H. Blaine Jun. Lawson

Sous-variétés associatives et courbes holomorphes dans S^6

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 209-220
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__209_0>

EXPOSÉ n° X

SOUS-VARIÉTÉS ASSOCIATIVES
ET COURBES HOLOMORPHES DANS S^6

H. Blaine LAWSON Jr.

Dans les espaces euclidiens $\mathbb{R}^7$ et $\mathbb{R}^8$, il y a des géométries exceptionnelles, et donc des sous-variétés minimisantes qui apparaissent à cause de la structure algébrique des octaves de Cayley. Il y a aussi une relation entre ces variétés et les surfaces compactes dans S^6 qui sont "holomorphes" (ou "pseudo-holomorphes" d'après Gromov) pour la structure presque complexe, G_2-invariante. On présentera ici une introduction détaillée à ce sujet et aussi une démonstration d'un théorème de Robert Bryant qui affirme que toute surface de Riemann compacte se réalise comme courbe holomorphe dans S^6 .

On commencera avec des rappels sur les géométries calibrées de [2] .

I. SOUS-VARIÉTÉS ASSOCIATIVES.

Soient $\mathbb{O}$ les octaves de Cayley et G_2 le groupe des automorphismes de $\mathbb{O}$. Rappelons-nous que l'algèbre $\mathbb{O}$ peut s'écrire comme $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, où $\mathbb{H}$ désigne le corps des quaternions, avec la multiplication suivante :

$$(1) \qquad (x_1,x_2).(y_1y_2) = (x_1y_1-\bar{y}_2x_2 \ , \ y_2x_1+x_2\bar{y}_1) \quad .$$

Cette multiplication n'est pas associative. Néanmoins, il y a le théorème classique suivant.

THÉORÈME 2. . *Une sous-algèbre* $A \subset \mathbb{O}$ *engendrée par deux éléments est isomorphe à une sous-algèbre de* $\mathbb{H}$. *En particulier*, A *est associative*.

Il y a une conjugaison $x \to \bar{x}$ de l'algèbre $\mathbb{O}$ donnée par $\bar{x} = (\bar{\chi}_1,-\chi_2)$ et on a une décomposition $\chi = \mathcal{R}e(\chi) + \mathcal{I}m(x)$, où $\mathcal{R}e(x) = \frac{1}{2}(\chi+\bar{\chi})$ est la partie réelle et si $\mathcal{I}m(x) = \frac{1}{2}(\chi-\bar{\chi})$ est la partie imaginaire. Le produit intérieur naturel s'écrit

$$< x,y > = \mathcal{R}e(x\bar{y})$$

On trouve facilement que $\|x\|^2 \equiv < x,x > = x\bar{x} = \bar{x}x$ et, grâce à 2 , que

$$(3) \qquad \langle xu, yu \rangle = \langle x, y \rangle = \langle ux, uy \rangle$$

pour tous $x,y,\ u \in \mathbb{O}$ tels que $\|u\| = 1$. On présente maintenant la première définition géométrique.

DÉFINITION 4. – La <u>3-forme associative</u> est la forme sur $\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$ donnée par

$$\Phi(x,y,z) \equiv \langle x.y, z \rangle$$

pour $x,y,z \in \mathbb{O}$.

PROPOSITION 5 . <u>La 3-forme</u> Φ <u>est une forme extérieure qui vérifie l'inégalité</u>

$$(6) \qquad |\Phi(x,y,z)| \leqq \|x \wedge y \wedge z\| \quad \underline{\text{pour tous}}\ x,y,z \in \mathrm{Im}(\mathbb{O}) .$$

Il y a égalité dans (6) si et seulement si les éléments 1,x,y.z engendrent une sous-algèbre quaternonienne de $\mathbb{O}$.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$. D'après (3), on trouve que $\langle xy, z \rangle = \langle -y, xz \rangle = \langle -x, zy \rangle$. Puisque x,y sont purement imaginaires, il est évident que $\Phi(x,x,y) = \Phi(x,y,x) = \Phi(x,y,y) = 0$. Donc, Φ est anti-symétrique. On peut supposer alors que $x \perp y \perp z \perp x$, et on voit que :

$$|\Phi(x,y,z)| = |\langle xy, z \rangle| \leqq \|x.y\| \ \|z\| \leqq \|x\| \ \|y\| \|z\| = \|x \wedge y \wedge z\| ,$$

avec égalité si et seulement si $z = xy$. ■

DÉFINITION 7 . <u>L'associateur</u> sur $\mathbb{O}$ est la 3-forme à valeurs dans $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ défini par

$$(8) \qquad [x,y,z] = x(yz) - (xy)z \quad .$$

THÉORÈME 9 ([2]). Pour tous $x,y,z \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$,

$$\|x \wedge y \wedge z\|^2 = |\Phi(x,y,z)|^2 + \|[x,y,z]\|^2 \quad .$$

DÉFINITION 10 . Un plan orienté de dimension 3 $\xi \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ s'appelle <u>associatif</u> si ξ est la partie imaginaire d'une sous-algèbre quaternionnienne de $\mathbb{O}$ avec l'orientation canonique. Cette orientation canonique est donnée par une base de ξ de la forme $(x,y,x.y)$ quel que soit le choix de vecteurs $x,y \in \xi$ linéairement indépendants.

On vérifie directement que

(11) $\quad (\xi \text{ est associatif}) \Longleftrightarrow (\Phi_{|\xi} = \mathrm{vol}_\xi)$
$\Longleftrightarrow ([\cdot,\cdot,\cdot]_{|\xi} = 0$ et l'orientation de ξ est correcte)

où vol_ξ est la forme-volume canonique de ξ.
Désignons par $\mathbb{GA}$ l'ensemble des 3-plans associatifs dans $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$. Dans [2], on démontre qu'il y a un difféomorphisme équivariant : $\mathbb{GA} \cong G_2/SO_4$.

DÉFINITION 12 . Une sous-variété $M \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ de dimension 3 et de classe C^1 s'appelle <u>associative</u> si $\mathbb{T}_x M \in \mathbb{GA}$ pour tout $x \in M$.

Il suit des équivalences (11) que pour une sous-variété de dimension 3 $M \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ de classe C^1,

(13) $\quad (M \text{ est associative}) \Longleftrightarrow (\Phi_{|M} = \mathrm{vol}_M)$
$\Longleftrightarrow ([\cdot,\cdot,\cdot])_M = 0$ et l'orientation de M est correcte).

PROPOSITON 14 . <u>Une sous-variété associative compacte dans $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ est absolument minimisante, i.e. de volume minimum parmi les sous-variétés de même bord.</u>

<u>Démonstration</u>. Soit M associative compacte et prenons une autre sous-variété orientée compacte $M' \subset \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ de dimension 3 telle que $\partial M = \partial M'$. Puisque $M-M'$ est homologue a zéro, on conclut que

$$\int_M \Phi = \int_{M'} \Phi .$$

Par (6) on sait que

$$\Phi|_\xi \leqslant \mathrm{vol}_\xi$$

pour tout 3-plan orienté ξ, et par (11) on trouve l'égalité si et seulement si ξ est associatif. On conclut que

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \Phi = \int_{M'} \Phi \leqq \mathrm{vol}(M') \blacksquare \quad .$$

Il faut remarquer qu'il y a beaucoup de telles sous-variétés dans $\mathfrak{Im}\,\mathbb{O}$. comme conséquence du Théorème de Cartan-Kähler, on démontre la chose suivante.

THÉOREME 15 ([2]). <u>Soit $\Sigma \hookrightarrow \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ une surface analytique réelle. Alors il existe</u>

<u>une sous-variété associative</u> M (<u>analytique réelle</u>) <u>qui contient</u> Σ .

Puisque cette géométrie associative est tellement riche, il s'impose de chercher à comprendre la structure des sous-variétés qui y apparaissent et, en particulier, la structure de leurs singularités. Cela entraîne la question : Quelle est la forme des cônes de dimension 3 qui sont sous-variétés associatives (hors de l'origine) ? On comprend la structure d'un cône par son intersection avec une sphère autour de l'origine. Alors, on commence à étudier les sous-variétés de S^6 .

II. S^6 ET LES STRUCTURES PRESQUE-COMPLEXES.

C'est un fait intéressant que S^6 puisse être considérée comme une variété ayant une structure presque-complexe et, en même temps, comme une variété de structures presque-complexes. Considérons

$$S^6 \equiv \{u \in \mathfrak{Im}(\mathbb{O}) \; : \; \|u\| = 1\}$$

et, pour $u \in S^6$, définissons la structure presque-complexe

$$J_u : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$$

donné par la multiplication de Cayley

$$J_u(x) \equiv - x.u \; .$$

On vérifie directement de la discussion du I que

i) $$J_u^2 = - 1 \; ,$$

ii) J_u est orthogonal et laisse invariant le plan engendré par $\{1,u\}$,

iii) $$J_u : T_u S^6 \to T_u S^6 \quad ,$$

En conséquence, on tire la proposition suivante:

PROPOSITION 16 . <u>La sphère</u> S^6 , <u>munie de l'endomorphisme</u> J <u>du fibré tangent donné par</u> iii), <u>est une variété presque complexe dont le groupe d'automorphismes est le groupe</u> G_2 .

DÉFINITION 17 . Une surface Σ dans S^6 s'appelle une <u>courbe holomorphe</u> si l'espace tangent $\mathfrak{T}_x\Sigma$ est J_x-invariant pour tout $x \in \Sigma$.

On remarque qu'il n'y a aucune "surface holomorphe" dans S^6 , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sous-variétés de dimension 4 dont tous les espaces tangents soient complexes. C'est un système d'équations aux dérivées partielles sur-déterminé , pour lequel Bryant a démontré dans [1] qu'il n'existe pas de solution. Néanmoins, le Théorème de Cartan-Kahler démontre que localement dans S^6 il existe beaucoup de courbes holomorphes.

Ce qui nous concerne ici est la question de l'existence de courbes holomorphes compactes. La raison principale pour cet intérêt est la connexion suivante avec la géométrie associative.

PROPOSITION 18 . <u>Soit $\Sigma \subset S^6$ une surface orientée de classe C^1 . Alors Σ est une courbe holomorphe dans S^6 si et seulement si le cône</u>

$$C(\Sigma) \equiv \{tu \in \mathfrak{Im}(\mathbb{O}) \ : \ t > 0 \text{ et } u \in \Sigma\}$$

<u>est une sous-variété associative de</u> $\mathfrak{Im}(\mathbb{O})$.

<u>Démonstration</u>. Soient $u \in \Sigma$ et (e_1,e_2) une base orthonormale orientée de $T_u\Sigma$. Alors : $(T_u(C(\Sigma))$ est associatif$) \Longleftrightarrow (u = e_1 e_2) \Leftrightarrow (-e_1 u = e_2) \Longleftrightarrow (J_u(e_1) = e_2)$.■

Comme conséquence de 18, on voudrait savoir s'il existe des courbes holomorphes compactes dans S^6 . La réponse se trouve dans le théorème profond suivant.

THÉORÈME 19 (R. Bryant [1]). <u>Toute surface de Riemann compacte admet une infinité de plongements holomorphes ramifiés dans S^6</u> .

Autrement dit, toute surface de Riemann compacte apparaît comme une courbe holomorphe dans S^6 . On s'immerge maintenant dans la démonstration de ce joli théorème.

III. UNE CONSTRUCTION "TWISTORIELLE" POUR S^6 .

Soit $\mathbb{G}r \equiv \mathrm{Grass}_{\mathbb{R}}(2,\mathfrak{Im}\mathbb{O})$ la grassmannienne des 2-plans orientés dans $\mathfrak{Im}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$? C'est une variété kählérienne homogène de dimension complexe 5. Afin de voir cette structure explicitement, on considère l'algèbre complexifiée $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et son groupe $G_2(\mathbb{C})$ d'automorphismes. Ce groupe laisse invariant le sous-espace $\mathfrak{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C}$ et aussi la quadrique définie par l'équation $Z.Z = 0$. Il y a une identification G_2-équivariante de $\mathbb{G}r$ avec la variété projective

$$(20) \qquad \mathbb{Q}^5 \equiv \{[Z] \in \mathbb{P}(\mathfrak{Im}\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}) \ : \ Z.Z = 0\} .$$

Cette identification associe à une base orthonormale et orientée (X,Y) d'un plan $P \in \mathbb{G}r$, la classe projective du vecteur $Z(P) \equiv X+iY$. Observons que

$$(21) \quad Z(P)^2 = X^2 - Y^2+i(X.Y+Y.X) = \|Y\|^2 - \|X\|^2 - 2i\langle X,Y\rangle = 0$$

puisque $X,Y \in \mathbb{O}$ sont purement imaginaires et orthonormés Il est élémentaire de vérifier que la correspondance $P \to [Z(P)]$ est bien définie et bijective. Elle nous donne les difféomorphismes

$$\mathbb{G}r \cong \mathbb{Q}^5 \cong G_2/U_2 \quad . \tag{22}$$

qui commutent avec les actions naturelles du groupe G_2 .

Il y a une fibration

$$u : \mathbb{G}r \longrightarrow S^6 \tag{23}$$

définie de la façon suivante. Soit $P \in \mathbb{G}r$ et, comme avant, choisissons une base (X,Y) orthonormale et orientée de P . Alors la fibration est définie simplement par multiplication

$$u(P) \equiv X.Y \quad . \tag{24}$$

Si on remplace (X,Y) par $(X\cos\theta + Y\sin\theta\ ,\ - X\sin\theta + Y\cos\theta)$, le produit (24) est toujours $X.Y$; l'application est donc bien définie et, évidemment, G_2-équivariante. Comme fibration d'espaces homogènes, elle s'écrit

$$\mathbb{G}r \cong G_2/U_2 \xrightarrow{u} G_2/SU_3 \cong S^6 \quad . \tag{25}$$

Or observons que chaque plan $P \in \mathbb{G}r$ possède la propriété qu'il est invariant sous l'action de la structure presque-complexe $J_{u(p)}$ définie par son image $u(P)$ dans S^6 (cf.II). Cela nous donne une décomposition orthogonale

$$\mathfrak{Im}\,\mathbb{O} = \mathbb{R}.\,u(p) \oplus P \oplus P^{\perp} \quad ,$$

c'est-à-dire, une décomposition orthogonale et $J_{u(P)}$-invariante

$$T_{u(p)}S^6 \cong P \oplus P^{\perp} \quad . \tag{26}$$

Donc la fibre au-dessus d'un point $u \in S^6$ correspond exactement à l'ensemble

$$\begin{aligned} F_u &\cong \{P \subset T_uS^6 : P \text{ est une droite } J_u\text{-complexe}\} \\ &\cong \mathbb{P}(T_uS^6), \end{aligned}$$

et on établit le résultat suivant :

LEMME 27 . Le fibré $\mathbb{G}r \to S^6$ est le fibré tangent complexe projectifié de (S^6,J).

On suppose que les variétés $\mathbb{G}r$ et S^6 sont munies de leurs métriques symétriques canoniques (qui sont G_2-invariantes). La fibration $u:\mathbb{G}r \to S^6$ est donc une submersion riemannienne. On notera $\mathcal{H}$ le champ de 4-plans horizontaux pour u , c'est-à-dire le champ de plans normaux aux fibres. Par l'identification $du_p : \mathcal{H}_p \xrightarrow{\approx} T_{u(p)}S^6$ et (26), on a la décomposition

$$\mathcal{H}_p \cong P \oplus P^{\perp} \quad . \tag{28}$$

LEMME 29 . Pour la structure kählérienne de $\mathbb{G}r$, les sous-espaces P et $P^{\perp}$ sont linéaires complexes et

$$du_p \text{ est } \begin{cases} \mathbb{C}\text{-linéaire sur } P^{\perp} \\ \mathbb{C}\text{-antilinéaire sur } P \ . \end{cases}$$

On peut démontrer ce lemme d'une façon directe et nous laissons au lecteur la vérification des détails. La partie qui nous servira ici sera établie avec la démonstration de la prochaine proposition.

Rappelons-nous que la variété $\mathbb{G}r$ se présente comme la variété projective

$$\mathbb{G}r = \mathbb{P}(\{Z \in \mathfrak{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C} \ : \ Z.Z = 0\})$$

où $\mathbb{P}(A)$ désigne "la projectivisation de A" . Le groupe de Lie complexe $G_2(\mathbb{C}) \equiv \mathrm{Aut}(\mathbb{O}\otimes\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{G}r$ comme prolongement de l'action du groupe G_2 . Cette action est transitive et holomorphe. Le résultat principal de cette section de l'article est la proposition suivante.

PROPOSITION 30 . Le champ de 2-plans complexes tangents $P^{\perp}$ sur $\mathbb{G}r$ est donné au point $[Z_o] \in \mathbb{G}r$ comme le noyau de la multiplication à droite par Z_o en coordonnées homogènes. En particulier le champ $P^{\perp}$ est $G_2(\mathbb{C})$-invariant et holomorphe.

COROLLAIRE 31 . Soit $\varphi : C \to \mathbb{G}r$ une courbe intégrale holomorphe du champ holomorphe $P^{\perp}$. Alors la projection $u\circ\varphi : C \to S^6$ est une courbe holomorphe dans S^6 .

Démonstration de 30 . Prenons un point $[Z_o] \in \mathbb{G}r$ et notons que Z_o peut s'écrire comme $Z_o = X_o + iY_o$ où $X_o, Y_o \in \mathfrak{Im}\,\mathbb{O}$ sont orthonormées . Posons $u = X_o.Y_o$. Cela nous donne une décomposition orthogonale hermitienne :

$$\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} = W_u \oplus \overline{W}_u$$

où

$$W_u \equiv \{Z : Zu = -iZ\} \quad \text{et} \quad \overline{W}_u \equiv \{Z : Zu = iZ\} \ .$$

Ce sont les sous-espaces propres pour les valeurs propres i et -i pour la structure presque complexe J_u sur $\mathbb{O}$, complexifiée. En fait, cette décomposition peut être utilisée pour définir J_u . Ces sous-espaces se réécrivent

(32) $$W_u = \{X+iXu \ : \ X\in \mathbb{O}\} \quad \text{et } \overline{W}_u = \{X-iX_u \ : \ X \in \mathbb{O}\} \ ;$$

il est alors clair que ce sont des sous-espaces isotropes. (Voir, par exemple que $< X+iXu \ , \ Y+iYu > \ = \ < X,Y > - < Xu,Yu > + \ i(< X,Yu > + < Xu,Y >) \ = 0$.)

La décomposition ci-dessus nous donne une décomposition de la partie imaginaire

$$\mathfrak{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C} \ = \ \mathbb{C}u \oplus V_u \oplus \overline{V}_u$$

où $V_u \equiv W_u \cap (\mathfrak{Im}\mathbb{O} \otimes \mathbb{C})$. En dérivant la condition $Z.Z = 0$, on trouve que le plan tangent à $\mathbb{G}r$ au point Z_o correspond en coordonnées homogènes au sous-espace

$$\{W\in \mathfrak{Im}\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} \ : \ W.Z_o+Z_o.W = 0\} \ = \ \{W \in \mathfrak{Im}\mathbb{O}\otimes \mathbb{C} \ : < W,Z_o > \ = 0\} \ .$$

En passant à l'espace projectif, on trouve que

(33) $$T_{[Z_o]}\mathbb{G}r \cong V_u \oplus (\overline{V}_u/\mathbb{C}\, Z_o) \ .$$

Observons que le sous-espace $\overline{V}_u$ est constitué de tous les vecteurs de la forme $X-i\,Xu$ où $X \in \mathfrak{Im}\mathbb{O}$. En supposant que $\|X\| = 1$, on trouve que l'image de $X-iXu$ par l'application (23)-(24) est $X.(-Xu) = u$. De plus, si $X.Y = u$ alors $Y = -Xu$. On a démontré le résultat suivant.

LEMME 34 . <u>La fibre de la fibration</u> $\mathbb{G}r \to S^6$ <u>au-dessus de</u> $u \in S^6$ <u>est la projectivisation</u> $\mathbb{P}(\overline{V}_u)$. <u>En conséquence, par l'identification</u> (28), <u>le champ horizontal s'identifie avec</u> V_u , <u>i.e.</u>

(35) $$\mathbb{H}_{Z_o} \cong V_u$$

On considère une autre décomposition orthogonale hermitienne

$$\mathbb{O} \otimes \mathbb{C} = K_{z_o} \oplus K_{z_o}^{\perp}$$

où

$$K_{Z_o} \equiv \{Z \in \mathbb{O} \otimes \mathbb{C} \ : \ R_{Z_o}(z) \equiv Z.Z_o = 0\} \ ,$$

c'est-à-dire que K_{Z_o} est le noyau de multiplication à droite par Z_o . On démontre alors facilement que

(36) $$R_{Z_o} \circ J_u = - J_u \circ R_{Z_o}$$

(37) $$R_{Z_o} \circ R_{Z_o} = 0$$

Pour la seconde équation, on observe que $(Z.Z_o)Z_o = Z.(Z_oZ_o)+[Z,Z_o,Z_o] = [Z,Z_o,Z_o]=0$, puisque $[.,.,.]$ est antisymétrique).

Donc, K_{Z_o} et $K_{Z_o}^{\perp}$ sont J_u- invariants et les deux décompositions sont compatibles. On veut examiner les intersections.

Soit $Z \in K_{Z_o} \cap \overline{W}_u$. Alors $Z = X-iXu$ et

$$\begin{aligned} 0 = Z.Z_o &= (X-iX(X_oY_o)).(X_o+iY_o) \\ &= X.X_o+(X(X_oY_o))Y_o + i\{XY_o-(X(X_oY_o))X_o\} \\ &= - [X,X_oY_o,Y_o] + i[X,X_oY_o,Y_o] \ . \end{aligned}$$

Cette équation est équivalente à la condition que X forme avec X_o et Y_o un triple associatif. Cette condition est équivalente à la condition que X appartient au sous-espace engendré par $\{1,X_o,Y_o,X_oY_o\}$. On en déduit que

$$K_{Z_o} \cap \overline{W}_u = \mathbb{C}.\{X_o+iY_o,\ 1-iX_oY_o\} \ .$$

Or, grâce à (3), on sait que $< XU,Y > = - < X,YU >$ pour tous $X,Y,U \in \mathbb{O}$. Le produit intérieur hermitien $(.,.)$ sur $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ est donné par $(Z,W) \equiv < Z,\overline{W} >$ où $<.,.>$ est étendu de façon bilinéaire complexe. On voit que : $(Z.Z_o,W) = < Z.Z_o,\overline{W} > =$ $- < Z,\overline{W}.Z_o > = - < Z,\overline{\overline{Z}_o.W} > = - (Z,\overline{Z}_o.W)$. Donc l'adjoint hermitien de R_{Z_o} est l'application $L_{\overline{Z}_o}$ donnée par $L_{\overline{Z}_o}(Z) = \overline{Z}_o.Z$. On sait que $K_{Z_o} = (\mathrm{Im}\ L_{Z_o})^{\perp}$. On trouve alors que $K_{Z_o} \cap W_u \subset (\mathrm{Im}\ L_{Z_o})^{\perp} \cap W_u \subset \mathbb{C}.\{\overline{Z}_o,1+iu\}^{\perp} \cap W_u$. L'équation (33) implique que $\dim_{\mathbb{C}}(K_{Z_o}) \geqq 4$ et alors que $\dim_{\mathbb{C}}(K_{Z_o} \cap W_u) \geqq 2$. Ceci implique que l'inclusion ci-dessus est en fait une égalité et nous avons démontré que :

$$\begin{cases} K_{Z_o} \cap \overline{W}_u = \mathbb{C}.\{Z_o,1-iu\} \\ K_{Z_o} \cap W_u = \mathbb{C}.\{\overline{Z}_o,1+iu\}^{\perp} \cap W_u \ . \end{cases}$$

Ces équations impliquent facilement que

$$\begin{cases} K_{Z_o} \cap \overline{V}_u = \mathbb{C}\{Z_o\} \\ K_{Z_o} \cap V_u = \overline{Z}_o^{\perp} \cap V_u \ . \end{cases}$$

En utilisant les identifications (33) et (35), on a la décomposition

$$H_{[Z_o]} \cong \mathbb{C}.\overline{Z}_o \oplus (K_{Z_o}/\mathbb{C}Z_o)$$

qui correspond exactement à la décomposition $H \cong P \oplus P^{\perp}$, c'est-à-dire

$$P \cong \mathbb{C}.Z_o \text{ et } P^{\perp} = K_{Z_o}/\mathbb{C}.Z_o \quad .$$

En somme nous avons démontré la Proposition 30. ■

IV. LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BRYANT.

La première étape de la démonstration de théorème 19 est le résultat suivant d'Elie Cartan.

PROPOSITION 38 . Il existe une carte affine sur $\mathbb{G}r$ de la forme

$$\mathbb{G}r - \mathbb{G}r \cap \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^5 = \{(\zeta,W,W_1,W_2,Z)\}$$

telle que l'idéal $\varphi(p^{\perp})$ des formes extérieures qui s'annulent sur $P^{\perp}$ soit engendré par les trois formes extérieures

$$dW-W_1d\zeta \quad , \; dW_1-W_2d\zeta \quad , \; dz-(W_2)^2d\zeta \quad . \tag{39}$$

La démonstration de ce résultat utilise bien la Proposition 30. Les détails se trouvent dans [1].

COROLLAIRE 40 . Les courbes intégrales holomorphes de $P^{\perp}$ sont de la forme

$$\begin{cases} W = f(\zeta), \; W_1 = f'(\zeta) \; , \; W_2 = f''(\zeta) \\ \\ Z = \int [f''(\zeta)]^2 \, d\zeta \end{cases} \tag{41}$$

où $f(\zeta)$ est une fonction holomorphe d'une variable complexe.

On cherche alors les solutions globales de ce système (41).

Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre g , et désignons par $M(\Sigma)$ l'algèbre des fonctions méromorphes sur Σ . Supposons que $f \in M(\Sigma)$ est une fonction avec un seul pôle d'ordre m . Alors les diviseurs s'écrivent

$$D(f) = -\, mp_o + p_1+\ldots+p_m$$
$$D(df) = -\,(m+1)p_o + m_1q_1+\ldots+m_kq_k$$

où $m_j > 0$ pour tout j . On suppose de plus que les points $p_1,\dots,p_m$ sont distincts. Définissons

$$D_o \equiv \sum_{j=1}^{k} m_j q_j$$

et observons que $\deg(D(df)) = 2g - 2 = -(m+1) + \Sigma m_j$, et donc

$$\deg(D_o) = 2g - 1 + m .$$

Pour chaque entier positif N , on peut considérer le système linéaire

$$\mathcal{L}(6D_o - Np_o) \equiv \{g \in \mathcal{M}(\Sigma) : D(g) \geq 6D_o - Np_o\}$$

dont la dimension est

$$\ell_N \equiv \ell(6D_o - Np_o) \equiv \dim_{\mathbb{C}}\{\mathcal{L}(6D_o - Np_o)\} .$$

Une conséquence directe du théorème de Riemann-Roch est la Proposition suivante.

PROPOSITION 42 . Il y a une constante $C(g)$, qui ne dépend que du genre g , telle que

$$\ell_N = N - C(g)$$

pour $N >> g$.

Choisissons une fonction $h \in \mathcal{L}(6D_o - Np_o)$ et observons que

$$\frac{dh}{df} \in \mathcal{L}(D_1 - (N-m)p_o)$$

où $D_1 \equiv \Sigma(5m_j - 1)q_j$. La dérivée seconde $\frac{d^2h}{df^2}$ habite l'espace $\mathcal{L}(D_2 - (N-2m)p_o)$ où $D_2 \equiv \Sigma(4m_j - 2)q_j$. Or la forme méromorphe

$$\omega_h \equiv \left(\frac{d^2h}{df^2}\right)^2 df$$

n'a aucun résidu sur Σ . La seule difficulté qui reste est de trouver un choix de fonction h telle que la forme ω_h n'ait aucune période. Afin d'assurer la possibilité d'un tel choix, on considère les formes quadratiques

$$Q_j(h) \equiv \int_{\gamma_j} \omega_h \quad j = 1,\dots,2g$$

où $(\gamma_1,\dots,\gamma_{2g})$ est une base du groupe d'homologie $H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$. On voudrait savoir que l'espace

$$\mathcal{H}_N \equiv \{h \in \mathcal{L}(6D_o - Np_o) : Q_j(h) = 0 \quad \text{pour } j = 1,\dots,2g\}$$

n'est pas vide. C'est alors une conséquence directe de 42 que la dimension vérifie $\dim \mathcal{H}_N \geqq N - C(g) - 2g$. Si N est suffisamment grand, il y a beaucoup de solutions. Tout élément $h \in \mathcal{H}_N$ nous donne une courbe holomorphe $\Phi : \Sigma \to \mathbb{C}r$ dont la partie affine est

$$\Phi \equiv (f, h, \frac{dh}{df}, \frac{d^2h}{df^2}, \int \omega_h) .$$

Cette courbe est donc une courbe intégrale du champ holomorphe $P^{\perp}$. ■

En utilisant le fait que les zéros de f sont d'ordre 1 , on peut démontrer que génériquement l'application Φ , et aussi sa projection dans S^6 , sont injectives (Voir [1]).

Le choix du nombre 6 dans la définition de l'espace $\mathcal{L}(6D_o - Np_o)$ nous assure que la courbe est singulière sur D_o . On peut donc spécifier le type conforme et en plus on peut trouver un diviseur de ramification d'ordre aussi grand qu'on veut. Par contre, on ne sait pas encore si toute surface de Riemann compacte possède un plongement holomorphe et lisse dans S^6 .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R.L. BRYANT, Submanifolds and special structures on the octonions, J. Differential Geom. 17 (1982), 185-232.

[2] R. HARVEY and H.B. LAWSON, Jr., Calibrated geometries, Acta Math. 148 (1982), 47-157.

H.B. LAWSON Jr.
Department of Mathematics
S.U.N.Y.
Stony Brook N.Y. 11794
(U.S.A.)