Astérisque

P. GAUDUCHON

Les immersions super-minimales d'une surface compacte dans une variété riemannienne orientée de dimension 4

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 151-180

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__151_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ n° VIII

LES IMMERSIONS SUPER-MINIMALES D'UNE SURFACE COMPACTE DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE ORIENTÉE DE DIMENSION 4

P. GAUDUCHON

Les exposés n°VIII et IX sont consacrés à la présentation d'une correspondance découverte par R. Bryant qui, à toute courbe holomorphe dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^2$, associe une immersion (ramifiée) minimale d'une surface de Riemann de même genre dans la sphère S^n, prouvant par là l'existence de telles immersions. Comme l'a remarqué H. Blaine Lawson Jr., cette correspondance résulte d'une correspondance birationnelle entre les espaces de twisteurs des deux espaces concernés, c'est-à-dire entre l'espace des drapeaux de $\mathbb{C}P^2$ et l'espace projectif $\mathbb{C}P^3$.

Le point essentiel est que cette correspondance préserve les distributions horizontales de ces deux espaces.

Dans l'exposé n° IX nous donnerons une description géométrique de cette correspondance, exploitant la riche structure des deux espaces concernés.

Le présent exposé est divisé en trois parties.

Dans la partie I, nous introduisons la notion d'immersion (ramifiée) super-minimale d'une surface orientée Σ dans une variété riemannienne orientée $\overline{M}$ de dimension 4, et nous établissons une correspondance biunivoque entre ces applications et les courbes holomorphes horizontales dans l'un ou l'autre des espaces de twisteurs de $\overline{M}$.

Dans la partie II, nous spécialisons notre étude aux cas où l'espace ambiant $\overline{M}$ est $\mathbb{C}P^2$ ou S^4. Nous montrons , en particulier, que les immersions minimales (ramifiées) de la sphère S^2 dans $\mathbb{C}P^2$ ou S^4 sont superminimales.

Dans la partie III, nous donnons une description de la construction twistorielle dans le cas de S^4 et $\mathbb{C}P^2$.

***

I. LES IMMERSIONS SUPERMINIMALES.

Dans tout l'exposé et sauf mention contraire (en particulier lorsque nous parlons de twisteurs, Σ désigne une surface orientée, $\overline{M}$ une variété riemannienne orientée de dimension 4, f une immersion de Σ dans $\overline{M}$.

La surface Σ sera supposée compacte, mais une bonne partie de ce qui suit vaut sans cette restriction.

La surface Σ est munie, par l'intermédiaire de f , d'une métrique riemannienne qui, conjointement avec l'orientation de Σ, détermine une structure de fibré vectoriel complexe sur le fibré tangent $T\Sigma$ de Σ, induite par une (unique) structure complexe de Σ qui devient de ce fait une surface de Riemann.

Nous notons $N\Sigma$ le fibré normal sur Σ dont la fibre en un point x de Σ est l'orthogonal de $T_f(T_x\Sigma)$ dans $T_{f(x)}\overline{M}$.

Ce fibré est naturellement orientable, mais nous ne choisissons pas d'orientation privilégiée entre les deux possibles.

Le fibré normal est lui-même muni d'une métrique fibrée qui lui confère une structure de fibré vectoriel complexe, déterminée à conjugaison près suivant l'orientation.

Nous obtenons de cette manière deux structures de fibré vectoriel complexe sur le fibré $f^*T\overline{M} = T\Sigma \otimes N\Sigma$, notées respectivement J^+ et J^-,telles que J^+ induise l'orientation de $\overline{M}$ et J^- l'orientation opposée.

Pour J^+, comme pour J^-, l'application tangente Tf est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $T_x\Sigma$ dans $T_{f(x)}\overline{M} = (f^*T\overline{M})_x$.

La restriction commune de J^+ et J^- à $T\Sigma$ sera notée J.

La connexion de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ induit une connexion sur chacun des deux fibrés $T\Sigma$ et $N\Sigma$ (notée ∇ dans les deux cas), compatible avec la métrique, préservant de ce fait chacune des structures du fibré complexe précédemment introduites et induisant, par conséquent, une structure de fibré holomorphe sur $N\Sigma$ pour l'une et l'autre des deux structures complexes.

Nota. Le fait qu'une connexion hermitienne sur un fibré vectoriel complexe hermitien E au-dessus d'une surface de Riemann lui confère une structure de fibré vectoriel holomorphe est une conséquence du théorème de Newlander-Nirenberg (cf.[1] Th.5.1).

Dorénavant, les fibrés $T\Sigma$ et $N\Sigma$ au-dessus de Σ seront notés plus simplement T

et N respectivement.

La forme fondamentale B est un homomorphisme symétrique $\mathbb{R}$-linéaire de $T \otimes_{\mathbb{R}} T$ dans N. L'opérateur J de T induit, sur le produit tensoriel $T \otimes_{\mathbb{R}} T$, un automorphisme de carré +1 de sorte que

$$T \otimes_{\mathbb{R}} T = E^{+} \otimes E^{-} \quad , \tag{1}$$

où $E^{\pm}$ sont les sous-fibré propres associés aux valeurs propres ± 1 de cette involution.

Le sous-fibré E^{+} est le noyau de la projection naturelle de $T \otimes_{\mathbb{R}} T$ sur $T \otimes_{\mathbb{C}} T$, en sorte que E^{-} s'identifie naturellement à $T \otimes_{\mathbb{C}} T$, qui est le produit tensoriel par lui-même du fibré T considéré comme fibré vectoriel complexe de rang 1 et est donc lui-même un fibré vectoriel complexe de rang 1 (isomorphe, en tant que fibré vectoriel holomorphe, au dual du carré du fibré canonique de la surface de Riemann Σ).

Le sous-fibré E^{-} se trouve ainsi (contrairement à E^{+}) muni d'une structure naturelle du fibré vectoriel complexe, dont l'opérateur complexe $\mathcal{J}$ est induit par l'action de J sur le premier (ou le deuxième) facteur de $E^{-} \subset T \otimes_{\mathbb{R}} T$.

Comme on sait, un fait essentiel dans la théorie des immersions minimales dont la source est une surface de Riemann peut s'exprimer ainsi :

$$\{ f \text{ est minimal} \} \Leftrightarrow \{ \text{la restriction de } B \text{ à } E^{+} \text{ est nulle} \} \quad . \tag{2}$$

En effet, pour tout vecteur unitaire X de $T\Sigma$, on a

$$\text{trace } B = B_{XX} + B_{JXJX} \quad . \tag{3}$$

Ainsi la forme fondamentale d'une immersion minimale f de Σ dans $\overline{M}$ apparaît-elle comme un homomorphisme ($\mathbb{R}$-linéaire) de $E^{-} \simeq T \otimes_{\mathbb{C}} T$ dans N, où les deux fibrés E^{-} et N ont l'un et l'autre une structure naturelle de fibré vectoriel complexe de rang 1 (et même de fibré vectoriel holomorphe) au-dessus de Σ.

En particulier, la forme fondamentale d'écrit (de façon unique)

$$B = B^{+} + B^{-} \tag{4}$$

où $B^{\pm}$ est $\mathbb{C}$-linéaire de $T \otimes_{\mathbb{C}} T$ dans N relativement à la structure complexe $J^{\pm}$ de N.

DÉFINITION 5 . Une immersion minimale d'une surface orientée Σ dans une variété riemannienne orientée de dimension 4 est dite superminimale à droite (resp. à gauche)

si la composante B^- (resp. B^+) de la forme fondamentale B est nulle, c'est-à-dire si B est un homomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T\otimes_{\mathbb{C}} T$ dans (N,J^+) (resp. (N,J^-)).

Le terme superminimal est emprunté à R. Bryant [2] qui en fait usage dans le cas d'une immersion de Σ dans la sphère S^4.

Il est à noter que, dans ce dernier cas, le distingo "à droite" ou "à gauche" est de peu d'importance car on passe d'un type à l'autre par antipodie. Dans d'autres cas au contraire, par exemple dans le cas où $\overline{M}$ est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^2$, les deux types d'immersions superminimales sont complètement différents (cf. plus loin, dans II).

Pour des raisons qui deviendront claires un peu plus loin lorsque nous parlerons de twisteurs, R. Bryant distingue les deux types en parlant d'immersions superminimales de spin $\pm 1/2$ (cf. la fin de I).

Observons aussi qu'une immersion superminimale à droite <u>et</u> à gauche est totalement géodésique (et réciproquement).

Nous dirons qu'une immersion de Σ dans $\overline{M}$ est <u>superminimale</u> si elle est, en tout point de Σ, superminimale à droite ou à gauche, c'est-à-dire, si en tout point x de Σ, B^+_x ou B^-_x est nul. Il n'est pas complètement clair qu'une immersion superminimale doive être (globalement) superminimale à droite ou superminimale à gauche. C'est la cas toutefois si les objets considérés sont analytiques, en particulier si la métrique de $\overline{M}$ est analytique <u>ce que nous supposerons</u>.

<u>La forme biquadratique</u> β. Le fibré vectoriel complexe (N,J^+) est muni, outre sa métrique naturelle, que nous notons $(.,.)$, induite de celle de $T\overline{M}$ (notée de la même façon), d'un produit scalaire <u>hermitien</u>, noté $<.,.>$, défini par

$$<\nu_1,\nu_2> = \frac{1}{2}\,[(\nu_1,\nu_2) - i(J^+\nu_1,\nu_2)] \quad . \tag{5}$$

Comme (N,J^+) est de rang 1, il est clair que le produit scalaire hermitien $<\nu_1,\nu_2>$ de deux éléments ν_1, ν_2 de N est nul si et seulement si l'un des deux est nul.

Considérons la forme β définie par

$$\beta\,(.,.,.,.) = < B^+_{..}, B^-_{..} > . \tag{6}$$

C'est, par construction, une forme symétrique $\mathbb{C}$-4-linéaire sur (T,J), c'est-à-dire une forme biquadratique sur (T,J).

En vertu de la remarque précédente, on a la

PROPOSITION 7. <u>Une immersion minimale de Σ dans $\overline{M}$ est superminimale si et seulement si la forme biquadratique β est identiquement nulle</u>.

Il sera utile, lorsqu'on fera des calculs effectifs, de considérer β définie non pas sur (T,J) mais sur le fibré $T^{1,0}$ qui lui est isomorphe.

Rappelons que tout fibré réel (E,J) muni d'une structure complexe J, peut être réalisé comme sous-fibré complexe de son complexifié $E^{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ en l'identifiant avec le sous-fibré propre de $E^{\mathbb{C}}$ relatif à la valeur propre $+i$ de l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de J à $E^{\mathbb{C}}$. Ce sous-fibré sera noté $E^{1,0}$ (le sous-fibré propre relatif à $-i$ étant noté $E^{0,1}$). L'identification de (E,J) avec $E^{1,0}$ se fait au moyen de l'isomorphisme

$$e \in E \longrightarrow \frac{1}{2}(e - iJe) \in E^{1,0} \subset E^{\mathbb{C}} \quad .$$

Ainsi les deux fibrés vectoriels complexes (E,J) et $E^{1,0}$ sont identifiables mais il faut prendre garde au fait que le triangle naturel

(8)
$$\begin{tikzcd} (E,J) \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, hook] & \\ E^{1,0} \arrow[r, hook] & E^{\mathbb{C}} \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\hookrightarrow$ désigne les inclusions naturelles, <u>n</u>'est <u>pas</u> commutatif, ce qui implique certaines précautions de langage, comme nous allons le voir immédiatement.

Considérons en effet l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de la forme fondamentale B qui devient ainsi un homomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire du complexifié $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{\mathbb{C}}$ de $T \otimes_{\mathbb{R}} T$ dans le complexifié $N^{\mathbb{C}}$ de N (nous ne supposons pas encore que l'immersion est minimale). Comme T et N sont munis de structures complexes, J et J^{+} respectivement, les complexifiés respectifs $T^{\mathbb{C}}$ et $N^{\mathbb{C}}$ se décomposent en <u>types</u> comme il vient d'être dit

(9)
$$T^{\mathbb{C}} = T^{1,0} \oplus T^{0,1} \qquad\qquad N^{\mathbb{C}} = N^{1,0} \oplus N^{0,1} \quad .$$

Le fibré $T \otimes_{\mathbb{R}} T$ n'a pas de structure complexe, mais la décomposition de $T^{\mathbb{C}}$ induit une décomposition en types de $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{\mathbb{C}} \simeq T^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}$ de la forme

$$(10) \qquad (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{\mathbb{C}} = (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0} \oplus (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{1,1} \oplus (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{0,2}$$

où

$$(11) \qquad \begin{aligned} (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0} &= T^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^{1,0} \quad (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{1,1} = (T^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^{0,1}) \oplus (T^{0,1} \otimes_{\mathbb{C}} T^{1,0}) \\ (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{0,2} &= T^{0,1} \otimes_{\mathbb{C}} T^{0,1} \quad . \end{aligned}$$

Rappelons que le sous-fibré E^- de $T \otimes_{\mathbb{R}} T$ possède - contrairement à E^+ - une structure complexe naturelle, que nous avons notée I , et on a évidemment

$$(12) \qquad (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0} = (E^-)^{1,0} \qquad (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{0,2} = (E^-)^{0,1} \quad .$$

Dans ce contexte légèrement modifié, il est facile de caractériser les immersions minimales, puis les immersions superminimales à droite et à gauche. On a

(13)

$\{f$ est minimale$\} \Longleftrightarrow \{$la restriction de B à $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{1,1}$ est nulle$\}$

$\{f$ est superminimale à droite$\} \Longleftrightarrow \{B$ envoie $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0}$ dans $N^{1,0}$ (et donc aussi $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{0,2}$ dans $N^{0,1}$) et s'annule sur $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{1,1}$

$\{f$ est superminimale à gauche$\} \Longleftrightarrow \{B$ envoie $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0}$ dans $N^{0,1}$ (et donc $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{0,2}$ dans $N^{1,0}$) et s'annule sur $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{1,1}$

Plaçons-nous dans la situation où f en minimale, c'est-à-dire où la forme fondamentale B est un homomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0} \oplus (T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{0,2}$ dans $N^{\mathbb{C}}$.
Comme B est réelle, elle est déterminée par sa restriction à $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0}$ qui est égale à $T^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^{1,0}$. Nous définissons alors la forme biquadratique sur $T^{1,0}$, notée $\tilde{\beta}$, définie par

$$(14) \qquad \tilde{\beta}(.,.,.,.) = \frac{1}{2}(B..,B..)$$

où $(.,.)$ désigne l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire de la métrique de N à $N^{\mathbb{C}}$.

On observera que, bien que les deux fibrés vectoriels complexes $E^- = T \otimes_{\mathbb{C}} T$ et $T^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^{1,0}$ puissent être naturellement identifiés, les restrictions de B à l'un et l'autre, considérés chacun comme un sous-fibré (réel) de $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{\mathbb{C}}$, sont différentes (en général) en raison de la non-commutativité du diagramme (8).

En revanche, si l'on identifie $T^{1,0}$ et (T,J) <u>les formes biquadratiques</u> β <u>en</u> $\tilde{\beta}$ <u>sont égales</u> (vérification facile).

Ainsi l'immersion minimale f en superminimale si et seulement si la forme biquadratique $\tilde{\beta}$ de $T^{1,0}$ est identiquement nulle (Proposition 1). Ceci peut d'ailleurs se voir directement de la manière suivante. Comme (N,J) est de rang 1, les seuls sous-espaces isotropes relativement à $(.,.)$ de $N^{\mathbb{C}}$ sont $N^{1,0}$ et $N^{0,1}$. Comme $(T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0}$ estlui-même de rang 1 nous concluons immédiatement que f minimale est superminimale si et seulement si $B((T \otimes_{\mathbb{R}} T)^{2,0})$ est isotrope (relativement à $(.,.)$ dans $N^{\mathbb{C}}$), ce qui est bien dire que $\tilde{\beta}$ est nulle.

Nous introduisons la <u>notation</u> générique suivante :

X est un élément de T en un point générique (non précisé) de Σ

Z est l'élément de $T^{1,0}$ correspondant à X, i.e.

$$Z = 1/2(X - iJX).$$

Le vecteur complexe Z engendre la fibre correspondante de $T^{1,0}$ (si X n'est pas nul). On pourra choisir $Z = \partial/\partial z$ où z est une coordonnée holomorphe au voisinage du point considéré, auquel cas $X = \partial/\partial x$ et $JX = \partial/\partial y$ où x et y sont respectivement les parties réelle et imaginaire de z.

La proposition 1 peut alors être paraphrasée ainsi :

PROPOSITION 15 . <u>Une immersion minimale de Σ dans $\overline{M}$ est superminimale si et seulement si</u>

$$(B_{ZZ}, B_{ZZ}) = 0$$

<u>pour tout élément</u> Z <u>de</u> $T^{1,0}$.

Une seconde définition de la notion de superminimalité fait intervenir l'<u>espace des twisteurs</u> $Z\overline{M}$ de $\overline{M}$, c'est-à-dire l'espace fibré au-dessus de $\overline{M}$ dont la fibre en un point de $\overline{M}$ est l'ensemble des structures hermitiennes de l'espace tangent à $\overline{M}$ en ce point. Cet espace $Z\overline{M}$ en une sous-variété fermée du fibré $\mathrm{Aut}(T\overline{M})$ des automorphismes de $T\overline{M}$ et admet une structure naturelle du fibré localement trivial au-dessus de $\overline{M}$, dont la projection est notée π.

Comme $\overline{M}$ est orientée, $Z\overline{M}$ admet deux composantes connexes $Z^{+}\overline{M}$ et $Z^{-}\overline{M}$ constituées respectivement des structures complexes qui induisent l'orientation de $\overline{M}$ et l'orientation opposée.

Nous rappelons que l'orientation induite par une structure complexe J (en un point de $\overline{M}$) est, par définition, l'orientation commune induite par tous les <u>repères J-adaptés</u>, c'est-à-dire les repères orthonormés de la forme $(e_1, Je_1, \ldots, e_m, Je_m)$ [ici $m = 2$, mais ce que nous disons présentement vaut en toute dimension paire $2m$]. Les repères J-adaptés se déduisent l'un de l'autre par

l'action (à droite) d'un élément du groupe unitaire U_m considéré comme sous-groupe SO_{2m} , et, inversement, tout repère orthonormé est adapté relativement à une structure complexe uniquement déterminé, de sorte que $Z^+\overline{M}$ (resp. $Z^-\overline{M}$) peut être identifié, comme espace fibré au-dessus de $\overline{M}$, au quotient $Q^+\overline{M}/U_m$ (resp. $Q^-\overline{M}/U(m)$) du $SO(2m)$-fibré principal $Q^+\overline{M}$ (resp. $Q^-\overline{M}$) des repères orthonormés positivement orientés (resp. négativement orientés) de $\overline{M}$ par l'action à droite de U_m .

L'espace $Z\overline{M}$ tout entier s'identifiera à $Q\overline{M}/U_m$ où $Q\overline{M}$ est le O_{2m} - fibré principal des repères orthonormés de $\overline{M}$.

La connexion de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ est induite par (et induit) une décomposition O_{2m}-invariante du fibré tangent $TQ\overline{M}$ en somme du sous-fibré tangent aux fibres ou sous-fibré vertical, et d'un sous-fibré horizontal dont la projection sur $T\overline{M}$ est un isomorphisme.

L'image de cette distribution horizontale par la projection canonique de $Q\overline{M}$ sur $Z\overline{M} = Q\overline{M}/U$ détermine sur $Z\overline{M}$ une distribution horizontale dont la projection sur $T\overline{M}$ est encore un isomorphisme.

Si U en un vecteur tangent à $\overline{M}$ en x déterminé par une courbe $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = U$), le vecteur <u>horizontal</u> associé sur $Z\overline{M}$ en J , structure complexe de $T_x\overline{M}$, sera, par définition, le vecteur associé à la courbe $J(t)$ où $J(t)$ est le transporté parallèle de J le long de la courbe $\gamma(t)$, relativement à la connexion de Levi-Civita.

La décomposition de $TZ\overline{M}$ en partie verticale en horizontale permet de définir très simplement une structure presque-complexe sur l'espace des twisteurs $Z\overline{M}$, plus exactement <u>deux</u> comme nous allons voir. Observons d'abord que l'espace horizontal en J dans $T_JZ\overline{M}$ est muni d'une structure complexe naturelle qui n'est autre que J elle-même, via l'isomorphisme $T\pi$.

Par ailleurs l'espace vertical en J , dans $T_JZ\overline{M}$, s'identifie canoniquement à l'espace vectoriel des endomorphismes anti-symétriques de $T_{\pi(J)}\overline{M}$ qui anti-commutent à J . Si A est un tel endomorphisme, il en va de même de JA et de $AJ = - JA$.

Nous obtenons ainsi deux structures complexes naturelles sur l'espace vertical, conjuguées l'une de l'autre (dont aucune ne semble a priori "préférable" à l'autre) et donc deux structures presque-complexes sur $Z\overline{M}$, I_1 et I_2 dont la restriction commune à la distribution horizontale est celle qui a été décrite ci-dessus et la restriction à l'espace vertical est respectivement l'automorphisme $\{A \to JA\}$ et l'automorphisme conjugué $\{A \to AJ\}$.
Comme l'ont observé J. Eells et S. Salamon [4] la différence de nature des deux structures I_1 et I_2 est plus considérable qu'il n'y paraît de prime abord. En particu-

lier, on montre aisément, en calculant directement la torsion complexe (= tenseur de Nijenhuis) que I_2 n'est jamais intégrable, tandis que, si $m > 2$, I_1 est intégrable si et seulement si le tenseur de Weyl de $\overline{M}$ s'annule (= la métrique de $\overline{M}$ est localement conformément plate).
Pour $m = 2$, I_1 est intégrable sur $Z^+\overline{M}$ (resp. $Z^-\overline{M}$) si et seulement si la composante W^+ (resp. W^-) du tenseur de Weyl s'annule (cf. [1]).

Par exemple, si $\overline{M}$ est la sphère S^4 avec sa métrique canonique, I_1 est intégrable sur Z^+S^4 <u>et</u> Z^-S^4 , qui sont d'ailleurs isomorphes comme variétés complexes, via l'antipodie (cf.§ 6).

Au contraire, si $\overline{M}$ est l'espace projectif $\mathbb{C}P^2$ avec sa métrique canonique, I_1 est intégrable sur $Z^-\mathbb{C}P^2$ mais non sur $Z^+\mathbb{C}P^2$.
Nous étudierons ces espaces plus en détail ultérieurement.

Nous considérons à nouveau la situation de départ où f est une immersion d'une surface orientée (compacte) Σ alors une variété riemannienne orientée $\overline{M}$ <u>de dimension 4</u> .
Nous avons vu que f possède un <u>relèvement canonique</u> dans chacun des deux espaces de twisteurs $Z^+\overline{M}$ et $Z^-\overline{M}$ notés respectivement J^+ et J^- :

(16)
$$\begin{tikzcd} & Z^+\overline{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \Sigma \arrow[ur, "J^+"] \arrow[r, "f"] & \overline{M} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z^-\overline{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \Sigma \arrow[ur, "J^-"] \arrow[r, "f"] & \overline{M} \end{tikzcd}$$

On observera que l'existence de J^+ et J^- ne suppose pas que f soit minimale, mais uniquement du fait que Σ et $\overline{M}$ sont de dimension 2 et 4 respectivement et toutes les deux orientées.

Nous avons alors la

PROPOSITION 17. <u>L'immersion</u> f <u>de</u> Σ <u>dans</u> $\overline{M}$ <u>est superminimale à droite</u> (<u>resp. à gauche</u>) <u>si et seulement si le relèvement</u> J^+ (<u>resp.</u> J^-) <u>de</u> Σ <u>dans</u> $Z^+\overline{M}$ (<u>resp.</u> $Z^-\overline{M}$ <u>est horizontal</u>.

<u>Preuve</u>. Dire que J^+ (ou J^-) est horizontal est dire que $J^+(\Sigma)$ (ou $J^-(\Sigma)$) est une variété intégrale de la distribution horizontale de $Z^+\overline{M}$ ou $Z^-\overline{M}$, et équivaut au

fait que $\overline{\nabla}_X J^+$ (ou $\overline{\nabla}_X J^-$) est nul pour tout X appartenant à $T\Sigma(=T)$. Nous traitons le cas de J^+, celui de J^- étant tout à fait analogue.
Soient donc X, Y deux vecteurs tangents à Σ en un point générique et ν un élément de la fibre de N en ce point, Y et ν étant prolongés au voisinage de ce point en des sections locales quelconques de T et Σ respectivement. On a, d'une part

i)
$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X J^+)(Y) &= \overline{\nabla}_X(J^+Y) - J^+(\overline{\nabla}_X Y)\\ &= \nabla_X(J^+Y) - J^+(\nabla_X Y)\\ &\quad + (B_{X,J^+Y} - J^+B_{X,Y})\end{aligned}$$

d'où
$$(\overline{\nabla}_X J^+)\ (Y) = B_{X,JY} - J^+B_{X,Y}$$

puisque ∇ commute à J.

ii) $(\overline{\nabla}_X J^+)(\nu) = \nabla_X(J^+\nu) - J^+(\nabla_X\nu) + \hat{B}_{X,J^+\nu} - J^+\hat{B}_{X,\nu} = \hat{B}_{X,J^+\nu} - J^+\hat{B}_{X,\nu}$

puisque ∇ commute à J^+ sur N. Ici $\hat{B}$ désigne la forme fondamentale duale. On a donc
$$((\overline{\nabla}_X J^+)\ (\nu),\ Y) = (J^+B_{X,Y},\nu) - (B_{X,JY},\nu)\ .$$

Il est clair que $\overline{\nabla}_X J^+$ est nul si et seulement si $B_{X,JY} = J^+B_{X,Y}$, pour tous X et Y, c'est-à-dire précisément si f est superminimale à droite.

REMARQUE 18 . La Proposition 17 peut constituer une nouvelle définition des immersions superminimales à droite et à gauche, qui pourraient être baptisées dans ce contexte <u>immersions horizontales</u> (positivement et négativement, respectivement). On observe que f n'est pas supposée minimale a priori, c'est-à-dire cette nouvelle définition de la superminimalité n'apparaît pas ici comme un raffinement de la notion de minimalité, et le fait qu'une immersion superminimale soit minimale apparaît alors comme un théorème (en fait, la Proposition 17).

Si J^+ (ou J^-) est horizontale, alors par construction même, l'application J^+ (ou J^-) est aussi holomorphe pour les deux structures presque-complexes I_1 et I_2 de $Z^+\overline{M}$ (resp. $Z^-\overline{M}$). (Nous entendrons par <u>holomorphe</u> le fait que la différentielle commute avec les structures presque-complexes concernés).

Inversement, toute immersion holomorphe horizontale ψ de Σ dans $Z\ \overline{M}$ (relativement à la structure I_1 ou I_2 indifféremment puisque celles-ci coincident

sur les espaces horizontaux) se projette en une immersion $\pi\circ\psi$ superminimale (à droite ou à gauche suivant que $\psi(\Sigma)$ est contenue dans $Z^+\overline{M}$ ou $Z^-\overline{M}$).

Il suffit, pour le voir, de montrer que ψ coincide avec le relèvement canonique de l'immersion $\pi\circ\psi$ dans la composante connexe concernée de $Z\overline{M}$, ce qui résulte immédiatement de ce que, pour tout point x de Σ, l'image de $T_x\Sigma$ par $T(\pi\circ\psi)$ est, par hypothèse, une droite complexe de $T_{\pi\circ\psi(x)}\overline{M}$ relativement à $\psi(x)$.

REMARQUE IMPORTANTE 19. Nous venons de montrer que la recherche de certaines immersions minimales d'une surface de Riemann Σ dans une variété riemannienne (orientée) de dimension 4 se ramenait à la recherche de certaines applications holomorphes de Σ dans un espace de twisteurs, ce qui met à disposition les diverses techniques de la géométrie complexe, à tout le moins quand l'espace des twisteurs est une variété complexe.

Par ailleurs, le fait que les applications holomorphes envisagées doivent être des immersions constitue une restriction importante qui peut être levée en substituant à la catégorie des immersions minimales la catégorie plus large des pseudo-immersions minimales.

De façon générale, une pseudo-immersion f d'une surface de Riemann Σ dans une variété riemannienne (orientée) $\overline{M}$ est une immersion (vraie) en dehors - peut être - d'un sous-ensemble discret (fini, si Σ est compacte) S de Σ où Tf s'annule, de telle manière que le relèvement naturel de f dans le fibré $\widetilde{G}_2\overline{M}$ des 2-plans orientés sur $\overline{M}$ sur $\Sigma-S$ s'étend à Σ toute entière. (Dans le cas où $\overline{M}$ est de dimension 4, $\widetilde{G}_2\overline{M}$ s'identifie naturellement au produit fibré $Z^+M\times_{\overline{M}}Z^-\overline{M}$ au-dessus de $\overline{M}$, - en associant à chaque 2-plan orienté de $T_x\overline{M}$, muni de la structure complexe induite par la métrique, le couple unique de structures complexes d'orientations opposées ayant ce 2-plan pour unique droite complexe commune (Prop. 28) - , et il revient à dire que les relèvements canoniques J^+ et J^- de $f_{|\Sigma-S}$ (cf.§15) dans $Z^+\overline{M}$ et $Z^-\overline{M}$ s'étendent à Σ) . Nous pouvons, dès lors, restituer de façon formellement identique l'étude précédente, en substituant au fibré tangent $T\Sigma$ le sous-fibré (de rang 2) T^f de $f^{-1}(T\overline{M})$ déterminé par le relèvement de f dans $\widetilde{G}_2M$, et à la forme fondamentale une forme bilinéaire (symétrique) B sur Σ à valeurs dans l'orthogonal N^f de T^f dans $f^{-1}(T\overline{M})$ qui étend la (seconde) forme fondamentale au sens ordinaire de $f_{|\Sigma-S}$.

Les pseudo-immersions minimales que nous définissons de cette manière sont exactement les applications harmoniques conformes (non constantes) de Σ dans

$\overline{M}$ ([7] § 1), donc aussi les immersions ramifiées minimales de [9] (bien que la notion de pseudo-immersion soit plus générale que celle d'immersion ramifiée de [9], cf. aussi [3] § 10).

Les pseudo-immersions superminimales (à gauche et à droite) sont formellement définies comme en 5, du paragraphe précédent, nous déduisons une correspondance bi-univoque entre les applications holomorphes horizontales de Σ dans $Z^{+}\overline{M}$ (resp. $Z^{-}\overline{M}$) et les pseudo-immersions superminimales à droite (resp. à gauche) de Σ dans $\overline{M}$.

Plus généralement, J. Eells et S. Salamon ont établi une correspondance bi-univoque entre les applications holomorphes (non verticales) de Σ dans $Z^{+}\overline{M}$ (ou $Z^{-}\overline{M}$) muni de la structure presque-complexe I_2 (celle qui n'est jamais intégrable, voir supra) et les applications harmoniques conformes (non constantes) - c'est-à-dire les pseudo-immersions minimales - de Σ dans $\overline{M}$, [5], [6], [10], [7]. Parmi celles-ci, les pseudo-immersions superminimales se caractérisent donc par le fait que leur relèvement dans l'un des deux espaces de twisteurs $Z^{+}\overline{M}$ et $Z^{-}\overline{M}$ est à la fois I_1 et I_2 holomorphe (où, cette fois, I_1 peut être intégrable).

La majeure partie de ce qui suit vaut dans le cadre élargi des pseudo-immersions minimales (resp. superminimales) que nous appellerons indifféremment immersions ramifiées minimales (resp. super-minimales) et nous en tiendrons compte dans les énoncés (avec référence implicite à [7], et aussi à [5]).

Toutefois, les équations de Gauss (infra (37), (38)) et leurs conséquences (infra (57)(58)) ne valent, sous cette forme, que si f est une immersion vraie. Leur extension au cas des pseudo-immersions fait intervenir un entier non-négatif m (nul si et seulement si f est une immersion vraie) qui mesure le "degré de non-isomorphisme" de l'homomorphisme de $T\Sigma$ dans T^f induit par Tf, soit encore, le nombre de points, comptés avec multiplicité, où Tf s'annule [7].

Un mot sur la terminologie. Le concept de twisteur est dû à R. Penrose. La construction générale de l'espace $Z\,\overline{M}$ au-dessus d'une variété riemannienne quelconque (orientée, de dimension 4) et le théorème d'intégrabilité de I_1 est développée en [1] paragraphe 5 . Si $\overline{M}$ est en outre muni d'une structure spinorielle, alors les espaces $Z^+\,\overline{M}$ et $Z^-\,\overline{M}$ sont exactement, les espaces fibrés projectifs associés aux fibrés de (demi-)spineurs S^+ et S^- . Dans le cas général, les fibrés S^+ et S^- peuvent ne pas être définis globalement mais les fibrés en espaces projectifs que l'on construit localement définissent néanmoins des objets globaux que l'on identifie encore à $Z^+\overline{M}$ et $Z^-\overline{M}$ respectivement.
Ceci justifie que l'on puisse parler du spin $\pm$ 1/2 d'une immersion superminimale.

II. IMMERSIONS SUPERMINIMALES DANS S^4 ET $\mathbb{C}P^2$.

Jusqu'à présent,nous avons, présenté les éléments d'une théorie générale des immersions (ramifiées) superminimales, mais nous n'avons pas encore abordé le problème de l'existence de telles applications.

Pour ce faire, nous devions naturellement abandonner le point de vue général et considérer des variétés ambiantes $\overline{M}$ bien spécifiées.

Considérons d'abord le cas où $\overline{M}$ est munie d'une structure kählérienne et de l'orientation correspondante. L'espace des twisteurs $Z^+\overline{M}$ possède deux sections horizontales, l'une holomorphe, correspondant à la structure complexe de $\overline{M}$, l'autre anti-holomorphe, correspondant à la structure complexe conjuguée (qui induit la même orientation, puisque $\overline{M}$ est de dimension 4).

Le fait que ces sections soient horizontales traduit exactement que la structure sur $\overline{M}$ est kählérienne.

Le relèvement canonique dans $Z^+\overline{M}$ d'une application holomorphe ou anti-holomorphe d'une surface de Riemann Σ dans $\overline{M}$, habite dans l'une ou l'autre de ces deux hypersurfaces complexes horizontales de sorte que de telles applications sont des immersions (ramifiées) superminimales à droite.

On observera là-encore (cf.18) que la "superminimalité" de ces applications se voit plus naturellement que leur "minimalité" qui en est la conséquence. On peut voir aisément qu'une immersion minimale totalement réelle, c'est-à-dire dont le 2-plan tangent en chaque point de l'image de Σ est réel (= orthogonal à son image par J_o , si J_o est la structure complexe de $\overline{M}$) est aussi superminimale à droite.
Inversement, si $\overline{M}$ est à courbure holomorphe constante non nulle, on peut montrer que les immersions superminimales à droite sont nécessairement de l'un de ces trois types (holomorphes, anti-holomorphes ou totalement réelles)([5],[7] 3.4).

Considérons à présent le cas où $\overline{M}$ est à courbure sectionnelle constante c, de courbure $\overline{R}$ égale à

$$\overline{R}_{UV}(W) = c[(U,W)V - (V,W)U] . \tag{20}$$

L'équation de Codazzi-Mainardi qui décrit les variations de la forme fondamentale B et qui, dans le cas général, s'écrit

$$(\nabla_U B)_{V,W} - (\nabla_V B)_{U,W} = -[\overline{R}_{UV}W]^N , \tag{21}$$

où ∇ est la connexion induite par $\overline{\nabla}$ sur le produit tensoriel $T \otimes_{\mathbb{R}} T \otimes_{\mathbb{R}} N$, dont B est une section, et où $[\overline{R}_{UV}W]^N$ désigne la partie normale de $\overline{R}_{UV}W$.

Dans le cas où $\overline{M}$ est à courbure constante cette équation se réduit à

$$(\nabla_U B)_{V,W} - (\nabla_V B)_{U,W} = 0 . \tag{22}$$

Nous en déduisons les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 23. Si $\overline{M}$ est à courbure sectionnelle constante, la forme biquadratique β associée à une immersion minimale de Σ dans $\overline{M}$ est une section holomorphe de $\overset{4}{\otimes}_{\mathbb{C}} T^*$.

PROPOSITION 24. Si f est une immersion superminimale à droite (resp. à gauche) de Σ dans $\overline{M}$ à courbure constante, la forme fondamentale B est une section holomorphe de $T^* \otimes_{\mathbb{C}} T^* \otimes_{\mathbb{C}} (N,J^+)$ (resp. de $T^* \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} (N,J^-)$). En particulier, si f n'est pas totalement géodésique, B s'annule au plus en un nombre fini de point.

Preuve de la Proposition 23. Considérons la forme biquadratique β sous sa forme $\tilde{\beta}$ (14), et Z une section holomorphe locale de $T^{1,0}$. On a

$$(\overline{Z}.\beta)(Z) = \frac{1}{2}\,\overline{Z}.(B_{Z,Z}\ ,\ B_{Z,Z})$$

$$= (\nabla_{\overline{Z}}\, B_{ZZ}\ ,\ B_{ZZ}) .$$

Par Codazzi-Mainardi (22), $\nabla_{\overline{Z}}\, B_{ZZ}$ est égal à $\nabla_Z B_{\overline{Z}Z}$ donc nulle puisque f est minimale. □

Preuve de la Proposition 24. Si f est superminimale à droite (resp. à gauche), B est une section du fibré en droites complexes $T \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} (N,J^+)$ (resp. $T \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} (N,J^-)$)

qui est, rappelons-le, un fibré vectoriel holomorphe, la structure holomorphe étant induite par la connexion ∇ . Dire que B est holomorphe équivaut alors à dire que $\overline{Z}.B_{ZZ}$ est nul ce qui, comme on a vu alors dans la démonstration précédente, résulte immédiatement de l'équation de Codazzi-Mainardi (22).

PROPOSITION 25. Toute immersion (ramifiée) minimale de la sphère S^2 dans la sphère S^4 est superminimale.

Preuve. La sphère S^2 ne possède (à difféomorphisme près) qu'une structure conforme et est donc isomorphe, comme surface de Riemann, à l'espace projectif $\mathbb{C}P^1$. Le fibré cotangent (T^*,J) est, quant à lui, isomorphe, comme fibré vectoriel holomorphe, au fibré de Hopf, de sorte qu'il ne possède, pas plus qu'aucune de ses puissances tensorielles (positives), de sections holomorphes non-triviales. Il résulte alors de la Proposition 23 que la forme biquadratique β est nulle identiquement, et nous concluons par la Proposition 1.

COMMENTAIRE 26. Ce résultat est le point où nous voulions aboutir. La recherche de toutes les immersions (ramifiées) minimales de S^2 dans S^4 se ramène ainsi, (cf. §20), à la recherche de certaines courbes holomorphes (de genre 0) dans Z^+S^4 de Z^-S^4 qui sont, l'un et l'autre, isomorphes à $\mathbb{C}P^3$ comme nous verrons un peu plus loin, Partie III.
On notera que la démonstration du Corollaire vaut lorsque $\overline{M}$ est remplacée par une variété à courbure constante nulle ou négative. Mais il est bien connu qu'il n'existe pas d'immersions minimales de S^2 dans ces espaces. Ce fait sera d'ailleurs redémontré un peu plus loin.

COROLLAIRE 27. Si f est une immersion minimale non totalement géodésique de S^2 dans S^4, la classe d'Euler $\chi(N)$ du fibré normal est, en valeur absolue, supérieure ou égale à 4 .

Preuve. D'après Prop.25, f est superminimale. Si B n'est pas identiquement nulle (= f n'est pas totalement géodésique), c'est une section holomorphe non triviale du fibré en droites complexes $T^*\otimes_{\mathbb{C}}T^*_{\mathbb{C}}(N,J^{\pm})$ dont la classe de Chern doit être, de ce fait, positive ou nulle. Or celle-ci est égale à $-4\pm\chi(N)$.

La Proposition 25 reste vraie lorsque l'espace ambiant S^4 est remplacé par $\mathbb{C}P^2$. Plus précisément, on a la

PROPOSITION 28 . Une immersion ramifiée minimale de S^2 dans $\mathbb{C}P^2$ est, ou-bien

$\pm$-holomorphe (donc superminimale à droite), ou bien superminimale à gauche.

Avant de démontrer cette proposition, nous rappelons les faits suivants.
Soit $(V,(.,.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension 4 .
L'ensemble des structures complexes de V compatibles avec $(.,.)$ s'identifie avec l'ensemble des 2-plans complexes isotropes de l'espace euclidien complexifié $(V^{\mathbb{C}},(.,.))$: à chaque structure complexe nous associons l'espace des vecteurs de type (1,0) relativement à J .
Si J_1 et J_2 induisent la même orientation de V , les 2-plans isotropes associés sont identiques (si $J_1 = J_2$) ou disjoints (= leur intersection est réduite à l'origine).
Si au contraire, J_1 et J_2 induisent l'orientation opposée, les 2-plans isotropes associés ont une droite complexe (unique) en commun.

Preuve de la Proposition 28. Considérons une immersion (ramifiée) minimale f d'une surface orientée Σ (avec sa structure de surface de Riemann induite) dans une variété kählérienne $(\overline{M},J_o)$ de dimension (réelle) 4.
Nous notons Z une section locale de $T^{1,0}(= T^{1,0}\Sigma)$ et aussi bien son image $Tf(Z)$ dans le fibré tangent complexifié $T^{\mathbb{C}}\overline{M}$. Nous supposons que f n'est pas $\pm$ holomorphe et nous nous plaçons en un point générique où le couple $\{Z,J_oZ\}$ détermine un 2-plan complexe de la fibre correspondante de $T^{\mathbb{C}}\overline{M}$. Comme f est (génériquement) conforme, ce 2-plan est isotrope relativement à la métrique $\mathbb{C}$-bilinéaire de $T^{\mathbb{C}}\overline{M}$.
Il n'est pas difficile de voir que c'est le 2-plan isotrope associé à la structure complexe J^- , où J^- est le relèvement canonique de f dans $Z^-\overline{M}$.
En effet, ce 2-plan isotrope contient l'élément (non-nul) $(Z-iJ_oZ)$ qui est de type (1,0) relativement à J_o . La structure complexe associée induit donc l'orientation opposée de l'orientation naturelle, donc la même orientation que J^- .
Mais il contient l'élément Z qui est du type (1,0) relativement à J^- . Donc la structure complexe associée se confond avec J^- . Un 2-plan isotrope coincide avec son orthogonal. Ainsi f est superminimal à gauche si et seulement si en un point générique de Σ (et donc, en tout point) on a

$$(Z,\ B_{ZZ}) = 0 \quad \text{et} \quad (J_oZ,\ B_{ZZ}) = 0 \quad . \tag{29}$$

(cf. critère de superminimalité (13)).
La première égalité est vérifiée pour toute immersion f de Σ dans $\overline{M}$ (minimale ou non).
La seconde, en revanche, ne l'est pas en général pour f minimale. Mais on a le

LEMME 30. Si $\overline{M}$ est à courbure holomorphe constante c, la forme (J_oZ, B_{ZZ}) détermine une section holomorphe de $\overset{3}{\otimes}(T^{1,0})^*$.

Preuve du lemme. On a

$$\overline{Z}.(J_oZ,B_{ZZ}) = \overline{Z}.(J_oZ,\overline{\nabla}_Z Z) = (\overline{\nabla}_{\overline{Z}} J_oZ,\overline{\nabla}_Z Z) + (J_oZ,\overline{\nabla}_{\overline{Z}}(\overline{\nabla}_Z Z))$$

Le premier terme de la somme de droite est égal à $(J_o\overline{\nabla}_{\overline{Z}}Z,\overline{\nabla}_Z Z)$ puisque la métrique est kählérienne, et $\overline{\nabla}_{\overline{Z}}Z$, qui est égal à $B_{\overline{Z}Z}$, est nul puisque f est minimale. Le second terme est égal à $(J_oZ, \overline{R}(Z,\overline{Z})Z)$ qui est nul aussi. En effet, comme la métrique kählérienne est à courbure sectionnelle constante, $\overline{R}(Z,\overline{Z})Z$ est une combinaison linéaire de Z et J_oZ. □

Nous concluons alors la démonstration de la Proposition 28 comme celle de la Proposition 25, en observant que si Σ est la sphère S^2, une section holomorphe de $\overset{3}{\otimes}(T^{1,0})^*$ est identiquement nulle. □

REMARQUE 31. La proposition 28 vaut a priori pour toute immersion minimale de S^2 dans une variété kählérienne à courbure holomorphe constante c. Mais de telles immersions n'existent que si c est positive, comme nous verrons au paragraphe suivant.

REMARQUE 32. Les Propositions 25 et 28 ont une extension naturelle lorsque S^4 et $\mathbb{C}P^2$ sont remplacés respectivement par S^n et $\mathbb{C}P^m$ (cf. resp. Exposé n°VI et Exposé n°VII).

Considérons les équations de Gauss composant la courbure $\overline{R}$ de l'espace ambiant aux courbures des fibrés T et N, notées R l'une et l'autre. On a, en général (cf. Exposé n° I)

$$(R_{X,Y}X',Y') - (\overline{R}_{X,Y}X', Y') = (B_{XX'}, B_{YY'}) - (B_{XY'}, B_{YX'}) \tag{33}$$

$$(R_{X,Y}\nu,\mu) - (\overline{R}_{X,Y}\nu,\mu) = \sum_{i=1}^{n} (B_{XE_i},\nu)(B_{YE_i},\mu) - \sum_{i=1}^{n} (B_{XE_i},\mu)(B_{YE_i},\nu) . \tag{34}$$

où n est la dimension de la variété immergée.

Dans le cas qui nous occupe d'une immersion superminimale de Σ dans $\overline{M}$, ces équations se réduisent à

$$K = \overline{K}_{X,JX} - \frac{1}{2}|B|^2 \tag{35}$$

(36) $$(R_{X,JX}\nu,\ J^{\pm}\nu) = (\bar{R}_{X,JX}\nu,\ J^{\pm}\nu) + \frac{1}{2}\,|B|^2$$

où K est la courbure de Gauss de Σ , $\bar{K}$ la courbure sectionnelle de $\bar{M}$, $|B|^2$ le carré de la norme de la forme fondamentale, égal à $4|B_{XX}|^2$ (où X est un élément unitaire quelconque de T), ν un élément unitaire quelconque de N . Le symbole $J^{\pm}$ doit s'entendre ainsi : égal à $J^{+}(J^{-})$ si f est superminimal à droite (à gauche).

Remarque. De (35), on déduit, compte-tenu des Propositions 25 et 28, qu'il n'existe aucune immersion minimale de S^2 dans un espace à courbure constante négative, ou dans une variété kählérienne à courbure holomorphe constante négative.

Supposons que $\bar{M}$ soit à courbure sectionnelle constante c . Les équations ci-dessus se réduisent à

(37) $$K = c - 1/2\ |B|^2$$

(38) $$(R_{X,JX}\nu,\ J^{\pm}\nu) = 1/2\ |B|^2$$

Il en résulte, pour toute immersion superminimale d'une surface de Riemann compacte dans une variété à courbure constante de dimension 4, une quantification de la norme L^2 de la forme fondamentale et, si $c \neq 0$, du volume de Σ

(39) $$\int |B|^2 = 4\pi|\chi(N)|$$

(40) $$\mathrm{vol}(\Sigma) = \frac{2\pi}{c}\,(2-2g + |\chi(N)|)$$

où g est le genre de Σ .
En particulier, pour toute immersion minimale f de S^2 dans la sphère S^4 canonique ($c = 1$), on a :

(41) $$\int |B|^2 = 4\pi|\chi(N)|$$

(42) $$\mathrm{vol}(\Sigma) = 2\pi(2 + |\chi(N)|)$$

et donc, si f n'est pas totalement géodésique,

(43) $$\mathrm{vol}(\Sigma) \geqslant 12\pi = 3\ \mathrm{vol}(S^2,\mathrm{can}).$$

Une étude un peu plus minutieuse, faisant intervenir l'espace des twisteurs,

montrera que la classe d'Euler du fibré normal $\chi(N)$ est un nombre pair, de sorte que

$$\mathrm{vol}(\Sigma) = 4\pi\delta \tag{44}$$

où δ est un entier, égal à 1 si f est totalement géodésique et supérieur ou égal à 3 dans le cas contraire (nous y revenons plus loin).

Remarque. Le nombre $\mathrm{vol}(\Sigma)$ que nous évaluons est le volume de Σ pour la métrique induite. Il est égal au volume de l'image $f(\Sigma)$ si f est (génériquement) injective, mais peut être égal à un multiple entier (supérieur à 1) du volume de $f(\Sigma)$ au cas où j est (génériquement) un revêtement de Σ sur son image. C'est le cas, par exemple, du plongement de Veronese de $\mathbb{R}P^2$ dans S^4 , qui peut être considéré comme une immersion minimale de S^2 dans S^4 revêtant deux fois son image.

On sait que la métrique induite sur S^2 est une métrique à courbure constante 1/3. Inversement, considérons une immersion minimale (donc superminimale) de S^2 dans (S^4,can) telle que la métrique induite soit de courbure constante, mais qui ne soit pas géodésique. Par (37), la norme de B est constante, non nulle. Le fibré en droites complexes $T^*\otimes_{\mathbb{C}}T^*\otimes_{\mathbb{C}}N$ est donc trivial, de sorte que $|\chi(N)| = 4$ et $\mathrm{vol}(\Sigma) = 12\pi$. Il en résulte que la courbure est nécessairement égale à 1/3. On observe aisément que le plongement de Veronese est la seule immersion minimale de ce type. En effet, une telle immersion minimale est nécessairement associée à un espace propre du laplacien de (S^2,can) (cf.Exposé n° I).

III. L'ESPACE DES TWISTEURS DE S^4 ET $\mathbb{C}P^2$.

L'intérêt des Propositions 25 et 28 vient de ce que les espaces de twisteurs de S^4 et $\mathbb{C}P^2$ sont des variétés complexes bien connues. Plus précisément, Z^+S^4 et Z^-S^4 peuvent être identifiés à l'un et l'autre à $\mathbb{C}P^3$, et $Z^-\mathbb{C}P^2$ à l'espace $\mathbb{D}_3$ des drapeaux (complexes) de $\mathbb{C}P^2$, c'est-à-dire des couples (x,ℓ) où ℓ est une droite projective de $\mathbb{C}P^2$ et x un point sur cette droite. (Nous avons vu que $Z^+\mathbb{C}P^2$ n'est pas une variété complexe).

Observons tout d'abord que les espaces Z^+S^4 et Z^-S^4 sont isomorphes. Plus précisément nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Z^+S^4 \arrow[r, "\tilde{\tau}"] \arrow[d, "\pi^+"] & Z^-S^4 \arrow[d, "\pi^-"] \\ S^4 \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & S^4 \end{tikzcd} \tag{45}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques, τ l'antipodie de S^4 (qui renverse l'orientation), $\tilde{\tau}$ l'application qui envoie une structure complexe sur son image par τ. Il est clair que $\tilde{\tau}$ est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire (pour les deux structures I_1 et I_2).

Nota. Observons toutefois que les deux espaces Z^+S^4 et Z^-S^4 restent distincts comme espaces fibrés en ce qu'il n'existe pas de triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} Z^+S^4 \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi^+"'] & & Z^-S^4 \arrow[dl, "\pi^-"] \\ & S^4 & \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale soit un isomorphisme. Nous disons seulement ceci : si (Z^+S^4,π^+) est la fibration des twisteurs positifs, le couple $(Z^+S^4, \tau\circ\pi^+)$ peut être identifié à (Z^-S^4,π^-). En particulier, si f est une immersion (ramifiée) superminimale à droite, $\tau\circ f$ est superminimale à gauche (et vice versa).

L'identification de Z^+S^4 avec $\mathbb{C}P^3$ peut se faire de plusieurs façons. On peut d'abord identifier Q^+S^4 -le fibré des repères orthonormés positivement orientés- avec le groupe SO_5, de sorte que Z^+S^4 s'identifie, comme espace fibré, avec le quotient SO_5/U_2, où U_2 est canoniquement plongé dans le sous-groupe SO_4 de SO_5 des éléments de ce groupe laissant un élément fixé dans $\mathbb{R}^5$.
Cette variété SO_5/U_2 possède (à conjugaison près) une unique structure d'espace complexe homogène kählérien) et, comme la construction de Z^+S^4 est clairement SO_5-équivariante, nous concluons que (Z^+S^4, I_1) s'identifie à cette variété complexe. Il reste à identifier SO_5/U_2 avec $\mathbb{C}P^3$ muni de sa structure complexe usuelle, ce qui peut être fait en utilisant les identifications successives

$$\begin{tikzcd} Z^+(S^4) = SO_5/U_2 \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Spin}_5/U_1\times SU_2 \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \dfrac{Sp_2}{U_1\times Sp_1} = \mathbb{C}P^3 \arrow[d, "\pi"] \\ S^4 = SO_5/SO_4 \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Spin}_5/\mathrm{Spin}_4 \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \dfrac{Sp_2}{Sp_1\times Sp_1} = \mathbb{H}P^1 \end{tikzcd} \tag{46}$$

où Sp_2 est le groupe symplectique unitaire (d'ordre 2), canoniquement identifié à Spin_5 tandis que Sp_1 est identifié à $SU_2 \simeq \mathrm{Spin}_3$ (cf. [11], et aussi Exposé n°IX. Lemme 6).

Ainsi l'identification de Z^+S^4 avec $\mathbb{C}P^3$ passe par celle de S^4 avec $\mathbb{H}P^1$, le premier espace projectif quaternionien. Cette identification est une identification d'espaces symétriques, donc, en particulier, d'espaces riemanniens (éventuellement

à changement d'échelle près).
Explicitement l'isomorphisme de $\mathbb{H}P^1$ sur S^4 peut s'écrire ainsi :

$$(47) \qquad (p : q) \in \mathbb{H}P^1 \longmapsto \left(\frac{|p|^2-|q|^2}{|p|^2+|q|^2} , \frac{2p\,\bar{q}}{|p|^2+|q|^2}\right) \in S^4 \subset \mathbb{R}^5$$

où (p,q) est un couple de quaternions, distinct de $(0,0)$, défini à un scalaire près $((p:q) \sim (p\lambda:q\lambda), \lambda \neq 0 \in \mathbb{H})$.

Nota. En nous restreignant aux couples tels que $|p|^2 + |q|^2 = 1$ nous obtenons une expression explicite de la fibration de Hopf de S^7 sur S^4, formellement identique à celle de la fibration de Hopf usuelle de S^3 sur S^2, à ceci près que le couple (p,q) doit s'entendre dans ce dernier cas dans $\mathbb{C}^2$ et le terme de droite dans $\mathbb{R}^3$.

Avant de poursuivre, nous introduisons le formalisme suivant.
Nous considérons un espace vectoriel complexe V de dimension 4, muni d'un produit scalaire hermitien $<.,.>$.
L'espace V est en outre muni d'une structure quaternionienne adaptée, c'est-à-dire d'un opérateur j $\mathbb{C}$-antilinéaire, de carré -1, et tel que :

$$(48) \qquad < uj , vj > \; = \; < v,u > \qquad \forall u, v \in V .$$

Ainsi V peut être considéré comme un espace vectoriel quaternionien (de dimension 2) et, comme tel, sera noté $V^{\mathbb{H}}$ (le corps $\mathbb{H}$ des quaternions sera supposé opérer à droite et l'opérateur j sera identifié à l'élément j usuel de $\mathbb{H}$).
La donnée de $<.,.>$ et de j détermine une forme symplectique complexe sur V, c'est-à-dire une 2-forme alternée, $\mathbb{C}$-bilinéaire, de rang maximal, notée $(.,.)$, définie par

$$(49) \qquad (u,v) = + < u,vj > \qquad \forall u, v \in V .$$

Les trois éléments $<.,.>$, j et $(.,.)$ -dont chaque est déterminé par les deux autres- déterminent conjointement une structure symplectique hermitienne sur V.
Un repère adapté est un repère orthonormé de V (relativement à $<.,.>$) de la forme $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1 j, \varepsilon_2, \varepsilon_2 j\}$. Le couple $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ constitue alors un repère $\mathbb{H}$-orthogonal de $V_{\mathbb{H}}$, $\mathbb{H}$-orthogonal devant s'entendre relativement au produit scalaire quaternionien défini par

$$(50) \qquad << u,v >> \; = < u,v > + j(u,v) .$$

Relativement à une base adaptée, on a

(51) $$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)j = (-\bar{\beta}, \bar{\alpha}, -\bar{\delta}, \bar{\gamma}) .$$

Une droite quaternionienne de $V^{\mathbb{H}}$ est exactement un 2-plan complexe j-invariant de V . Toute droite complexe de V -c'est-à-dire tout élément x de $\mathbb{P}V$- est contenue dans une unique droite quaternionienne, le 2-plan complexe $\{x,xj\}$ engendré par les droites complexes x en xj . Nous obtenons ainsi une projection de $\mathbb{P}V$ sur $\mathbb{P}V^{\mathbb{H}}$ qui, moyennant le choix d'une base adaptée de V , s'identifie à la projection π , évoquée ci-dessus, de $Sp_2/U_1 \times Sp_1$ sur $Sp_2/Sp_1 \times Sp_1$. Nous nous proposons de montrer directement que cette projection

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}V \\ \downarrow \\ \mathbb{P}V^{\mathbb{H}} \end{array}$$

réalise effectivement $\mathbb{P}V$ comme espace des structures complexes de $\mathbb{P}V^{\mathbb{H}}$ muni de la structure complexe I_1 . Nous adaptons la notation générique suivante :

$u,v,\ldots$ pour les points de V ,

$x,y,\ldots$ pour les droites complexes de V(= les points de $\mathbb{P}V$) ,

$D_1,D_2\ldots$ pour les 2-plans complexes de V (en particulier les points de $\mathbb{P}V^{\mathbb{H}}$.

On a les identifications bien connues

$$T_x\mathbb{P}V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,x^{\perp}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,xj) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,\{x,xj\}^{\perp}) , \qquad T_D\mathbb{P}V^{\mathbb{H}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp}) .$$

La fibre au-dessus de D , soit $\pi^{-1}(D)$, est constituée de l'ensemble des droites complexes de V contenues dans D .

Chacune de ces droites x détermine une structure complexe sur $T_D\ \mathbb{P}V_{\mathbb{H}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp})$ de la façon suivante.

Faisons choix d'un élément u non-nul de x . Un élément X de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp})$ est entièrement déterminé par son image $X(u)$ dans $D^{\perp}$ et nous définissons J_xX par

(52) $$(J_xX)(u) = X(u)i$$

Il est clair que J_x ne dépend pas du choix de u dans x et que $J_x \neq J_{x'}$ si x et x' sont deux droites complexes distinctes dans D . Nous obtenons par ce moyen toutes les structures complexes de $\mathbb{P}V^{\mathbb{H}}$ attachée à son orientation naturelle. Il est clair aussi que, muni de la structure complexe J_x , $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp})$ s'identifie avec l'espace horizontal $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,\{x,xj\}^{\perp})$.

Il reste à identifier l'espace vertical $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,xj)$ dans $T_x\mathbb{P}V$ avec l'espace des

transformations anti-symétriques J_x-antilinéaires de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp})$, muni de la structure complexe induite par la <u>composition à droite</u> avec $J_x(A \to J_x \circ A)$.

Ceci est réalisé en associant à tout α dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,xj)$ l'endomorphisme A de l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp})$ défini par

$$(AX)(u) = X(\alpha(u)) \quad X \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(D,D^{\perp}),\ u \in x\ , \tag{53}$$

en sorte que $i\alpha$ est associé à $J_x \circ A$ (52). Le vecteur $\alpha(u)$ dans xj s'écrit $u\lambda j$, $\lambda \in \mathbb{C}$, d'où l'on déduit de (52) :

$$(J_x X)\ (\alpha(u)) = ((J_x X)(u))\lambda j = X(u)i\lambda j = -\ X(\alpha(u))i\ ,$$

et donc

$$(AJ_x X)(u) = (J_x X)\ (\alpha(u)) = -\ X(\alpha(u))i = -\ (J_x AX)\ (u)$$

qui prouve la J_x-antilinéarité de A et achève l'identification de $\mathbb{P}V$, muni de sa structure complexe naturelle, avec $Z^+(\mathbb{P}V^{\mathbb{H}}) \simeq Z^+(S^4)$ muni de la structure complexe I_1.

Le fibré tangent vertical $T^v\mathbb{P}V$, de fibre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,xj)$, s'identifie naturellement, via l'identification de xj avec x^* due à la métrique hermitienne, au fibré holomorphe $H^* \otimes H^*$ sur $\mathbb{P}V$ où H^* est le dual du fibré de Hopf (dont la fibre en un point x de $\mathbb{P}V$ est la droite complexe x elle-même). En particulier, $T^v\mathbb{P}V$ est muni d'une structure naturelle du fibré <u>holomorphe</u> (du rang 1)(mais non de <u>sous-fibré</u> holomorphe de $T\mathbb{P}V$, puisque, de façon générale, le fibré tangent vertical d'un espace de twisteurs n'est <u>jamais</u> un sous-fibré holomorphe du fibré tangent).

Au contraire, la distribution horizontale $\mathcal{H}$ est un sous-fibré holomorphe de $T\mathbb{P}V \simeq T^{1,0}\mathbb{P}V$, réalisé comme le noyau de la projection (holomorphe) de $T^{1,0}\mathbb{P}V$ sur $T^v\mathbb{P}V \simeq H^* \otimes H^*$, qui doit être vue comme une <u>1-forme-holomorphe</u> Φ <u>sur</u> $\mathbb{P}V$ <u>à valeurs dans le fibré en droites holomorphe</u> $H^* \otimes H^* (= (H^*)^2)$.

En coordonnées homogènes, une telle forme s'exprime au moyen d'une 1-forme holomorphe (scalaire) homogène de degré 2.
Les coordonnées homogènes d'un point y au voisinage de x dans $\mathbb{P}V$ sont les coordonnées d'un vecteur v quelconque de y, exprimées dans un repère quelconque de V. La 1-forme ϕ est clairement égale à

$$\Phi = \langle dv , vj \rangle = (dv,v) \tag{54}$$

où, rappelons-le $\langle .,. \rangle$ et $(.,.)$ désignent respectivement le produit scalaire hermitien en la forme symplectique complexe (cf.(49) et (50)).
Si V est rapportée à une base adaptée $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1 j, \varepsilon_2, \varepsilon_2 j\}$, la 1-forme Φ s'écrit donc

$$\Phi = - v^2\, dv^1 + v^1\, dv^2 - v^4\, dv^3 + v^3\, dv^4 \quad . \tag{55}$$

Considérons une immersion (ramifiée) superminimale (à droite) f d'une surface de Riemann Σ dans S^4. Elle se relève dans $\mathbb{C}P^3$ suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}P^3 \arrow[d, "\pi"] \\ \Sigma \arrow[ur, "J^+"] \arrow[r, "f"] & S^4 \end{tikzcd}$$

où J^+ est holomorphe et horizontale.
Le fibré tangent $T\mathbb{C}P^3$ se décompose suivant

$$T\mathbb{C}P^3 = \mathcal{H} \oplus (H^*)^2 \tag{56}$$

où H est le fibré de Hopf et $\mathcal{H}$ est la distribution horizontale considérés comme des fibrés vectoriels complexes, mais non holomorphes.
La classe de Chern $c_1(H^*)$ de H^* est un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z})$ que nous notons h. Il est bien connu que la première classe de Chern $c_1(T\mathbb{C}P^3)$ de $\mathbb{C}P^3$ est égale à $4h$, de sorte que celle de $\mathcal{H}$ vaut $2h$.
L'image réciproque de $\mathcal{H}$ par J^+ est égale à la somme $T \oplus N$ munie de la structure complexe J^+.
On a donc, si d est le <u>degré</u> de la courbe holomorphe $J^+ : \Sigma \to \mathbb{C}P^3$,

$$c_1(T \oplus N) = 2-2g + c_1(N) = 2(J^+)^*(h) = 2d \ ,$$

soit

(57) $$c_1(N) = 2(d-1+g) ,$$

si g est le genre de Σ .
Il en résulte (cf. 42), que

(58) $$\mathrm{vol}(\Sigma) = 4\pi\, d$$

Si f est totalement géodésique, d vaut 1. Dans le cas contraire, d est nécessairement supérieur ou égal à 3 .
En effet une courbe de degré 2 est plane dans $\mathbb{C}P^3$ et il n'est pas difficile de montrer qu'une courbe plane ne peut être horizontale sauf si elle est une droite (cf. Exposé IX).
Nous avons ainsi montré la

PROPOSITION 59. Soit Σ une surface de Riemann de genre g .
i) Si $g > 0$, le volume $\mathrm{Vol}(\Sigma)$ de toute immersion superminimale de Σ dans la sphère S^4 est égal à $4\pi d$, où d est un entier supérieur ou égal à 3 .

ii) Si $g = 0$, le volume $\mathrm{vol}(\Sigma)$ de toute immersion minimale f de Σ dans S^4 est égal à $4\pi d$, où d est un entier égal à 1 si f est totalement géodésique, supérieur ou égal à trois dans le cas contraire.

L'espace des twisteurs $Z^-\mathbb{C}P^2$ de $\mathbb{C}P^2$.

Considérons une variété kählérienne $\overline{M}$ de dimension complexe 2. Nous avons vu, au cours de la démonstration de la Proposition 6 , qu'en un point x de $\overline{M}$ les structures complexes de $T_x\overline{M}$ induisant l'orientation contraire, c'est-à-dire les points de $Z_x^-\overline{M}$, sont en correspondance bi-univoque avec les droites complexes de $T_x\overline{M}$.
Ainsi $Z^-\overline{M}$ peut-il être identifié, comme espace fibré au-dessus de $\overline{M}$, à l'espace tangent projectifié $P_{\mathbb{C}}T\overline{M}$ de $\overline{M}$ ($\mathbb{P}T^{1,0}\overline{M}$ si l'on préfère). Cet espace possède une structure complexe naturelle telle que sa projection naturelle sur $\overline{M}$ soit holomorphe. Il en résulte que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(T\overline{M})$ ne peut être identifiée, comme variété presque-complexe, avec $(Z^-\overline{M}, I_1)$, ou $(Z^-\overline{M}, I_2)$.
Nous supposons que $\overline{M}$ est $\mathbb{C}P^2$ avec sa structure kählérienne usuelle.
En tout point x de $\mathbb{C}P^2$ les directions tangentes (complexes) sont en bijection avec les droites complexes de $\mathbb{C}P^2$ passant par ce point, en sorte que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(T\mathbb{C}P^2)$ s'identifie, comme variété complexe, à l'espace des drapeaux $\mathbb{D}_3$ de $\mathbb{C}P^2$.
Il se trouve que,dans le cas particulier de $\mathbb{C}P^2$, nous avons le choix suivant :
i) ou bien identifier $\mathbb{D}_3$ (avec sa projection naturelle) à $(Z^-\mathbb{C}P^2, \pi^-)$, ce qui

oblige à modifier la structure complexe sur la distribution horizontale,

ii) ou bien conserver la structure complexe naturelle de $\mathbb{D}_3$ et modifier la projection de $\mathbb{D}_3$ sur $\mathbb{C}P^2$. C'est ce dernier point de vue que nous allons adopter.

Considérons un espace vectoriel complexe E à trois dimensions, muni d'un produit scalaire hermitien. L'espace $\mathbb{P}E$ est la variété des droites complexes de E , et $\mathbb{D}E$ celle des couples (x,ℓ) où x est une droite complexe de E et ℓ un 2-plan complexe (de façon équivalente une droite projective de $\mathbb{P}E$) contenant x . Un tel couple est appelé drapeau de E (ou $\mathbb{P}E$). Pour toute base orthonormée (hermitienne) (e_1, e_2, e_3) de E , $\mathbb{P}E$ et $\mathbb{D}E$ s'identifient respectivement à $\mathbb{C}P^2$ et $\mathbb{D}_3$ avec leurs structures kählériennes canoniques. Nous notons génériquement y la droite complexe orthogonale à x dans ℓ , et z la droite complexe orthogonale à ℓ (donc à x et y), de sorte que (x, y, z) constitue un triplet de droites complexes orthogonales dans E .
Nous nous proposons de montrer que l'application π

$$\begin{array}{c} \mathbb{D}E \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{P}E \end{array}$$

de $\mathbb{D}E$ sur $\mathbb{P}E$, donnée par

$$\pi((x,\ell)) = y(= x^{\perp} \cap \ell)$$

identifie canoniquement $\mathbb{D}E$ (avec sa structure complexe usuelle) avec $(Z^{-}\mathbb{P}E, \pi^{-})$

Nous considérons les identifications bien connues

$$T_{(x,\ell)}\mathbb{D}E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,z) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,z)$$

(60)

et

$$T_y\mathbb{P}E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,y^{\perp}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,x) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,z) .$$

La fibre $\pi^{-1}(y)$ sera identifiée à la droite projective $y^{\perp}$ (associée au 2-plan complexe orthogonal à y dans E) en associant à chaque point x de $y^{\perp}$ le drapeau (x,ℓ) où ℓ est la droite projective déterminée par les points x et y .

Chaque point x dans $y^{\perp}$ détermine une décomposition (60) de $T_y\mathbb{P}E$: la structure complexe associée est celle qui coincide avec celle de $T_y\mathbb{P}E$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,z)$ et avec la conjuguée sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,x)$. Ainsi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,z)$ est l'unique droite complexe de $T_y\mathbb{P}E$ qui soit aussi une droite complexe pour cette nouvelle structure J_x . Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,y)$ est identifiable, via la métrique, à $\overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,x)}$, nous voyons que la restriction de $T\pi$ au sous-espace horizontal $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,z)$ de $T_{(x,\ell)}\mathbb{D}E$ est bel

et bien $\mathbb{C}$-linéaire. Etant donné x dans $y^{\perp}$, chaque élément α du sous-espace vertical $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,z)$ est identifié à un endomorphisme J_x-antilinéaire A de $T_y\mathbb{P}E$ de la façon suivante :

$$A((X_1,X_2)) = (*\alpha\circ X_2 \ , \ \alpha\circ X_1) \tag{61}$$

où, à droite, $*A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(z,x)$ est l'adjoint hermitien de A, et X_1, X_2 désignent les composantes de $X \in T_y\mathbb{P}E$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,x)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(y,z)$ respectivement. On vérifie aisément, comme en (52), que la correspondance $\alpha \to A$ est $\mathbb{C}$-linéaire ($i\alpha \to J_x\circ A$) et que A est J_x-antilinéaire ($A\circ J_x = - J_x\circ A$), ce qui achève l'identification de $(\mathbb{D}E, \pi)$, où $\mathbb{D}E$ est muni de sa structure complexe naturelle, avec $(Z^-\mathbb{P}E, \pi^-)$ muni de la structure complexe I_1.

Comme précédemment, l'espace vertical $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,z)$ est la fibre d'un fibré en droites complexes au-dessus de $\mathbb{D}E$. Pour identifier ce fibré il nous faut considérer les deux projections <u>holomorphes</u> p_1, p_2 de $\mathbb{D}E$ sur $\mathbb{P}E$ et $\mathbb{P}E^*$ définies par :

$$p_1((x,\ell)) = x \in \mathbb{P}E \qquad p_2((x,\ell)) = \ell \in \mathbb{P}E^* \tag{62}$$

(Nous identifions le 2-plan ℓ de E et l'élément de $\mathbb{P}E^*$ qui le détermine. Si nous notons $<.,.>$ la dualité entre E et E^*, la relation $x \in \ell$ se lit

$$< x,\ell > \ = 0 \tag{63}$$

et fait de $\mathbb{D}E$ une hypersurface complexe de $\mathbb{P}E \times \mathbb{P}E^*$).
Nous désignons par H_1 et H_2 les fibrés de Hopf (c'est-à-dire les fibrés tautologiques) de $\mathbb{P}E$ et $\mathbb{P}E^*$ respectivement, et il est clair que le <u>fibré vertical</u>, <u>de fibre</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(x,z)$, <u>s'identifie canoniquement au produit tensoriel</u> $p_1^* H_1^* \otimes p_2^* H_2^*$ (que nous noterons simplement $H_1^* \otimes H_2^*$).
Ainsi le fibré vertical possède, comme dans le cas de $\mathbb{C}P^3$, une structure naturelle de fibré en droites holomorphe (cf. plus haut et la projection orthogonale de $T^{1,0}\mathbb{D}E$ sur sa composante verticale -dont le noyau est la distribution horizontale- peut être, ici encore, considérée comme une <u>1-forme holomorphe sur</u> $\mathbb{D}E$ <u>à valeurs dans le fibré holomorphe</u> $H_1^* \otimes H_2^*$, <u>que nous noterons</u> Ψ.
Une telle forme s'exprime, dans un système de coordonnées bihomogènes, par une 1-forme holomorphe bihomogène de (bi)degré (1,1). (Les coordonnées bihomogènes d'un point (x,ℓ) de $\mathbb{D}E$ sont les coordonnées d'un élement u quelconque (non-nul) de x dans E, et celles d'un élément ξ quelconque (non-nul) de ℓ dans E^* (relativement à un repère de E et au repère dual de E^*) liées par la relation (63) qui s'écrit

(64) $$u^1 \xi_1 + u^2 \xi_2 + u^3 \xi_3 = 0 \text{ .).}$$

La 1-forme ψ s'écrit, dans un tel système,

(65) $$\psi = (du, \xi)$$

soit,

(66) $$\psi = \xi_1 \, du^1 + \xi_2 \, du^2 + \xi_3 \, du^3 \quad .$$

48. Considérons une immersion (ramifiée) superminimale à gauche f de Σ dans $\mathbb{P}E$. Son relèvement canonique J^- dans $Z^-\mathbb{P}E = \mathbb{D}E$ est une courbe holomorphe horizontale dans $\mathbb{D}E$ que nous notons C .

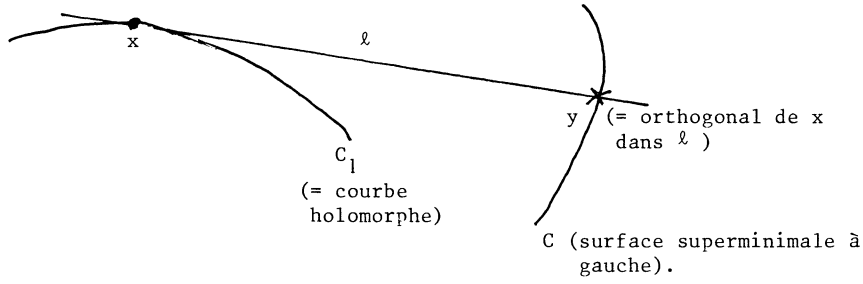
Les projections C_1 et C_2 de C dans $\mathbb{P}E$ et $\mathbb{P}E^*$ par p_1 et p_2 respectivement sont holomorphes et sont duales l'une de l'autre, en ce sens que C_2 est la courbe de $\mathbb{P}E^*$ déterminées par les droites complexes tangentes à C_1 . Inversement, toute application holomorphe f d'une surface de Riemann Σ dans $\mathbb{P}E$ se relève canoniquement en une application holomorphe F de Σ dans $\mathbb{D}E$ en associant à tout x de Σ le drapeau constitué de $f(x)$ et la droite tangente en $f(x)$ à la courbe $f(\Sigma)$ (une telle application se prolonge en une application holomorphe de Σ entière, points singuliers compris).

Ce <u>relèvement est horizontal</u>, comme il résulte immédiatement de la forme explicite de la 1-forme Ψ .

Ainsi nous obtenons <u>une correspondance bijective entre les courbes holomorphes de $\mathbb{P}E$ ($=\mathbb{C}P^2$) et les immersions (ramifiées) superminimales à gauche d'une surface Σ dans ce même espace</u>.

Nous pouvons illustrer cette correspondance de la façon suivante :

(67)



Ceci est l'application à $\mathbb{C}P^2$ d'un résultat général concernant les applications minimales d'une surface dans $\mathbb{C}P^N$ (cf. [6]).

Nous en déduisons, via la correspondance de Bryant un mode de construction explicite des immersions (ramifiées) superminimales des surfaces de Riemann (compacte) dans la sphère S^4, en particulier de toutes les applications harmoniques de la sphère de Riemann S^2 dans S^4 (Exposé n° IX).

L'interprétation des immersions (ramifiées) minimales de S^2 dans S^4 et $\mathbb{C}P^2$ en termes de courbes holomorphes horizontales (de genre 0) dans $\mathbb{C}P^3$ et $\mathbb{D}_3$ respectivement donne accès aux méthodes de la géométrie algébriques dans l'étude des immersions minimales : c'est ainsi que l'on peut montrer, par des procédés de géométrie algébrique élémentaires, qu'il n'existe pas d'application harmonique injective (au sens ensembliste) de S^2 dans S^4 ou de S^2 dans $\mathbb{C}P^2$ en dehors des plongements équatoriaux dans le premier cas, d'applications $\pm$ - holomorphes dans le second, [8],[7].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.F. ATIYAH, N.J. HITCHIN, I.M. SINGER, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Royal Soc. London Ser A. 362 (1978), 425-461.

[2] R. BRYANT, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-spheres, J. Differential Geom. 17 (1982), 455-473.

[3] J. EELLS, L. LEMAIRE, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1-68.

[4] J. EELLS, S. SALAMON, Constructions twistorielles des applications harmoniques, C.R. Acad. Sci. Paris 296 (1983), 685-687.

[5] J. EELLS, J. SALAMON, Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four manifolds, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.

[6] J. EELLS, J.C. WOOD, Harmonic maps from surfaces to complex projection spaces. Adv. Math. 49 (1983), 217-263.

[7] P. GAUDUCHON, Pseudo-immersions superminimales d'une surface de Riemann dans une variété riemannienne de dimension 4, Bull. Soc. Math. France 114, Fas. 4 (1986).

[8] P. GAUDUCHON, H. Blaine LAWSON Jr., Topologically non singular minimal cones, Indiana U. Math. J. 34 (1985), 915-927.

[9] R.D. GULLIVER II, R. OSSERMAN, H.L. ROYDEN, A theory of branched immersions of surfaces, Amer. J. Math. 95 (1973), 750-812.

[10] S. SALAMON, Harmonic and holomorphic maps, in Geometry Seminar Luigi Bianchi Lect. Notes in Math. 1164, Springer (1986).

[11] S. SALAMON, Topics in four-dimensional Riemannian geometry, in Geometry Seminar Luigi Bianchi. Lect. Notes in Math. 1022, Springer (1983), 33-124.

***

Paul GAUDUCHON

53, rue de Lyon
75012 PARIS