

# *Astérisque*

MARIE-LOUISE MICHELSON

**Surfaces minimales dans les sphères**

*Astérisque*, tome 154-155 (1987), p. 115-130

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1987\\_\\_154-155\\_\\_115\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__115_0)

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SURFACES MINIMALES DANS LES SPHÈRES

Marie-Louise MICHELSON

I. INTRODUCTION.

Le but de cet article est d'étudier des immersions minimales de  $S^2$  dans  $S^{n-1}$ . Il s'agit surtout des travaux de Calabi [2], [3] avec une amélioration de Barbosa [1]. L'idée directrice, analogue à l'argument de H. Hopf [5], est d'utiliser le fait que sur  $S^2$  il n'existe aucune  $p$ -forme holomorphe, pour  $p > 0$ , ce qui rigidifie la géométrie.

Le scénario découle de l'observation suivante : une sous-variété complexe d'une variété kählérienne doit être minimale. Donc une immersion holomorphe  $\varphi: M \rightarrow X$  dans une variété kählérienne  $X$  est toujours une immersion minimale. D'ailleurs soit  $\pi: X \rightarrow Y$  une submersion riemannienne et soit  $\varphi: M \rightarrow X$  une immersion minimale telle que  $\varphi$  soit horizontale pour la submersion  $\pi$ , alors  $\pi \circ \varphi: M \rightarrow Y$  est minimale. Ainsi, si  $\pi: X \rightarrow Y$  est une submersion riemannienne d'une variété kählérienne  $X$  et si  $\varphi$  est une application d'une surface de Riemann dans  $X$  de telle sorte que  $\varphi$  soit holomorphe et horizontale par rapport à la submersion  $\pi$ , alors  $\pi \circ \varphi$  est minimale.

Or pour une immersion minimale conforme  $\psi$  de  $S^2$  en  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , E. Calabi a montré qu'il existe une réciproque. Ainsi il a construit une sous-variété  $X$  de  $\mathbb{C}P^N$ , avec  $N$  grand, et une fonction holomorphe,  $\Xi$ , de  $S^2$  dans  $X$  telles que :

- 1) il y ait une submersion riemannienne  $\pi: X \rightarrow S^{n-1}$ ,
- 2)  $\Xi$  soit un relèvement de  $\varphi$ ,
- 3)  $\Xi$  soit horizontale par rapport à la submersion de  $\pi$ .

E. Calabi en a tiré le théorème suivant.

THÉORÈME PRINCIPAL (Calabi). - Soit  $\varphi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$  une immersion minimale telle que l'image de  $S^2$  ne soit pas contenue dans un équateur de  $S^{n-1}$ . Alors

- 1)  $n-1$  est pair, disons  $2m$ ,
- 2) l'aire de  $S^2$  immergée est  $2k\pi$ , où  $k$  est un entier,
- 3)  $k/2 \geq \binom{m+1}{2}$ . Cette borne inférieure est atteinte.

Ce résultat a été amélioré de la façon suivante.

Amélioration du Théorème Principal (Barbosa). Soit  $\varphi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$  une immersion vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Alors l'aire de  $S^2$  immergée est  $4\pi q$  où  $q$  est un entier.

Remarque : La preuve du théorème principal est aussi valable pour une immersion minimale ramifiée de  $S^2$  dans  $S^{n-1}$ . Par immersion minimale ramifiée, on veut dire une application  $\varphi$  lisse dont les points singuliers (ceux où  $d\varphi$  s'annule) sont isolés et qui est minimale en dehors de ces points. Puisque toutes les applications  $\varphi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$  harmoniques et non-constantes sont des immersions minimales ramifiées (cela reste vrai même si on remplace  $S^{n-1}$  par une variété riemannienne quelconque, cf. [4]), on a ce théorème pour les applications harmoniques de  $S^2$  dans  $S^{n-1}$ .

## II. CONSTRUCTION.

Soit  $S^{n-1}$  la sphère de rayon 1 de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\psi: S^2 \rightarrow S^{n-1}$  une immersion isométrique minimale. Prenons les coordonnées isothermes suivantes  $z = x + iy$ . La métrique induite est

$$(1) \quad ds^2 = 2F(z, \bar{z}) |dz|^2$$

où  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , et  $F = \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 = \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2$ . Donc  $2F \equiv \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 = \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2$  et  $\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle \equiv 0$ .

L'équation des surfaces minimales est

$$(2) \quad \Delta \psi = -2\psi \quad ;$$

comme, pour une surface minimale,

$$(3) \quad \Delta = \frac{1}{2F} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{2}{F} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad ,$$

donc

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi = -F\psi$$

Nous allons travailler dans  $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ , donc dans  $\mathbb{C}^n$  avec une

structure réelle distinguée. Indiquons par "." l'extension bilinéaire complexe de la métrique de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{C}^n$ . Nous prolongerons encore cette métrique à

$$(\wedge_{\mathbb{R}}^p \mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \wedge_{\mathbb{C}}^p \mathbb{C}^n \text{ par}$$

$$(5) \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_p \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_p = \det_{\mathbb{C}}(v_i \cdot w_j) \quad .$$

Par contre, la métrique hermitienne sera indiquée par

$$(6) \quad (r, w) = r \cdot \bar{w} \quad .$$

Or nos équations sont

$$(7) \quad |\psi|_1^2 \equiv 1 \quad \text{car } S^{n-1} \text{ est de rayon } 1, \quad .$$

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} \psi_z \cdot \psi_{\bar{z}} &= F \\ \psi_z \cdot \psi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{car } z = x + iy, \text{ } x \text{ et } y \text{ étant des} \\ \text{coordonnées isothermes,}$$

$$(9) \quad \psi_{z\bar{z}} = -F\psi \quad \text{par l'équation des surfaces minimales.}$$

Observons que  $\psi \cdot \psi \equiv 1$  entraîne que

$$(11) \quad \psi \cdot \psi_z \equiv \psi \cdot \psi_{\bar{z}} \equiv 0 \quad .$$

De la même manière  $\psi_z \cdot \psi_z \equiv 0$  entraîne que

$$(12) \quad \psi_z \cdot \psi_{z\bar{z}} \equiv \psi_z \cdot \psi_{\bar{z}\bar{z}} \equiv 0 \quad .$$

LEMME 13 .- Soit  $\psi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$  une immersion minimale isométrique et  $x, y$  des coordonnées isothermes pour  $\psi$ . Soit  $\Phi$  la section de  $\otimes^4 T^{1,0}$  définie par

$$\Phi \equiv (\psi_{z\bar{z}}, \psi_{z\bar{z}}) dz^4 \quad \text{où } z = x + iy \quad .$$

Alors  $\Phi$  est bien définie et holomorphe.

Preuve : Prenons deux coordonnées locales holomorphes  $z$  et  $w$ . On a  $\psi_w = \frac{dz}{dw} \psi_z$ .  
Donc

$$(14) \quad \psi_{w\bar{w}} = \frac{d^2 z}{dw^2} \psi_z + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 \psi_{z\bar{z}} \quad .$$

Ainsi

$$(15) \quad \psi_{ww} \cdot \psi_{ww} = \left(\frac{dz}{dw}\right)^4 \psi_{zz} \cdot \psi_{zz}$$

est bien défini. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\psi_{zz} \cdot \psi_{zz}) &= 2\psi_{zzz} \cdot \psi_{zz} \\ &= 2(\psi_{zz})_z \cdot \psi_{zz} \\ &= 2(-2F\psi)_z \cdot \psi_{zz} \\ &= -4(F_z \psi + F\psi_z) \cdot \psi_{zz} = 0 \quad , \end{aligned}$$

en utilisant (11) après avoir dérivé (9).

Par ailleurs, il n'existe aucune p-forme holomorphe sur  $S^2$ . Donc  $\phi \equiv 0$ . ■

COROLLAIRE 16 .- Soit  $\psi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$  une immersion minimale isométrique et  $z$  un paramètre isotherme. Alors, l'équation suivante est vérifiée

$$\psi_{zz} \cdot \psi_{zz} \equiv 0$$

et donc

$$\psi_{zzz} \cdot \psi_{zz} \equiv 0 \quad .$$

Par récurrence, en considérant la section  $\phi_k$  de  $\otimes^{2k}_T 1, 0'$  définie par

$$\phi_k \equiv \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}, \frac{\partial^k \psi}{\partial \bar{z}^k}\right) dz^{2k}$$

que l'on peut prouver être bien définies et holomorphes, on peut montrer :

LEMME 17 .- Soit  $\psi : S^2 \rightarrow S^{n-1}$  une immersion minimale isométrique et  $z$  un paramètre isotherme, alors

$$(18) \quad \frac{\partial^i \psi}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial^j \psi}{\partial \bar{z}^j} \equiv 0 \quad , \quad i+j \geq 1$$

quels que soient les entiers  $i$  et  $j$ .

Définissons des fonctions  $\psi_k$  et  $\Xi_k$  à valeurs dans  $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$  :

$$(19) \quad \psi_k \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z} \wedge \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} ,$$

$$(20) \quad \bar{\psi}_k \equiv \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \wedge \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial^k \psi}{\partial \bar{z}^k} .$$

Prenons  $m$  maximum tel que  $\psi_m \neq 0$ . Il s'ensuit

$$(21) \quad \frac{\partial^{m+1} \psi}{\partial z^{m+1}} \equiv \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} , \quad a_k \in C^\infty(S^2)$$

et

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi_m = a_m \psi_m .$$

Remarque : Si on définit

$$\chi_k \equiv \psi \wedge \frac{\partial \psi}{\partial z} \wedge \dots \wedge \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}$$

et si  $m'$  est l'entier le plus grand tel que  $\psi_{m'} \neq 0$  alors, puisque

$$\left( \psi , \frac{\partial^j \psi}{\partial z^j} \right) = \psi \cdot \frac{\partial^j \psi}{\partial z^j} \equiv 0$$

on obtient  $m = m'$  et

$$(23) \quad \frac{\partial^{m+1} \psi}{\partial z^{m+1}} = \sum_{k=1}^m \bar{a}_k \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} .$$

Posons maintenant

$$(24) \quad \Theta \equiv \psi \wedge \frac{\partial \psi}{\partial z} \wedge \dots \wedge \frac{\partial^m \psi}{\partial z^m} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial^m \psi}{\partial \bar{z}^m} .$$

Puisque  $\partial \bar{\partial} \psi = -F\psi$  on trouve

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \equiv 0 \quad \text{mod} \left( \psi , \frac{\partial \psi}{\partial z} , \dots , \frac{\partial^{k-1} \psi}{\partial z^{k-1}} \right) .$$

Par conséquent

$$(25) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = a_m \Theta \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{z}} = \bar{a}_m \Theta .$$

Ainsi on déduit par projection que la classe

$$[\Theta] \in \mathbb{P}(\wedge_{\mathbb{C}}^{2m+1} \mathbb{C}^n) \quad \text{est constante .}$$

Notons que  $\Theta$  a des valeurs réelles. On obtient donc le

THÉORÈME 26 . - Soit  $\psi : S^{2q} \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  une immersion minimale isométrique. Alors il existe un entier  $m$  tel que

$$\psi(S^2) \subset S^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m+1} ,$$

mais tel que  $\psi(S^2)$  ne soit pas contenue dans un équateur de  $S^{2m}$ .

Démonstration : L'image de  $\psi$  est contenue dans l'espace engendré par  $\Theta$  qui est constant, réel et de dimension  $2m+1$ . ■

Hypothèse 27 . - Pour tout ce qui suit, nous allons travailler avec une immersion minimale isométrique  $\psi : S^{2q} \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  dont l'image n'est pas contenue dans un équateur de  $S^{n-1}$ , donc  $n-1$  est égal à  $2m$ .

Définition 28 . - Soit  $V$  un  $k$ -plan complexe dans  $\mathbb{C}^n$ . On dira que  $V$  est totale-ment isotrope si  $X \cdot Y$  s'annule pour toute paire de vecteurs  $X, Y \in V$  ( $X=Y$  inclus).

PROPOSITION 29 . - Le plan  $\Xi_m$  défini en (20) est totalement isotrope.

Démonstration : Les vecteurs  $\frac{\partial \psi}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^m \psi}{\partial z^m}$  forment une base de  $\Xi_m$ . Par le lemme 17,  $\frac{\partial^i \psi}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial^j \psi}{\partial z^j} = 0$  pour tout  $i, j$ . ■

Maintenant, on peut remarquer que

$$(30) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Xi_m &= \bar{a}_m \Xi_m \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \bar{a}_m \end{aligned}$$

et que  $\Theta : S^2 \rightarrow \wedge_{\mathbb{C}}^{2m+1} \mathbb{C}^{2m+1} \simeq \mathbb{C}$ . Donc aux points où  $\Theta \neq 0$ , il est vrai que

$$(31) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Theta} \Xi_m \right) = 0 .$$

En projetant là où  $\Xi_m$  ne s'annule pas, on peut définir l'application

$$(32) \quad [\Xi_m] : S^2 \setminus \{z : \Xi_m(z) \neq 0\} \xrightarrow{\vartheta} \mathbb{P}(\wedge^m \mathbb{C}^{2m+1}) .$$

PROPOSITION 33. - L'application  $[\Xi_m]$ , définie en (32), est holomorphe.

Démonstration : Il reste seulement à remarquer que  $\Theta_m(z) = 0 \Leftrightarrow \Xi_m(z) = 0$  puisque est perpendiculaire à  $\frac{\partial \psi}{\partial z^i}$  et à  $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{z}^i}$  pour tout  $i$ . ■

### III. LA CONSTRUCTION DE E. CALABI.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème réciproque dont nous avons parlé au paragraphe I. Nous maintenons l'hypothèse 27 .

Nous allons démontrer que l'application  $[\Xi_m]$  holomorphe définie dans la section II (voir (20) et (32) ) se prolonge à  $S^2$ . Pour montrer cela nous constatons d'abord que l'image de  $[\Xi_m]$  est contenue dans  $I_m$  où

$$(34) \quad I_m \equiv \{\xi \in G_{m,2m+1}^{\mathbb{C}} : \xi \text{ est totalement isotrope}\}$$

avec

$$G_{m,2m+1}^{\mathbb{C}} \equiv \{m\text{-plans complexes en } \mathbb{C}^{2m+1}\} .$$

On montre ensuite qu'il existe une submersion riemannienne  $\pi = I_m \rightarrow S^{2m}$  telle que  $\pi \circ [\Xi_m] = \psi|_{\text{dom } [\Xi_m]}$ . Puis il faudra démontrer que  $[\Xi_m]$  est horizontale par rapport à la submersion  $\pi$  et que les zéros de  $\Xi_m$  sont isolés. Or soit  $p$  un zéro de  $\Xi_m$  et  $D$  un petit disque de coordonnées locales avec  $p$  pour centre, on montrera alors que  $[\Xi_m]|_{D-\{p\}}$  est holomorphe et bornée puisque  $[\Xi_m]$  est horizontale ; donc elle se prolonge en  $D$ .

LEMME 35. - Le groupe  $SO_{2m+1}$  agit sur  $I_m$  transitivement.

Démonstration : Le groupe  $SO_{2m+1}$  agit sur  $\mathbb{C}^{2m+1}$  en préservant le produit ".", donc un élément  $g$  de  $SO_{2m+1}$  applique  $I_m$  sur lui-même. Soit  $V$  un élément de  $I_m$  et soit  $(z_1, \dots, z_m)$  une base hermitienne-orthonormée. Si  $z_k = x_k + iy_k, k=1, \dots, m$ , avec  $x_k, y_k \in \mathbb{R}^{2m+1}$  alors  $\sqrt{2} \cdot \{x_1, y_1, \dots, x_m, y_m\}$  est un ensemble orthonormé de  $\mathbb{R}^{2m+1}$  orienté par \*. Posons  $u = *(x_1 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge y_m)$ . Supposons que  $V'$  soit un autre plan isotrope égal à l'espace  $\{x'_1 + iy'_1, \dots, x'_m + iy'_m\}$  et  $u' = *(x'_1 \wedge \dots \wedge y'_m)$ . Alors il existe  $g \in SO_{2m+1}$  qui envoie  $\{x_1, y_1, \dots, y_m, u\}$  sur  $\{x'_1, y'_1, \dots, y'_m, u'\}$ . ■



COROLLAIRE 36 .- On a  $I_m = SO_{2m+1} / U_m$  .

Démonstration : Le groupe d'isotropie  $G_V$  qui laisse  $V$  invariant est  $\simeq U_m$  . ■

Il est évident à partir de la structure ci-dessus que

COROLLAIRE 37 .- Il y a une application naturelle  $SO_{2m+1}$ -équivariante

$$\pi : I_m \longrightarrow S^{2m}$$

telle que  $\pi \circ [\varepsilon_m] = \psi|_{\text{dom}[\varepsilon_m]}$  .

Démonstration : L'application envoie  $V$  en  $u$  où  $V$  et  $u$  sont les mêmes que ceux de la démonstration du Lemme 35 . ■

Remarque 38 . La fibre  $\pi^{-1}(x)$  de la submersion  $\pi$  est l'espace des structures complexes orthogonales sur  $\mathbb{R}^{2m}$  qui sont compatibles avec l'orientation. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} SO_{2m} / U_m & \longrightarrow & SO_{2m+1} / U_m = I_m \\ & & \downarrow \pi \\ & & SO_{2m+1} / SO_{2m} = S^{2m} \end{array}$$

( $SO_{2m}$  agit sur  $x_1, \dots, y_m$ ).

Nous avons maintenant

$$\begin{array}{ccc} & & I_m \\ & \nearrow [\varepsilon_m] \text{ (holomorphe)} & \downarrow \pi \\ S^2 & \xrightarrow{\psi \text{ (minimale)}} & S^{2m} \end{array}$$

PROPOSITION 39 .- L'application  $\pi$  est une submersion riemannienne.

Démonstration : On prend la métrique de Fubini-Study de  $\mathbb{P}(\Lambda^m(\mathbb{C}^{2m+1}))$  et la métrique sur  $I_m = SO_{2m+1} / U_m$  induite par les inclusions  $I_m \subset G_{m, 2m+1} \subset \mathbb{P}(\Lambda^m(\mathbb{C}^{2m+1}))$ . Or  $SO_{2m+1}$

est inclus dans  $\text{Isométries}(\Lambda^m \mathbb{C}^{2m+1}) = U(\Lambda^m \mathbb{C}^{2m+1})$ . Donc la métrique kählérienne induite est  $SO_{2m+1}$  invariante. Or l'application  $\pi : I_m \rightarrow S^{2m}$  est  $SO_{2m+1}$ -équivariante. Maintenant on trouve une métrique submergée sur  $S^{2m}$ , mais il n'y a qu'une métrique invariante sur  $S^{2m}$  à homothétie près. Ainsi après multiplication de la métrique sur  $I_m$  par une constante convenable, l'application  $\pi$  sera une submersion riemannienne.

PROPOSITION 40 .- L'application  $[\Xi_m]$  est horizontale par rapport à la submersion riemannienne  $\pi$ .

Démonstration : Soit  $P$  un plan de  $I_m$ , notons  $\mathbb{G}r_m(\mathbb{C}^{2m+1})$  la grassmannienne des  $m$ -plans dans  $\mathbb{C}^{2m+1}$

$$P \in I_m \subseteq \mathbb{G}r_m(\mathbb{C}^{2m+1}) \quad .$$

L'espace  $\mathbb{C}^{2m+1}$  se décompose de la manière suivante,

$$(41) \quad \mathbb{C}^{2m+1} = P \oplus \bar{P} \oplus \mathbb{C} \cdot z \quad \text{où} \quad \pi(P) = z \quad .$$

Supposons que  $P_t$  soit une courbe dans  $\mathbb{G}r_m(\mathbb{C}^{2m+1})$  et  $r_t$  une courbe dans  $\mathbb{C}^{2m+1}$  telle que  $r_t \in P_t$ . Alors  $\dot{P}_o \equiv \frac{d}{dt} P_t |_{t=0} \in \text{Hom}(P, P^\perp)$  est donné par

$$(42) \quad \dot{P}_o(r_o) = [r_o]^{P^\perp}$$

où  $[ ]^{P^\perp}$  désigne la projection orthonormale sur  $P^\perp$ . Alors

$$\begin{aligned} T_p(I_m) &\subset T_p \mathbb{G}r_m(\mathbb{C}^{2m+1}) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, P^\perp) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P} \oplus \mathbb{C} \cdot u) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \mathbb{C} \cdot u) \quad . \end{aligned}$$

Nous allons montrer que

$$(43) \quad T_p(I_m) \simeq \{L \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P}) : (Lr) \cdot r = 0\} \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \mathbb{C}) \quad .$$

D'abord on montrera que

$$(44) \quad T_p(I_m) = \{L \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, P^\perp) : L(r) \cdot r = 0\} \quad .$$

En prenant  $r_t \in P$ ,  $r_t \in I_m$  on a  $r_t \cdot r_t = 0$ . Donc  $0 = \frac{d}{dt} (r_t \cdot r_t)|_{t=0} = 2r_o \cdot \dot{r}_o$ . En revanche  $\dot{r}_o = [\dot{r}_o]^P \oplus [\dot{r}_o]^{P^\perp}$  (où  $[L]^P$  et  $[L]^{P^\perp}$  signifient projection sur  $P$  et  $P^\perp$  respectivement) et  $[\dot{r}_o]^{P^\perp} = L(r_o)$  (voir (3.5)). Or

$$\begin{aligned} 0 &= r_o \cdot \dot{r}_o = r_o \cdot [\dot{r}_o]^P + r_o \cdot [\dot{r}_o]^{P^\perp} \\ &= r_o \cdot [\dot{r}_o]^{P^\perp} \quad \text{puisque } P \text{ est isotrope} \\ &= r_o \cdot L(r_o) \quad . \end{aligned}$$

Mais puisque  $P^\perp \perp \mathbb{C} \cdot z$ , la condition  $r \cdot L(r) = 0$  est une condition non vide uniquement sur la partie  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P})$  et (44) entraîne (43).

La fibre qui passe par  $P$  s'écrit

$$\pi^{-1}(u) = \{P' \in I_m : P' \oplus \bar{P}' = P \oplus \bar{P}\} = u^\perp \quad .$$

Evidemment

$$T_p(\text{Fibre}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P})$$

et donc

$$T_p(\text{Fibre}) = \{L \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(P, \bar{P}) : L(r) \cdot r = 0\} \quad .$$

Ce sous-espace est appelé partie verticale et le sous-espace  $\text{Hom}(P, \mathbb{C} \cdot u)$  est appelé partie horizontale. Or  $[\Xi_m(z)] = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^m \psi}{\partial z^m} \right\}_{\mathbb{C}}$ . Considérons  $\frac{\partial}{\partial z} \Xi_m$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Xi_m$ . Posons

$$P \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \psi, \dots, \frac{\partial^m \psi}{\partial z^m} \right\} \quad .$$

Or  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Xi_m$  et  $\frac{\partial}{\partial z} \Xi_m$  sont des applications  $L_{\bar{\partial}}$  et  $L_{\partial}$ , respectivement, de  $P$  à  $P^\perp$  exprimées par

$$\begin{aligned} L_{\bar{\partial}} \left( \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} \right) &= \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} \right]^{P^\perp} \\ &\equiv 0 \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\partial} \left( \frac{\partial^k}{\partial z^k} \right) &= \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \psi \right]_{P^1} \\
 &= \left[ \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} F\psi \right]_{P^1} \quad (\text{par l'équation des surfaces minimales}) \\
 &= - \left( \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} F \right) \psi
 \end{aligned}$$

d'où

$$L_{\partial} \left( \frac{\partial^k}{\partial z^k} \right) \in \mathbb{C} \cdot u \quad \text{où } u = \psi(z) .$$

Ces applications appartiennent donc à  $\text{Hom}(P, \mathbb{C} \cdot u)$  qui est la partie horizontale. ■

PROPOSITION 45 . - Soit

$$g_k = \frac{1}{F^{k(k+1)/2}} \left\| \frac{\partial}{\partial z} \psi \wedge \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi \wedge \dots \wedge \frac{\partial^k}{\partial z^k} \psi \right\|$$

pour  $k > 1$  et  $g_0 \equiv 1 \equiv g_1$  . Alors les  $g_k$  satisfont la formule de récurrence suivante

$$\Delta \log g_k = F \left( \frac{g_{k-1} g_{k+1}}{g_k^2} - 1 + \frac{k(k+1)}{2} K \right)$$

où  $K$  est la courbure de Gauss.

Démonstration : Voir Calabi [3] pour le calcul complet. ■

Nous allons montrer maintenant que les zéros de  $\Xi_m$  sont isolés à partir du lemme et du corollaire suivants :

LEMME 46 . - Soit  $\varphi = \varphi(x,y) \geq 0$  une fonction  $C^\omega$  à valeurs réelles telle que

$$\Delta \log \varphi \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\varphi \Delta \varphi - \|\nabla \varphi\|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0 .$$

Alors  $0$  est un zéro isolé de  $\varphi$ .

Démonstration : Ecrivons

$$\varphi = \sum_{m \geq m_0} p_m(x,y)$$

où  $p_m(x,y)$  est un polynôme homogène de degré  $m$ , pour tout  $m$  et où  $m_0$  est le plus petit degré pour lequel  $p_m$  n'est pas nul. Remarquons que  $\varphi \geq 0$  entraîne que  $p_{m_0} \geq 0$ . Nous supposons que  $\varphi$  possède un zéro, donc  $m_0 = 2k_0 \geq 2$ . Or le premier terme homogène de  $\varphi \Delta \varphi - \|\nabla \varphi\|^2$  qui a la possibilité d'être non nul est  $p_{m_0} \cdot \Delta p_{m_0} - \|\nabla p_{m_0}\|^2$ . Donc soit c'est le premier terme, soit c'est zéro. Dans tous les cas

$$p_{m_0} \cdot \Delta p_{m_0} - \|\nabla p_{m_0}\|^2 \geq 0$$

et

$$\Delta \log p_{m_0} \geq 0 \quad ,$$

alors, comme  $\Delta \log |z|^{m_0} < 0$ ,

$$\Delta \log \left( \frac{p_{m_0}}{|z|^{m_0}} \right) \geq 0 \quad .$$

Par ailleurs,  $p_{m_0} / |z|^{m_0}$  est une fonction  $\phi$  de l'angle  $\theta$  et

$$\Delta \log(\phi(\theta)) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\phi''\phi - (\phi')^2}{\phi^2} \right) \quad .$$

Ainsi

$$\phi''\phi - (\phi')^2 \geq 0$$

et  $\phi'' \geq 0$ . Puisque  $\phi$  est périodique, elle est constante. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= c(x^2 + y^2)^k + p_{2k+2}(x,y) + \dots \\ &= c|z|^{2k} + \dots \end{aligned}$$

a des zéros isolés. ■

COROLLAIRE 47 . - Soit  $f = f(x,y)$ ,  $g = g(x,y)$  des fonctions analytiques réelles et à valeurs réelles telles que  $g \geq 0$  et

$$\Delta(\log g + f) \geq 0 \quad .$$

Alors les zéros de  $g$  sont isolés.

Démonstration : On voit que

$$f = \log e^f = \log h \quad \text{où} \quad h \equiv e^f > 0 .$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta(\log g + f) &= \Delta(\log g + \log h) \\ &= \Delta \log(g \cdot h) \\ &= \Delta \log \varphi \end{aligned}$$

où  $\varphi \equiv g \cdot h \geq 0$  et  $h > 0$  .

Alors les zéros de  $g$  sont les zéros de  $\varphi$  qui sont isolés par le lemme 46. ■

PROPOSITION 48 .- Les zéros de  $\Xi_m$  sont isolés.

Démonstration : Prenons une solution  $f$  de l'équation

$$\Delta f = F \left( \frac{k(k+1)}{2} K - 1 \right) .$$

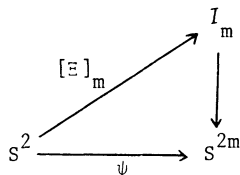
A partir de la Proposition 45

$$\Delta(\log g_k - f) \geq 0 .$$

Donc à partir du Corollaire 47 les zéros de  $g_m$  et donc les zéros de  $\Xi_m$  sont isolés. ■

On prouve maintenant la réciproque promise au paragraphe I, section 1.

THÉORÈME 49 .- Soit  $\psi : S^2 \rightarrow S^{2m}$  une immersion minimale isométrique dont l'image n'est pas contenue dans un équateur et soit  $[\Xi_m]$  l'application holomorphe construite dans la section II (voir (20) et (32) ). On peut prolonger  $[\Xi_m]$  en une application holomorphe sur  $S^2$  telle que



$\pi \circ [\Xi_m] = \psi$  où  $\pi$  est la submersion riemannienne du Corollaire 37.

Démonstration : A partir de la Proposition 48 on sait que  $\Xi_m$  ne possède que des zéros isolés. Soit  $p \in S^2$  un de ces zéros. Prenons  $D$  un disque autour de  $p$  tel que  $\Xi_m|_{D-\{p\}}$  n'ait pas de zéros. On peut prendre  $D$  tel que  $\partial\psi|_D$  soit petit. Or  $[\Xi_m]$  est horizontale par rapport à la submersion riemannienne  $\pi$ . La partie horizontale étant  $\text{Hom}(P, \mathbb{C} \cdot u)$ , (cf. prop. 40), on voit que le gradient de la projection sur la verticale restreint à  $D-\{p\}$  est presque zéro. Donc  $[\Xi_m]|_{D-p}$  est holomorphe et bornée. Par conséquent  $[\Xi_m]$  peut être prolongée à  $D$ , donc à  $S^2$ . ■

THÉORÈME 50 . Toutes ces propositions et tous ces théorèmes restent vrais si  $\psi$  est une immersion minimale conforme ramifiée.

Démonstration : Les démonstrations sont les mêmes. Il suffit simplement de travailler en dehors des points isolés où l'application tangente  $d\psi$  s'annule. A la fin on trouve que le relèvement  $[\Xi_m]$  s'étend à ces points singuliers par le même raisonnement. ■

De là on peut même prouver le théorème principal énoncé au paragraphe I. En réalité nous allons même montrer l'amélioration de Barbosa au paragraphe suivant.

#### IV. L'AIRES DE $\psi(S^2)$ .

Faisons l'observation élémentaire suivante fondée sur l'examen des bases

$$(51) \quad SO_{2m+1} / U_m \simeq SO_{2m+2} / U_{m+1} \quad .$$

Grâce au Corollaire 36 nous obtenons

$$I_m \simeq SO_{2m+1} / U_m \quad .$$

La fibre de  $\pi : I_m \rightarrow S^{2m}$  est donc  $I_{m-1}$  et on a le fibré

$$(52) \quad \begin{array}{ccc} I_{m-1} \simeq SO_{2m} / U_m & \longrightarrow & I_m \simeq SO_{2m+1} / U_m \\ & & \downarrow \\ & & S^{2m} \simeq SO_{2m+1} / SO_{2m} \quad . \end{array}$$

Par conséquent nous avons une suite de fibrés

$$(53) \quad \begin{array}{ccccccccc} * & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & I_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & I_{m-2} & \longrightarrow & I_{m-1} & \longrightarrow & I_m \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S^2 & & S^2 & & & & S^{2(m-2)} & & S^{2(m-1)} & & S^{2m} \end{array}$$

dont les derniers sont

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & I_1 = S^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^3 = I_2 \quad (\diamond) \\ & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ & & S^2 \qquad \qquad S^4 \quad . \end{array}$$

A partir des suites exactes d'homotopie, nous avons pour ces fibrés

$$\begin{aligned} 0 = \pi_2(S^{2k}) &\longrightarrow \pi_1(I_{k-1}) \longrightarrow \pi_1(I_k) \longrightarrow \pi_1(S^{2k}) = 0 \quad , \quad k > 1 \quad , \\ 0 = \pi_3(S^{2k}) &\longrightarrow \pi_2(I_{k-1}) \longrightarrow \pi_2(I_k) \longrightarrow \pi_2(S^{2k}) = 0 \quad , \quad k > 1 \end{aligned}$$

[cf. Spanier p. 377],

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad \pi_1(I_m) &= \pi_1(I_{m-1}) = \dots = \pi_1(I_1) = 0 \quad , \\ \pi_2(I_m) &= \pi_2(I_{m-1}) = \dots = \pi_2(I_1) = \mathbb{Z} \quad . \end{aligned}$$

[Donc  $H_1(I_m) = 0$ ] et  $f: S^2 = I_1 \rightarrow I_m$  induit un isomorphisme

$$\mathbb{Z} \simeq H_2(S^2) \xrightarrow{\cong} H_2(I_m) \quad [\text{Hurewicz : cf. Spanier p. 394}].$$

Soit  $\Sigma_o \subset I_m \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  un représentant d'un générateur de  $H_2(I_m)$  et soit  $C$  une courbe algébrique en  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  de degré  $d$ . Alors  $\text{aire}(C) = d (\text{aire}(\Sigma_o))$ . En parcourant le diagramme (53) on se retrouve à  $I_1 \rightarrow S^2$  qui est l'identité et qui est une isométrie. Donc l'aire de  $\Sigma_o$  vaut  $4\pi$ , d'où la preuve de l'extension du théorème principal.

---

( $\diamond$ ) C'est ici le classique isomorphisme  $SU_4 \simeq Spin_6$ .



RÉFÉRENCES.

- [1] L. BARBOSA, On minimal immersions of  $S^2$  into  $S^{2m}$ , Trans. Amer. Math. Soc. 210 (1975), 75-106.
- [2] E. CALABI, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minimale, in Topics in Complex Manifolds (Ed. H. Rossi), Les Presses de l'Université de Montréal (1967), 59-81.
- [3] E. CALABI, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Differential Geometry 1 (1967), 111-125.
- [4] J. EELLS and L. LEMAIRE, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), 1-68.
- [5] H. HOPF, Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen, Math. Nachr. 4 (1950/51), 232-249.

-----

L'auteur visitait l'IHES lors de la tenue du séminaire. Son adresse permanente est

M.L. MICHELSON  
Department of Mathematics  
STONY BROOK NY 11794  
(U.S.A.)