

Astérisque

P. GAUDUCHON

La correspondance de Bryant

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 181-208

http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__181_0

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CORRESPONDANCE DE BRYANT

P. GAUDUCHON

Le présent exposé fait suite à l'Exposé VII et se propose de décrire, en termes géométriques, la correspondance de Bryant entre les espaces de twisteurs $\mathbb{D}_3$ et $\mathbb{CP}^3$ des variétés riemanniennes $\mathbb{CP}^2$ et S^4 .

Bien que cette construction soit simple en son principe, elle met en œuvre un certain nombre de constructions et d'identifications préalables que nous avons jugé utile d'exposer, par leur intérêt propre, dans les parties I, II et III.

La construction de la correspondance de Bryant elle-même est décrite dans la partie IV, ainsi que ses conséquences les plus importantes dans le cadre de ce séminaire : l'existence et la construction explicite d'immersions minimales - en fait superminimales - d'une surface de Riemann (compacte) quelconque dans la sphère canonique S^4 , résultats dûs à R. Bryant [1].

Dans la partie V nous retrouvons, à partir de la situation géométrique envisagée, l'expression analytique de la correspondance telle qu'elle figure en substance dans [1] et, sous la forme qui est donnée ici, dans [2] où elle est interprétée en termes de correspondance birationnelle entre l'espace des drapeaux $\mathbb{D}_3$ et l'espace projectif $\mathbb{CP}^3$.

Cette expression analytique est simple et quelque peu mystérieuse.

L'interprétation géométrique que nous proposons permet peut-être d'en éclairer la nature.

En particulier, son caractère quadratique repose essentiellement, dans l'interprétation que nous en donnons, sur la correspondance birationnelle entre le plan projectif $\mathbb{CP}^2$ et l'espace total du carré tensoriel du fibré de Hopf (dual) au-dessus de la droite projective $\mathbb{CP}^1$ qui est à la base de notre construction (cf. partie I).

I. IDENTIFICATION BIRATIONNELLE DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE $\mathbb{CP}^2$ AVEC L'ESPACE TOTAL DU CARRÉ TENSORIEL DU FIBRÉ DE HOPF (DUAL) H_X^2 AU-DESSUS D'UNE DROITE PROJECTIVE X .

Nous rappelons brièvement certaines notations de l'exposé précédent.

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 3, muni d'une structure hermitienne (définie positive).

Nous notons $\mathbb{PE}$ l'espace projectif associé, dont les points sont les droites (= les sous-espaces vectoriels complexes de dimension 1) de E .

Chaque 2-plan (= sous-espace vectoriel complexe de dimension 2) Π de E détermine une droite projective de $\mathbb{PE}$ qui, comme variété complexe, s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}\Pi$ canoniquement plongé dans $\mathbb{PE}$.

Choisissons un "point à l'infini" x_∞ dans $\mathbb{PE}$ et notons X la droite projective duale (= associée au 2-plan $\Pi_\infty = x_\infty^\perp$ orthogonal à la droite x_∞ dans E).

Soit H_X le fibré de Hopf dual au-dessus de X (par commodité, nous modifions légèrement la notation de l'Exposé VIII où le fibré de Hopf dual est noté H^*).

Il est bien connu que l'espace total de H_X s'identifie à $\mathbb{PE} - \{x_\infty\}$.

L'identification n'est pas complètement canonique et dépend du choix d'un élément non-nul e_2 (que l'on peut supposer unitaire) de la droite x_∞ dans E . A tout point λ de H_X au-dessus d'un point x de X (λ est une forme linéaire complexe définie sur la droite x du 2-plan Π_∞ associé à X) nous associons alors la droite de E constituée des éléments $u + \lambda(u)e_2$ lorsque u décrit la droite x (dans E).

Nous obtenons ainsi l'ensemble des droites de E à l'exception de x_∞ .

Si nous choisissons un repère orthonormé (e_0, e_1, e_2) de E tel que $x_\infty = \mathbb{C}.e_2$, $\mathbb{PE}$ s'identifie à $\mathbb{CP}^2$, X à $\mathbb{CP}^1$ et l'identification de H_X avec $\mathbb{PE} - \{x_\infty\}$ s'écrit (en coordonnées homogènes) :

$$(u_0 : u_1 ; \lambda) \in H_X \longrightarrow (u_0 : u_1 : \lambda(u)) \in \mathbb{PE} \simeq \mathbb{CP}^2.$$

Fixons une droite projective Δ de $\mathbb{PE}$ passant par le point à l'infini x_∞ . Nous nous proposons d'identifier $\mathbb{PE} - \Delta$ avec l'espace total du carré tensoriel H_X^2 de H_X privé de sa fibre $H_{x_0}^2$ en x_0 , où x_0 est le point d'intersection des droites projectives X et Δ . Cette identification, comme la précédente, n'est pas entièrement canonique et dépend du choix, outre l'élément e_2 déjà fixé dans la droite x_∞ , d'un élément non-nul e_0 dans la droite $\tilde{x}_0$ duale de x_0 dans X (= orthogonale à x_0 dans le 2-plan Π_∞). Nous choisissons le couple $\{e_0, e_2\}$ orthonormé.

A tout point ζ de H_X^2 au-dessus de x , $x \neq x_0$ (ζ est une forme quadratique complexe définie sur la droite x de E) nous associons alors la droite de E constituée des éléments

$$u_0(u)u + \zeta(u)e_2$$

lorsque u parcourt la droite x , où $u_0(u)$ désigne la composante suivant e_0 de la projection de u sur la droite $\tilde{x}_0$.

Si nous complétons le couple $\{e_0, e_2\}$ en un repère orthonormé $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E (e_1 est donc un élément unitaire de la droite x_0 de E), l'application ainsi déterminée, que nous noterons ρ , de $H_X^2 - H_{x_0}^2$ dans $\mathbb{P}E - \Delta$ s'écrit, en coordonnées homogènes

$$(u_0 : u_1 : \zeta) \xrightarrow{\rho} (u_0^2 : u_0 u_1 : \zeta(u))$$

où $u = u_0 e_0 + u_1 e_1$, $u_0 \neq 0$, est un élément de $\Pi_\infty - x_\infty$, et ζ une forme quadratique sur la droite $x = \mathbb{C}.u$.

L'application ρ constitue une identification de $H_X^2 - H_{x_0}^2$ sur $\mathbb{P}E - \Delta$.

Elle se prolonge visiblement en une application holomorphe, également notée ρ , à la fibre H_X^2 privée de son origine $0_{x_0} = (0:1:0)$.

L'image, par ρ , de $H_{x_0}^2 - 0_{x_0}$ est réduite au seul point $x_\infty = (0:0:1)$ dans $\mathbb{P}E$.

De même l'isomorphisme inverse ρ^{-1} de $\mathbb{P}E - \Delta$ sur $H_X^2 - H_{x_0}^2$ se prolonge à la droite Δ privée de x_∞ , et l'image, par ρ^{-1} de $\Delta - \{x_\infty\}$ se réduit au point 0_{x_0} de $H_{x_0}^2$.

En résumé, nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} H_X^2 - \{0_{x_0}\} & \xrightarrow{\rho} & (\mathbb{P}E - \Delta) \cup x_\infty \\ (H_{x_0}^2 - \{0_{x_0}\}) & \xrightarrow{\quad} & x_\infty \\ \mathbb{P}E - \{x_\infty\} & \xrightarrow{\rho^{-1}} & (H_X^2 - H_{x_0}^2) \cup 0_{x_0} \\ (\Delta - \{x_\infty\}) & \xrightarrow{\quad} & 0_{x_0} \end{array}$$

qui précise les caractéristiques de la correspondance birationnelle que nous avons établie entre H_X^2 et $\mathbb{P}E$ (cf. figure 1). On notera que les fibres de H_X^2 (à l'exception de $H_{x_0}^2$) ont pour image par ρ les droites projectives de $\mathbb{P}E$ passant par x_∞ .

à l'exception de Δ (le point x_∞ étant lui-même exclus de l'image de chacune des fibres autres que $H_{x_0}^2$).

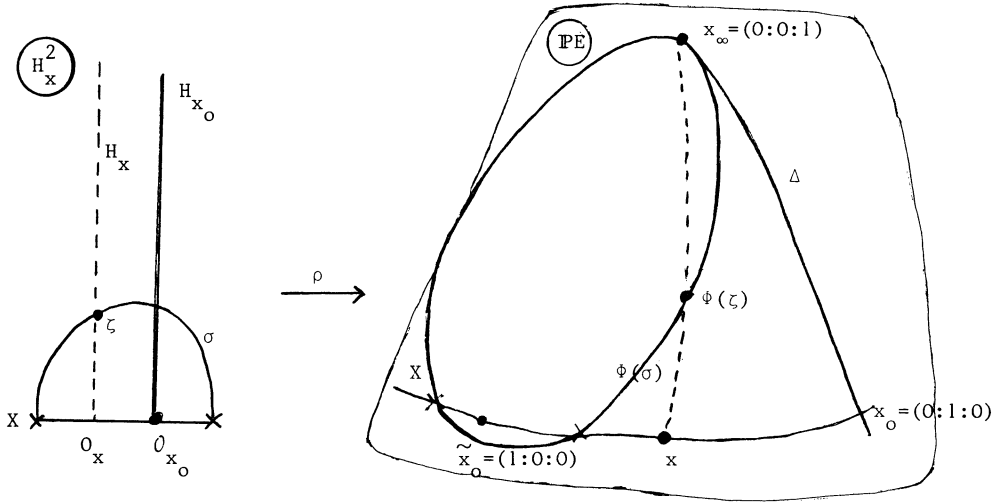


Fig. 1.

LEMME 2.

L'espace des sections holomorphes de H_X^2 au-dessus de X s'identifie à l'espace des formes quadratiques complexes sur le 2-plan $x_\infty = \Pi_\infty$.

Si $\sigma = \{u = u_0 e_0 + u_1 \cdot e_1 \rightarrow Au_0^2 + Bu_0 u_1 + Cu_1^2\}$ est une telle section holomorphe, vue comme une courbe (complexe) de H_X^2 , son image par ρ est la courbe

$$(u_0 : u_1) \rightarrow (u_0^2 : u_0 u_1 : Au_0^2 + Bu_0 u_1 + Cu_1^2)$$

de $\mathbb{P}E$, c'est-à-dire une conique de $\mathbb{P}E$ passant par x_∞ et tangente en x_∞ à la droite projective Δ .

Parmi celles-ci, nous distinguons les coniques dégénérées constituées de la droite projective Δ et d'une droite projective ne passant pas par le point à l'infini x_∞ (quelconque par ailleurs).

Elles correspondent aux sections holomorphes de H_X^2 qui s'annulent en x_0 (= qui passent par le point 0_{x_0}), caractérisées par la condition $C = 0$. Nous établissons ainsi une bijection entre l'espace des sections holomorphes σ de H_X^2 s'annulant en x_0 et l'espace des droites projectives D de $\mathbb{P}E$ ne passant pas par le point à l'infini x_∞ .

En particulier, la section nulle est associée à la droite projective X .

Si σ n'est pas la section nulle, elle s'annule, en dehors de x_0 , en un second point de X qui n'est autre que l'intersection de la droite projective correspondante D de $\mathbb{P}E$ avec X (ce point peut naturellement, coïncider avec x_0 si σ s'annule en x_0 à l'ordre 2 : l'ensemble de ces sections est ainsi en bijection avec l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}E - \Delta$ exceptée - qui passent par x_0).

Quant aux droites projectives de $\mathbb{P}E$ passant par x_∞ , ce sont, comme nous avons vu, à l'exception de Δ , les images par ρ des fibres de H_X^2 aux points où ces droites projectives rencontrent X .

Considérons la variété $\mathbb{D}H_X^2$ des directions tangentes (complexes) à H_X^2 , dont les éléments sont constitués d'un point de H_X^2 et d'une direction tangente (complexe) à H_X^2 en ce point.

En tout point ζ de H_X^2 n'appartenant pas à la fibre $H_{x_0}^2$, toute direction tangente distincte de la direction fibrée (= déterminée par la fibre en H_X^2 passant par ce point) est déterminée par une unique section holomorphe de H_X^2 passant par ce point et s'annulant en x_0 .

Il lui correspond, comme on a vu, un point $\rho(\zeta)$ bien déterminé de $\mathbb{P}E - \Delta$ et une droite projective, elle-même bien déterminée, passant par $\rho(\zeta)$, c'est-à-dire un élément bien déterminé de la variété des drapeaux $\mathbb{D}E$ (identifiée, au moyen de la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ de E à la variété $\mathbb{D}_3$ considérée dans l'exposé précédent). Nous obtenons ainsi une correspondance birationnelle entre $\mathbb{D}H_X^2$ et $\mathbb{D}E$.

De façon précise, si nous considérons les deux courbes (complexes) $\ell_1^{x_\infty}$ et ℓ_2^Δ de $\mathbb{D}E$ définies respectivement par

$$\ell_1^{x_\infty} = \{(x_\infty, \xi) \in \mathbb{D}E \mid x_\infty \in \xi\},$$

$$\ell_2^\Delta = \{(x, \Delta) \in \mathbb{D}E \mid x \in \Delta\},$$

nous obtenons une application holomorphe P de $\tilde{\mathbb{D}E} = \mathbb{D}E - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}$ dans $\mathbb{D}H_X^2$.

Cette application est injective en dehors de la surface (complexe) S_1 de $\mathbb{D}E$ définie par

$$S_1 = \{(x, \xi) \in \mathbb{D}E \mid x \in \Delta\}$$

dont l'image de l'intersection avec $\tilde{\mathbf{DE}}$ est constituée des directions tangentes à H_X^2 au point O_{x_0} , la direction fibrée exceptée (que nous noterons $\tilde{O}_{x_0}$). Les fibres

dans S_1 sont les courbes (complexes) de $\mathbf{DE}$ constituées des drapeaux (x, ξ) où x est un point fixé de $\Delta - \{x_\infty\}$ et ξ une droite projective quelconque, distincte de Δ , passant par x .

L'image par P de $\tilde{\mathbf{DE}}$ est constituée de l'ensemble des directions tangentes aux points de H_X^2 hors de la fibre $H_{x_0}^2$.

L'inverse P^{-1} se prolonge pour sa part à $\mathbf{DH}_X^2$ privée de la courbe (complexe) C_{x_0} constituée des directions tangentes en O_{x_0} .

La surface complexe S_{x_0} de $\mathbf{DH}_X^2$ constituée des directions tangentes aux points de la fibre $H_{x_0}^2$, privée de la courbe C_{x_0} , se projette toute entière sur le drapeau (x_∞, Δ) de $\mathbf{DE}$.

Nous aurons aussi à considérer, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, la surface complexe S_2 de $\mathbf{DE}$ définie par

$$S_2 = \{(x, \xi) \in \mathbf{DE} \mid x_\infty \in \xi\}.$$

dont l'intersection avec $\tilde{\mathbf{DE}}$ est l'image, par P^{-1} , de l'ensemble des directions fibrées de $\mathbf{DH}_X^2$ en les points hors de $H_{x_0}^2$.

Nous pouvons résumer les caractéristiques essentielles de la correspondance birationnelle P établie entre $\mathbf{DE}$ et $\mathbf{DH}_X^2$ par le tableau suivant

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{DE} - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\} & \xrightarrow{P} & (\mathbf{DH}_X^2 - S_{x_0}) \cup (C_{x_0} - \{\tilde{O}_{x_0}\}) \\ (S_1 - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}) & \xrightarrow{\quad} & C_{x_0} - \{\tilde{O}_{x_0}\} \\ \mathbf{DH}_X^2 - C_{x_0} & \xrightarrow{P^{-1}} & (\mathbf{DE} - S_1) \cup \{(x_\infty, \Delta)\} \\ (S_{x_0} - C_{x_0}) & \xrightarrow{\quad} & (x_\infty, \Delta) \end{array}$$

où P et P^{-1} sont holomorphes, injectives en dehors des surfaces complexes S_1 et S_{x_0} respectivement (on observera que l'image de S_1 par P est une courbe complexe tandis que l'image de S_{x_0} par P^{-1} est un point).

6. L'espace des drapeaux $\mathbf{DE}$ est fibré holomorphiquement au-dessus de $\mathbb{PE}$ et de l'espace dual $(\mathbb{PE})^*$

$$\begin{array}{ccc} & \text{DE} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \text{PE} & & (\text{PE})^* \end{array}$$

avec $p_1((x, \xi)) = x$ et $p_2((x, \xi)) = \xi$.

Les fibres de p_1 et de p_2 sont des courbes (complexes) horizontales (= orthogonales aux fibres de la projection twistorielle de DE sur PE , cf. Exposé VIII) de DE .

Nous les nommerons respectivement droites horizontales de première espèce et de seconde espèce. En notation générique :

$$\ell_1^x = p_1^{-1}(x) \quad \ell_2^\xi = p_2^{-1}(\xi).$$

L'image, par P , d'une droite horizontale de première espèce ℓ_1^x non contenue dans la surface $S_1(x \notin \Delta)$ est la courbe (complexe) de DH_X^2 constituée des directions tangentes au point $\rho^{-1}(x)$.

Si ℓ_1^x est contenue dans $S_1(x \in \Delta, x \neq x_\infty)$ son image par P est réduite à un point de DH_X^2 (une direction tangente en 0_{x_0}).

Une droite horizontale de seconde espèce ℓ_2^ξ est formée de l'ensemble des drapeaux (x, ξ) où x parcourt la droite projective ξ . Si ξ ne passe pas par x_∞ , il lui correspond une section holomorphe σ de H_X^2 , nulle en x_0 , bien déterminée et l'image, par P , de ℓ_2^ξ est la courbe de DH_X^2 engendrée par σ (dont les points sont constitués des points de σ et des directions tangentes déterminées en chacun de ces points par σ).

Si ξ ($\xi \neq \Delta$) passe par x_∞ c'est-à-dire si ℓ_2^ξ est contenue dans la surface S_2 , son image par P est la courbe de DH_X^2 engendrée par la fibre correspondante de H_X^2 .

II. LA GÉOMÉTRIE DES DROITES HORIZONTALES (OU LAGRANGIENNES) DE $\mathbb{CP}^3$.

Rappel des notations de l'Exposé VIII (48) et (49). Dans ce qui suit, V désigne un espace vectoriel complexe de dimension 4 muni d'une structure symplectique hermitienne déterminée par la donnée conjointe

- d'un produit scalaire hermitien (défini positif) $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- d'une structure symplectique complexe, i.e. une 2-forme $\mathbb{C}$ -bilinéaire alternée de rang 4, notée $(\cdot, \cdot)$,
- d'une structure quaternionnienne, i.e. un opérateur j $\mathbb{C}$ -antilinéaire, de carré -1 , les trois éléments de la structure étant liés par la relation

$$\langle u, v \rangle = (u, v j) \quad , \quad \forall u, v \in V.$$

L'action de j confère à V une structure d'espace vectoriel quaternionnien de dimension 2 notée $V^{\mathbb{H}}$.

L'action de $\mathbb{H}$, en particulier celle de j , sur V sera notée à droite.

Les droites quaternioniennes de $V^{\mathbb{H}}$ sont les 2-plans j -invariants de V .

Les droites projectives correspondantes de l'espace projectif (complexe) $\mathbb{P}V$ sont les droites verticales (ou réelles) de $\mathbb{P}V$.

Ce sont les fibres de l'application twistorielle π de $\mathbb{P}V$ sur $\mathbb{P}V^{\mathbb{H}} \simeq \mathbb{S}^4$ qui, à tout point x de $\mathbb{P}V$ associe l'unique droite verticale de $\mathbb{P}V$ passant par x (déterminée par x et l'image xj de x par j - cf. Exposé VIII, II).

La fibre en x , c'est à dire la droite projective de $\mathbb{P}V$ associée à la droite quaternionnienne $\pi(x)$, sera notée R_x .

Un 2-plan Π de V est dit lagrangien si la restriction de la forme symplectique $(.,.)$ à ce 2-plan est nulle (= Π est isotrope)

Les droites horizontales de $\mathbb{P}V$ sont les droites projective de $\mathbb{P}V$ associées aux 2-plans lagrangiens de V .

Un 2-plan Π passant par la droite x de V est lagrangien si et seulement si Π est orthogonal (pour le produit hermitien $\langle ., . \rangle$) à la droite xj .

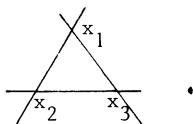
Les directions tangentes déterminées par les droites horizontales de $\mathbb{P}V$ passant par x sont donc exactement les directions horizontales au sens twistoriel, c'est-à-dire les directions orthogonales aux fibres de la projection twistorielle de $\mathbb{P}V$ sur S^4 .

La réunion des droites horizontales de $\mathbb{P}V$ passant par x constitue un plan projectif de $\mathbb{P}V$, que nous notons $\mathcal{H}_x$, associé au 3-plan de V orthogonal à xj :

$$\mathcal{H}_x = \mathbb{P}(xj)^\perp.$$

Les plans projectifs $\mathcal{H}_x$ de $\mathbb{P}V$ sont dits horizontaux, ce qui ne veut pas dire que toutes les droites projectives de $\mathbb{P}V$ contenues dans $\mathcal{H}_x$ soient horizontales. Seules sont horizontales les droites projectives de $\mathcal{H}_x$ passant par x .

En effet, il n'existe pas de triangle non-dégénéré constitué de trois droites horizontales



Si tel était le cas, le 3-plan de V engendré par les droites x_1 , x_2 et x_3 serait isotrope relativement à la structure symplectique $(.,.)$, ce qui est impossible puisque V est de dimension 4 (dans le langage usuel de la géométrie symplectique

réelle ou complexe, les espaces lagrangiens sont les sous-espaces isotropes de dimension maximale, égale à la moitié de la dimension de l'espace, ici 2).

Ce fait constitue la base de la géométrie des droites horizontales et peut s'exprimer sous la forme du

LEMME PRINCIPAL 4. Pour toute droite horizontale D et tout point x de PV hors de D, il existe une et une seule droite horizontale passant par x et rencontrant D (le point d'intersection sera appelé projection horizontale de x sur D).

La preuve du Lemme principal est immédiate : la droite horizontale D ne passant pas par x n'est pas contenue dans le plan horizontal $\mathcal{H}_x$ et le coupe, par conséquent, en un point unique (distinct de x).

Le plan horizontal $\mathcal{H}_x$ peut être caractérisé d'une autre manière.

Observons, tout d'abord, que $\mathcal{H}_x$ contient une droite verticale unique : la droite quaternionnienne de V^H orthogonale au sens quaternionnien (= relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et à $(\cdot, \cdot)$) à la droite quaternionnienne (x, x_j) .

Cette droite verticale est donc la fibre, pour la projection twistorielle π du point antipodal, dans la sphère S^4 , au point $\pi(x)$.

Nous l'appellerons fibre antipodale de x , notée $\tilde{R}_x$.

Ainsi, les droites horizontales passant par x sont exactement les droites projectives passant par x qui rencontrent la fibre antipodale de x $\tilde{R}_y$.

L'intersection $\tilde{x}$ de la droite horizontale X issue de x avec $\tilde{R}_x^X$ est le point à l'infini de X relativement à x (cf. Fig.5).

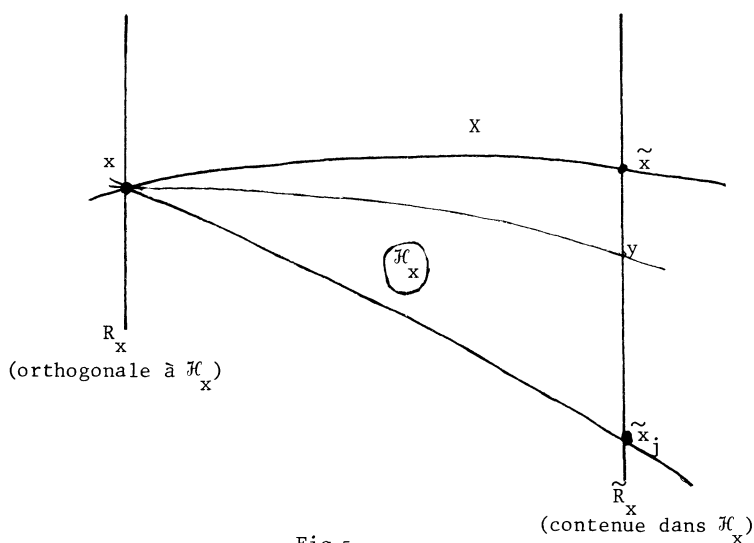


Fig.5

LEMME 6.

L'ensemble des droites horizontales de $\mathbb{P}V$ constitue une variété complexe (de dimension 3) $\mathcal{H}$ qui est une hypersurface (complexe) de la variété G des droites projectives de $\mathbb{P}V$ (= la grassmannienne des 2-plans de V).

La variété G est la quadrique de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ déterminée par l'équation

$$\phi \wedge \phi = 0, \quad \phi \in \Lambda^2 V.$$

Soit L la restriction à G du fibré de Hopf de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

La forme symplectique $(.,.)$ induit une section holomorphe ω du dual L^* qui associe à $\phi = u \wedge v$ le nombre $\omega(\phi) = (u, v)$.

La variété $\mathcal{H}$ des droites horizontales s'identifie alors au zéro de la section ω . Fixons une droite horizontale X dans $\mathcal{H}$ et un repère orthonormé (au sens hermitien) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ du 2-plan correspondant Π de V . Comme Π est isotrope, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est aussi un $\mathbb{H}$ -repère orthonormé (au sens quaternionnien) de $V^{\mathbb{H}}$, de sorte que $\mathcal{H}$ s'identifie à l'espace homogène $Sp(2)/U(2)$, où $Sp(2)$ est le groupe symplectique unitaire d'ordre 2 et $U(2)$ le groupe unitaire d'ordre 2 canoniquement plongé dans $Sp(2)$.

Remarque. Le groupe Sp_2 agit $\mathbb{C}$ -linéairement sur l'espace vectoriel complexe $\Lambda^2 V$.

Cette action préserve le produit extérieur $\phi \wedge \psi$, considérée comme une forme quadratique complexe sur $\Lambda^2 V$ au-moyen de la forme-volume $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 j \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 j$ (où $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une base quaternionnienne-orthonormée quelconque de $V^{\mathbb{H}}$).

Elle préserve aussi la structure réelle induite sur $\Lambda^2 V$ par j (dont l'action sur $\Lambda^2 V$ est $\mathbb{C}$ -antilinéaire et de carré $+1$).

Elle préserve enfin l'élément $\Omega = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 j + \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 j$ qui n'est autre que la forme symplectique complexe $(.,.)$, considérée comme un élément de $\Lambda^2 V$ via l'identification $V \simeq V^*$ qu'elle induit elle-même.

On vérifie aisément que la forme quadratique $\phi \wedge \psi$, restreinte à l'espace $(\Lambda^2 V)^{\mathbb{R}}$ des éléments j -réels de $\Lambda^2 V$ est de signature $(1,5)$ et de signature $(0,5)$ lorsqu'on la restreint au sous-espace $\Omega^\perp$ orthogonal à Ω (lui-même j -réel) dans $(\Lambda^2 V)^{\mathbb{R}}$.

Nous réalisons ainsi Sp_2 comme un revêtement (à deux feuillets) de $SO_5 \simeq SO_{0,5} \subset SO_{1,5}$ identifiant ainsi Sp_2 au groupe spinoriel $Spin_5$.

Le sous-groupe $Sp_1 \times Sp_1$ préserve, en outre, l'élément $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 j - \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 j$ (qui appartient à $\Omega^\perp$ et qui, contrairement à Ω , dépend de la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ choisie) et se trouve ainsi réalisé dans le même temps comme revêtement (à deux feuillets) de $SO_{0,4} \simeq SO_4$, c'est à dire comme le groupe $Spin_4$.

Nous identifions ainsi la droite projective quaternionnienne canonique

$\mathbb{H}P^1 \simeq \frac{Sp_2}{Sp_1 \times Sp_1}$ à la sphère canonique $S^4 \simeq \frac{SO_5}{SO_4} = \frac{Spin_5}{Spin_4}$. Cette identification est une identification d'espaces riemanniens symétriques. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$, avec sa structure canonique d'espace homogène kählérien, est, lui-même, identifié à $\frac{Sp_2}{U_1 \times Sp_1}$ et la projection twistorielle de $\mathbb{C}P^3$ sur S^4 n'est autre que la fibration du type Hopf $\frac{Sp_2}{U_1 \times Sp_1} \rightarrow \frac{Sp_2}{Sp_1 \times Sp_1}$ (cf. Exposé n° VIII, (46)).

LEMME 7.

Pour toute droite projective D de $\mathbb{P}V$, l'espace tangent (complexe) $T_D G$ à G en D s'identifie canoniquement à l'espace $Hom_{\mathbb{C}}(\Pi, \Pi^\perp)$ des homomorphismes $\mathbb{C}$ -linéaires du 2-plan Π associé à D dans son orthogonal (hermitien) $\Pi^\perp$.

La correspondance peut être décrite de la manière suivante : chaque élément A de $Hom_{\mathbb{C}}(\Pi, \Pi^\perp)$ peut être considéré comme le graphe d'un 2-plan de V et le vecteur tangent associé est déterminé par la courbe (holomorphe) qui, au paramètre τ , associe le 2-plan de graphe τA .

Si D est horizontale, c'est à dire si Π est lagrangien, il en va de même de $\Pi^\perp$ qui n'est autre que $\Pi^\perp$, canoniquement $\mathbb{C}$ -isomorphe au dual (complexe) Π^* de Π (à tout élément u_j de $\Pi^\perp$, $u \in \Pi$, nous associons la forme linéaire

$$v \rightarrow (v, u_j) = \langle v, u \rangle$$

de Π).

Nous obtenons ainsi l'identification

$$T_D G = \Pi^k \otimes \Pi^*, \quad D \in \mathcal{H} \subset G.$$

Le 2-plan de graphe A est lui-même lagrangien si et seulement si

$$(Au, v) = (u, Av) \quad , \quad \forall \quad u, v \in \Pi.$$

Il en résulte l'identification naturelle

$$T_D \mathcal{H} = \Pi^* \circ \Pi^*, \quad D \in \mathcal{H}$$

où $\circ$ note le produit tensoriel symétrisé. En d'autres termes, $T_D \mathcal{H}$ s'identifie naturellement à l'espace des formes quadratiques complexes sur le 2-plan Π .

Une telle forme quadratique est déterminée, à une constante près, par son "cône de lumière", c'est-à-dire les deux droites de Π (= les 2 points de D) - éventuellement confondues - où elle s'annule.

Ainsi l'ensemble des directions tangentes en D à la variété $\mathcal{H}$ des droites horizontales

s'identifie naturellement à l'ensemble des couples de points de D .

Etant donné un tel couple $\{x_1, x_2\}$, la direction tangente associée est déterminée comme suit.

Si $x_1 = x_2 = x$, c'est la direction tangente déterminée par $\mathcal{H}_x$ considéré comme une courbe complexe de $\mathcal{H}$, la courbe des droites horizontales passant par x .

Si $x_1 \neq x_2$, considérons deux droites horizontales D_1 et D_2 distinctes de D passant par x_1 en x_2 respectivement (quelconques par ailleurs).

Par tout point de D_1 passe une droite horizontale unique rencontrant D_2 (Lemme principal 4).

La courbe (complexe) ainsi construite détermine la direction tangente cherchée (cf. Fig.7) (les courbes complexes que nous considérons sont non paramétrées et déterminent des directions tangentes et non des vecteurs).

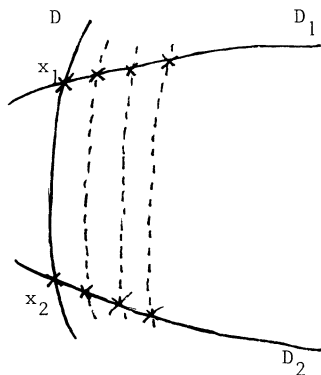


Fig. 7

III. CORRESPONDANCE BIRATIONNELLE ENTRE $\mathbb{CP}^3$ ET $\mathbb{DH}_X^2$.

La variété F^X .

Fixons à nouveau X dans $\mathcal{H}$ et un repère orthonormé $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ du 2-plan lagrangien Π_0 correspondant à X (cf. Lemme 6).

Nous considérons la sous-variété F^X de $\mathcal{H}$ constituée des droites horizontales de $\mathbb{P}V$ qui rencontrent X , à l'exception de X elle-même. Cette variété F^X possède une projection naturelle p sur $X = \mathbb{P} \Pi_0$ qui, à tout élément D de F^X , associe son (unique) point d'intersection avec X .

La fibre $F_x^X = p^{-1}(x)$ n'est autre que le plan horizontal $\mathcal{H}_x$ considéré, comme nous l'avons fait en 7, comme une courbe complexe (contenue dans F^X) de $\mathcal{H}$.

Nous avons vu (supra 4 et seg.) que la fibre F_x^X s'identifie naturellement à la droite verticale $\tilde{R}_x$ (fibre antipodale de x) privée du point à l'infini $\tilde{x}$ (= droite orthogonale à x dans le 2-plan π) qui correspond à la droite horizontale X elle-même : à tout point y de $\tilde{R}_x - \{\tilde{x}\}$ correspond la droite projective (horizontale)

déterminée par les points (distincts) x et y . A son tour, $\tilde{R}_x - \{\tilde{x}\}$ s'identifie naturellement (via le graphe) à l'espace vectoriel (unidimensionnel) $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\tilde{x}_j, \tilde{x})$ des homomorphismes $\mathbb{C}$ -linéaires de $\tilde{x}_j$ dans $\tilde{x}$.

Ainsi F^X apparaît-elle comme l'espace total d'un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 au-dessus de $X = \mathbb{P}\Pi_0$, de fibre $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\tilde{x}_j, \tilde{x})$.

Le dual(complexe) $(\tilde{x}_j)^*$ de $\tilde{x}_j$ s'identifie naturellement à la droite $\tilde{x}$ via la structure symplectique : pour tout u dans $\tilde{x}_j$ et tout v dans $\tilde{x}$ nous posons :

$$v(u) = (v, u) = - \langle v, u_j \rangle .$$

Nous identifions enfin la droite $\tilde{x}$ au dual x^* de x au moyen de la base orthonormée $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de M_0 en posant

$$u(v) = \langle u \wedge v, \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \rangle , \quad \forall u \in \tilde{x} , \\ \forall v \in x .$$

Nous pouvons considérer cette identification comme la composée de deux isomorphismes $\mathbb{C}$ -antilinéaires : celle de x^* sur x (via la métrique hermitienne) et l'application $\sim$ de x sur $\tilde{x}$ définie par

$$u \in x \xrightarrow{\sim} \tilde{u} = u \lrcorner (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) \in \tilde{x}$$

où $\lrcorner$ note la contraction hermitienne $(u \lrcorner (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)) = \varepsilon_2 \langle \varepsilon_1, u \rangle - \varepsilon_1 \langle \varepsilon_2, u \rangle$.

L'homomorphisme $\mathbb{C}$ -antilinéaire $\sim$ ne dépend que du produit extérieur $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$, c'est-à-dire du choix d'un représentant unitaire ϕ dans $\Lambda^2 V$ de X considéré comme élément de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Si ϕ est remplacé par $e^{i\theta} \phi$ (i.e. si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est remplacée par $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ telle que $\varepsilon'_1 \wedge \varepsilon'_2 = e^{i\theta} \cdot \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$), $\tilde{u}$ doit être remplacé par $e^{i\theta} \cdot \tilde{u}$ pour tout u dans x .

Au terme des identifications proposées nous identifions naturellement la fibre F^X_x à l'espace vectoriel $x^* \otimes x^*$ des formes quadratiques (complexes) définies sur la droite x .

Nous avons ainsi établi la

PROPOSITION 8. La variété F^X , considérée comme un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 au-dessus de la droite projective $X = \mathbb{P}\Pi_0$ s'identifie, modulo le choix d'un représentant unitaire ϕ de X dans $\Lambda^2 V$, au carré tensoriel H^2_X du fibré de Hopf dual de X .

L'identification s'établit comme suit : à toute forme quadratique ζ définie sur la droite x du 2-plan Π_0 nous associons la droite horizontale de PV passant

par x et coupant $\tilde{R}_x$ au point y_ζ , i.e. la droite de V constituée des éléments

$$\tilde{u}_j + \tilde{u} \cdot \frac{\zeta(u)}{\langle u, u \rangle}, \quad u \in x.$$

En particulier, l'origine de la fibre F_x^X , correspondant à $\zeta = 0$, est la droite horizontale déterminée par les points x et $\tilde{x}_j$.

Remarque 9. Si ϕ est remplacé par $e^{i\theta} \cdot \phi$, $\tilde{u}$ est remplacé par $\tilde{u} \cdot e^{i\theta}$ et le point y_ζ de $\tilde{R}_x$ associé à la forme quadratique ζ est remplacée par $y_{e^{2i\theta}\zeta}$.

L'identification $F_x^X \simeq H_X^2$ dépend donc effectivement du choix de ϕ au-dessus de X dans Λ_V^2 .

Toutefois, l'"origine" $(x, \tilde{x}_j)$ de F_x^X est la même pour tous les choix de ϕ , ainsi que la structure d'espace vectoriel complexe de F_x^X , $\forall x \in X$.

Remarque 10. La droite horizontale X apparaît comme le point à l'infini commun à toutes les fibres.

La variété obtenue en ajoutant X à F^X est singulière en X .

Nous pouvons la désingulariser en faisant "éclater" le point à l'infini X de manière que les points à l'infini de chaque fibre soient considérés comme distincts.

La surface complexe ainsi obtenue est comme sous le nom de deuxième surface de Hirzebruch.

Soit D un élément de la fibre $F_x^X \subset F^X$.

L'espace tangent (complexe) $T_D F^X$ à F^X en D est un sous-espace de $T_D \mathcal{H} \simeq \Pi^* \Omega \Pi^*$, où Π note (et notera par la suite) le 2-plan (lagrangien) de V associé à D (cf. Lemme 7).

Comme les éléments de F^X sont assujétis à rencontrer X , $T_D F^X$ est constitué des formes quadratiques de Π qui s'annulent sur la droite $x (= \Pi \cap \Pi)$.

Le "cône de lumière" (cf. lemme 7) correspondant à un vecteur A de $T_D F^X$ est donc constitué du point x , qui est fixe, et d'un point variable z de D (qui peut coïncider avec x).

Nous obtenons ainsi une bijection naturelle entre les points de D (dans $\mathbb{P}V$) et les directions tangentes à F^X en D (cf. lemme 7).

En particulier, au point x correspond la direction fibrée.

Si, au contraire, z est distinct de x , la direction tangente correspondante est obtenue en traçant par z une droite horizontale Σ ne rencontrant pas X , quelconque par ailleurs (cf. 7). Considérant, pour chaque point y de X , l'unique droite horizontale joignant y à Σ (cf. Lemme principal 3), nous obtenons une section (holomorphe) de F^X , égale à D en x , déterminant en D la direction

tangente fixée par z .

Nous identifions désormais toute droite horizontale Σ ne rencontrant pas X avec la section holomorphe de F^X qu'elle détermine.

Toutes les droites horizontales passant par z (et distinctes de D) déterminent la même direction tangente à F^X en D . Parmi celles-ci il en est une, unique, Σ_0 qui s'annule en un point fixé x_0 (distinct de x) de X : celle qui rencontre l'"origine" de F^X en x_0 , c'est-à-dire la droite horizontale $(x_0, \tilde{x}_0^j)$ que nous noterons Y .

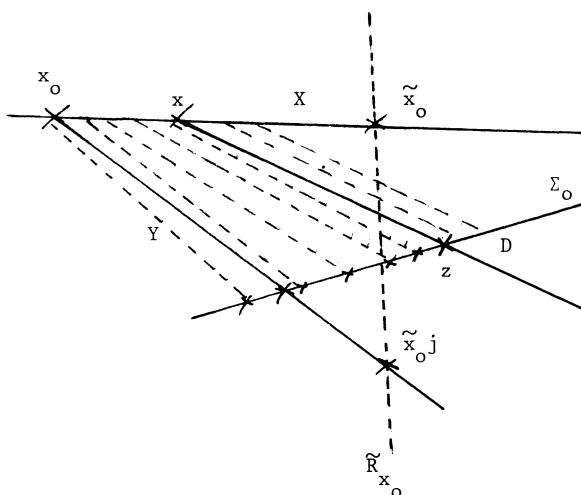


Fig.11

Nous retrouvons le fait, établi en 2, que les directions tangentes en un point de H_X^2 (identifié à F^X) hors de la fibre en x_0 , correspondent bijectivement aux sections holomorphes passant par ce point et nulles en x_0 .

Nous en tirons aussi, comme corollaire, que les droites horizontales Σ ne rencontrant pas X constituent la totalité des sections holomorphes de F^X .

La section nulle est la droite horizontale Xj (et non pas X qui correspondrait, après "éclatement" de X , à la section infinie, cf. Remarque 10).

Nous récapitulons les points essentiels de ce qui précède sous la forme suivante :

- chaque droite horizontale D de $\mathbb{P}V$ rencontrant X et distincte de X correspond bijectivement à un point du fibré H_X^2 ,
- chaque point z de D correspond à une direction tangente (complexe) à $F^X \simeq H_X^2$ en D (le point $x = D \cap X$ correspond à la direction fibrée),
- les droites horizontales passant par z et distinctes de D correspondent bijectivement aux sections holomorphes de $F^X \simeq H_X^2$ passant par D et induisant en D la direction tangente déterminée par z .

Si x est distinct du point-origine x_0 de X , l'unique section holomorphe de $F^X \simeq H_X^2$ nulle en x_0 , passant par D et induisant en D la direction tangente déterminée par z est la droite horizontale Σ_0 joignant z à $Y \simeq 0_{x_0}$ (cf. Fig. 11).

Soit z un point de $\mathbb{P}V$ n'appartenant pas à X .

D'après le Lemme principal 4, passe par z une droite horizontale unique D appartenant à F^X et le point z détermine une direction tangente (complexe) en D à F^X .

Nous obtenons ainsi une application holomorphe Q de $\mathbb{P}V-X$ dans la variété $\mathbb{D}F^X$ des directions tangentes à F^X .

Si z appartient à X , nous lui associons non pas un point de $\mathbb{D}F^X$ mais la courbe complexe constituée des directions fibrées en les éléments de la fibre F_z^X .

Inversement, nous obtenons une application holomorphe Q^{-1} de $\mathbb{D}F^X$ dans $\mathbb{P}V$ définie comme suit : à tout couple (D, z) de $\mathbb{D}F^X$, $D \in F^X$, $z \in D$, nous associons le point z .

Cette application Q^{-1} est partout définie et bijective en dehors de la surface complexe S de $\mathbb{D}F^X$ constituée des directions fibrées de F^X définie par

$$S = \{(D, z) \in \mathbb{D}F^X \mid z \in X\}.$$

L'image de S par Q^{-1} est la droite horizontale X . La fibre en un point x de X est l' "image" de x par Q c'est-à-dire l'ensemble des directions fibrées des points de la fibre F_x^X .

Nous obtenons ainsi une correspondance birationnelle Q entre l'espace projectif $\mathbb{P}V$ et la variété $\mathbb{D}F^X$.

Puisque F^X est identifiée à H_X^2 nous en déduisons une correspondance birationnelle que nous continuons de noter Q (et Q^{-1}), entre $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{D}H_X^2$, décrite par le tableau

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}V - X & \xrightarrow{Q} & \mathbb{D}H_X^2 - S \\ \mathbb{D}H_X^2 & \xrightarrow{Q^{-1}} & \mathbb{P}V \\ & (S \longrightarrow X) & \end{array}$$

où Q et Q^{-1} sont des applications holomorphes, Q est bijective, Q^{-1} est bijective en dehors de la surface complexe S des directions tangentes fibrées (identifiée à S) qui se projette sur X .

On observera que la correspondance birationnelle entre $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{D}F^X$ est complètement intrinsèque (= ne dépend que de la structure symplectique unitaire de V). La correspondance birationnelle entre $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{D}H_X^2$ dépend, en outre, de l'identification choisie de F^X et H_X^2 , c'est à dire du choix d'un représentant (unitaire) ϕ du $\mathbb{Z}$ -plan Π_0 (associé à X) dans $\Lambda^2 V$. On notera enfin que le point origine x_0 de X ne joue aucun rôle dans la détermination de Q et Q^{-1} .

IV. LA CORRESPONDANCE DE BRYANT.

En combinant les correspondances birationnelles entre $\mathbb{D}E$ et $\mathbb{D}H_X^2$ d'une part, $\mathbb{P}V$ et $\mathbb{D}H_X^2$ d'autre part, nous obtenons la correspondance (birationnelle) de Bryant entre $\mathbb{D}E$ et $\mathbb{P}V$, c'est-à-dire entre les espaces des twisteurs projectifs de $\mathbb{P}E$ ($=\mathbb{C}P^2$) et $\mathbb{P}V^H$ ($=S^4$).

Cette correspondance est aisément décrite en combinant les tableaux (3) et (12). Nous posons

$$R = Q^{-1} \circ P$$

définie (= holomorphe) de $\mathbb{D}E - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}$ dans $\mathbb{P}V$.

Cette application R est injective en dehors des surfaces complexes S_1 et S_2 introduite en I.

L'image, par R , de $S_1 - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}$ est la droite horizontale Y (= l'origine de F^X en x_0) privée du point x_0 .

De même, l'image, par R , de $S_2 - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}$ est la droite horizontale X privée du point x_0 . De façon précise, chaque droite horizontale de première espèce ℓ_1^x contenue dans $S_1 - \ell_1^{x_\infty}$ ($x \in \Delta, x \neq x_\infty$) se projette sur un point, distinct de x_0 , de Y et, de même chaque droite horizontale de second espèce ℓ_2^ξ contenue dans

$S_2 - \ell_2^\Delta$ ($x_\infty \in \xi, \xi \neq \Delta$) se projette sur un point, distinct de x_0 , de X .

L'image, par R , de $\mathbb{D}E - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}$ est constituée de $\mathbb{P}V$ privé du plan horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$ à l'exception des droites horizontales X et Y , elles-mêmes privées du point

x_0 .

Nous posons de même

$$R^{-1} = P^{-1} \circ Q,$$

définie sur $\mathbb{P}V - \{XUY\}$, à valeurs dans $\mathbb{D}E$.

Elle est injective en dehors du plan horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$ (privé de X et Y) dont l'image dans $\mathbb{D}E$ est constitué de l'unique drapeau (x_∞, Δ) .

L'image, par R^{-1} , de $\mathbb{P}V - \{XUY\}$ est constituée de $\mathbb{D}E - \{S_1 \cup S_2\}$ augmentée du point (x_∞, Δ) .

Nous obtenons ainsi le tableau suivant

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{DE} - \{\ell_1^x \cup \ell_2^\Delta\} & \xrightarrow{R} & (\mathbb{PV} - \mathcal{H}_{x_0}) \cup (X \cup Y - \{x_0\}) \\ \left(\begin{array}{ccc} S_1 - \{\ell_1^x \cup \ell_2^\Delta\} & \xrightarrow{\quad} & Y - \{x_0\} \\ S_2 - \{\ell_1^x \cup \ell_2^\Delta\} & \xrightarrow{\quad} & X - \{x_0\} \end{array} \right) & & \\ \mathbb{PV} - \{X \cup Y\} & \xrightarrow{R^{-1}} & (\mathbb{DE} - \{S_1 \cup S_2\}) \cup \{(x_\infty, \Delta)\} \\ (\mathcal{H}_{x_0} - (X \cup Y)) & \xrightarrow{\quad} & (x_\infty, \Delta) \end{array}$$

qui met en évidence, comme les tableaux (3) et (12), les domaines de définitions et les images des applications R et R^{-1} ainsi que leurs domaines de non-injectivité.

PROPOSITION 14. La correspondance de Bryant préserve les distributions horizontales de l'espace des drapeaux $\mathbb{DE}$ et de l'espace projectif $\mathbb{PV}$ déterminées par la projection twistorielle sur $\mathbb{PE}$ et S^4 respectivement.

Démonstration. En chaque point (x, ξ) de l'espace des drapeaux $\mathbb{DE}$, l'espace tangent horizontal $H_{(x, \xi)} \mathbb{DE}$ est engendré par les deux directions horizontales déterminées par les droites horizontales ℓ_1^x et ℓ_2^ξ , de première et seconde espèce respectivement, de $\mathbb{DE}$.

Il résulte clairement de la construction de R que l'image d'une droite horizontale de première espèce ℓ_1^x est une droite horizontale de $\mathbb{PV}$ appartenant à F^X si x n'appartient pas à Δ et se réduit à un point dans le cas contraire.

De même, l'image d'une droite horizontale de seconde espèce ℓ_2^ξ est une droite horizontale de $\mathbb{PV}$ (ne rencontrant pas X , mais rencontrant Y) si ξ ne passe pas par x_∞ et se réduit à un point dans le cas contraire.

Les droites horizontales de $\mathbb{PV}$ sont des courbes horizontales au sens twistoriel et les directions qu'elles déterminent engendrent l'espace horizontal $H_z \mathbb{PV}$ en tout point z de $\mathbb{PV}$.

Leurs images par R^{-1} sont des droites horizontales de première espèce (ou des points) si elles rencontrent X , des droites horizontales de seconde espèce (ou des points) si elles rencontrent Y .

Si z n'appartient pas à $\mathcal{H}_{x_0}$, les directions déterminées par ces seules droites horizontales (celles qui rencontrent X de Y) engendrent à elles-seules l'espace tangent horizontal $H_z \mathbb{PV}$. En général, si Σ est une droite horizontale de $\mathbb{PV}$ ne

rencontrant ni X , ni Y , son image par R^{-1} est la courbe holomorphe de $\mathbb{DE}$ canoniquement engendrée par une courbe holomorphe de $\mathbb{PE}$ (la conique - non dégénérée - tangente en x_∞ à Δ associée à Σ , considérée comme section holomorphe - ne s'annulant pas en x_0 - de $F^X \simeq H_X^2$, cf. Fig.1). Cette courbe est horizontale (au sens twistoriel) dans $\mathbb{DE}$. $\square$

De la Proposition nous déduisons immédiatement le

COROLLAIRE 15. Les courbes holomorphes horizontales de $\mathbb{PV}$ sont exactement les images, par l'application R , des courbes holomorphes horizontales de $\mathbb{DE}$.

Remarque. Bien que R et R^{-1} ne soient pas partout définies sur $\mathbb{DE}$ et sur $\mathbb{PV}$ leur restriction à une courbe holomorphe de $\mathbb{DE}$ ou de $\mathbb{PV}$ peut être étendu à la courbe toute entière.

Par ailleurs, il est toujours possible, une courbe holomorphe C étant donnée dans $\mathbb{DE}$, de trouver x_∞ et Δ dans $\mathbb{PE}$ de telle manière que C évite $\ell_1^{x_\infty}$ et ℓ_2^Δ : il suffit que x_∞ n'appartienne pas à la projection $p_1(C)$ dans $\mathbb{PE}$ et que Δ n'appartienne pas à la projection $p_2(C)$ dans $(\mathbb{PE})^*$.

Mais la restriction à C de R peut n'être, en général, ni injective, ni une immersion (ce point sera précisé plus loin).

L'intérêt du corollaire précédent s'appuie sur les deux faits suivants, démontrés dans l'Exposé VIII et que nous rappelons brièvement :

a) les courbes holomorphes horizontales de $\mathbb{PV}$ sont en correspondance bijective (via la projection twistorielle) avec les applications superminimales d'une surface de Riemann M dans la sphère S^4 .

En particulier, les applications harmoniques de la sphère S^2 dans la sphère S^4 sont en correspondance bijective avec les courbes holomorphes horizontales de genre zéro de $\mathbb{PV}$ (on vérifie aisément que les droites horizontales de $\mathbb{PV}$ correspondent aux sphères équatoriales - de dimension 2 - de S^4).

b) Les courbes (holomorphes) horizontales de $\mathbb{DE}$ sont

- les droites horizontales de première espèce,
- les courbes engendrées dans $\mathbb{DE}$ par les courbes holomorphes de $\mathbb{PE}$ (nous rappelons que si $f : M \rightarrow \mathbb{PE}$ est une courbe holomorphe de $\mathbb{PE}$, où M est une surface de Riemann, la courbe engendrée $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{DE}$ est déterminée par $\tilde{f}(p) = (f(p), \text{la droite projective tangente en } f(p) \text{ à la courbe } f)$ est partout définie, même aux points singuliers où la dérivée f' s'annule).

Ainsi, toutes les applications superminimales ϕ d'une surface de Riemann M dans S^4 s'obtiennent de la façon suivante (en dehors de certaines sphères équatoriales):

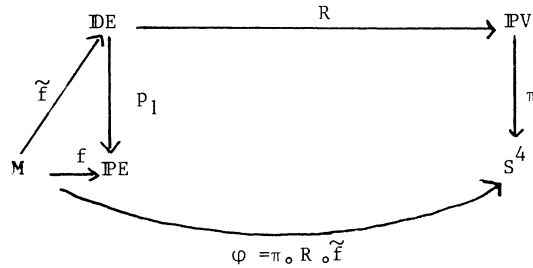


Fig. 16

- considérer une application holomorphe quelconque f de M dans le plan projectif $\mathbb{P}E$,
- son relèvement canonique $\tilde{f}$ dans l'espace des drapeaux $\mathbb{D}E$,
- son image dans l'espace projectif $\mathbb{P}V$ au-moyen de la correspondance de Bryant,
- la projection (twistorielle) dans S^4 .

En particulier, toutes les applications harmoniques de S^2 dans S^4 sont fabriquées de cette façon.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant et son corollaire, dûs à R. Bryant, qui constituent les résultats principaux de [1].

THÉORÈME 17 Toute surface de Riemann compacte admet un plongement holomorphe horizontal dans l'espace projectif $\mathbb{P}V$.

COROLLAIRE 18 Toute surface de Riemann compacte admet une immersion minimale - en fait superminimale - génériquement injective (= injective en dehors d'un nombre fini de points) dans la sphère S^4 .

Le corollaire se déduit immédiatement du Théorème compte-tenu des faits rappelés au paragraphe précédent.

Démonstration du Théorème. Il suffit de montrer l'existence, pour toute surface de Riemann compacte (de genre g) M , d'une application holomorphe f de M dans le plan projectif $\mathbb{P}E$, telle que :

- a) le relèvement canonique $\tilde{f}$ dans $\mathbb{D}E$ est un plongement,

b) la restriction de R à la courbe $\tilde{C} = \tilde{F}(M)$ est un isomorphisme.

Le point a) est satisfait dès lors que f n'admet que des points doubles ordinaires ce qui est toujours possible.

En ce qui concerne b) nous avons vu qu'il est toujours possible de choisir, dans $\mathbb{P}E$, le drapeau (x_∞, Δ) qui détermine la correspondance de Bryant de telle sorte que $\tilde{C} = \tilde{F}(M)$ évite les droites horizontales $\ell_1^{x_\infty}$ et ℓ_2^Δ sur lesquelles R n'est pas définie. Mais il n'est pas possible pour $\tilde{C}$ d'éviter les surfaces S_1 et S_2 où R n'est pas injective.

La condition b) sera satisfaite si et seulement si $\tilde{C}$ n'est pas tangente à S_1 et S_2 (faute de quoi $R|_{\tilde{C}}$ ne serait pas régulière au point de contact) et ne rencontre pas deux fois une même droite horizontale de première espèce dans S_1 ou une même droite horizontale de seconde espèce dans S_2 .

Traduites en termes de la courbe $C = f(M)$, ces conditions deviennent :

- C n'est pas tangente à Δ ($\Leftrightarrow \tilde{C}$ non-tangente à S_1)
- les tangentes en les points d'inflexion de C ne passent pas par x_∞ ($\Leftrightarrow \tilde{C}$ non-tangente à S_2) .
- les points doubles de C n'appartiennent pas à Δ ($\Leftrightarrow \tilde{C}$ ne coupe pas deux fois une droite horizontale de première espèce dans S_1)
- les bitangentes à C ne passant pas par x_∞ ($\Leftrightarrow C$ ne coupe pas deux fois une droite horizontale de seconde espèce dans S_2) .

Il est clair que ces conditions sont aisément satisfaites pour un choix judicieux du drapeau (x_∞, Δ) . $\square$

Remarque. La courbe horizontale Γ de $\mathbb{P}V$ image de $\tilde{C}$ par la correspondance de Bryant coupe le plan horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$ en des points qui se répartissent sur les droites projectives X et Y , l'intersection $x_0 = X \cap Y$ étant exclue.

Les points d'intersection de Γ avec X correspondent aux points d'intersection de $\tilde{C}$ avec S_2 , donc de C avec Δ : ils sont au nombre de d , si d est le degré de C . Les points d'intersection de $\tilde{C}$ avec Y correspondent aux points d'intersection de $\tilde{C}$ avec S_1 , donc au nombre de tangentes à C issues de x_∞ : ils sont au nombre de d^* si d^* est la classe de C (= le degré de la courbe duale C^* dans $(\mathbb{P}E)^*$).

Nous en déduisons que le degré δ de la courbe horizontale Γ est égal à la somme $d + d^*$ des degrés et classe de la courbe plane C associée.

V. EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA CORRESPONDANCE DE BRYANT.

Nous considérons le repère orthonormé $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ du 2-plan lagrangien Π_0 de V associé à la droite horizontale X de $\mathbb{P}V$.

Le point-origine x_0 de X est la droite $\mathbb{C}.\varepsilon_1$ et le point à l'infini $\tilde{x}_0$ la droite $\mathbb{C}.\varepsilon_2$.

Le 4-uple $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1^j, \varepsilon_2, \varepsilon_2^j\}$ constitue une $\mathbb{C}$ -base de V au moyen de laquelle V est identifié à $\mathbb{C}^4$ et $\mathbb{P}V$ à $\mathbb{CP}^3$.

L'espace E , de son côté, est repéré par la base orthonormée $\{e_0, e_1, e_2\}$ considérée en I qui identifie E à $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{P}E$ à $\mathbb{CP}^2$ ainsi que le dual $(\mathbb{P}E)^*$ via la base duale $\{e_0^*, e_1^*, e_2^*\}$ de E^* .

Pour cette identification, les éléments x_∞, X, x_0, Δ introduits dans la partie I (cf. Fig.1) s'écrivent

$$\begin{aligned} x_\infty &= (0:0:1) \in \mathbb{P}E, \\ X &= (0:0:1) \in (\mathbb{P}E)^*, \\ x_0 &= (0:1:0) \in \mathbb{P}E, \\ \Delta &= (1:0:0) \in (\mathbb{P}E)^*. \end{aligned} \quad (19)$$

Chaque droite projective D de $\mathbb{P}V$ est représentée par un élément ϕ de $\Lambda^2 V$

$$(20) \quad \phi = d_0 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1^j + d_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2^j + d_3 \varepsilon_1^j \wedge \varepsilon_2 + d_4 \varepsilon_1^j \wedge \varepsilon_2^j + d_5 \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2^j$$

de carré nul, i.e.

$$(21) \quad d_0 d_5 - d_1 d_4 + d_2 d_3 = 0.$$

Le 6-uple $(d_0:d_1:\dots:d_5)$ vérifiant (21) constitue les coordonnées plückériennes de la droite projective D .

D est horizontale si et seulement si

$$(22) \quad \omega(\phi) = d_0 + d_5 = 0. \quad (\text{cf. 6}).$$

Les droites projectives X et Y (= origine de F^X) de $\mathbb{P}V$ sont représentées par les 2-vecteurs $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ et $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2^j$ respectivement

$$\begin{aligned} X &= (0:1:0:0:0:0) \\ Y &= (0:0:1:0:0:0). \end{aligned} \quad (23)$$

La droite projective X est identifiée à la droite projective $\mathbb{CP}^1$ plongée dans $\mathbb{CP}^3$ par

$$(24) \quad (u_0 : u_1) \xrightarrow{X} (u_1 : 0 : u_0 : 0) \in \mathbb{CP}^3 (\simeq \mathbb{PV}) .$$

La même droite projective est identifiée à $\mathbb{CP}^1$ plongée dans $\mathbb{CP}^2$ par

$$(25) \quad (u_0 : u_1) \xrightarrow{X} (u_0 : u_1 : 0) \in \mathbb{CP}^2 (\simeq \mathbb{PE}) .$$

Les droites horizontales de $\mathbb{PV}$ issues d'un point x de X sont représentées par les 2-vecteurs de la forme

$$(26) \quad \phi_\zeta = \zeta(u) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + u \wedge \tilde{u}$$

où u est un élément de x (dans V), $\tilde{u}$ l'élément correspondant dans la droite $\tilde{x}$ (cf. III) et ζ une forme quadratique (complexe) sur la droite x , c'est-à-dire un élément de H_X^2 .

Ceci fournit l'expression analytique de l'identification $H_X^2 \simeq F^X$ de la partie III

$$(27) \quad \zeta \in H_X^2 \rightarrow D_\zeta = [\phi_\zeta] \in F^X .$$

En coordonnées plückériennes la droite horizontale D_ζ s'écrit

$$(28) \quad D_\zeta = (-u_0 u_1 : \zeta(u) : u_1^2 : u_0^2 : 0 : u_0 u_1), \quad u = u_0 \varepsilon_1 + u_1 \varepsilon_2 .$$

Au même point $\zeta (\zeta \neq 0_{x_0})$ de H_X^2 correspond par ailleurs, par la correspondance birationnelle ρ entre H_X^2 et $\mathbb{PE}$ (cf. I), le point

$$(29) \quad \rho(\zeta) = (u_0^2 : u_0 u_1 : \zeta(u))$$

de $\mathbb{PE}$.

Deux droites projectives de $\mathbb{PV}$ représentées par les 2-vecteurs ϕ et ψ se rencontrent si et seulement si

$$(30) \quad \phi \wedge \psi = 0 .$$

En particulier, une droite projective de $\mathbb{PV}$ rencontre X (resp. Y) si et seulement si sa coordonnée plückérienne d_4 (resp. d_3) est nulle. Considérons une droite horizontale Σ de $\mathbb{PV}$, de coordonnées plückériennes $(\sigma_0 : \dots : \sigma_5)$, ne rencontrant pas X ($\sigma_4 \neq 0$).

Il lui correspond la section holomorphe de F^X qui, à tout point x de X , associe l'unique droite horizontale D_ζ de F^X passant par x et rencontrant Σ (cf. III).

De (28) et (30) nous tirons aisément que la forme quadratique ζ correspondante (définie sur le 2-plan Π_0) s'écrit

$$(31) \quad \zeta(u) = \frac{1}{\sigma_4} [\sigma_2 u_0^2 + (\sigma_0 - \sigma_5) u_0 u_1 + \sigma_3 u_1^2] .$$

avec $\sigma_0 - \sigma_5 = 2\sigma_0 = -2\sigma_5$ puisque Σ est horizontale.

Soit $z = (\alpha:\beta:\gamma:\delta)$ un point de $\mathbb{P}V$ n'appartenant pas à X (β ou $\delta \neq 0$) .

La projection horizontale de z sur X est le point

$$(32) \quad (\delta:0:-\beta:0) .$$

La droite horizontale D_z passant par x et z a donc par coordonnées plückériennes

$$(33) \quad D_z = (\beta\delta:\alpha\beta+\gamma\delta:\delta^2:\beta^2:0:-\beta\delta) .$$

Si nous confrontons cette expression avec (22), avec $(u_0:u_1) = (\delta:-\beta)$ à cause de (32) et (24), nous voyons que le point x de $\mathbb{P}E$ correspondant à $D_z \in F^X$, après identification de F^X et H_X^2 (donnée par (27) et (28)) et la correspondance birationnelle ρ (donnée par (29)), s'écrit

$$(34) \quad D_z \longrightarrow x = (\beta^2:-\beta\delta:\alpha\beta+\gamma\delta) \in \mathbb{P}E .$$

Ceci nous donne la composante $p_1 \circ R^{-1}$ de la correspondance de Bryant (inverse) de $\mathbb{P}V$ dans l'espace des drapeaux $\mathbb{D}_3 \subset \mathbb{P}E \times (\mathbb{P}E)^*$.

Pour déterminer l'autre composante $p_2 \circ R^{-1}$, il nous faut supposer que z n'appartient pas au plan horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$ ($\beta \neq 0$) et déterminer la droite horizontale Σ_0 passant par z et rencontrant Y (cf. III).

La projection horizontale de z sur y est égale à

$$(35) \quad (\gamma:0:0:\beta) .$$

Les coordonnées plückériennes de Σ_0 sont donc

$$(36) \quad \Sigma_0 = (\beta\gamma:\gamma^2:\gamma\delta-\alpha\beta:0:-\beta^2:-\beta\gamma) .$$

La section holomorphe correspondante de $F^X \simeq H_X^2$ s'écrit donc, compte tenu de (31)

$$(37) \quad \zeta_{\Sigma_0}^0(u) = \frac{1}{\beta^2} [(\alpha\beta-\gamma\delta)u_0^2 - 2\beta\gamma u_0 u_1] .$$

Cette section s'annule en x_0 ($u_0 = 0$) par construction.

Il lui correspond, par ρ , une droite projective de $\mathbb{P}E$, qui, par (10), est la droite ξ constituée par les points

$$(38) \quad (u_0 : u_1 : \zeta^{\Sigma_0}(u)) = (u_0 : u_1 : \frac{1}{2}(\alpha\beta - \gamma\delta)u_0 - 2\beta\gamma u_1)$$

de $\mathbb{P}E$.

En coordonnées homogènes (dans $(\mathbb{P}E)^*$), ξ s'écrit

$$(39) \quad \xi = (\alpha\beta - \gamma\delta : -2\beta\gamma : -\beta^2).$$

Le couple (34)-(39) constitue l'expression analytique de la correspondance de Bryant (inverse) R^{-1} .

Nous voyons que le couple $(x; \xi) \in \mathbb{D}_3 \subset \mathbb{P}E \times (\mathbb{D}E)^*$ associé à $z \in \mathbb{P}V$ par R^{-1} est bien défini même pour $\beta = 0$ ($z \in \mathcal{H}_{x_0}$), pourvu que γ et δ soient différents de zéro ($z \notin XU Y$).

Si $(x_0 : x_1 : x_2)$ et $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$ notent les coordonnées homogènes de x et ξ dans $\mathbb{P}^2$ et $(\mathbb{P}^2)^*$ respectivement, de telle sorte que

$$(40) \quad x_0 \xi_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0$$

l'application R^{-1} possède l'expression analytique suivante

$$(41) \quad \begin{array}{ccc} (\alpha : \beta : \gamma : \delta) & \xrightarrow{R^{-1}} & \begin{array}{ll} x_0 = \beta^2 & \xi_0 = \alpha\beta - \gamma\delta \\ x_1 = -\beta\delta & \xi_1 = -2\beta\gamma \\ x_2 = \alpha\beta + \gamma\delta & \xi_2 = -\beta^2 \end{array} \\ \beta \neq 0 \text{ ou} & & \\ \beta = 0 \text{ et } \gamma\delta \neq 0 & & \end{array}$$

7. L'expression analytique de l'application R définie sur $\mathbb{D}E - \{\ell_1^{x_\infty} \cup \ell_2^\Delta\}$ s'en déduit aisément

$$(42) \quad \begin{array}{ccc} (x_0 : x_1 : x_2 : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2) & \xrightarrow{R} & \begin{array}{l} \alpha = x_2 \xi_2 - x_0 \xi_0 \\ \beta = 2 x_0 \xi_2 \\ \gamma = x_0 \xi_1 \\ \delta = -2 x_1 \xi_2 \end{array} \\ x_0 \xi_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0 & & \\ \left\{ \begin{array}{l} (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0 : 0 : 1) \\ \text{et} \\ (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) \neq (1 : 0 : 0) \end{array} \right. & & \end{array}$$

Il est facile de vérifier directement, à l'aide des expressions analytiques des 1-formes ϕ en ψ qui déterminent les distributions horizontales de $\mathbb{CP}^3$ et $\mathbb{D}_3$ (formules (54) et (66) de l'Exposé VII D), que les applications R et R^{-1} définies par (42) et (41) préservent ces distributions.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Robert L. BRYANT, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, J. Differential Geom. 17 (1982), 455-473.
- [2] H. Blaine LAWSON, Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, in Séminaire Bourbaki 1983/84 n°624 Astérisque .

NOTE ADDITIONNELLE.

Après lecture de ce texte, François LABOURIE a proposé la description suivante de la correspondance de Bryant (dans le sens R^{-1} , de l'espace projectif $\mathbb{PV}$ dans l'espace des drapeaux $\mathbb{DE}$), fondée sur une identification birationnelle directe des variétés F^X et $\mathbb{PE}$ qui sous-entend, sans l'expliciter, la double identification birationnelle de ces variétés avec l'espace total H_X^2 du fibré de Hopf (dual) au-dessus de X décrite en I et III, et un traitement symétrique des droites horizontales de référence X et Y dans $\mathbb{PV}$ (les notations et termes utilisés sont ceux du texte).

A tout point z de $\mathbb{PV}$ n'appartenant pas au plan horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$ est associé (cf.II) un couple unique de droites horizontales D_z et D'_z passant par z et rencontrant respectivement X et Y en x et y .

Il existe une unique droite horizontale Σ passant par le point $\tilde{x}_0$ et rencontrant D_z . Inversement, D_z est déterminée par le point x (sur X) et cette droite Σ qui est elle-même déterminée par son intersection ξ avec la droite verticale R_{x_0} (que Σ rencontre puisqu'elle passe par $\tilde{x}_0$, cf.II).

De même, la droite horizontale D'_z est déterminée par le point y et par l'unique droite horizontale Σ' passant par $\tilde{x}_0$ et rencontrant D'_z , qui est elle-même déterminée par son intersection ξ' avec la droite verticale R_{x_0} .

Considérons d'autre part, dans le plan projectif $\mathbb{PE}$, les points x_0 , $\tilde{x}_0$ et x_∞ de la figure 1, et les droites projectives X , Δ et $\tilde{\Delta}$ déterminées respectivement par les couples $(x_0, \tilde{x}_0)$, (x_∞, x_0) et $(x_\infty, \tilde{x}_0)$ (i.e. Δ et $\tilde{\Delta}$ représentent les fibres en x_0 et $\tilde{x}_0$ du fibré H_X^2 dans l'identification birationnelle $\mathbb{PE} \simeq H_X^2$).

Nous associons alors à la droite D_z un point d_z de $\mathbb{PE}$ de la façon suivante.

Nous identifions (holomorphiquement) les droites projectives X et R_{x_0} de $\mathbb{P}V$ aux droites projectives X et $\tilde{\Delta}$ de $\mathbb{P}E$, de telle sorte que les couples $(x_0, \tilde{x}_0)$ et $(x_0, x_0 j)$ de X et R_{x_0} (dans $\mathbb{P}V$) soient identifiés aux couples $(x_0, \tilde{x}_0)$ et $(x_\infty, \tilde{x}_0)$ de X et $\tilde{\Delta}$ (dans $\mathbb{P}E$).

Les points x et ξ qui déterminent D_z sont alors identifiés respectivement à des points, encore notés x et ξ , de X et $\tilde{\Delta}$ (dans $\mathbb{P}E$).

Le point d_z de $\mathbb{P}E$ que nous associons à D_z est l'intersection des droites projectives de $\mathbb{P}E$ déterminées par les couples (x_0, ξ) et (x_∞, x) .

On notera que x et ξ sont respectivement distincts de x_0 et x_∞ puisque z est pris hors de plan horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$.

Nous procédons de même avec D'_z après avoir identifié les droites Y et R_{x_0} de $\mathbb{P}V$ aux droites Δ et $\tilde{\Delta}$ de $\mathbb{P}E$ de telle sorte que les couples $(x_0, \tilde{x}_0 j)$ et $(x_0, x_0 j)$ de Y et R_{x_0} (dans $\mathbb{P}V$) soient identifiés aux couples (x_0, x_∞) et $(\tilde{x}_0, x_\infty)$ de Δ et $\tilde{\Delta}$ (dans $\mathbb{P}E$).

On note que l'identification de R_{x_0} avec $\tilde{\Delta}$ est différente de la précédente, ce qui est imposé par le fait que nous nous sommes bornés à échanger X et Y .

Les points y et ξ' , qui déterminent la droite D'_z , sont alors identifiés à des points, encore notés y et ξ' , de Δ et $\tilde{\Delta}$ respectivement.

Le point d'_z associé à la droite D'_z est l'intersection des droites (x_0, ξ') et (x_∞, y) .

On vérifie aisément par le calcul (en s'aidant d'un repère orthonormé de E et d'un repère orthonormé symplectique de V , et des formules de V ou en interprétant les constructions proposées à l'aide de la double identification

$F^X \simeq H_X^2 \simeq \mathbb{P}E$ (cf. plus bas)) que les points d_z et d'_z sont conjugués par rapport à une conique C de $\mathbb{P}E$ pour laquelle le triangle $(x_0, \tilde{x}_0, x_\infty)$ est auto-conjugué (la conique C dépend par ailleurs des identifications faites). La polaire de d'_z relative à C est une droite ℓ_z de $\mathbb{P}E$ passant par d'_z .

Le drapeau (d'_z, ℓ_z) est l'image dans $\mathbb{D}E$ de z par l'application de Bryant inverse R^{-1} (cf. plus bas).

Une variante de cette construction consiste à briser la symétrie de X et Y et à construire directement la droite ℓ_z associée à D'_z de la façon suivante.

On identifie, comme précédemment, les droites Y et R_{x_0} de $\mathbb{P}V$ aux droites Δ et $\tilde{\Delta}$ de $\mathbb{P}E$ de manière, cette fois, que les couples $(x_0, \tilde{x}_0 j)$ et $(x_0, x_0 j)$ de Y et R_{x_0} (dans $\mathbb{P}V$) soient identifiés aux couples (x_∞, x_0) et $(x_\infty, \tilde{x}_0)$ de Δ et $\tilde{\Delta}$ (dans

PE). Cette fois, l'identification de R_{x_0} avec $\tilde{\Delta}$ est la même que celle qui a été faite à propos de D_z . Elle se déduit de la précédente au moyen de la conjugaison par rapport à la conique C. Les points y et ξ' de Y et R_{x_0} (dans $\mathbb{P}V$) s'identifient alors avec les points y_1 et ξ'_1 de Δ et $\tilde{\Delta}$ (dans $\mathbb{P}E$) qui sont les conjugués des points y et ξ' de la construction précédente, relativement à C, sur les droites Δ et $\tilde{\Delta}$ respectivement.

La droite ℓ_z est donc la droite (y_1, ξ'_z) .

Cette variante s'interprète aisément au moyen des identifications birationnelles $F^X \simeq H_X^2 \simeq \mathbb{P}E$.

La droite D_z , vue comme un point de $H_X^2 \simeq F^X$, est l'intersection de la fibre en x de H_X^2 , alias la droite (x_∞, x) de $\mathbb{P}E$, et la droite (x_0, ξ) qui n'est autre, dans l'identification $H_X^2 \simeq \mathbb{P}E$, que l'unique section holomorphe de H_X^2 , passant par le "point" D_z , et s'annulant en x_0 à l'ordre 2 (cf. I et Figure 1), elle-même identifiée à la droite Σ de $\mathbb{P}V$, vue comme section holomorphe de F^X . Ainsi, la droite D_z , vue comme un point de $F^X \simeq H_X^2$, "est" le point d_z de $\mathbb{P}E \simeq H_X^2$.

La droite horizontale D'_z "est", de même, une section holomorphe de H_X^2 s'annulant en x_0 .

Elle est déterminée, comme telle, par sa pente en x_0 , mesurée par le point y de Y , donc le point y_1 de Δ , et sa valeur en x_0 qui n'est autre que la droite Σ' , vue comme un point de F^X , donc le point ξ' de $\tilde{\Delta}$.

Ainsi, la section holomorphe D'_z de $H_X^2 \simeq \mathbb{P}E$ "est" la droite ℓ_z .

Nous vérifions ainsi que le drapeau (d_z, ℓ_z) s'identifie avec l'image de z par l'application R^{-1} décrite en IV.

*
* *
*

Paul GAUDUCHON
53, rue de Lyon
75012 PARIS