v}$ n'est pas réduit, et $\tilde{v}$ est une décomposition réduite de v avec $\tilde{v} \geq S_i$. Alors l'image réciproque de $\tilde{S}_{s_i}$ contient (au moins) une variété de dimension deux $P_i \times^B P_i/B$, ce qui montre le lemme.

<u>Remarque</u> : A. Arabia et M. Vergne ont posé la question suivante. Etant donnée une variété de Schubert S , existe-t-il une variété de Schubert lisse Σ avec $S \subset \Sigma$? (J'emploie ici une notation différente de ce qui précédait, parce que ici j'ai appelé variétés de Schubert des objets (*a priori*) différents de ceux considérés usuellement. Ici, une variété de Schubert est la normalisation des variétés obtenues dans les représentations.) La proposition 16 fournit une quantité de contrexemples. On suppose par exemple W libre, et $\underline{g}$ de rang ≥ 3 . Soit $w = s_1 s_2 s_3 s_1$. Alors w n'est inférieur à aucun des éléments satisfaisant aux conclusions du lemme 16. Donc $\tilde{S}_w$ n'est jamais plongée dans une variété de Schubert lisse. On a ainsi un premier invariant $e : W \longrightarrow \mathbb{N}$ défini par $e(w) = \# \mathcal{V}(w) - \# S(w)$, et l'on a : $\tilde{S}_w$ est non lisse dès que $e(w)$ est non nul.

Je vais définir un second invariant Vol comme suit. Soit $w \in W$. On a une application $\mathrm{div} : \mathrm{Pic}(\tilde{S}_w) \longrightarrow \mathrm{Cl}(\tilde{S}_w)$. Le groupe de torsion du conoyau Tor Coker div est fini. Je pose

$$\mathrm{Vol}(w) = \# \ \mathrm{Tor\ Coker\ div} .$$

Donc l'application div est un isomorphisme si et seulement si on a $e(w) = 0$ et $\mathrm{Vol}(w) = 0$. J'appelle affine factoriel tout schéma affine X dont l'anneau associé $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est factoriel. Je dis qu'un schéma Y est localement factoriel s'il possède un recouvrement affine factoriel (je m'écarte ici de la terminologie usuelle). Il est facile de montrer que pour tout $w \in W$, on a $\mathrm{Vol}(w) = 0$ et $e(w) = 0$, si et seulement si $\tilde{S}_w$ est localement factorielle. Il est clair aussi que si $\tilde{S}_w$ est lisse, on a $\mathrm{Vol}(w) = 0$ et $e(w) = 0$.

Avant d'utiliser le second invariant Vol pour trouver des variétés de Schubert non lisses, je vais donner des exemples où cet invariant est nul. On rappelle qu'étant donnée une variété X , je note Sing X son lieu singulier.

Lemme 122 : Soient $w \in W$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Je suppose que l'on a $s_i w \geq w$, et que $\operatorname{Sing} \tilde{S}_{s_i w} \cap \tilde{S}_w$ est de codimension ≥ 2 dans $\tilde{S}_w$. Alors on a $\operatorname{Vol}(s_i w) \leq \operatorname{Vol}(w)$.

Démonstration : Par hypothèse sur le lieu singulier de $\tilde{S}_{s_i w}$, on peut (notant $i : \tilde{S}_w \longrightarrow \tilde{S}_{s_i w}$ l'inclusion naturelle) définir de manière naturelle une application $i^* : \operatorname{Cl}(\tilde{S}_{s_i w}) \longrightarrow \operatorname{Cl}(\tilde{S}_w)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Pic}(\tilde{S}_{s_i w}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\operatorname{div}"] & \operatorname{Pic}(\tilde{S}_w) \arrow[d, "\operatorname{div}"] \\
\operatorname{Cl}(\tilde{S}_{s_i w}) \arrow[r, "i^*"] & \operatorname{Cl}(\tilde{S}_w) .
\end{tikzcd}$$

On considère alors deux cas.

(1) On suppose d'abord que l'on a $i \in S(w)$. Dans ce cas, l'application $i^* : \operatorname{Pic}(\tilde{S}_{s_i w}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(\tilde{S}_w)$ est un isomorphisme. Comme les groupes des classes sont libres (chapitre XII), on en déduit que i^* induit un morphisme injectif sur les groupes de torsion des conoyaux des applications div . Donc on a

$$\operatorname{Vol}(s_i w) \text{ divise } \operatorname{Vol}(w)$$

et en particulier, on a $\operatorname{Vol}(s_i w) \leq \operatorname{Vol}(w)$.

(2) On considère ensuite le cas où l'on a $i \notin S(w)$. Il vient alors que le morphisme naturel $P_i \times^B \tilde{S}_w \longrightarrow \tilde{S}_{s_i w}$ est un isomorphisme. En outre, par le lemme 76, on a $\operatorname{div}(\tilde{\mathcal{L}}_{s_i w}(\rho_i)) = [\tilde{S}_w]$. On applique le lemme 75-4, et la proposition 6. On a donc des suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Pic}(\tilde{S}_{s_i w}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\operatorname{div}"] & \operatorname{Pic}(\tilde{S}_w) \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{div}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}.[\tilde{S}_w] \arrow[r] & \operatorname{Cl}(\tilde{S}_{s_i w}) \arrow[r, "i^*"] & \operatorname{Cl}(\tilde{S}_w) \arrow[r] & 0 ,
\end{tikzcd}$$

où l'application $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\widetilde{S}_{s_i w})$ est donnée par la formule $n \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_{s_i w}(n\rho_i)$, l'application $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[\widetilde{S}_{s_i w}]$ par la formule $n \longrightarrow n[\widetilde{S}_{s_i w}]$. Par le lemme du serpent, les conoyaux des morphismes div sont égaux. Dans ce cas, on a donc $\mathrm{Vol}(s_i w) = \mathrm{Vol}(w)$, ce qui implique également l'assertion du lemme.

Proposition 17 : Soit $w \in W$. On suppose que l'une ou l'autre des assertions suivantes est satisfaite

(a) On a $a_{ij} a_{ji} \leq 1$, pour tout couple d'entiers $i \neq j$,

(b) W est libre, $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ avec $\ell(w) = n$, et l'on a $i_j \neq i_{j+2}$, pour tout j avec $1 \leq j \leq n-2$.

Alors on a $\mathrm{Vol}(w) = 0$.

Démonstration : 1) On pose $w = s_i v$, avec $\ell(w) = \ell(v) + 1$. On effectue la démonstration par récurrence sur $\ell(w)$. On note que si w satisfait (a) ou (b), il en est de même de v. Donc on peut supposer que l'on a $\mathrm{Vol}(v) = 0$. Par le lemme précédent, il suffit de prouver que $\mathrm{Sing}\, \widetilde{S}_w \cap \widetilde{S}_v$ est de codimension 2 dans $\widetilde{S}_v$. Or $\mathrm{Sing}\, \widetilde{S}_w$ est stable par P_i. Donc il suffit de prouver que si l'on fixe $u \in W$ avec $u \leq v$, $s_i u \leq u$, l'une des deux assertions suivantes est réalisée

(a') $\ell(u) \leq \ell(v) - 2$;

(b') $\widetilde{S}_u$ n'est pas contenu dans $\mathrm{Sing}(\widetilde{S}_w)$.

2) On se place dans le cas (a), et on suppose donné un tel u qui satisfasse $\ell(u) = \ell(v) - 1$. On a $s_i u \leq u$, $s_i v \geq v$. Il existe donc $j \in \{1, \dots N\}$ tel que l'on ait $v = s_j u$. Je pose aussi $x = s_i u$. On a ainsi $w = s_i s_j s_i x$, et $\ell(w) = \ell(x) + 3$.
Soit G le groupe $SL(3)$. On notera que l'on a aussi $w = s_j s_i s_j x$, car on a $a_{ij} a_{ji} = 1$. Donc les actions de P_i et de P_j sur $\widetilde{S}_w$ donnent une action de G. La grosse orbite de $\widetilde{S}_u$ est incluse dans la G-orbite des points

de la grosse orbite de $\tilde{S}_w$. En particulier, Sing $\tilde{S}_w$ ne contient pas $\tilde{S}_u$, ce qui prouve l'assertion (b').

3) Dans le cas (b), alors l'assertion (a') est automatiquement réalisée pour tous les éléments $u \in W$, $u \leq v$, $s_i u \leq u$. Donc ceci achève la démonstration de la proposition.

On va montrer comment la connaissance du groupe de Picard permet de calculer des dimensions cohomologiques des représentations.

<u>Lemme 123</u> : On suppose W libre. Soit $w \in W$, tel que l'on ait $\#\mathcal{V}(w) = \# S(w)$. Soient $u , v \in W$ tels que $w = uv$, $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$. Alors $\tilde{S}_u$ et $\tilde{S}_v$ sont localement intersection ensembliste complète dans $\tilde{S}_w$.

<u>Démonstration</u> : Je vais montrer le lemme pour $\tilde{S}_v$, la preuve pour $\tilde{S}_u$ étant identique. On pose $w = s_{i_1} \dots s_{i_n} v$, avec $\ell(w) = n + \ell(v)$. Pour tout entier j , on pose $x_j = s_{i_j} \dots s_{i_n} v$ $(1 \leq j \leq n+1)$. Par la proposition 1 , on a aussi $\#\mathcal{V}(x_j) = \# S(x_j)$ pour tout j . Donc ceci signifie que pour tout j , toute sous-variété de codimension un de $\tilde{S}_{x_j}$ est localement ensemblistement intersection complète. En particulier $\tilde{S}_{x_{j+1}}$ est localement ensemblistement défini par une équation dans $\tilde{S}_{x_j}$. Donc par induction, $\tilde{S}_v$ est localement intersection complète dans $\tilde{S}_w$.

<u>Proposition 18</u> : Soient W , w , u , v comme au lemme 123. Soit U le complémentaire dans $\tilde{S}_w$ de $\tilde{S}_u$ ou de $\tilde{S}_v$, et soit r la codimension du complémentaire de U . On suppose $r \geq 2$. Alors on a $H^{\ell}(U,\tilde{\mathcal{L}}_w(k[B])) = 0$, pour $\ell \neq 0 , r-1$, et $H^{r-1}(U,\tilde{\mathcal{L}}_w(k[B]))$ est un $\mathcal{U}(\underline{b})$-modules à gauche de dimension cohomologique $\ell(w) - r$.

<u>Démonstration</u> : Soit Z le complémentaire de U dans $\tilde{S}_w$. Par le lemme 123,

Z est localement ensemblistement intersection complète. On a donc, par la formule de Deligne, $\mathcal{H}^{\ell}_{Z}(\mathcal{F}) = 0$ pour $\ell > r$, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ [ ]. Donc on a $\mathcal{H}^{\ell}_{Z}(\widetilde{\mathcal{L}}_{w}k[B]) = 0$ pour $\ell \neq r$, et par le lemme 83, on a donc $H^{\ell}_{Z}(\widetilde{S}_{w},\widetilde{\mathcal{L}}_{w}k[B]) = 0$ pour $\ell \neq r$. Donc utilisant la longue suite exacte, on a $H^{\ell}(U,\widetilde{\mathcal{L}}_{w}(k[B])) = 0$ pour $\ell \neq 0 , r-1$.

Soit $G : \mathcal{C}(\underline{b}) \longrightarrow Ab$ le δ-foncteur défini par la formule $G^{*}M = H^{*}(U,\widetilde{\mathcal{L}}(M))$. La suite spectrale du lemme 79 dégénère. On a donc des suites exactes, pour tout entier ℓ,

$$\dots \longrightarrow H^{\ell}_{f}(\underline{b},\underline{h},G^{o}(k[B] \otimes M)) \longrightarrow G^{\ell}M \longrightarrow H^{\ell-r+1}_{f}(\underline{b},\underline{h},(G^{r-1}k[B]) \otimes M) \longrightarrow \dots$$

Comme Z est de codimension ≥ 2, on a aussi $G^{o}k[B] = k[B(w)]$. Comme U n'est pas complète, on a $G^{\ell(w)} = 0$. Par la proposition 7, on a aussi $H^{\ell+1}_{f}(\underline{b},\underline{h},G^{o}k[B] \otimes M) = 0$, pour $\ell > \ell(w)$. On a donc $H^{\ell(w)-r+1}_{f}(\underline{b},\underline{h},G^{r-1}k[B] \otimes M) = 0$, pour tout $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$. Donc le $\mathcal{U}(\underline{b})$-module à droite $G^{r-1}k[B]$ est de dimension cohomologique $\leq \ell(w) - r$. Par ailleurs, il existe $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$ tel que l'on ait $H^{\ell(w)}(\widetilde{S}_{w},\widetilde{\mathcal{L}}_{w}(M)) \neq 0$. On a donc $H^{\ell}_{f}(\underline{b},\underline{h},(G^{o}k[B]) \otimes M) \neq 0$, et de là $H^{\ell(w)-r}_{f}(\underline{b},\underline{h},G^{r-1}k[B] \otimes M) \neq 0$. Donc le $U(\underline{b})$-module à droite $G^{r-1}k[B]$ est de dimension homologique $\ell(w) - r$ dans $\mathcal{C}(\underline{b})$. Changeant w , u , v en leurs inverses, on échange les structures à gauche et à droite. Donc le $\mathcal{U}(\underline{b})$-module $G^{r-1}k[B]$ à gauche est de dimension cohomologique $\ell(w) - r$ dans $\mathcal{C}(\underline{b})$.

§ 2. Dualités des foncteurs de Joseph

Soit $w \in W$. Je dis que le foncteur D_{w} est dualisable, s'il existe un poids $\omega \in P$, tel que $\dim D^{\ell(w)}_{w}k_{\omega} = 1$, et tel que les applications

$$D^{\ell}_{w}(M^{*} \otimes k_{\omega}) \otimes D^{\ell(w)-\ell}_{w}(M) \longrightarrow D^{\ell(w)}_{w}k_{\omega}$$

soient des couplages parfaits pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, et $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$ de dimension finie. Je dis que D_{w} est faiblement dualisable s'il existe un poids $\omega \in P$, une forme linéaire Res : $D_w^{\ell(w)} k_\omega \longrightarrow k$, tels que pour tout Λ dominant entier régulier, le couplage naturel

$$D_w(k_{\omega-\Lambda}) \otimes D_w^{\ell(w)} k_\Lambda \xrightarrow{\text{Res}} k$$

soit un couplage parfait.

Proposition 19 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\tilde{S}_w$ est Gorenstein (i.e. le faisceau canonique K_w est inversible) ;

(b) D_w est dualisable ;

(c) D_w est faiblement dualisable.

En outre, le poids ω de l'une des définitions précédentes a pour image K_w dans $\mathrm{Pic}(\tilde{S}_w)$, dès que ces conditions sont satisfaites.

Démonstration : 1) La définition [22] de variétés de Gorenstein est la suivante : une variété X est Gorenstein si X est Cohen - Macaulay et si le faisceau canonique K_X est inversible. Par le théorème 3 les variétés $\tilde{S}_w$ sont Cohen - Macaulay. Ceci explique l'assertion (a).

2) On va prouver que l'on a (a) implique (b). Par la proposition 6, il existe un poids $\omega \in P$, tel que l'on ait $K_w = \tilde{\mathcal{L}}_w(\omega)$. Par le théorème 3, $\tilde{S}_w$ est Cohen - Macaulay. La dualité de Serre et la proposition 3 impliquent alors que l'on a, pour tout entier ℓ

$$\begin{aligned} D_w^\ell(M^* \otimes k_\omega) &= H^\ell(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(M)^{-1} \otimes \mathcal{L}_w(\omega)) \\ &= H^{\ell(w)-\ell}(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(M))^* \\ &= (D_w^{\ell(w)-\ell} M)^* \end{aligned}$$

pour tout module M de dimension finie. Ceci prouve le point (b).

3) On a (b) implique (c) trivialement.

4) On suppose (c). On notera que la forme Res de la définition est nécessairement non nulle. Or par la proposition 3, on a

$H^{\ell(w)}(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(\omega)) = D_w^{\ell(w)} k_\omega$. Donc Res définit un élément non nul de $\mathrm{Hom}(\tilde{\mathcal{L}}_w(\omega) , K_w)$. Comme $\tilde{\mathcal{L}}_w(\omega)$ est inversible, l'application ainsi déterminée est injective, de sorte que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_w(\omega) \longrightarrow K_w \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

pour un certain faisceau $\mathcal{G}$. Pour tout Λ dominant entier régulier on a donc

$$\begin{aligned} \dim H^0(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(\omega - \Lambda)) &= \dim D_w k_{\omega - \Lambda} && \text{(proposition 3)} \\ &= \dim D_w^{\ell(w)} k_\Lambda \\ &= \dim H^{\ell(w)}(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda)) && \text{(proposition 3)} \\ &= \dim H^0(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda) \otimes K_w) && \text{(dualité de Serre).} \end{aligned}$$

En outre, pour Λ suffisamment grand, on a $H^1(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(\omega - \Lambda)) = 0$, donc on a $H^0(\tilde{S}_w , \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda) \otimes \mathcal{G}) = 0$. Comme ceci vaut pour Λ grand, on a $\mathcal{G} = 0$, ce qui implique que l'on a un isomorphisme $K_w = \tilde{\mathcal{L}}_w(\omega)$.

Le lemme suivant est dû à A. Joseph (plus précisément l'énoncé dual) [31].

Lemme 124 : Soit $i \in \{1 , \dots , N\}$. On a $D_{s_i}^{(1)} k_{\alpha_i} = k$, où k désigne le $\mathcal{U}(\underline{b})$-module trivial. Pour tout module $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$ de dimension finie, les couplages $D_{s_i}^{\ell}(M^* \otimes k_{\alpha_i}) \otimes D_{s_i}^{1-\ell} M \longrightarrow k$ qui s'en déduisent sont parfaits.

Démonstration : Le lemme n'est que la traduction en foncteur de Joseph de la dualité de Serre sur la droite projective.

Lemme 125 : Soit $w \in W$. On a

$$D_w^{\ell(w)} = D_{s_{i_n}}^{(1)} \dots D_{s_{i_1}}^{(1)} , \text{ si } w = s_{i_n} \dots s_{i_1} \text{ avec } n = \ell(w) .$$

Démonstration : On effectue la démonstration par récurrence sur $\ell(w)$. On peut supposer que l'on a $\ell(w) \geq 1$. On pose alors $w = s_i v$, pour un certain $i \in \{1 , \dots , N\}$, et un certain $v \in W$ avec $\ell(v) = \ell(w) - 1$. Par le lemme 72, on a une suite exacte de foncteur additif

$$0 \longrightarrow D^{(1)}_{s_i} D^{\ell(v)}_{v} \longrightarrow D^{\ell(w)}_{v} \longrightarrow D_{s_i} D^{\ell(w)}_{v} \longrightarrow 0$$

et par la proposition 4, on a $D^{\ell(w)}_{v} = 0$. On obtient donc un isomorphisme $D^{(1)}_{s_i} D^{\ell(v)}_{v} \simeq D^{\ell(w)}_{w}$, ce qui prouve le lemme par récurrence.

Lemme 126 : Soient $\lambda \in P$ et $w \in W$. On suppose que l'on a $D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda} \neq 0$. Alors le $U(\underline{b})$-module $D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda}$ est $U(\underline{n}^{+}_{w})$-cyclique, et il est engendré comme $\mathcal{U}(\underline{n}^{+}_{w})$-module par un vecteur de poids $w(\lambda - \rho) + \rho$.

Démonstration : 1) Je vais d'abord prouver la première assertion. Soit $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w . Alors on a une dualité de $\mathcal{U}(\underline{n}^{+})$-module (donnée par la dualité de Serre sur $D(\tilde{w})$) :

$$D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda} \simeq H^{0}(D(\tilde{w}) , \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) \otimes \omega_{\tilde{w}})^{*} .$$

Or $D(\tilde{w})$ contient une orbite ouverte U_{w} sous l'action du groupe N_{w} , et $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) \otimes \omega_{\tilde{w}}$ est un faisceau inversible B-équivariant. On a donc (cf. chapitre XII)

$$\dim H^{0}(\underline{n}^{+}_{w} , H^{0}D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\lambda) \otimes \omega_{\tilde{w}})) \leq 1$$

avec égalité dès que $D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda}$ est non nul. Ceci prouve que si $D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda}$ est non nul, ce module est $U(\underline{n}^{+}_{w})$-cyclique.

2) Soit $i \in \{1 , \dots , N\}$, et soit $M \in \mathcal{C}(\underline{b})$ de dimension finie. Par le lemme 125, on a $D^{1}_{s_i} M = D^{0}_{s_i}(M^{*} \otimes k_{\alpha_i})^{*}$, d'où on a $D^{1}_{s_i} M = D^{s_i}_{0}(M \otimes k_{-\alpha_i})$.

3) On va montrer la seconde assertion par récurrence sur $\ell(w)$. On suppose donc que l'on a $w = s_i v$, avec $i \in \{1 , \dots , N\}$, $v \in W$ et $\ell(w) = \ell(v) + 1$. Par le point 2, on a

$$D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda} = D^{s_i}_{0}((D^{\ell(v)}_{v} k_{\lambda}) \otimes k_{-\alpha_i}) .$$

Donc par hypothèse de récurrence $(D^{\ell(v)}_{v} k_{\lambda}) \otimes k_{-\alpha_i}$ est engendré par un vecteur x de poids $v(\lambda - \rho) + \rho - \alpha_i$. En outre, les poids de ce module sont la somme du poids de x , et de combinaisons linéaires de racines de $\underline{n}^{+}_{w}$. On a donc $e_i x = 0$. Par conséquent $D^{\ell(w)}_{w} k_{\lambda}$ est un $\mathcal{U}(p_i)$-module cyclique engendré par l'image $\bar{x}$ de x dans $D_w^{\ell(w)}k_\lambda$. Donc $D_w^{\ell(w)}k_\lambda$ est un $\mathcal{U}(\underline{n}^+)$-module cyclique engendré par $s_i\bar{x}$. Donc lorsque $D_w^{\ell(w)}k_\lambda$ est non nul, son plus bas poids est $s_i(v(\lambda-\rho)+\rho-\alpha_i) = w(\lambda-\rho)+\rho$, ce qui prouve le lemme.

Lemme 127 : Soit $w \in W$. On suppose que $\tilde{S}_w$ est Gorenstein. Soient ϑ, ξ des poids tels que l'on ait $K_w = \tilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)$, $H^{\ell(w)}(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)) = k_\xi$. Alors on a $\xi = w(\vartheta-\rho)+\rho$.

Démonstration : Le lemme résulte du lemme 126.

Lemme 128 : Soient w , $v \in W$, $i \in \{1, \dots N\}$ avec $w = s_i v$, et $\ell(w) = \ell(v)+1$. On suppose $\tilde{S}_v$ Gorenstein. On fixe ϑ et ξ deux poids tels que l'on ait $K_v = \tilde{\mathcal{L}}_v(\vartheta)$, $H^{\ell(v)}(\tilde{S}_v, \tilde{\mathcal{L}}_v(\vartheta)) = k_\xi$.

1) On suppose que l'on a $\xi(h_i) = 2$. Alors $\tilde{S}_w$ est Gorenstein, et l'on a $K_w = \tilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)$, $H^{\ell(w)}(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)) = k_{\xi-\alpha_i}$. En outre $[\tilde{S}_v]$ est un diviseur localement principal de $\tilde{S}_w$ si et seulement si v n'est pas $\geq s_i$.

2) On suppose que l'on a $\xi(h_i) \geq 3$, et $v \geq s_i$. Alors $\tilde{S}_w$ n'est pas Gorenstein.

Démonstration : Je note $j : \tilde{S}_v \longrightarrow \tilde{S}_w$ l'inclusion canonique. Soit $M \in \mathcal{E}(B)$, de dimension finie. On a

$$\begin{aligned} D_w^{\ell(w)}M &= D_{s_i}^1 D_v^{\ell(v)}M \\ &= D_{s_i}^1 D_v(M^* \otimes k_\vartheta)^* \otimes k_\xi \\ &= D^{s_i}D_v(M^* \otimes k_\vartheta)^* \otimes k_{\xi-\alpha_i} . \end{aligned}$$

1) On suppose d'abord que l'on a $\xi(h_i) = 2$. On obtient alors

$$\begin{aligned} D_w^{\ell(w)}M &= D^w(M \otimes k_{-\vartheta}) \otimes k_{\xi-\alpha_i} \\ &= D_w M^* \otimes k_\vartheta)^* \otimes k_{\xi-\alpha_i} . \end{aligned}$$

Comme cette identification est canonique, on en déduit que l'on a $K_w = \tilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)$, et $H^{\ell(w)}(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)) = k_{\xi-\alpha_i}$. Donc $\tilde{S}_w$ est Gorenstein. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal définissant $\tilde{S}_v$ dans $\tilde{S}_w$. On a $K_v = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}, K_w)$. On suppose $\mathcal{J}$ inversible. Utilisant la résolution projective $0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}_w} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}_v} \longrightarrow 0$ de $\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}$, on obtient la formule bien connue

$$\begin{aligned} K_v &= \mathrm{Hom}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 , K_w) \\ &= j^*\mathcal{J}^{-1} \otimes K_w . \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme faisceaux inversibles, j^*K_w et K_v sont isomorphes d'après ce qui précède. Donc on a

$$j^*\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_v} .$$

Comme $\mathcal{J}^{-1}$ est non trivial, l'application $j^* \; \mathrm{Pic}(\tilde{S}_w) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\tilde{S}_v)$ n'est pas injective. Par la proposition 6, ceci implique que l'on a $S(v) \neq S(w)$, i.e. que l'on a $v \not\geq s_i$. Réciproquement, si l'on a $v \not\geq s_i$, on a $\tilde{S}_w = P_i \times^B \tilde{S}_v$, et $[\tilde{S}_v]$ est un diviseur localement principal.

2) Soit λ un poids tel que $\lambda - \vartheta$ soit dominant. On a alors $D_w^{\ell(w)} k_\lambda = D^{s_i}(E_v(\lambda - \vartheta) \otimes k_{\xi-\alpha_i})$. Comme $\xi(h_i)$ est ≥ 2 , l'application $E_v(\lambda - \vartheta) \otimes k_{\xi-\alpha_i} \longrightarrow D^{s_i}(E_v(\lambda - \vartheta) \otimes k_{\xi-\alpha_i})$ est injective. Je pose $N = D^{s_i} E_v(\lambda - \vartheta) \otimes k_{\xi-\alpha_i}$. Je dis que le $U(\underline{n}^+)$-module N n'est isomorphe à aucun des modules du type $E_w(\mu)$, où μ est dominant. En effet, N est engendré par un vecteur x de poids $s_i\nu$ (où $\nu = (\lambda - \vartheta + \xi - \alpha_i)$) et satisfait les relations suivantes

$$e_\alpha^{m_\alpha+1} . x = 0 \quad \text{et} \quad e_\alpha^{m_\alpha} . x \neq 0$$

pour tout $\alpha \in \Phi_w$, où e_α est un vecteur non nul de $\underline{n}^+_{-\alpha}$, et

$$m_\alpha = \nu(h_i) \quad \text{pour} \quad \alpha = \alpha_i$$

$$m_\alpha = s_i(\lambda - \vartheta)(h_\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Phi_w - \{\alpha_i\} .$$

Si N est isomorphe à $E_w(\mu)$, on a aussi

$$m_\alpha = \mu(h_\alpha) \ , \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Phi_w \ .$$

Comme on a $v \geq s_i$, il est clair que h_i est combinaison linéaire de h_α , pour $\alpha \in \Phi_w - \{\alpha_i\}$, soit $h_i = \Sigma\, c_\alpha h_\alpha$. On a alors $m_{\alpha_i} = \Sigma\, c_\alpha m_\alpha$, d'où $\nu(h_i) = \Sigma\, c_\alpha s_i(\lambda - \vartheta)(h_\alpha) = s_i(\lambda - \vartheta)(h_i)$, d'où $\xi - \alpha_i(h_i) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On pose $t = s_N\, s_{N-1} \ldots s_1$, de sorte que t est un produit de N réflexions élémentaires. Un élément de W égal à un tel élément t , à une permutation des indices $\{1 \ldots N\}$ près, est dit un élément de Coxeter. On note ϑ un élément de P qui satisfasse aux relations suivantes

$$\vartheta(h_j) = \sum_{1 \leq i \leq j} \alpha_i(h_j) \ , \quad \text{pour tout} \quad j \quad \text{avec} \quad 1 \leq j \leq N \ .$$

Pour tout entier j avec $0 \leq j \leq N$, je pose aussi

$$\beta_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \alpha_j \ , \quad \text{et} \quad \beta = \beta_N \ .$$

<u>Lemme 129</u> : On a $K_t = \widetilde{\mathcal{L}}_t(\vartheta)$, et $H^N(\widetilde{S}_t\, , \widetilde{\mathcal{L}}_t(\vartheta)) = k_{\vartheta-\beta}$.

<u>Démonstration</u> : Pour chaque entier j avec $0 \leq j \leq N$, je pose $t_j = s_j\, s_{j-1} \ldots s_1$. Je vais prouver, par récurrence sur j , que l'on a $K_{t_j} = \widetilde{\mathcal{L}}_{t_j}(\vartheta)$, et $H^j(\widetilde{S}_{t_j}\, , \widetilde{\mathcal{L}}_{t_j}(\vartheta)) = k_{\vartheta-\beta_j}$, pour tout $j \leq N$. On remarque d'abord que l'on a là $\beta_o = 0$, donc l'assertion est triviale pour $j = 0$. On suppose cette assertion prouvée pour un certain entier j , $j < N$.

On remarque que l'on a $t_{j+1} = s_{j+1}\, t_j$ et $\ell(t_{j+1}) = \ell(t_j) + 1$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} (\vartheta - \beta_j)(h_{j+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq j+1} \alpha_i(h_{j+1}) - \sum_{1 \leq i \leq j} \alpha_i(h_{j+1}) \\ &= \alpha_{j+1}(h_{j+1}) \\ &= 2 \ . \end{aligned}$$

Ainsi, je viens de vérifier les hypothèses du lemme 128-1, pour le couple (w,v)

avec $w = t_{j+1}$, $v = t_j$. On a donc $K_{t_{j+1}} = \tilde{\mathcal{L}}_{t_{j+1}}(\vartheta)$ et $H^{j+1}(\tilde{S}_{t_{j+1}}, \tilde{\mathcal{L}}_{t_{j+1}}(\vartheta)) = k_{\vartheta-\beta_j-\alpha_{j+1}} = k_{\vartheta-\beta_{j+1}}$. Ceci prouve l'assertion par récurrence. En particulier, pour $j = N$, on obtient l'énoncé du lemme.

Remarque : On utilise les notations précédentes. On suppose que l'on a $\beta(h_1) \leq -1$, et on pose $u = s_1 t$. Les lemmes 127 et 128 prouvent donc que $\tilde{S}_u$ n'est pas Gorenstein. Par exemple, lorsque $\underline{g}$ est de rang deux, la condition précédente est équivalente à $\alpha_2(h_1) \leq -3$. Donc en général, la variété de Schubert $\tilde{S}_{s_1 s_2 s_1}$ n'est pas Gorenstein. Dans G_2 , l'une des variétés de Schubert de dimension 3 n'est pas Gorenstein.

Le fait qu'un grand nombre de variétés de Schubert soient Gorenstein est donc probablement un fait très spécial à certaines algèbres de Lie affines, comme le montre le paragraphe suivant (cf. aussi [45]).

§ 3. Variétés de Schubert de certaines variétés affines

Dans ce paragraphe, on conserve les notations du lemme 1 .

Lemme 130 : Les conditions suivantes sont équivalentes

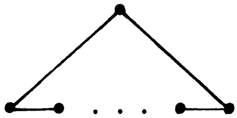
(i) On a $\beta(h_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

(ii) L'algèbre de Lie $\underline{g}$ est produit direct d'algèbre de Kac-Moody affines isomorphes à $A_n^{(1)}$ et $D_m^{(2)}$, pour divers entiers n , m .

Démonstration : Il est clair que l'on peut supposer que $\underline{g}$ est indécomposable. On rappelle que le graphe de Dynkin Γ associé à $\underline{g}$ est le graphe dont les sommets sont les indices $\{1, \dots, N\}$, et dont les arêtes sont les paires $\{i, j\}$ avec $\alpha_i(h_j) \neq 0$. On suppose d'abord l'assertion (i). Soit i un sommet de Γ . On a donc

$$(*) \qquad \sum_{j \neq i} |\alpha_j(h_i)| = 2 .$$

Donc le nombre d'arêtes de sommet i est 1 ou 2. On en déduit facilement que le graphe Γ est l'un des deux suivants



(a)

(b).

Dans le cas (a), on peut supposer les sommets indexés circulairement, i.e. tels que les arêtes soient les paires $\{i , i+1\}$ $(1 \leq i < N)$ et $\{1 , N\}$. L'égalité (*) donne alors

$$\alpha_i(h_{i+1}) = -1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < N$$

$$\alpha_i(h_{i-1}) = -1 \quad \text{pour} \quad 1 < i < N$$

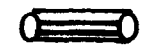
$$\alpha_i(h_N) = \alpha_N(h_i) = -1 ,$$

et $\underline{g}$ est donc isomorphe à $A_{N-1}^{(1)}$.

Dans le cas (b), on peut supposer les sommets indexés linéairement, i.e. tels que les arêtes soient les paires $\{i , i+1\}$, $1 \leq i \leq N-1$. L'égalité (*) donne alors

$$\alpha_i(h_{i+1}) = \alpha_i(h_{i-1}) = -1 \quad \text{pour} \quad 1 < i < N$$

$$\alpha_N(h_{N-1}) = \alpha_1(h_2) = -2 .$$

Lorsque $N = 2$, l'algèbre de Lie $\underline{g}$ a pour diagramme de Dynkin , et est isomorphe à $A_1^{(1)}$. Lorsque l'on a $N \geq 3$, l'algèbre de Lie $\underline{g}$ a pour diagramme de Dynkin , et est isomorphe à $D_{N-1}^{(2)}$.

Remarque : Lorsque dans la suite on considérera de telles algèbres de Lie affines, on ne supposera pas nécessairement que les indices $\{1 , \dots , N\}$ sont ordonnés comme dans la démonstration.

Soient j , m deux entiers ≥ 0 avec $0 \leq j < N$. Je pose $u(m , j) = s_j \, s_{j-1} \ldots s_1 \, t^m$.

<u>Lemme 131</u> : On suppose les conditions équivalentes du lemme 136 satisfaites. Alors :

1) On a $\ell(u(m , j)) = m N + j$,

2) On a $K_{u(m,j)} = \widetilde{\mathcal{L}}_{u(m,j)}(\vartheta)$,

3) On a $H^{mN+j}(\widetilde{S}_{u(m,j)} , \widetilde{\mathcal{L}}_{u(m,j)}(\vartheta)) = k_{\vartheta - m\beta - \beta_j}$.

<u>Démonstration</u> : On montre le lemme par récurrence sur l'entier $\ell = m N + j$. Lorsque l'on a $\ell = 0$, il n'y a rien à montrer. On fixe donc un entier $\ell = m N + j > 0$, et l'on suppose les assertions vérifiées pour $\ell - 1$. On pose $w = u(m , j)$, et $w = u(m , j - 1)$ si $j \neq 0$, $w = u(m - 1 , N - 1)$ si $j = 0$. On considère alors deux cas

1) On suppose $0 < j \leq N - 1$. Par hypothèse de récurrence, on a $K_w = \widetilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)$, et $H^{\ell-1}(\widetilde{S}_w , \widetilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)) = k_{\vartheta - m\beta - \beta_{j-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned}(\vartheta - m \beta - \beta_{j-1}) &= \vartheta - \beta_{j-1}(h_j) \,, \\ &= 2 \text{ , comme au lemme 129.}\end{aligned}$$

En particulier, $H^{\ell-1}(\widetilde{S}_{w'} , \widetilde{\mathcal{L}}_{w'}(\vartheta))$ n'est pas un $\mathcal{U}(p_i)$-module. Donc on a $s_i w' \geq w'$, et ceci prouve que l'on a $\ell(u(m , j)) = n N + j$. Par le lemme 129, on a aussi $K_w = \widetilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)$, et $H^{\ell}(\widetilde{S}_w , \widetilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)) = k_{\vartheta - m\beta - \beta_{j-1} - \alpha_j} = k_{\vartheta - m\beta - \beta_j}$.

2) On suppose $j = 0$. Par hypothèse de récurrence, on a $K_{w'} = \widetilde{\mathcal{L}}_{w'}(\vartheta)$ et $H^{\ell-1}(\widetilde{S}_{w'} , \widetilde{\mathcal{L}}_w(\vartheta)) = k_{\vartheta - (m-1)\beta - \beta_{N-1}}$. On a alors $(\vartheta - (m - 1)\beta - \beta_{N-1})(h_N) = (\vartheta - \beta_{N-1})(h_N) = 2$, et on conclut de manière identique, en notant que l'on a

$$(\vartheta - (m - 1)\beta - \beta_{N-1}) - \alpha_N = \vartheta - m\beta = \vartheta - m\beta - \beta_o \,.$$

C.Q.F.D.

Un élément w de W, qui à une permutation près des indices est l'un des éléments $u(m, j)$, est dit cyclique. La variété de Schubert associée est dite cyclique.

Proposition 20 : Soit $\underline{g}$ une algèbre de Kac-Moody produit direct d'algèbres affines du type $A_p^{(1)}$ et $D_q^{(2)}$, pour divers entiers p, q. Alors toute variété de Schubert cyclique associée à $\underline{g}$ est Gorenstein (toute variété de Schubert est en outre une sous-variété d'une variété cyclique).

Démonstration : La proposition résulte directement du lemme précédent (l'assertion entre parenthèses résultant d'un calcul aisé sur W).

Proposition 21 : On suppose $\underline{g}$ isomorphe à $A_1^{(1)}$. Les assertions suivantes sont équivalentes, pour tout $w \in W$

(i) On a $\mathrm{Vol}(w) = 0$;

(ii) On a $\ell(w) \leq 2$;

(iii) $\tilde{S}_w$ est lisse.

Démonstration : On suppose que l'on a $\ell(w) \geq 3$. On pose alors $w = s_i v$ avec $w \geq v$. Par la proposition $\tilde{S}_w$ et $\tilde{S}_v$ sont Gorenstein. Par le lemme 135, $[\tilde{S}_v]$ n'est pas un diviseur localement principal de $\tilde{S}_w$. Un calcul aisé prouve que l'on a $\#\mathcal{V}(w) = 2$. Donc $\mathrm{Pic}(\tilde{S}_w)$ et $\mathrm{Cl}(\tilde{S}_w)$ sont des groupes de même rang, et non égaux. On a donc $\mathrm{Vol}(w) \neq 0$. Ceci prouve que (i) implique (ii). Comme l'assertion (iii) résulte de (ii) par le lemme 121, et que (i) est une conséquence bien connue de (iii), la proposition est prouvée.

XVIII Constructions en base arbitraire.

Dans tout ce chapitre, je considérerai un anneau commutatif arbitraire R . Je rappelle que j'ai construit au chapitre I des algèbres $U^R(\underline{g})$, $U^R(\underline{b})$...,et des schémas en groupes H, B, P_i. Les R-formes des schémas et modules que l'on va considérer seront notés comme précédemment, avec un R en exposant ou en indice en plus. Lorsqu'aucune ambiguité ne sera possible, j'oublierai cet exposant ou cet indice. Pour tout $\lambda \in P$, je note R_λ le H-module (respectivement le $U(\underline{h})$, B, $U(\underline{h})$-module) lui correspondant, et $V^R(\lambda)$ le module de Verma

$$V(\lambda) = U(\underline{g}) \otimes_{U(\underline{b})} R_\lambda .$$

Soit Λ un poids dominant entier. On fixe un vecteur non nul v_Λ de $L(\Lambda)^{\mathbf{Q}}_{\Lambda}$, et on pose $L(\Lambda)^{\mathbf{Z}} = U^{\mathbf{Z}}(g).v_\Lambda$, $L(\Lambda)^R = R \otimes L(\Lambda)^{\mathbf{Z}}$. Pour tout $w \in W$, $\pi \in P$; On dèfinit de même $E_w(\Lambda)^R$, $F_w(\Lambda)^R$, $L(\Lambda)^R_\pi, v_\Lambda$.

Soient $\Lambda \in P^+$, $J = \{i/\Lambda(hi) = 0\}$, $w \in W_J$ et $\tilde{W}$ une décomposition réduite de w . Je note $S^R_{w\Lambda}$ le sous-schéma $\overline{B\ L(\Lambda)_{w\Lambda}}$ dans $\mathbb{P}\, E_w(\Lambda)^R$. On a un morphisme naturel π: $D(\tilde{w})^R \longrightarrow S^R_{w\Lambda}$. L'espace annelé $(S^R_{w,\Lambda}, \pi_* O^R_{\tilde{w}})$ ne dépend en fait que de J et de w . Je le note $\tilde{S}_{w,J}$, et je l'appelerai schéma de Schubert (il sera prouvé plus loin que $S_{w,J}$ est un schéma). Comme au chapitre V, on prouve que $\mathcal{L}^R_{\tilde{w}}(-\Lambda)$ est le pull-back à $D(\tilde{w})$ du faisceau inversible tautologique de $\mathbb{P}\, E_w(\Lambda)$. On note alors $\tilde{\mathcal{L}}^R_w(-\Lambda)$ l'image inverse de ce faisceau à $\tilde{S}_{w,J}$, de sorte que l'on a aussi $\tilde{\mathcal{L}}^R_w(-\Lambda) = \pi_* \mathcal{L}^R_{\tilde{w}}(-\Lambda)$. Comme au chapitre V, ceci est suffisant pour définir un morphisme $P_J \longrightarrow \mathrm{Pic}\ (\tilde{S}_{w,J})$ $(\pi \longmapsto \tilde{\mathcal{L}}^R_w(\pi))$. On remarque que pour $u, v \in W_J$ avec $u \leq v$, on a un morphisme naturel i: $\tilde{S}^R_{u,J} \longrightarrow \tilde{S}^R_{v,J}$ et un morphisme naturel $\mathcal{L}^R_v(\pi) \longrightarrow i_* \mathcal{L}^R_u(\pi)$. On pose donc $\tilde{L}_J(\Lambda)^R = \varinjlim_{w \in W_J} H^\circ(\tilde{S}^R_{w,J}, \mathcal{L}_w(-\Lambda)^R)^*$, pour tout $\Lambda \in P^+ \cap P_J$ de sorte que l'on a un morphisme naturel $\tilde{L}_J(\Lambda)^R \longrightarrow L(\Lambda)^R$. Pour tout $\alpha \in \Delta^+_{re}$, je choisis e_α (respectivement $\underline{f}_\alpha$) un générateur du $\mathbb{Z}$-module libre de rang un $\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{Z}}$ (respectivement $\mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{Z}}$) et je dénote encore e_α et $\underline{f}_\alpha$ leurs images dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{Z}}$.

§1 Constructions en caractéristique arbitraire :

Dans ce paragraphe, je suppose que R est un corps

Lemme 132: Soient J une partie de I , $w \in W_J$, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w, $\Lambda \in P^+ \cap P_J$.

1) L'application continue $D(\tilde{w}) \longrightarrow S_{w,J}$ est connexe.

L'espace annelé $S_{w,J}$ est une variété.

3) Les fermetures des B-orbites de $S_{w,J}$ sont en bijection avec les images des morphismes $S_{v,J} \longrightarrow S_{w,J}$ avec $v \in W_J$, $v \leq w$ (et $S_{w,J}$ ne contient qu'un nombre finit de B-orbite).

4) Le morphisme $\tilde{L}_J(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$ est surjectif.

Démonstration: Le point I du lemme se démontre par récurrence sur w comme au chapitre V. Soient $m \in P_J^+$, K le corps de fractions de $D(\tilde{w})$, et $\tilde{S}$ la fermeture intégrale de S_{wm} dans K . On a un diagramme naturel $D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S} \longrightarrow S_{w\Lambda}$. Donc le morphisme $\tilde{S} \longrightarrow S_{w\Lambda}$, qui est fini, est un homéomorphisme. Donc l'espace annelé $\tilde{S}_{w,J}$ est isomorphe à la variété $\tilde{S}$. Les points 3 et 4 sont évidents.

On note P^{++} l'ensemble des poids dominants entiers.

Lemme 133: Soit $\Lambda \in P^{++}$.

1) Soit $\alpha \in \Delta_{re}^+$. On a $\underline{f}_\alpha . v_\Lambda \neq 0$.

2) Soit $w \in W$. Le morphisme naturel $\tilde{S}_w \longrightarrow S_{v\Lambda}$ est birationnel (i.e. $\tilde{S}_w$ est la normalisation de $S_{w\Lambda}$).

Démonstration: 1) Tout élément $\alpha \in \Delta_{re}^+$ s'écrit de manière unique $\alpha = \sum_{i \in I} m_i \alpha_i$, avec $m_i \in \mathbb{N}$. Je pose $ht(\alpha) = \sum_{i \in I} m_i$. Le point 1 du lemme est clair lorsque α est une racine simple, i.e. lorsque l'on a $ht(\alpha) \neq 1$. Je vais prouver l'assertion 1 par induction sur $ht(\alpha)$. On peut supposer que l'on a $ht(\alpha) \neq 1$. Il existe donc $i \in I$, $\beta \in \Delta_{re}^+$, $n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha = s_i\beta = \beta + n\alpha_i$, et l'on a donc $\underline{f}_\beta = \pm \operatorname{Ad}(e_i^{(n)})(\underline{f}_\alpha)$. On a alors

$\underline{f}_\beta.v_\Lambda = e_i^{(n)}\underline{f}_\alpha.v_\Lambda$ (car l'on a $e_i^{(q)}.v_\Lambda = 0$ pour tout entier $q > 0$)
Par hypothèse on a $\underline{f}_\beta.v_\Lambda = 0$, on a donc $\underline{f}_\alpha.v_\Lambda = 0$.

2) Pour toute variété X , je note R(X) son corps des fonctions rationnelles. Il est clair que l'ensemble $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi_w\}$ engendre le $R(\tilde{S}_w)$-espace vectoriel $\mathrm{Der}_R(R(\tilde{S}_w))$. On a aussi par le point 1: $e_\alpha.v_{w\Lambda} \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi_w$. Donc l'ensemble $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi_w\}$ forme un ensemble $R(S_{w\Lambda})$-indépendant de dérivations de $R(S_{w\Lambda})$, et l'extension $R(S_{w\Lambda}) \longrightarrow R(\tilde{S}_w)$ est donc séparable. Comme le morphisme $\tilde{S}_w \longrightarrow S_{w\Lambda}$ est un homéomorphisme absolu, le morphisme $\tilde{S}_w \longrightarrow S_{w\Lambda}$ est birationnel (i.e. $\tilde{S}_w$ est la normalisation de $S_{w\Lambda}$).
C.Q.F.D.

Soient $\Lambda \in P^{++}$, $w \in W$. Je pose $\tilde{A}(w,\Lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda))$, et je note $\Sigma_{w\Lambda}$ le cône de $E_w(\Lambda)$ associé a $S_{w\Lambda}$, de sorte que $R\,[\Sigma_{w\Lambda}]$ s'identifie au sous-anneau de $\tilde{A}(w,\Lambda)$ engendré par sa composante de degré 1 $F_w(\Lambda)$. Le lemme clef est alors le suivant:

<u>Lemme 134:</u> Soient $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ deux sous-algèbres graduées et B-invariantes de $\tilde{A}(w\Lambda)$ avec $R[\Sigma_{w\Lambda}] \subseteq \mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{A}'$. Alors il existe un élément homogène $\sigma \in \mathcal{A}'$ de degré > 0 avec $\sigma \notin \mathcal{A}$ et $\sigma^l \in \mathcal{A}$ pour tout entier $l \geq 2$.

<u>Démonstration:</u> 1) Soient $\mathcal{M} = \mathcal{A}'/\mathcal{A}$ et $\mathrm{Ass}\,\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux premiers associés au $\mathcal{A}'$-module $\mathcal{M}$ Comme $\mathcal{M}$ est de type fini, et que B est connexe, $\mathrm{Ass}\,\mathcal{M}$ est un ensemble fini d'idéaux premiers B-invariants et gradués.
Soient $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}\,\mathcal{M}$ et $\mathcal{A}' = \{x \in \mathcal{A}'/\mathcal{P}x \subset \mathcal{A}\}$. L'extension $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ estfinie, donc d'après le "going-up" théorème on a $\mathcal{P}\mathcal{A}' \cap \mathcal{A} = \mathcal{P}$. En particulier on a $\mathcal{P}\mathcal{A}'' = \mathcal{P}$, et $\mathcal{A}''$ est une algèbre graduée B-invariante avec $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}''$. Par construction $\mathcal{P}$ est un idéal gradué de $\mathcal{A}''$.

2) Je suppose par l'absurde que $\mathcal{P}$ est un idéal réduit de $\mathcal{A}''$. Par construction $\tilde{S}_w \longrightarrow S_{w\Lambda}$ est un homéomorphisme absolu. Donc $\mathrm{Spec}\,\tilde{A}(w\Lambda) \longrightarrow \Sigma_{w\Lambda}$ est aussi un homéomorphisme absolu, et $\mathrm{Spec}\,\mathcal{A}'' \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}$, $\mathrm{Spec}\,\mathcal{A} \longrightarrow \Sigma_{w\Lambda}$ sont des homéomorphismes absolus. En

particulier $\mathcal{P}$ est un idéal premier de $\mathcal{A}''$. On a $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}''_0 = R$. Donc $\mathcal{P}$ n'est pas l'idéal maximal gradué. Donc il existe $v \in W$, avec $v \leq w$ tel que l'on ait des inclusions naturelles

$$R\,[\Sigma_{v\Lambda}] \longrightarrow \mathcal{A}_{/\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{A}''_{/\mathcal{P}} \longrightarrow \tilde{A}(v\Lambda).$$

Soient K, K" les corps de fractions de $\mathcal{A}_{/\mathcal{P}}$ et de $\mathcal{A}''_{/\mathcal{P}}$. Par construction, on a $K \cap \mathcal{A}''_{/\mathcal{P}} = \mathcal{A}^{w}_{/\mathcal{P}}$. Par le lemme 144, l'extension $R[\Sigma_{v\Lambda}] \longrightarrow \tilde{A}(v\Lambda)$ est birationnelle. Donc on a $K = K''$, $\mathcal{A}''_{/\mathcal{P}} = \mathcal{A}_{/\mathcal{P}}$, $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ ce qui est absurde.

3) Par conséquent $\mathcal{P}$ n'est pas un idéal réduit de $\mathcal{A}''$. Donc il existe un élément homogène $\sigma \in \mathcal{A}''$ avec $\sigma \notin \mathcal{A}$ et $\sigma^{l} \in \mathcal{P}$ pour tout entier $l \geq 2$. En particulier σ est homogène de degré > 0, et on a :

$$\sigma \in \mathcal{A}', \ \sigma \notin \mathcal{A} \text{ et } \sigma^{l} \in \mathcal{A} \text{ pour tout entier } l \geq Z.$$

On suppose que R est un corps de caractéristique $p \neq 0$. Soient X une variété sur R , D un diviseur de Cartier effectif, et $F\colon X \longrightarrow X$ le morphisme de Frobenius absolu. On a ainsi des morphismes naturels de $\mathcal{O}_X$-modules: $\Sigma\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$ et $j_D\colon F_*\mathcal{O}_X \longrightarrow F_*(\mathcal{O}_X[D])$. Suivant Metha, Ramanan et Ramanathan, on dit que X est D-scindable s'il existe un morphisme de $\mathcal{O}_X$-module $\tau\colon F_*(\mathcal{O}_X[D]) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ tel que l'on ait $\tau \circ j_D \circ \Sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$. Soit $Y \longrightarrow X$ un morphisme, tel que $|D|$ ne contienne pas l'image de Y . On a ainsi une notion évidente de D-scindage compatible.

<u>Lemme 135:</u> (R corps parfait de caractéristique p) Soit $\tilde{w} \in W$.

1) Il existe une section globale de $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\rho)$ sur $D(\tilde{w})$ dont le diviseur D vérifie: $D(1) \notin |D|$.

2) Pour un tel diviseur D , $D(\tilde{w})$ est (p-1)-scindable compatiblement à chacunes de ses sous-variétés de Demazure.

<u>Démonstration:</u> Dans la suite je noterai $\mathcal{O}_{\tilde{w}}$ et $\omega_{\tilde{w}}$ le faisceau structural et le faisceau canonique de $D(\tilde{w})$. La première assertion résulte du fait que $\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\rho)$ est sans point base, puisque correspondant au morphisme $D(\tilde{w}) \longrightarrow S_{w\rho}$. Comme au chapitre IV, on a

$\omega_{\tilde{w}} \simeq \mathcal{L}_{\tilde{w}}(+\rho) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{w}}(-[\mathcal{Z}'_{\tilde{w}}]+\dots)$. L'assertion 2 résulte donc de [47].

Lemme 136: Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^1$, P un point rationnel de $\mathbb{P}'$ et $i: P \longrightarrow \mathbb{P}'$ le morphisme associé. On suppose que l'application $H^\circ(\mathbb{P}',\mathcal{F}) \longrightarrow i^*\mathcal{F}$ est surjective. Alors on a $H^1(\mathbb{P}',\mathcal{F}) = 0$.

Démonstration: On peut évidemment supposer $\mathcal{F}$ sans torsion, et que R est algèbriquement clos. Alors d'après un théorème de Grothendieck [21] (valable, comme la décomposition de Birkkoff sur n'importe quel corps algèbriquement clos) $\mathcal{F}$ est somme directe de faisceaux inversibles $\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(n)$. Le lemme résulte alors d'un calcul direct.

Lemme 137: Soient $\tilde{w},\tilde{u} \in \tilde{W}$ avec $\tilde{w} \geq \tilde{u}$, $\Lambda \in P^+$, et soit $j: D(\tilde{u}) \longrightarrow D(\tilde{w})$ l'un des morphismes naturels.

1) Le morphisme $H^\circ(D(\tilde{w}),\mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\Lambda)) \longrightarrow H^\circ(D(\tilde{u}),\mathcal{L}_{\tilde{u}}(-\Lambda))$ est surjectif.

2) On a $\operatorname{ch} H^\circ(D(\tilde{w}), \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\Lambda)) = \Delta^{\tilde{w}}e^{-\Lambda}$.

3) On a $H^q(D(\tilde{w}, \mathcal{L}_{\tilde{w}}(-\Lambda) = 0$ pour $q > 0$.

Démonstration: Je peux supposer que R est un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$.

1) Je vais d'abord montrer le point 1 dans le cas où l'on a $\Lambda \in P^{++}$.

Soient $w, u \in W$ les éléments dont $\tilde{w}$ et $\tilde{u}$ sont des décompositions réduites. Par le lemme 135, $\tilde{S}_w$ et $\tilde{S}_u$ sont compatiblements scindées. Donc le lemme clef 134 implique que l'application $H^\circ(\tilde{S}_w, \mathcal{L}_w(-\Lambda) \longrightarrow H^\circ(\tilde{S}_u, \mathcal{L}_u(-\Lambda))$ est surjective. Ceci prouve le lemme dans ce cas.

2) On suppose maintenant $\Lambda \in P^+$. On choisit un $((p-1)D)$ scindage compatible de $D(\tilde{w})$ comme au lemme 135. On obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^\circ(D(\tilde{w}), \mathscr{L}_{\tilde{w}}(-p\Lambda)) \arrow[rr, "Res"] \arrow[dr, "j"] & & H^\circ(D(\tilde{u}), \mathscr{L}_{\tilde{u}}(-p\Lambda)) \arrow[dr, "j"] & \\
& H^\circ(D(\tilde{w}), \mathscr{L}_{\tilde{w}}(-p\Lambda-(p-1)\rho)) \arrow[rr, "Res"] \arrow[dl, "\tau"] & & H^\circ(D(\tilde{u}), \mathscr{L}_{\tilde{u}}(-p\Lambda-(p-1)\rho) \arrow[dl, "\tau"] \\
H^\circ(D(\tilde{w}), \mathscr{L}_{\tilde{w}}(-\Lambda)) \arrow[rr, "Res"] \arrow[uu, "\Sigma"] & & H^\circ(D(\tilde{u}), \mathscr{L}_{\tilde{u}}(-\Lambda) \arrow[uu, "\Sigma"] &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, on a $\tau_\circ j_\circ \Sigma = id$, et les applications de restrictions, notée Res, commutent aux flèches Σ, j, τ. La surjectivité de l'application $H^\circ(D(\tilde{w}), \mathscr{L}_{\tilde{w}}(-p\Lambda-(p-1)\rho)) \longrightarrow H^\circ(D(u\tilde{u}), \mathscr{L}_{\tilde{u}}(-p\Lambda-(p-1)\rho))$ (d'après le point 1) implique celle de $H^\circ(D(\tilde{w}), \mathscr{L}_{\tilde{w}}(-\Lambda)) \longrightarrow H^\circ(D(\tilde{u}), \mathscr{L}_{\tilde{u}}(-\Lambda))$. Les points 2 et 3 se montrent par récurrence sur $\tilde{w}$, en utilisant le lemme 135.

Théorème 5: Soient J une partie de I, $\Lambda \in P^+ \cap P_J$, $w \in W_J$, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w et $\pi: D(\tilde{w}) \longrightarrow S_{w,J}$ le morphisme naturel.

1) On a $H^\circ(\tilde{S}_{w,J}, \mathscr{L}_w(-\Lambda)) = F_w(\Lambda)$ et $\mathrm{ch}\, F_w(\Lambda) = \Delta^w e^{-\Lambda}$.

2) La variété $\tilde{S}_{w,J}$ est à singularités rationnelles, i.e. on a $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} = \mathcal{O}_{\tilde{S}_{w,J}}$, $\pi_* \mathscr{W}_{\tilde{W}}$ est le faisceau canonique de $\tilde{S}_{w,J}$, et $R^q\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{w}} = R^q\pi_* \mathscr{W}_{\tilde{W}} = 0$ pour $q > 0$.

3) On a $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathscr{L}}_w(-\Lambda)) = 0$ pour $q > 0$.

4) On a $\tilde{L}_J(\Lambda) = L(\Lambda)$, et le morphisme $E_w(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda)$ est injectif.

5) On suppose en outre que l'on a $\Lambda \in P_J^+$. Alors on a $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathscr{L}}_w(\Lambda)) = 0$ pour $q \neq l(w)$. Pour n suffisament grand le morphisme $\tilde{S}_{w,J} \longrightarrow S_{wn\Lambda}$ est une immersion fermée projectivement normale.

6) Soit $u \in W_J$ avec $u \leq w$. Alors $S_{u,J} \longrightarrow S_{w,J}$ est une immersion fermée.

Démonstration: On a $F_W^R(\Lambda) = R \otimes_{\mathbf{Z}} F_W^{\mathbf{Z}}(\Lambda)$. Comme $F_W^{\mathbf{Z}}(\Lambda)$ est sans torsion, le caractère de $F_W^R(\Lambda)$ ne dépend pas de R. On a donc $\mathrm{ch}(F_W(\Lambda)) = \Delta^W e^{-\Lambda}$. Par le lemme 137 on a $\mathrm{ch}\, H^\circ(D(\tilde{w}), \mathscr{L}_{\tilde{w}}(-\Lambda)) = \Delta^W e^{-\Lambda}$. Comme le morphisme naturel $F_W(-\Lambda) \longrightarrow H^\circ(D(\tilde{W}), \mathscr{L}_{\tilde{W}}(-\Lambda))$ est de plus injectif, ce morphisme est un isomorphisme. Ceci prouve le point 1 (on notera que l'on a utilisé la connaissance de la formule de Demazure en caractéristique 0). Donc le caractère du module $\tilde{L}_J(\Lambda)$ est donné par la formule de Weyl. Il en est de même du module $L(\Lambda)$. On en déduit donc le point 4 du lemme 132-4. Le seul point de l'assertion 2 dont la démonstration n'est pas similaire à celle en caractéristique 0 est celui ci: on a:

$R^q\pi_* \omega_{\tilde{W}} = 0$ pour $q > 0$ Bien qu'on ne dispose plus du théorème de Gravert-Riemanschneider la démonstration de Ramanathan [52] s'applique ici mot à mot.

L'assertion 5 est une amélioration relativement aux résultats obtenus précédemment (même en caractéristique 0). Par le point 2, $\tilde{S}_{w,J}$ est Cohen-Macaulay. Donc pour n suffisament grand, on a $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-n\Lambda)) = 0$ pour $q \neq l(w)$. Il suffit aussi de considérer le cas où R est parfait de caractéristique $p \neq 0$. Comme $\tilde{S}_{w,J}$ est scindée, les morphismes $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) \longrightarrow H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}(-p^m\Lambda))$ sont injectifs, pour tout entier $m \geq 1$. Ceci prouve le point 5.
Les points restants se montrent comme en caractéristique 0.

Comme en caractéristique 0, on prouve

Proposition 22: Soient J une partie de I , $w \in W_J$. Le morphisme naturel $P^o_{w,J}/P_J \longrightarrow \mathrm{Pic}(\tilde{S}_{w,J})$ est un isomorphe.

Ceci permet de généraliser la discussion du chapitre XVII sur les variétés de Schubert localement factorielles et Gorenstein, au cas de corps de caractéristique arbitraire.

Remarque: Je n'ai eu connaissance de l'article de A.Ramanathan [52] qu'après mon exposé [42]. C'est pourquoi j'y ai indiqué que je ne savais pas prouver la rationalité des variétés de Schubert en caractéristique p (alors que la démonstration de [52] se généralise sans problème, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 5).

§2) Construction en base arbitraire:

Lemme 138: Soient J une partie de I , $w \in W_J$, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w et π: $D(\tilde{w})^{\mathbf{Z}} \longrightarrow S^{\mathbf{Z}}_{w,J}$ le morphisme naturel.

1) L'espace annelé $S^{\mathbf{Z}}_{w,J}$ est un schéma.

2) On a $R^q\pi_*\mathcal{O}^{\mathbf{Z}}_{\tilde{w}} = 0$ pour $q > 0$.

Démonstration: Soit K le corps de fraction de $D(\tilde{w})^{\mathbf{Z}}$ et $\tilde{S}$ la fermeture intégrale de $S^{\mathbf{Z}}_{w\Lambda}$ dans K , pour un certain $\Lambda \in P^+_J$. D'après le lemme 143, le morphisme $D(\tilde{w})^{\mathbf{Z}} \longrightarrow S^{\mathbf{Z}}_{w\Lambda}$ est connexe. Donc le morphisme $\tilde{S} \longrightarrow S^{\mathbf{Z}}_{w\Lambda}$ est un homéomorphisme, et l'espace annelé $\tilde{S}^{\mathbf{Z}}_{w,J}$ est isomorphe au schéma $\tilde{S}$. La seconde assertion résulte, par semi-continuité du théorème 5-2.

On conserve les mêmes hypothèses sur w, $\tilde{w}$, J, et π:

Proposition 23:

1) Pour tout anneau R , l'espace annelé $\tilde{S}^R_{w,J}$ est un schéma. On a $\tilde{S}^R_{w,J} = \operatorname{Spec} R \otimes \tilde{S}^{\mathbf{Z}}_{w,J}$. En outre, $\tilde{S}^R_{w,J}$ est normal dès que R est normal.

2) Soit $u \in W_J$ avec $u \leq w$. Le morphisme naturel $\tilde{S}^R_{u,J} \longrightarrow \tilde{S}^R_{w,J}$ est une immersion fermée.

3) On a $R^q\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{W}} = R^q\pi_*\omega_{\tilde{W}} = 0$ pour $q > 0$.

Proposition 24:

1) Soit $\Lambda \in P^+ \cap P_J$. On a $H^\circ(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = F_w(\Lambda)$ et $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = 0$ pour $q > 0$.

2) Soit $\Lambda \in P^+_J$. On a $H^q(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda)) = 0$ pour $q \neq l(w)$ et $H^{l(w)}(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(-\Lambda))$ est un R-module libre.

Proposition 25:

Soit $\Lambda \in P^+ \cap P_J$.

1) On a $\tilde{L}_J(\Lambda) = L(\Lambda)$.

2) Le R-sous-module $E_w(\Lambda)$ est un facteur direct de $L(\Lambda)$.

3) On a $L(\Lambda) \simeq U(\underline{n})/(\sum_{i \in I} \sum_{n > \Lambda(h_i)} fi^{(n)})$.

Je note $\mathcal{C}(B)$ la catégorie des B-modules.

Démonstration: Par le lemme 138 et le théorème de semi-continuité, on a $\pi_* \mathcal{O}^{R}_{\tilde{w}} = R \otimes \mathcal{O}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{w}}$ et $R^q \pi_* \mathcal{O}^{R}_{\tilde{w}} = 0$ pour $q > 0$. On en déduit que l'espace annelé $\tilde{S}_{w,J}$ est isomorphe au schéma $\operatorname{Spec} R \otimes \tilde{S}^{\mathbb{Z}}_{w,J}$. En utilisant le théorème de semi-continuité on prouve alors, par le théorème 5, les propositions 23-3, 24 et que pour tout $x, y \in W_J$ avec $x \leq y$, le morphisme $H^{\circ}(\tilde{S}_{y,J}, \tilde{\mathcal{L}}_y(-\Lambda)) \longrightarrow H^{\circ}(\tilde{S}_{x,J}, \tilde{\mathcal{L}}_x(-\Lambda))$ est surjectif. Les propositions 23 -2 et 25 -1 en résultent.

Comme en particulier on obtient que $\tilde{L}_J(\Lambda) \longrightarrow F_w(\Lambda)$ est surjectif . Le point 2 de la proposition 25 est aussi démontré. Pour montrer le point restant (proposition 25 -3), on peut ne considérer que le cas où R est un corps. On note que le $U(\underline{n})$-module $l(\Lambda) = U(\underline{n})/ \sum_{i \in I} \sum_{n > \Lambda(h_i)} f_i^{(n)})$ est naturellement un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module, et un P_i-module pour chaque $i \in I$. Soit v l'image de 1 dans $l(\Lambda)$, et pour tout $x \in W$ soit $e_x(\Lambda) = U(\underline{b})\, x.v$ et $f_x(\Lambda) = e_x(\Lambda)^*$.
Pour chaque décomposition réduite $\tilde{x}$ de x , on a un morphisme naturel $D(\tilde{x}) \longrightarrow \mathbb{P}\, e_x(\Lambda)$, dont l'image engendre linéairement $\mathbb{P}\, e_x(\lambda)$.
Par ailleurs on a un morphisme naturel $l(\lambda) \longrightarrow L(\lambda)$ qui envoie $e_x(\Lambda)$ sur $E_x(\Lambda)$. On en déduit des morphismes injectifs $F_x(\Lambda) \hookrightarrow f_x(\Lambda)$ et $f_x(\Lambda) \hookrightarrow H^{\circ}(D(\tilde{x}), \mathcal{L}_{\tilde{x}}(-\Lambda))$. On a donc $e_x(\Lambda) \simeq E_x(\Lambda)$. On a aussi clairement $l(\lambda) = \varinjlim_{x \in W} e_x(\Lambda)$, ce qui prouve les propositions.

Lemme 139: Soient $w \in W$, $\tilde{w} \in \tilde{W}$ une décomposition réduite de w , $\pi \colon D(\tilde{w}) \longrightarrow \tilde{S}_w$ le morphisme naturel, et $M \in \mathcal{C}(B)$. Alors on a $R^q \pi_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) = 0$ pour $q \leq 0$.

Démonstration: 1) Soient S, S' deux anneaux commutatifs, et $S \longrightarrow S'$ un morphisme d'anneaux. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
D(\tilde{w})_s \arrow[r, "j"] & D(\tilde{w})_{s'} \\
\tilde{S}^s_w \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "i"] & \tilde{S}^{s'}_w \arrow[u, "\pi'"']
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 23-3, on a $j_*\mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) = \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)$ pour tout B(s')-module M . Comme les morphismes i et j sont affines, les assertion

$R^q\pi_*\mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) = 0$ pour $q > 0$

$R^q\pi'_*\mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) = 0$ pour $q > 0$

sont équivalentes.

2) On se ramène donc au cas où $R = \mathbf{Z}$. Comme Z est noethérien, on peut également supposer que M est de type fini. Alors M a une suite de composition par des modules $\mathbf{Z}_\lambda$ et $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_\mu$, pour divers $\lambda, \mu \in P$ et nombres premiers p .

Dans chacun des cas on conclut par semi-continuité.C.Q.F.D.

Avec les notations du lemme précédent, on pose $\mathcal{L}_w(M) = \pi_*\mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)$. Comme au chapitre III, on prouve que $\mathcal{L}_w(M)$ ne dépend pas du choix de $\tilde{w}$. Le foncteur $M \longrightarrow \mathcal{L}_w(M)$ est exact, et il est aisé de prouver comme au lemme précédent que l'on a $\pi^*\pi_*\mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) \simeq \mathcal{L}_w(M)$.

Pour tout $w \in W$, je pose $D_wM = H^\circ(S_w, \mathcal{L}_w(M))$, et je note D^*_w les dérivés du foncteur D_w (les dérivés sont donc calculés dans $\mathscr{C}(B)$).

Soit $w \in W$. Il est clair que $\mathcal{L}_w(R[B])$ est un faisceau d'algèbres cohérentes sur $\tilde{S}_w$. Il existe donc un unique schéma B(w) , avec un morphisme affine ν: $B(w) \longrightarrow \tilde{S}_w$ tel que l'on ait $\nu_*\mathcal{L}_w(k[B]) = \mathcal{O}_{B(w)}$.

Pour tout $u \in W$, $u \leq w$ on a une immersion fermée naturelle $B(u) \longrightarrow B(w)$. Pour toute décomposition réduite $\tilde{w}$ de w , on a un diagramme commutatif (commutant aux restrictions)

$$\begin{tikzcd}
E(\tilde{w}) \arrow[r] & B(w) \\
\mathcal{D}(\tilde{w}) \arrow[r] \arrow[u] & S_w \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme au chapitre XI on montre

<u>Proposition 26 :</u> Soient $w \in W$, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w .

1) Le schéma $B(w)$ est affine.

2) Le schéma $B(w)$ est l'affinisation du schéma $E(\tilde{W})$.

Dans la suite je poserai $R[B(w)] = H^\circ(B(w), \mathcal{O}\ B(w))$.

<u>Proposition 27 :</u> Soient $w \in W$, $\tilde{w}$ une décomposition réduite de w, $M \in \mathcal{C}(B)$. On a des isomorphismes fonctoriels

$$D_w^* M \simeq H^*(B\ ,\ R[B(w)J \otimes M)$$
$$H^*(\tilde{S}_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(M))$$
$$H^*(\mathcal{D}(\tilde{w}),\ \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M)).$$

<u>Démonstration:</u> Le premier isomorphisme résulte du fait que l'on a $D_w M \simeq H^\circ(B,\ R[B(w)] \otimes M)$ de manière naturelle.

Pour prouver le second morphisme, il suffit de prouver que pour tout injectif $I \in \mathcal{C}(B)$, on a $H^q(\tilde{S}_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) = 0$ pour $q > 0$. Soit $j\colon \tilde{S}_w \longrightarrow \tilde{S}_w^{\mathbf{Z}}$ le morphisme naturel. Il suffit donc de prouver que l'on a $H^q(\tilde{S}_w^{\mathbf{Z}},\ j_*\tilde{\mathcal{L}}_w(I) = 0$ pour $q > 0$. Par restriction, i est aussi un $B(\mathbf{Z})$-module, et I est limite de $B(\mathbf{Z})$-module de type fini. Soit E un tel sous-module. Il existe un poids dominant Λ tel que l'on ait $H^\circ(\tilde{S}_w,\ \tilde{\mathcal{L}}_w(E \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda})) = 0$ pour $q > 0$. On a un morphisme naturel de $B(\mathbf{Z})$-modules $\mathbf{Z} \longrightarrow L^{\mathbf{Z}}(\Lambda) \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda}$, et ce morphisme est scindé à gauche comme $\mathbf{Z}$-module. On a $I \otimes L^{\mathbf{Z}}(\Lambda) \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda} \simeq I \otimes L(\Lambda) \otimes R_{-\Lambda}$, et comme I est injectif, le morphisme de B-modules $I \longrightarrow I \otimes L(\Lambda) \otimes R_{-\Lambda}$ est scindable à gauche. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^q(\tilde{S}^{\mathbf{Z}}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(E)) \arrow[rr, "b"] & & H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) \\
H^q(\tilde{S}^{\mathbf{Z}}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(E \otimes L^{\mathbf{Z}}(\Lambda) \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda}) \arrow[u, "a"] \arrow[r] & H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(I \otimes L(\Lambda) \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda}) \arrow[ur, phantom] & \arrow[u, "c"']
\end{tikzcd}$$

On suppose $q \neq 0$. Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} H^q(\tilde{S}^{\mathbf{Z}}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(E \otimes L^{\mathbf{Z}}(\Lambda) \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda})) &= H^q(\tilde{S}^{\mathbf{Z}}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(E \otimes \mathbf{Z}_{-\Lambda})) \otimes L^{\mathbf{Z}}(\Lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le morphisme a est nul. Par hypothèse le morphisme c est injectif. Donc le morphisme b est nul. Comme $\tilde{S}_w$ est noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive. On a donc $H^q(\tilde{S}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w(I)) =$ à pour $q > 0$. Enfin le troisième isomorphisme résulte du lemme 138.

<u>Lemme 140:</u> Soient $u, v, w \in W$ avec $w = uv$ et $l(w) = l(u) + l(v)$. Pour tout $M \in \mathcal{C}(B)$, il existe une suite spectrale $E(M)$, fonctorielle en M , avec $E_2^{p,q} = D_u^q D_v^p M$, et qui converge vers $D_w^* M$.

<u>**Démonstration:**</u> Soient $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ des décompositions réduites de u et de v , $\tilde{w} = \tilde{u}\tilde{v}$ et $\pi: D(\tilde{w}) \longrightarrow D(\tilde{u})$ le morphisme naturel associé. Par le lemme 23-3 et la proposition 28, on a $R^q\pi_* \mathcal{L}_{\tilde{w}}(M) = \mathcal{L}_{\tilde{u}}(D_v^q M)$, pour tout entier q . Donc la suite spectrale de Leray $E(M)$ associée à π satisfait $E_2^{p,q}(M) = D_u^p D_v^q M$ (par la proposition 28) et converge vers $D_w^* M$.

On peut aussi obtenir le résultat suivant, que je n'avais pas montré en caractéristique 0 .

<u>Lemme 141:</u> Soient J une partie de I , $w \in W_J$ et $\Lambda \in P_J^+$. Alors on a $H^l(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda)) = 0$ pour $l \neq l(w)$, et $H^{l(w)}(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda))$ est un R-module libre.

<u>**Démonstration:**</u> Par semi-continuité, il suffit de prouver le résultat lorsque R est un corps parfait en caractéristique $p \neq 0$. Soit $l \neq l(w)$. Par le

théorème 5, $\tilde{S}_{w,J}$ est Cohen-Macaulay. Il existe donc un entier $n > 0$, tel que l'on ait $H^1(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(m\Lambda)) = 0$ pour $m > n$.
Soit q une puissance de p, $q \geq n$. Comme $S_{w,J}$ est scindable, le morphisme naturel $H^1(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda)) \longrightarrow H^1(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(q\Lambda))$ est injectif. On a donc $H^1(\tilde{S}_{w,J}, \tilde{\mathcal{L}}_w(\Lambda)) = 0$, ce qui prouve le lemme.

§3: Généralisation du théorème de Kempf:

Je définis $(G/B, \mathcal{O}_{G/B})$ comme l'espace annelé $\varinjlim_{w\in W}$.
Soit $M \in \mathcal{C}(B)$. Pour tout $w \in W$, $\tilde{S}_w$ est un sous-espace fermé de G/B. Je peux donc considérer $\tilde{\mathcal{L}}_w(M)$ comme un faisceau à support dans $\tilde{S}_w$. Je pose $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}\mathrm{im}_{\overleftarrow{w\in W}}\ \mathcal{L}_w(M)$.

Comme au chapitre XV, on prouve que le foncteur $M \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}(M)$ est exact. Pour tout $M \in \mathcal{C}(B)$, je pose $DM = H^\circ(G/B, \mathcal{L}(M))$, et je note D^* les dérivés du foncteur D. Comme au chapitre XV, on prouve pour tout $M \in \mathcal{C}(B)$

$$D^*M \simeq H^*(G/B, \mathcal{L}(M))$$

$$DD_uM \simeq DM, \text{ pour tout } U \in W$$

et que l'on a des suites exactes fonctorielles

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{w\in W}{}^{1}\ D_w^{l-1}M \longrightarrow D^lM \longrightarrow \varprojlim_{w\in W} D_w^l\, M \longrightarrow 0\ .$$

Soit J une partie de I. Je pose $l(J) = \infty$ si le groupe $W(J)$ est fini, et je note $l(J)$ la longueur du plus grand élément de $W(J)$ lorsque $W(J)$ est fini. J'obtiens la généralisation suivante du théorème de Kempf [35].

<u>Proposition 28:</u> 1) Pour tout $\lambda \in P$, $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ est un $\mathcal{O}_{G/B}$-module localement libre.

2) (R corps) Le morphisme $P/K(P) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G/B)$ ainsi déterminé est un isomorphisme.

Théorème 6: 1) Soit Λ un poids dominant. On a:

$H^{\circ}(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(-\Lambda)) = L(\Lambda)^{*}$ et $H^{q}(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(-\Lambda))) = 0$ pour $q > 0$.

2) Soit $M \in P$, et soit $J = \{i/M(hi) > 0\}$. On a alors

$H^{q}(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(M)) = 0$ pour $q < l(J)$.

Démonstration: La proposition se démontre comme au chapitre XVI en utilisant la proposition 24. Le point 1 du théorème résulte, comme au chapitre XV, du théorème 5-3. Pour montrer le point 2, je choisis un élément $u \in W(J)$ avec $l(u) > q$. Soit X le sous-ensemble de W des éléments de la forme $w = vu$ avec $l(w) = l(v) + l(u)$. Il est clair que X est cofinal. D'après ce qui précède, on a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{w \in X}{}^{1} D_{w}^{q-1} R_{M} \longrightarrow H^{q}(G/B, \tilde{\mathcal{L}}(M)) \longrightarrow \varprojlim_{w \in X} D_{w}^{q} R_{M} \longrightarrow 0 .$$

Par le lemme 141, on a $D_{u}^{1} R_{M} = 0$ pour $1 < l(u)$. Par le lemme 140, on a donc $D_{w}^{1} R_{M} = 0$ pour $1 < l(u)$, $w \in X$.

Ceci montre le point 2 du thèorème.

Tableau des notations

1) Relatives à l'algèbre de Kac-Moody $\underline{g}$:

$\underline{h}$, $\underline{b}$, $\underline{n}$, $\underline{p}_i$, $\underline{u}_i$, $\underline{b}_i$, $\underline{b}'_i$, $\underline{e}_i$, $\underline{f}_i$, $\underline{a}_i$, $\underline{c}_i$: sous algèbres de Lie remarquables (cf. tableau ch. I).

H, B, N, P_i, U_i, B_i, B'_i, E_i, F_i, A_i, C_i : groupes associés (cf. tableau ch. I).

$\underline{n}^-$: sous-algèbre de Lie opposée à $\underline{n}$.

2) Relatives au groupe de Weyl W:

$\varepsilon : W \longrightarrow \{\pm 1\}$: caractère déterminant.

$\ell : W \longrightarrow \mathbb{N}$: fonction longueur.

W_j : $=\{w \in W \,/\, w\,s_j \geq w$ pour tout $j \in J\}$.

j_W : $=\{w \in W \,/\, s_j w \leq w$ pour tout $j \in J\}$.

$\tilde{W}$: ensemble des décompositions réduites des éléments de W .

$W(J)$: sous-groupe engendré par s_j $(j \in J)$.

$\varphi(w)$: $=\{i \in I \,/\, s_i \leq w\}$.

$\nu(w)$: $=\{v \in W \,/\, v \leq w$ et $\ell(v) = \ell(w) - 1\}$.

3) Relatives à la réalisation entière P :

P^+ : $\{\lambda \in P \,/\, \lambda(h_i) \geq 0$ pour tout $i \in I\}$.

P_J : $\{\lambda \in P \,/\, \lambda(h_j) = 0$ pour tout $j \in J\}$.

P_J^+ : $\{\lambda \in P^+ \cap P_J$, $\lambda(h_j) \neq 0$ pour tout $j \notin J\}$.

$\mathring{P}_{w,J}$: $\{\lambda \in P_J \,/\, \lambda(h_i) = 0$ pour tout $i \in \varphi(w)$ où $w \in W_J\}$.

Q : réseau des racines.

Q^+ : combinaison linéaire à coefficients entiers ≥ 0 de racines positives.

Δ : ensemble de racines.

Δ^+ : ensemble des racines positives.

Δ_{re} : ensemble des racines réelles.

Note : La notation P_J est également utilisée à la fin du chapitre IV pour désigner un sous groupe parabolique.

4) Relatives aux représentations:

$V(\lambda)$: module de Verma de plus haut poids λ .

$L(\Lambda)$: quotient intégrable maximal de $V(\Lambda)$ $(\Lambda \in P^+)$.

$E_w(\Lambda)$: $= U(\underline{b})\ L(\Lambda)_{w\Lambda}$.

$F_w(\Lambda)$: $= E_w(\Lambda)^*$.

D^w : foncteur de Joseph.

D_w : dual du foncteur de Joseph.

Δ_w : opérateur de Demazure.

5) Objects géométriques:

$S_{w,\Lambda}$: la sous-variété $B.E_w(\Lambda)_{w,\Lambda}$ dans $P\ E_w(\Lambda)$.

$J(\Lambda)$: $=\{i\ /\ \Lambda(h_i = 0\}$.

$\tilde{S}_{w,\Lambda}$: la normalisation de $S_{w,\Lambda}$ (où $J = J(\Lambda)$) .

$D(w)$: la variété de Demazure.

Bibliographie.

[1] H.H. Andersen : The Frobenius morphism on the cohomology of homogeneous vector bundles on G/B. Ann. of Math. 112 (1980) 113-121

[2] H.H. Andersen : Schubert varieties and Demazure's character formula. Inv. Math. 79 (1985) 611-618.

[3] H.H. Andersen : On the structure of the cohomology of line bundle on G/B. J. of algebra 71 (1981) 235-244.

[4] A. Beilinson, I.N. Bernstein : Localisation de g-modules.

[5] R. Bott : Homogenous vector bundles. Annals of Math. 66 (1957) 203-248.

[6] N. Bourbaki : Groupes et Algèbres de Lie. C.C.L.S. Paris (1975).

[7] M. Demazure : Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4èm série t 7 (1974) 53-88.

[8] M. Demazure : Une nouvelle formule des caractères. Bull. Sc. Math. 2èm série 98 (1974) 163-172.

[9] M. Demazure : Une démonstration d'un théorème de Bott. Inv. Math. 5 (1968) 349-356.

[10] V.V. Deodhar : On some geometric aspect of Bruhat ordering I : A finer decomposition of Bruhat cells. Inv. Math. 79 (1985) 499-511.

[11] V.V. Deodhar, O. Gabber, V.G. Kac : Structure of some categories of representation of infinite dimensional Lie algebras. Adv. in Math. 45 (1982) 92-116.

[12] J. Dixmier : Algèbres enveloppantes. Gauthier-Villars, Paris (1974).

[13] F. Ducloux : Sur le foncteur dérivé des vecteurs g-finis. Preprint de l'Ecole Polythéchnique. (1986).

[14] H. Esnault, E. Vieweg : Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorem. Inv. Math. 86 (1986) 161-194.

[15] O. Gabber et V.G Kac : On defining relations of certain infinite dimensional Lie algebras. B.A.M.S. 5 : 2 (1982) 185-189.

[16] H. Garland, J. Lepowsky : Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas. Inv. Math. 34 (1976) 37-76.

[17] R. Godement : Théorie des faisceaux. Hermann. Paris $3^{\text{ème}}$ édition (1973).

[18] Goncarova : The cohomology of the Lie algebras of formal vector fields on the line. Funct. Anal. Appl. 7N°2 (1973) 6-14 et N°3 (1973) 33-44.

[19] H. Grauert, R. Remmert : Theory of Stein spaces. Grundl. Math. W. 236 (1979) Springer-Verlag. Heidelberg, New-York, Berlin.

[20] W.L. Griffith : Cohomology of flag varietes in characteristic p. Ill. Journal of Math. Vol. 24, N°3 (1980) 452-461.

[21] A. Grothendieck : Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. Am. J. of Math. 79 (1957) 121-138.

[22] A. Grothendieck : Local cohomology. L.N. 41. Springer-Verlag. Heidelberg (1967).

[23] A. Grothendieck : Eléments de Géométrie algébrique : partie III. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. N°11 (1961), N°17 (1963), N°24 (1965).

[24] V.J Haboush : A short proof of the Kempf vanishing theorem. Inv. Math. 56 (1980) 109-112.

[25] V. Haboush : Homogoneous vector bundles and reductive subgroups of reductive groups. Am. J. Math. 100 N°6 (1978) 1123-1137.

[26] R. Hartshorne : Ample subvarietes of algebraic varietes. L.N.156. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New-York (1970).

[27] R. Hartshorne : Algebraic Geometry Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin. Graduate Text in Mathematics n°52 (1977).

[28] G. Hochschild : Basic theory of algebraic groups and Lie algebras. Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin. Graduate Text in Mathematics n°42 (1977).

[29] G. Hochschild : Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1953) 591-603.

[30] G. Hochschild, J.P. Serre : Cohomology of Lie algebras. Ann. of Math. 57 (1953) 591-603.

[31] A. Joseph : On the Demazure character formula. Ann. Ec. Norm. Sup. 4èm série t 18 (1985) 389-419.

[32] V.G. Kac : Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth. Izv. Acad. Navk SSSR 32 (1968) 1923-1967.

[33] V.G. Kac : Infinite dimensional Lie algebras. Progress in Math. 44 Birkhaüser, Basel Boston Stuttgard (1983).

[34] V.G. Kac, D. Peterson : Regular functions on certain infinite dimensional groups. Arithmetic and geometry (editors M.Artin, J.Tate) Progress in Math. 36 (1983) 141-146 Birkhauser, Boston.

[35] G.Kempf : Linear systems on homogenous spaces. Ann. of Math. 103 (1976) 557-591.

[36] G.Kempf, F.Knudsen, D.Mumford, B.Saint-Donat. Toroidal embeddings, L.N.339. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New-York (1973).

[37] J.Kollar : Higher direct image of dualizing sheaves I. Ann. of Math. 74 (1986) 11-42.

[38] B.Kostant : Lie algebra cohomology and the generalised Borel-Weil theorem. Ann. of Math. 74 (1961) 329-387.

[39] S.Kumar : Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting. Inv. Math. 89 (1987) 395-423.

[40] O. Mathieu : Sur la construction de groupes associés aux algèbres de Kac-Moody. C.R.A.S. 299 Série I (1984) 161-164.

[41] O. Mathieu : Formule de Demazure-Weyl et généralisation du théorème de Borel-Weil-Bott. C.R. Acad. Sc. Paris 303 Série I. n° 9 (1986) 391-394.

[42] O. Mathieu : Fibrés en droite sur les variétés de Schubert attachées aux algèbres de Kac-Moody.Proceeding de "Symposium on topological and geometrical methods in field theory" Helsinki (juin 1986).

[43] O.Mathieu : Formules de Weil et de Demazure, et théorème de Borel-Weil-Bott pour les algèbres de Kac-Moody générales I et II (preprint 1986).

[44] O.Mathieu : Une démonstration cohomologique du théorème de Gabber-Kac. 1984. Non publié.

[45] O.Mathieu : Classes canoniques des variétés de Schubert et algèbres affines. C.R. Acad. Sc. Paris L.305 Série I N°4 (1987) 105-108.

[46] H.Matsumara : Commutative algebra. Math. L.N. series 56, 2^{nd} edition. Benjamin. London (1980).

[47] V.B. Metha et A. Ramanathan : Frobenius Splitting and cohomology for Schubert varieties. Ann. of Math. 122 (1985) 27-40

[48] D. Mumford : Geometric invariant theory. Ergebnisse der Mathematik. Sringer-Verlag, Berlin New-York (1982).

[49] D. Peterson et V.G. Kac : Infinite flag varieties and conjugacy theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 80 (1983) 1778-1782.

[50] S. Ramanan et A. Ramanathan : Projective normality of flag varieties and Schubert varieties. Inv. Math. 79 (1985) 217-224.

[51] A. Ramanathan : Equations defining Schubert varieties and Frobenius splitting of diagonals. Preprint.

[52] A.Ramanathan : Schubert varities are Cohen-Macaulay. Inv. Math. 80 (1985) 283-294.

[53] J.E.Roos : Sur les foncteurs dérivés de $\underleftarrow{\text{Lim}}$. Application. C.R. Acad. Sci. Paris CCLII (1961) 3702-3704.

[54] G.Segal : Loop groups. Arbeitstagung Bonn 1984. L.N.IIII (1985) 155-168. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo.

[55] J.P.Serre : Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourrier 6 (1956) 1-42.

[56] C.S. Seshadri : Standart monomial theory and the work of Demazure. Adv Studies in Pure Maths. 1, 1983. Algebraic varieties and Analytic varieties. 355-384.

[57] C.S. Seshadri. Normality of Schubert varieties. Proceeding du colloque de Bombay (1984).

[58] P. Slodowy : On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras. Proceedings de la conférence "Algebraic geometry". Vancouver (juillet 1984). ED. J.B. Cassel, T. Geramita, P. Russel. A paraître.

[59] J. Tits : Algèbres de Kac-Moody et groupes associés. Annuaire du Collège de France (1980-1981) p 75-87 et (1981-1982) p 91-106.

[60] J. Tits : Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées. A paraître au Bull. Soc. Math. Belgique.

[61] J.Tits : A local approach to buildings. The geometric vein, the Coxeter Festschrift, Springer-Verlag (1981) 519-547.

[62] J. Tits : Groups and group functors attached to Kac-Moody data. Arbeitstagung Bonn 1984. Springer Verlag L.N. 1111 (1985) 193-223.

[63] J. Tits : Definition par générateurs et relations de groupes avec B-N paires. C.R.A.S. 293 série I (1981) 317-322.

[64] J.L.Verdier : Equivalence essentielle des systèmes projectifs. C.R.A.S. 261 (1965) 4950-4953.

O.MATHIEU

Université Paris VII
UER de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2 place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05

France

ABSTRACT

In his 1968 paper about the classification of graded simple Lie algebras, Victor Kac introduced a new class of Lie algebras (also simultaneously appeared in a paper of R.Moody). Now called Kac-Moody Lie algebras, these new mathematical objects are infinite dimensional generalizations of semi-simple Lie algebras.

The goal of the paper is to extend some classical results of the theory of semi-simple Lie algebras to Kac-Moody Lie algebras. In particular, we will show the following two theorems:

1) Weyl and Demazure' character formulas,

2) Borel, Weil, Bott and Kempf' theorems.

The key point of proofs is identifying the character formulas with some Euler-Poincaré characteristic dimensions and showing vanishing theorems for the cohomology of semi-ample line bundle over Schubert varieties.We get the results by reducing to finite characteristic and using Frobenius splittings (following an idea due to Metha, Ramanan and Ramanathan).