

Astérisque

MAX KAROUBI

Homologie cyclique et K -théorie

Astérisque, tome 149 (1987)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__149__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__149__1_0)

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

149

ASTÉRISQUE

1987

**HOMOLOGIE CYCLIQUE
ET
K-THÉORIE**

Max KAROUBI

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : Primary 16, 19, 53, 55
Secondary 22, 47

HOMOLOGIE CYCLIQUE ET K-THÉORIE

Max Karoubi

Ce livre représente le produit de réflexions de l'auteur sur la théorie des classes caractéristiques, vue sous l'angle de la géométrie différentielle et de la K-théorie. A l'origine de ces réflexions, il s'agissait de comprendre le caractère de Chern classique

$$K(X) \xrightarrow{\alpha} H^{\text{pair}}(X) = \bigoplus H^{2i}(X)$$

où $K(X)$ désigne le groupe de Grothendieck-Atiyah-Hirzebruch associé aux fibrés vectoriels complexes [2] et où $H^{\text{pair}}(X)$ est la cohomologie de De Rham de degré pair de la variété X . On sait que l'image de α est un réseau dans l'espace vectoriel de dimension finie $H^{\text{pair}}(X)$ et que le noyau de α est un groupe fini (cf. [23] par exemple).

Dans une première approche (esquissée en 1981 dans [27] et deux prépublications), nous avons défini un "caractère de Chern" généralisé

$$\text{Ch}_r : K_n(A) \longrightarrow \overline{H}_{n+2r}(A)$$

Ici $K_n(A)$ désigne la K-théorie algébrique de Quillen [43] et $\overline{H}_i(A)$ est "l'homologie de De Rham non commutative" de la k -algèbre A (cf. le §1 pour les détails). Si A est l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété X , cette théorie coïncide essentiellement avec la cohomologie de De Rham $H^*(X)$. Puisque $K_0(A) \simeq K(X)$ d'après le théorème de Serre-Swan [25], on retrouve donc bien le caractère de Chern classique dans ce cas particulier.

L'introduction de l'homologie et de la cohomologie cycliques par A. Connes [12], puis les progrès faits dans cette théorie "cyclique" par J.L. Loday, D. Quillen, Feigin, Tsygan [13] [36] [47] ont permis de mieux comprendre cette

théorie $\overline{H}_i(A)$ (*). Réinterprété dans le langage cyclique, le caractère de Chern généralisé décrit précédemment apparaît alors comme un homomorphisme

$$\tilde{Ch}_r : K_n(A) \longrightarrow HC_{n+2r}(A)$$

$HC_*(A)$ désignant maintenant l'homologie cyclique telle qu'elle est exposée dans [36]. La définition de $\tilde{Ch}_r$ est relativement aisée dans un contexte d'algèbre homologique et le lecteur intéressé pourra l'étudier de manière indépendante des préliminaires et motivations géométriques du §1 (cf. 2.17-2.33). On en déduit entre autre l'accouplement

$$K_0(A) \times HC^{2r}(A) \longrightarrow k$$

décrit par A. Connes [12].

L'intérêt des préliminaires géométriques du §1 n'est pas purement historique (en fait, on peut aussi inverser les choses et définir l'homologie cyclique à partir du complexe de De Rham non commutatif tronqué convenablement : cf. le théorème 2.14). Ils permettent d'aller beaucoup plus loin dans la définition d'invariants de la K-théorie. En effet, si A est une algèbre de Banach par exemple, on dispose aussi des groupes de K-théorie topologique $K_n^{top}(A)$ (définis si l'on veut comme les groupes d'homotopie $\pi_{n-1}(GL(A))$, $GL(A)$ désignant le groupe linéaire infini $\varinjlim_r GL_r(A)$, muni de la topologie limite inductive). Par les méthodes géométriques des §1 et 4 et avec des modifications techniques évidentes dues à la présence de la topologie, on arrive à définir aussi un homomorphisme

$$Ch_r^{top} : K_n^{top}(A) \longrightarrow HC_{n+2r}(A)$$

compatible dans un certain sens avec la périodicité de Bott (corollaire 4.17). En fait, plus généralement, si on désigne par $K_A^{top}(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés sur X dont la fibre est un A -module projectif de type fini, on définit un homomorphisme

$$K_A^{top}(X) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=2r} H^p(X; HC_q(A))$$

qui redonne essentiellement Ch_r^{top} pour $X = S^n$ (4.12).

La comparaison des homomorphismes $\tilde{Ch}_r$ et Ch_r^{top} se fait le plus commodément par l'introduction de méthodes simpliciales (§5) et par la description de la

(*) Pour $i > 0$, on a par exemple $\overline{H}_i(A) \approx \text{Ker}(\overline{HC}_i(A) \xrightarrow{B} H_{i+1}(A, A))$, $\overline{HC}_*(A)$ désignant l'homologie cyclique réduite et $H_*(A, A)$ l'homologie de Hochschild (théorème 2.15).

K-théorie algébrique en termes de fibrés plats (§3). La notion nouvelle de "fibré repéré" sur un ensemble simplicial (qui est l'outil technique essentiel de ce travail de comparaison) reprend en fait une vieille idée de N.Steenrod qui consiste à définir un fibré par ses fonctions de transition. Ces méthodes simpliciales permettent aussi de généraliser aux algèbres de Fréchet les classes caractéristiques topologiques du §4 construites pour les algèbres de Banach seulement (6.15-18).

Cependant, si l'homologie cyclique de A est trop triviale (par exemple si $A = \mathbb{C}$ considérée comme $\mathbb{C}$ -algèbre), les invariants Ch_r construits précédemment ne sont pas suffisants pour détecter certains éléments non triviaux de la K-théorie algébrique de A . Ainsi, les méthodes développées dans les cinq premiers paragraphes ne permettent pas de traiter certaines situations élémentaires comme celle des fibrés plats complexes. C'est le cas par exemple de l'homomorphisme $K_i(A) \longrightarrow HC_{i+2r}(A)$ qui est réduit à 0 lorsque $A = \mathbb{C}$ ou lorsque A est un corps de nombres.

Pour remédier à cette situation, la géométrie différentielle nous conduit encore à introduire de nouvelles classes caractéristiques (cf. les travaux de Chern-Cheeger-Simons [10][11] par exemple). Plus précisément, si A est une algèbre de Banach par exemple, l'introduction de ces nouvelles classes caractéristiques se fait par l'intermédiaire de groupes de "K-théorie relative" $K_i^{rel}(A)$ (§6) et de "K-théorie multiplicative" $MK_i(A)$ (§7). Les premiers sont définis comme les groupes d'homotopie de la fibre homotopique de l'application

$$BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^{top}$$

Ici $BGL(A)^{top}$ désigne l'espace classifiant de $GL(A)$ muni de sa topologie usuelle de limite inductive de groupes de Lie-Banach $GL_q(A)$. Comme nous le verrons dans un travail en collaboration avec A. Connes [14] faisant partiellement suite à celui-ci, un intérêt de ces groupes est de s'insérer dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{i+1}(A) & \longrightarrow & K_{i+1}^{top}(A) & \longrightarrow & K_i^{rel}(A) & \longrightarrow & K_i(A) & \longrightarrow & K_i^{top}(A) \\ \downarrow D_{i+1} & & \downarrow ch_{i+1} & & \downarrow ch_i^{rel} & & \downarrow D_i & & \downarrow ch_i \\ H_{i+1}(A,A) & \longrightarrow & HC_{i+1}(A) & \longrightarrow & HC_{i-1}(A) & \longrightarrow & H_i(A,A) & \longrightarrow & HC_i(A) \end{array}$$

(comparer avec le théorème 6.23)). Dans ce diagramme, la première suite est la suite exacte d'homotopie associée à la fibration $BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A)^{top}$ et la deuxième est une version duale de la suite exacte fondamentale d'A. Connes [12]. Si $A = \mathbb{C}$ et i impair par exemple, on en déduit immédiatement la classe caractéristique secondaire

$$\alpha_i : K_i(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

grâce à la périodicité de Bott. En utilisant les résultats de Suslin [46] et de Borel [5], on démontre que α_i induit un isomorphisme sur la torsion et détecte la partie libre de la K-théorie algébrique de corps de nombres en les plongeant dans $\mathbb{C}$ (6.30).

Les groupes de K-théorie multiplicative $MK_i(A)$ sont plus subtils et possèdent les mêmes propriétés que des groupes analogues (probablement isomorphes) introduits par G. Segal : ils s'insèrent dans des suites exactes du type

$$K_{i+1}^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{i-1}(A) \longrightarrow MK_i(A) \longrightarrow K_i^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{i-2}(A)$$

On a alors un homomorphisme canonique $K_i(A) \xrightarrow{\mathcal{E}h_i} MK_i(A)$ ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K_{i+1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & H_i^{\text{rel}}(A) & \longrightarrow & K_i(A) & \longrightarrow & K_i^{\text{top}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ch}_i^{\text{rel}} & & \downarrow \mathcal{E}h_i & & \downarrow \\ K_{i+1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & HC_{i-1}(A) & \longrightarrow & MK_i(A) & \longrightarrow & K_i^{\text{top}}(A) \end{array}$$

Cette K-théorie multiplicative (écrite dans un cadre simplicial) permet entre autres choses de définir une application canonique

$$BGL_n(\mathbb{C})^+ \longrightarrow \mathcal{F}_n$$

qui s'insère dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}_n \\ & \nearrow & \downarrow \\ BGL_n(\mathbb{C})^+ & \longrightarrow & BGL_n(\mathbb{C})^{\text{top}} \\ & \searrow & \downarrow n \\ & & \prod_{i=1}^n K(\mathbb{C}, 2i) \end{array}$$

où $\mathcal{F}_n$ est la fibre homotopique de la flèche $BGL_n(\mathbb{C})^{\text{top}} \xrightarrow{\text{ch}_i} \prod_{i=1}^n K(\mathbb{C}, 2i)$.

En faisant $n = \infty$, on en déduit un homomorphisme canonique de la K-théorie algébrique réduite $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(X) \approx [X, BGL(\mathbb{C})^+]$ vers ce qu'on pourrait appeler la K-théorie topologique à coefficients $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_n$. Les classes caractéristiques de fibrés complexes plats de Chern-Cheeger-Simons appartenant à $H^{2i-1}(X; \mathbb{C}^*)$ s'en déduisent (cf. [10][17][41] pour d'autres approches).

Dans une prochaine rédaction (cf. déjà la prépublication [30]), nous introduirons

des variantes de cette K -théorie multiplicative dans d'autres contextes géométriques (fibrés holomorphes, algébriques, feuilletés; cas ultramétrique, etc...). Nous montrerons alors comment l'homologie cyclique convenablement généralisée permet de construire des classes caractéristiques secondaires dans ces nouveaux contextes.

Le lecteur pourra, s'il le désire, consulter d'amples résumés de ce travail dans l'article [27] et dans les notes [28][29] présentées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

TABLE DES MATIÈRES

I. LE CARACTÈRE DE CHERN POUR LE GROUPE K_0 EN HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE

- 1.1-6. Homologie de De Rham non commutative
- 1.7-16. Connexions et courbures
- 1.17-24. Le caractère de Chern
- 1.25-27. Cas où $\Omega_*(A)$ est une algèbre commutative

II. RELATION ENTRE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE ET L'HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE.
DÉFINITION DU CARACTÈRE DE CHERN EN K-THÉORIE ALGÈBRIQUE.

- 2.1-11. Homologie cyclique
- 2.12-16. Relation entre l'homologie cyclique et l'homologie de De Rham non commutative
- 2.17-21. L'homomorphisme $\tilde{Ch}_0^\ell : K_0(A) \rightarrow HC_{2\ell}(A)$
- 2.21-26. Intermède sur l'homologie cyclique des groupes
- 2.27-36. Les homomorphismes $D_i : K_i(A) \rightarrow H_i(A, A)$
et $\tilde{Ch}_i^\ell : K_i(A) \rightarrow HC_{i+2\ell}(A)$

III. DÉFINITION DE LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE EN TERMES DE FIBRÉS PLATS

- 3.1-5. A-fibrés plats virtuels et leur groupe de Grothendieck $\overline{K}_A(X)$
- 3.6-13. L'isomorphisme $\overline{K}_A(X) \simeq K_A(X) = [X, K_0(A) \times BGL(A)^+]$

IV. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE CYCLIQUES TOPOLOGIQUES. DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES

- 4.1-4. Homologie de De Rham non commutative topologique
- 4.5-8. Définition et calcul de la cohomologie $H_A^*(X)$
- 4.9-18. A-fibrés topologiques et leurs classes caractéristiques
- 1.19-33. A-fibrés plats et leurs classes caractéristiques

V. INTERPRÉTATION SIMPLICIALE DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES

- 5.1-4. G-fibrés repérés
- 5.6-16. Interprétation simpliciale des classes caractéristiques

5.17-29. Comparaison des diverses classes caractéristiques en K-théorie algébrique

VI. CLASSES CARACTÉRISTIQUES RELATIVES DE A-FIBRÉS PLATS

6.1-14. K-théorie relative des algèbres de Banach

6.15-18. Interprétation simpliciale de la K-théorie relative et extension aux algèbres de Fréchet

6.19-26. Classes caractéristiques de la K-théorie relative

6.27-32. Le cas commutatif. Exemples

VII. K-THÉORIE MULTIPLICATIVE ET HOMOLOGIE CYCLIQUE

7.1-7. Définition et premières propriétés de la K théorie multiplicative

7.8-18. Relation avec la K-théorie algébrique et la K-théorie relative

7.19-31. Etude du cas $A = \mathbb{C}$: classes caractéristiques de fibrés plats complexes

APPENDICES

A.1. Compléments sur le chapitre 3

A.2. Invariance homotopique de l'homologie de De Rham non commutative

A.3. Espaces classifiants de la K-théorie multiplicative

A.4. K-théorie algébrique de l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété

A.5. Homologie cyclique de l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété.

I. LE CARACTÈRE DE CHERN POUR LE GROUPE K_0 EN HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE

HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE (1.1-6)

1.1. Le but de ce paragraphe de nature élémentaire est de montrer comment la théorie de Chern-Weil classique pour la construction de classes caractéristiques de fibrés vectoriels complexes [40] peut s'interpréter algébriquement dans le cadre des modules projectifs sur une $\mathbb{Q}$ -algèbre arbitraire A (cf. 1.23 pour des hypothèses un peu moins restrictives sur la caractéristique). Cette interprétation est due indépendamment à A. Connes dans le cadre de la cohomologie cyclique [12] et à l'auteur de ces Notes dans le cadre de l'homologie de De Rham non commutative [27]. La relation entre ces deux "homologies" et les deux types de classes caractéristiques sera faite dans le paragraphe suivant (cf. 2.13 et 2.18).

1.2. De manière plus précise, si X est une variété compacte par exemple et si A désigne l'algèbre des fonctions complexes sur X de classe C^r , $0 \leq r \leq +\infty$, il est bien connu (théorème de Serre-Swan [25]) que la catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à celle des A -modules projectifs de type fini. L'équivalence est donnée par le foncteur qui associe à un fibré vectoriel le A -module de ses sections de classe C^r . En particulier, le groupe de Grothendieck-Atiyah-Hirzebruch $K(X)$ est isomorphe au groupe $K_0(A)$ [25]. Si maintenant $r \geq 1$, le caractère de Chern usuel (cf. [40]) permet d'associer à un fibré vectoriel E muni d'une connexion D des formes différentielles $Ch_p(E, D) \in \Omega^{2p}(X)$ (espace vectoriel des formes différentielles de degré $2p$ sur X). La classe de cohomologie de $Ch_p(E, D)$ est indépendante du choix de D et on peut ainsi définir un homomorphisme de groupes

$$Ch_p : K(X) \longrightarrow H^{2p}(X)$$

où $H^*(X)$ désigne la cohomologie de De Rham. Nous allons montrer comment cette construction se généralise (et se simplifie) pour donner lieu à un homomorphisme

$$Ch_p : K_0(A) \longrightarrow H_{2p}(A)$$

Ici $H_*(A)$ désigne une "théorie de l'homologie" associée à l'algèbre A et généralisant la cohomologie de De Rham des variétés (cf. 1.4) dans le sens où A est maintenant une $\mathbb{Q}$ -algèbre quelconque (unitaire mais non nécessairement commutative). C'est une façon d'introduire l'homologie cyclique comme le verrons dans le para-

graphe suivant mais aussi de motiver la construction des classes caractéristiques primaires et secondaires sur les groupes $K_i(A)$ et $K_i^{\text{top}}(A)$ (du moins pour une algèbre de Banach A). Certaines définitions développées ici se retrouvent dans des notes (non publiées) de D. Burghéla.

1.3. Soit donc A une k -algèbre arbitraire avec $k \supset \mathbb{Q}$. Nous supposons donnée une algèbre graduée $\Omega_*(A) = \Omega_0(A) \oplus \Omega_1(A) \oplus \Omega_2(A) \oplus \dots$ (non nécessairement commutative) avec $\Omega_0(A) = A$, muni d'une "dérivation" de degré un, c'est-à-dire d'applications k -linéaires $d_i = d : \Omega_i(A) \rightarrow \Omega_{i+1}(A)$ vérifiant la relation $d^2 = 0$ ainsi que la relation

$$d(\omega_i \cdot \omega_j) = d\omega_i \cdot \omega_j + (-1)^i \omega_i \cdot d\omega_j$$

pour $\omega_i \in \Omega_i(A)$ et $\omega_j \in \Omega_j(A)$. En particulier, les k -modules $\Omega_i(A)$ sont des A -bimodules. Par commodité de langage, nous appellerons souvent $\Omega_*(A)$ une quasi-résolution de A (le complexe $\Omega_*(A)$ n'étant pas une résolution de A en général).

Soit maintenant $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]_t$ le k -module engendré par les commutateurs gradués $[\omega_i, \omega_j] = \omega_i \cdot \omega_j - (-1)^{ij} \omega_j \cdot \omega_i$ avec $\omega_i \in \Omega_i(A)$, $\omega_j \in \Omega_j(A)$ et $i+j = t$. On posera alors $\bar{\Omega}_t(A) = \Omega_t(A) / [\Omega_*(A), \Omega_*(A)]_t$ et on appellera trace graduée l'application canonique

$$T : \Omega_t(A) \rightarrow \bar{\Omega}_t(A)$$

D'autre part, on a la relation $d([\omega_i, \omega_j]) = [d\omega_i, \omega_j] + (-1)^i [\omega_i, d\omega_j]$ ce qui montre que la différentielle d passe au quotient dans le complexe $\bar{\Omega}_*(A)$.

L'homologie de ce complexe quotient est appelée homologie de De Rham non commutative de $\Omega_*(A)$ (ou simplement de A si le complexe $\Omega_*(A)$ est sous-entendu par le contexte). On la notera $H\bar{\Omega}_*(A)$ ou même $\bar{H}_*(A)$ s'il n'y a pas de risque de confusion (voir aussi 1.24).

1.4. Exemple. Si $\Omega_*(A)$ est une algèbre commutative (au sens gradué), on a $\omega_i \omega_j = (-1)^{ij} \omega_j \omega_i$, $\Omega_*(A) = \bar{\Omega}_*(A)$ et $H\bar{\Omega}_*(A)$ est simplement l'homologie du complexe $\Omega_*(A)$. Un exemple typique d'une telle situation est celui où A est l'algèbre Λ des fonctions différentiables sur une variété X qui sont de classe C^r , $r \geq 1$. Ici $\Omega_i(\Lambda) = \Omega^i(X)$ est l'espace vectoriel des formes différentielles ω de degré i telles que ω et $d\omega$ soient de classe C^{r-1} . On a alors $\bar{H}_i(\Lambda) \approx H^i(X)$, cohomologie de De Rham de la variété X .

1.5. Exemple. Soit maintenant $\Omega_*(A)$ l'algèbre différentielle graduée obtenue en considérant l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans l'exemple $\Omega_*(\Lambda)$ précédent. On a donc $A = M_n(\Lambda)$ et $\Omega_*(A) = M_n(\Omega_*(\Lambda))$. Tout élément de $\Omega_i(A)$

peut ainsi s'écrire comme une matrice

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} \\ & & \\ \omega_{n1} & & \omega_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $\omega_{\beta\alpha} \in \Omega^1(X)$. Il n'est pas difficile de montrer que $\overline{\Omega}_i(A) \approx \Omega_i(A) \approx \Omega^i(X)$, la trace graduée correspondant à la trace usuelle des matrices. On a donc encore $\overline{H}_i(A) \approx H^i(X)$.

Pour illustrer cet exemple, considérons plus particulièrement le cas où $X = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ et considérons dans $\Omega_*(A)$ le produit des trois matrices d'ordre 2 J.dJ.dJ

$$\text{où } J = \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{pmatrix} \quad dJ = \begin{pmatrix} dx & dy+idz \\ dy-idz & -dx \end{pmatrix}$$

On trouve la matrice suivante de formes différentielles de degré 2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec $a_{11} = -2i x \, dy \wedge dz + 2(y+iz)dx \wedge (-dy+idz)$

$a_{12} = 2x \, dx \wedge (dy+idz) + 2i(y+iz) \, dy \wedge dz$

$a_{21} = -2i(y-iz) \, dy \wedge dz + 2x \, dx \wedge (dy+idz)$

$a_{22} = 2(y-iz)dx \wedge (dy+idz) - 2ix \, dy \wedge dz$

On notera que la trace de cette matrice est

$$-4i(x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy)$$

c'est-à-dire un multiple non nul de la forme volume de S^2 (comparer avec 1.27).

Remarque : Plus généralement, si $\Omega_*(A)$ est une algèbre graduée quelconque et si on pose $\Omega_*(A') = M_n(\Omega_*(A))$, on a $\overline{\Omega}_*(A) \approx \overline{\Omega}_*(A')$, l'isomorphisme étant induit par la trace usuelle des matrices suivie de la trace graduée.

CONNEXIONS ET COURBURES (1.7-16)

1.7. DÉFINITION. Soit A une k -algèbre et soit $\Omega_*(A)$ une algèbre graduée vérifiant les conditions écrites en 1.3. Soit E un A -module à droite projectif de type fini. Une connexion sur E est la donnée d'un homomorphisme k -linéaire

$$D : E \longrightarrow E \otimes_A \Omega_1(A)$$

vérifiant la relation de Leibniz

$$D(s\lambda) = s \otimes d\lambda + D(s)\lambda$$

pour $\lambda \in A$ et $s \in E$.

1.8. Commentaires et exemples. Si $\lambda \in A = \Omega_0(A)$, $d\lambda \in \Omega_1(A)$.

En outre, $\Omega_1(A)$ est un A -bimodule : la structure de A -module à gauche permet de définir $E \otimes_A \Omega_1(A)$, celle de A -module à droite permet de définir la structure de A -module à droite de $E \otimes_A \Omega_1(A)$.

Une autre façon de définir une connexion est d'introduire le k -module des "jets d'ordre un" $J_1(E)$: en tant que k -module c'est la somme directe $E \oplus (E \otimes_A \Omega_1(A))$. Il peut être muni d'une structure de A -module à droite par la formule

$$(s, \omega) \cdot \lambda = (s\lambda, s \otimes d\lambda + \omega\lambda)$$

où $(s, \omega) \in J_1(E)$ et $\lambda \in A$. On a une suite exacte de A -modules à droite

$$0 \longrightarrow E \otimes_A \Omega_1(A) \longrightarrow J_1(E) \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$$

La donnée d'une connexion équivaut alors à celle d'un scindage de cette suite.

En effet, si $D' : E \longrightarrow J_1(E)$ est défini par $D'(s) = (s, D(s))$, on a $D' \cdot \pi = \text{Id}_E$.

Si $E = A^n$, on peut identifier $E \otimes_A \Omega_1(A)$ à $(\Omega_1(A))^n$. Soit

$d : A^n \longrightarrow (\Omega_1(A))^n$ l'application définie par $d(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (d\lambda_1, \dots, d\lambda_n)$.

Alors d est une connexion sur A^n . Si D est une autre connexion, $D-d$ est une application A -linéaire de A^n dans $(\Omega_1(A))^n$. Si on écrit cela matriciellement, on a donc

$$D \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\lambda_1 \\ \vdots \\ d\lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \dots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

soit simplement $D(s) = ds + \Gamma \cdot s$ où $s = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est un élément de A^n écrit sous forme de matrice colonne et où $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ est une matrice à coefficients

dans $\Omega_1(A)$.

Dans ce dernier exemple, il est particulièrement intéressant de calculer comment se transforme la matrice Γ lorsqu'on change de base dans A^n . Si (e_i) est une base d'un module libre de rang n (donc isomorphe à A^n), la matrice Γ est définie par la relation $D(e_j) = \sum_i e_i \Gamma_{ij}$ où $\Gamma_{ij} \in \Omega_1(A)$. Si (e'_i) est une autre base, définissons la matrice de passage $\alpha = (a_{ij})$ entre les deux bases par l'identité $e'_j = \sum_i e_i a_{ij}$, la matrice inverse $\alpha^{-1} = (b_{ij})$ étant définie par l'identité $e_j = \sum_i e'_i b_{ij}$. En faisant les calculs, on trouve alors

$$D(e'_j) = \sum_{i,k,r} e'_i b_{ik} \Gamma_{kr} a_{rj} + \sum_{i,k} e'_i b_{ik} da_{kj}$$

Autrement dit, dans la base (e'_i) , la "matrice" de la connexion D est donnée par la formule suivante

$$\Gamma' = \alpha^{-1} \Gamma \alpha + \alpha^{-1} d\alpha$$

1.9. Si E est projectif de type fini, donc facteur direct de A^n pour un certain n et si ∇ est une connexion sur A^n , on peut définir une connexion D sur E par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\nabla} & A^n \otimes_A \Omega_1(A) \approx (\Omega_1(A))^n \\ i \uparrow & & \downarrow j \otimes \text{Id} \\ E & \xrightarrow{D} & E \otimes_A \Omega_1(A) \end{array}$$

où i (resp. j) est l'injection (resp. la projection) canonique.

En particulier, si ∇ est la connexion d définie en 1.8, D est appelée la "connexion de Levi-Civita" par analogie avec la situation classique en géométrie différentielle. Dans ce cas, A est l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété X plongée dans $\mathbb{R}^n$, E le A -module formé des sections du fibré tangent. La donnée d'une métrique riemannienne sur X permet alors d'écrire $A^n = E \oplus E'$ où E' est l'espace des sections du fibré normal. Bien entendu, $\Omega_1(A)$ est ici le A -bimodule des formes différentielles de degré un sur X .

En outre, dans le cas général, on peut expliciter entièrement D en fonction de ∇ et du projecteur $p = i.j$. En effet, si on identifie E à un sous-module de A^n grâce à l'injection i , on a $D(s) = p\nabla(s)$. Si $\nabla = d$, on a simplement $D(s) = p.ds$ pour tout $s \in E \subset A^n$.

1.10. PROPOSITION. Soit D une connexion sur E . Il existe alors une et une seule extension de D en un homomorphisme k -linéaire

$$D_* : E \otimes_A \Omega_*(A) \longrightarrow E \otimes_A \Omega_{*+1}(A)$$

avec $D_0 = D$, vérifiant l'identité suivante

$$D_*(s_1 \cdot \omega) = D_*(s_1) \cdot \omega + (-1)^i s_1 \cdot d\omega$$

où $s_1 \in E \otimes_A \Omega_1(A)$ et $\omega \in \Omega_*(A)$ ($E \otimes_A \Omega_*(A)$ étant considéré comme module à droite sur $\Omega_*(A)$).

Démonstration. L'unicité de D_n résulte évidemment de la formule précédente avec

$s_1 = s \in E \otimes_A \Omega_0(A) \approx E$ et $\omega \in \Omega_n(A)$: on obtient ainsi la formule définissant D_n , soit $D_n(s \otimes \omega) = D(s) \cdot \omega + s \cdot d\omega$. Si on considère maintenant $s_1 = s \otimes \omega \in E \otimes_A \Omega_1(A)$

et $\omega' \in \Omega_j(A)$, on a $D_{i+j}(s_1 \cdot \omega') = D_{i+j}(s \cdot \omega \omega') = D(s) \cdot \omega \omega' + s \cdot d(\omega \omega') = Ds \cdot \omega \omega' + (s \cdot d\omega) \omega' + (-1)^i (s \cdot \omega) \cdot d\omega' = D_i(s \cdot \omega) \cdot \omega' + (-1)^i (s \cdot \omega) \cdot d\omega' = D_i(s_1) \cdot \omega' + (-1)^i s_1 \cdot d\omega'$.

1.11. Notation. Par abus d'écriture, on notera encore D l'extension de D à $E \otimes_A \Omega_*(A)$ qu'on vient de définir. C'est le même abus que celui qu'on s'est déjà autorisé en écrivant d la différentielle générique $d_n : \Omega_n(A) \longrightarrow \Omega_{n+1}(A)$.

Il y a cependant une différence notable : on n'aura pas en général $D^2 = 0$ (cf. la définition de la courbure d'une connexion en 1.13).

1.12. Exemple. Supposons que $E = A^n$. Il existe alors une matrice Γ à coefficients dans $\Omega_1(A)$ telle que $Ds = ds + \Gamma \cdot s$ (cf. 1.8).

Donc $D(s \otimes \omega) = Ds \cdot \omega + s \cdot d\omega = (ds + \Gamma \cdot s) \cdot \omega + s \cdot d\omega = ds \cdot \omega + s \cdot d\omega + \Gamma \cdot (s \otimes \omega) = d(s \otimes \omega) + \Gamma \cdot (s \otimes \omega)$. En d'autres termes, on a encore la formule $D \cdot s_1 = ds_1 + \Gamma \cdot s_1$

1.13. Avec cette extension de la définition de D , la composition D^2 de D par elle-même a un sens : c'est un homomorphisme k -linéaire

$$D^2 : E \otimes_A \Omega_*(A) \longrightarrow E \otimes_A \Omega_{*+2}(A)$$

En fait, D^2 est un homomorphisme de $\Omega_*(A)$ -module à droite. En effet, si $s_1 \in E \otimes_A \Omega_n(A)$, on a

$$\begin{aligned} D^2(s_1 \cdot \omega) &= D(ds_1 \cdot \omega + (-1)^n s_1 \cdot d\omega) \\ &= D^2 s_1 \cdot \omega + (-1)^{n+1} Ds_1 \cdot d\omega + (-1)^n Ds_1 \cdot d\omega + (-1)^n s_1 \cdot d^2 \omega \\ &= D^2 s_1 \cdot \omega \end{aligned}$$

Ceci montre que D^2 est entièrement déterminé par l'homomorphisme de A -modules

$$R : E \otimes_A \Omega_0(A) \longrightarrow E \otimes_A \Omega_2(A)$$

C'est par définition la courbure associée à la connexion D .

1.14. Exemple. Reprenons l'exemple 1.12. Si $s \in E$, on a

$$\begin{aligned} Ds &= ds + \Gamma.s \\ D^2s &= D(ds + \Gamma.s) = d(ds + \Gamma.s) + \Gamma.(ds + \Gamma.ds) \\ &= d\Gamma.s - \Gamma.ds + \Gamma.ds + \Gamma^2s \\ &= (d\Gamma + \Gamma^2).s \end{aligned}$$

Ainsi, la courbure associée à la connexion D de matrice Γ est déterminée par la matrice $d\Gamma + \Gamma^2$ dont les coefficients appartiennent à $\Omega_2(A)$.

1.15. Exemple. Reprenons l'exemple de la connexion de Levi-Civita décrit en 1.9. Si $s \in E \subset A^n$, on a $Ds = pd(s)$. Donc $D(s \otimes \omega) = Ds.\omega + s.d\omega = pds.\omega + s.d\omega = pds.\omega + ps.d\omega = pd(s \otimes \omega)$. Donc on a la formule

$$D.s_1 = pd(s_1)$$

pour tout $s_1 \in E \otimes_A \Omega_*(A) \subset A^n \otimes_A \Omega_*(A) \approx (\Omega_*(A))^n$. Si $s \in E$, on a donc

$$D^2(s) = D(pds) = pd(pds) = p.dp.ds$$

Puisque $s = ps$, on a $ds = dp.s + p.ds$. Donc

$$D^2(s) = p.dp.dp.s + p.dp.p.ds$$

D'autre part, $p^2 = p$ et par suite $dp.p = (1-p).dp$ et $p.dp.p = p.(1-p).dp = 0$. On obtient ainsi finalement

$$R(s) = p.dp.dp.s$$

pour tout $s \in E \subset A^n$. Ainsi la courbure associée à la connexion de Levi-Civita est déterminée par la matrice $p.dp.dp$ dont les coefficients appartiennent bien à $\Omega_2(A)$. On pourra noter que cette matrice définit bien un homomorphisme de A -modules $E \rightarrow E \otimes_A \Omega_2(A)$ lorsqu'on identifie E (resp. $E \otimes_A \Omega_2(A)$) à un facteur direct de A^n (resp. $(\Omega_2(A))^n$) grâce au projecteur p .

Si par exemple E est l'espace des sections du fibré de Hopf sur S^2 , il correspond au projecteur $p = \frac{1+J}{2}$ avec les notations de 1.5. Donc

$p.dp.dp = \frac{J}{8} dJ.dJ + \frac{1}{8} dJ.dJ$ dont la trace est $-\frac{i}{2} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$ c'est-à-dire encore un multiple non nul de la forme volume de S^2 (cf. aussi 1.27).

1.16. Avant de continuer, nous allons devoir ouvrir une courte parenthèse sur la notion générale de trace d'un endomorphisme. Soit B un anneau (non nécessairement commutatif) et soit F un B -module à droite projectif de type fini. On désigne par F^* le module "dual", c'est-à-dire l'ensemble des B -homomorphismes $f : F \rightarrow B$ (on a donc $f(x\lambda) = f(x)\lambda$ pour $x \in F$ et $\lambda \in B$). Alors F^* est en fait un B -module à gauche : on pose $(\mu f)(x) = \mu f(x)$ pour $\mu \in B$ et $f \in F^*$.

Pour tout B -module à droite G , $G \otimes_B F^*$ s'identifie à

$\text{Hom}_B(F, G)$ par l'application

$$y \otimes f \longmapsto [x \mapsto yf(x)]$$

En effet, ceci est trivial pour $F = B$, donc pour $F = B^n$ et donc aussi pour F facteur direct de B^n par naturalité.

Soit maintenant $[B, B]$ le $\mathbb{Z}$ -module engendré par les "commutateurs" $\lambda\mu - \mu\lambda$ pour λ et $\mu \in B$ et soit $B' = B/[B, B]$. On peut alors définir une application $\mathbb{Z}$ -linéaire

$$T : F \otimes_B F^* \longrightarrow B'$$

par la formule $y \otimes f \mapsto$ classe de $f(y)$. En effet, $y\lambda \otimes f$ et $y \otimes \lambda f$ ont même image dans $B \bmod. [B, B]$. Si u est un endomorphisme de F , sa trace est par définition l'image de u par l'application composée

$$\text{Tr} : \text{Hom}_B(F, F) \approx F \otimes_B F^* \xrightarrow{T} B'$$

Les propriétés suivantes de la trace sont faciles à vérifier et sont laissées en exercice au lecteur :

- a) Si $F = B^n$ et si u est représenté par la matrice $M = (b_{ij})$, on a $\text{Tr}(u) = \sum b_{ii} \bmod. [B, B]$ (cette dernière expression est bien entendu la trace usuelle de la matrice M).
- b) Si F et G sont deux modules projectifs de type fini et si $u : F \rightarrow G$ et $v : G \rightarrow F$ sont des B -homomorphismes, on a $\text{Tr}(uv) = \text{Tr}(vu)$.
- c) Si u est un endomorphisme de F et si $\alpha : F \rightarrow G$ est un isomorphisme, on a $\text{Tr}(\alpha u \alpha^{-1}) = \text{Tr}(u)$.
- d) Si $F = F_1 \oplus F_2$ et si $u = u_1 \oplus u_2$, $\text{Tr}(u_1 \oplus u_2) = \text{Tr}(u_1) + \text{Tr}(u_2)$.
- e) Si F est un facteur direct de B^n défini par un projecteur p et si α est un endomorphisme de F défini par une matrice M d'ordre n vérifiant $Mp = pM = M$, on a $\text{Tr}(\alpha) = \text{Tr}(M)$.

LE CARACTÈRE DE CHERN (1.17-24)

1.17. Nous allons appliquer les considérations générales précédentes au cas où B est l'anneau $\Omega_{\text{pair}}(A)$ et où $F : E \otimes_A \Omega_{\text{pair}}(A)$.

La courbure R et ses puissances successives R^q définissent des endomorphismes de F . On a par ailleurs un homomorphisme canonique

$$\Omega_{\text{pair}}(A)/[\Omega_{\text{pair}}(A), \Omega_{\text{pair}}(A)] \longrightarrow \bar{\Omega}_{\text{pair}}(A)$$

(cf. 1.3 pour la définition de $\bar{\Omega}_*(A)$). Par abus de langage, on appellera encore

$\text{Tr}(R^Q)$ l'image de $\text{Tr}(R^Q)$ dans $\bar{\Omega}_{\text{pair}}(A)$ par l'homomorphisme précédent. Par définition, le caractère de Chern du module E muni de la connexion D est l'ensemble des éléments

$$\text{Ch}_q(E, D) = \frac{1}{q!} \text{Tr}(R^Q)$$

On notera que $\text{Ch}_q(E, D) \in \bar{\Omega}_{2q}(A)$. Le coefficient $1/q!$ mis devant la trace sera justifié en 1.26.

1.18. Exemples. Si D est la connexion de Levi-Civita associée à un projecteur p de A^n , on a $R = p \cdot dp \cdot dp$ (cf. 1.15). D'autre part, $p \cdot dp \cdot dp \cdot p = p \cdot dp \cdot (1-p) \cdot dp = p \cdot dp \cdot dp$. Par conséquent, $R^Q = p \cdot dp \cdot dp \dots dp = p \cdot (dp)^{2q}$ et

$$\text{Ch}_q(E, D) = \frac{1}{q!} \text{Tr}(p \cdot (dp)^{2q})$$

Pour le fibré de Hopf considéré à la fin de 1.15, on a par exemple

$$\text{Ch}_1(E, D) = -\frac{i}{2} (x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy)$$

Un autre exemple intéressant est celui du module libre A^n muni de la connexion D définie par $Ds = ds + \Gamma \cdot s$. Dans ce cas, R est représentée par la matrice $d\Gamma + \Gamma^2$ (cf. 1.14). Donc

$$\text{Ch}_q(E, D) = \frac{1}{q!} \text{Tr}(d\Gamma + \Gamma^2)^q.$$

1.19. THÉOREME. Soit E un A -module projectif de type fini muni d'une connexion D . Alors

$$q! \text{Ch}_q(E, D) = \text{Tr}(R^Q)$$

est un cycle de degré $2q$ du complexe $\bar{\Omega}_*(A)$ si $Q \leq k$ (ou plus généralement si $\frac{1}{2} \in k$).

Démonstration. Supposons d'abord que E soit l'image d'un projecteur $p : A^n \rightarrow A^n$ et que D soit la connexion de Levi-Civita. Alors la matrice de $d(R^Q)$ est $(dp)^{2q+1}$ (cf. 1.18). Par ailleurs, si on pose $J = 2p-1$, on a $J^2 = 1$ et $J \cdot dp = -dp \cdot J$. Par conséquent, $\text{Tr}(dp)^{2q+1} = \text{Tr}(J^2 (dp)^{2q+1}) = -\text{Tr}(J \cdot (dp)^{2q+1}) = -\text{Tr}(dp)^{2q+1}$. Puisque 2 est inversible dans A , on a ainsi $\text{Tr}(dp)^{2q+1} = 0$, soit $d(\text{Tr}(R^Q)) = 0$.

Supposons maintenant que D soit une connexion quelconque sur E et considérons un supplémentaire E' de E (soit $E \oplus E' \approx A^n$). Si D' est la connexion de Levi-Civita sur E' , on a

$$\text{Ch}_q(E \oplus E', D \oplus D') = \text{Ch}_q(E, D) + \text{Ch}_q(E', D')$$

d'après les propriétés générales de la trace (1.16). Puisque $\text{Ch}_q(E', D')$ est un cycle d'après ce qui précède, il suffit de démontrer que $\text{Ch}_q(E \oplus E', D \oplus D')$ est un cycle. On peut alors poser $E \oplus E' = A^n$, $D \oplus D' = \nabla$ avec $\nabla s = ds + \Gamma \cdot s$ d'après 1.8. La courbure R associée à ∇ est alors définie par la matrice

$d\Gamma + \Gamma^2$ (1.14). Par un calcul formel analogue au précédent, on trouve alors $dR = d\Gamma \cdot \Gamma - \Gamma \cdot d\Gamma = R \cdot \Gamma - \Gamma \cdot R$ et $d(R^Q) = R^Q \cdot \Gamma - \Gamma \cdot R^Q$. Donc $d(\text{Tr}(R^Q)) = \text{Tr}(d(R^Q)) = \text{Tr}(R^Q \cdot \Gamma - \Gamma \cdot R^Q) = 0$.

1.20. Pour démontrer le théorème suivant, nous allons utiliser un argument d'homotopie bien connu que nous allons formaliser de la manière suivante. Pour cela, nous considérons l'algèbre graduée $Q(t, dt) = \wedge_0 \oplus \wedge_1$ avec $\wedge_0 = Q[t]$, algèbre des polynômes en t et $\wedge_1 = Q[t] dt \approx Q[t]$ ($\wedge_i = 0$ pour $i > 1$). L'opérateur $d : \wedge_0 \rightarrow \wedge_1$ est la différentielle classique :

$$d(P(t)) = P'(t)dt$$

Définissons un opérateur d'homotopie $K_1 : \wedge_* \rightarrow Q$ par la formule $K_1(\omega) = 0$ si $\omega \in \wedge_0$ et $K_1(P(t)dt) = \int_0^1 P(t)dt$. On a alors de manière évidente

$$\begin{aligned} (dK_1 + K_1d)(\omega) &= \omega(1) - \omega(0) & \text{si } \omega \in \wedge_0 \\ &= 0 & \text{si } \omega \in \wedge_1 \end{aligned}$$

Pour toute algèbre graduée $\Omega_*(A)$, on peut définir de même un opérateur d'homotopie

$$K : \wedge_* \hat{\otimes}_Q \Omega_*(A) \rightarrow \Omega_*(A)$$

par la formule $K(\omega \hat{\otimes} \theta) = K_1(\omega)\theta$ (ici $\wedge_* \hat{\otimes}_Q \Omega_*(A)$ représente le produit tensoriel gradué des algèbres graduées $\wedge_*$ et $\Omega_*(A)$). D'autre part, si $\phi \in \wedge_* \hat{\otimes}_Q \Omega_*(A)$, on peut dire quelles sont ses valeurs $\phi(1)$ et $\phi(0) \in \Omega_*(A)$: elles sont égales à 0 si $\phi \in \wedge_1 \hat{\otimes}_Q \Omega_*(A)$ et elles sont égales à $\omega(0)\theta$ et à $\omega(1)\theta$ respectivement si $\phi = \omega \hat{\otimes} \theta \in \wedge_0 \hat{\otimes}_Q \Omega_*(A)$. L'opérateur d'homotopie K vérifie alors la propriété classique

$$(dK + Kd)(\phi) = \phi(1) - \phi(0)$$

qui résulte immédiatement de la propriété analogue pour K_1 .

1.21. LEMME. Posons $\Omega_*(A[t]) = \wedge_* \hat{\otimes}_Q \Omega_*(A)$. et supposons que $\bar{\phi}$ soit un cycle du complexe $\bar{\Omega}_*(A[t]) = \wedge_* \hat{\otimes}_Q \bar{\Omega}_*(A)$. Alors $\bar{\phi}(1) - \bar{\phi}(0)$ est un bord du complexe $\bar{\Omega}_*(A)$.
Démonstration. En effet, l'opérateur K induit un opérateur

$$\bar{K} : \bar{\Omega}_*(A[t]) \rightarrow \bar{\Omega}_*(A)$$

vérifiant la même propriété que K , à savoir

$$(d\bar{K} + \bar{K}d)(\bar{\phi}) = \bar{\phi}(1) - \bar{\phi}(0)$$

pour tout élément $\bar{\phi} \in \bar{\Omega}_*(A[t])$. Si $d(\bar{\phi}) = 0$, on a donc $\bar{\phi}(1) - \bar{\phi}(0) = d(K(\bar{\phi}))$.

1.22. THÉOREME. Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 1.19.

avec $Q < k$. Alors la classe de $Ch_q(E, D)$ dans $\bar{H}_{2q}(A)$ est indépendante du choix de la connexion D . Donc la correspondance $E \mapsto Ch_q(E, D)$ induit un homomorphisme

$$Ch_q : K_0(A) \longrightarrow \bar{H}_{2q}(A)$$

Démonstration. Soit E' un module projectif de type fini tel que $E \oplus E'$ soit libre et soit D' une connexion quelconque sur E' (par exemple la connexion de Levi-Civita). Puisque

$$Ch_q(E, D) = Ch_q(E \oplus E', D \oplus D') - Ch_q(E', D)$$

on voit, en faisant varier D , qu'il suffit de vérifier que $Ch_q(E \oplus E', \nabla) = 0$ dans $\bar{H}_{2q}(A)$ pour tout connexion ∇ sur le module libre $E \oplus E' = A^n$. En utilisant 1.8 de nouveau, on peut écrire $\nabla s = ds + \Gamma.s$, $R = d\Gamma + \Gamma^2$ et

$Ch_q(A^n, D) = \frac{1}{q!} \text{Tr}(R^q)$. Sur le module libre $(A[t])^n$ considérons alors la connexion définie par la matrice $\Gamma' = t\Gamma$. Soit $R' = d\Gamma' + \Gamma'^2$ dans $\bar{\Omega}_*(A[t])$. Alors $\phi = \frac{1}{q!} \text{Tr}(R'^q)$ définit un cycle $\bar{\phi}$ dans le complexe $\bar{\Omega}_*(A[t])$ dont les valeurs en 0 et 1 sont égales à 0 et à $\frac{1}{q!} \text{Tr}(R^q)$ respectivement. D'après le lemme précédent, il en résulte que $\frac{1}{q!} \text{Tr}(R^q)$ est un bord dans le complexe $\bar{\Omega}_*(A)$, autrement dit que $\frac{1}{q!} \text{Tr}(R^q)$ a une classe égale à 0 dans $\bar{H}_{2q}(A)$.

1.23. Remarque. Il est facile d'expliciter l'élément de $\bar{\Omega}_*(A)$ dont $\frac{1}{q!} \text{Tr}(R^q)$ est le bord. C'est tout simplement

$$\frac{1}{q!} K(R^q) = \frac{1}{q!} \text{Tr} \int_0^1 (dt\Gamma + t d\Gamma + t^2 \Gamma^2)^q = \frac{1}{(q-1)!} \int_0^1 dt\Gamma (td\Gamma + t^2 \Gamma^2)^{q-1}$$

En faisant le calcul on s'aperçoit d'ailleurs qu'il suffit d'inverser $(2q-1)!$ pour démontrer que $Ch_q(E, D)$ ne dépend pas du choix de la connexion D pour $\frac{1}{2} \in k$.

Ceci permet d'affiner légèrement la théorie que nous venons de développer pour le caractère de Chern en considérant les $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -algèbres avec $\frac{n}{2} = (2q-1)!$. En fait, au prix d'un peu plus d'algèbre homologique, on verra dans le paragraphe suivant comment on peut s'affranchir de dénominateurs.

1.24. Nous avons déjà noté en 1.3 l'ambiguïté de la notation $\bar{H}_*(A)$ ($= H\bar{\Omega}_*(A)$) qui sous-entend le complexe $\bar{\Omega}_*(A)$. Il existe cependant un complexe universel $\tilde{\Omega}_*(A)$ qui est le suivant. On pose $\tilde{\Omega}_1(A) = \text{Ker}(A \otimes_k A \rightarrow A)$ où m est la multiplication. Puisque $\tilde{\Omega}_1(A)$ est un A -bimodule de manière évidente, on peut poser $\tilde{\Omega}_q(A) = \tilde{\Omega}_1(A) \otimes_A \dots \otimes_A \tilde{\Omega}_1(A)$ (q facteurs). La différentielle d est alors déterminée par les propriétés suivantes

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1 \quad \text{si } a \in A = \Omega_0(A)$$

$$d(a_0 da_1) = da_0 \otimes da_1$$

En effet, il est facile de voir que tout élément de $\tilde{\Omega}_1(A)$ s'écrit comme somme d'éléments du type $a_0 da_1$ (*). Pour toute algèbre $\Omega_*(A)$ vérifiant les propriétés décrites en 1.3, il existe un homomorphisme d'algèbres graduées et un seul $\theta : \tilde{\Omega}_*(A) \rightarrow \Omega_*(A)$ induisant l'identité sur A . On a donc un caractère de Chern universel $\tilde{Ch}_q : K_0(A) \rightarrow H\tilde{\Omega}_{2q}(A)$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & H\tilde{\Omega}_{2q}(A) \\ & \nearrow & \downarrow \theta_* \\ K_0(A) & & H\tilde{\Omega}_{2q}(A) \\ & \searrow & \end{array}$$

Annonçons dès maintenant le résultat que nous démontrerons dans le paragraphe suivant : $H\tilde{\Omega}_n(A) \approx \text{Ker}(H\tilde{C}_n(A) \rightarrow H_{n+1}(A, A))$ où $H\tilde{C}_n(A)$ désigne l'homologie cyclique réduite (cf. 2.13) si $n \geq 1$. Cette homologie se calcule théoriquement par des techniques d'algèbre homologique. Cependant, le calcul de $H\tilde{\Omega}_*(A)$ est souvent plus simple pour un bon choix de $\Omega_*(A)$ et donne déjà des informations intéressantes. Ainsi, si A est l'algèbre des fonctions de classe C^r sur une variété compacte ($r \geq 1$), le complexe de De Rham standard donne autant d'information que le complexe universel et son homologie est évidemment plus calculable. Notons ici une certaine similitude entre ces algèbres graduées $\Omega_*(A)$ et les "cycles" de l'algèbre A considérés par A. Connes dans [12].

CAS OU $\Omega_*(A)$ EST UNE ALGÈBRE GRADUÉE COMMUTATIVE (1.25-27)

1.25. Supposons maintenant que $\Omega_*(A)$ soit une algèbre commutative au sens gradué (c'est-à-dire $\Omega_*(A) = \bar{\Omega}_*(A)$), ce qui est le cas si $\Omega_*(A)$ est l'algèbre $\Omega^*(X)$ des formes différentielles sur une variété X par exemple. Si E est un A -module projectif de type fini, $E \otimes \Omega_{\text{pair}}(A)$ est un module projectif de type fini sur l'anneau commutatif $\Omega_{\text{pair}}(A)$. Par conséquent, l'endomorphisme $1+R$ de ce module admet un déterminant $\det(1+R)$ qui se décompose en

$$\det(1+R) = 1 + c_1 + c_2 + \dots + c_p$$

où $c_i \in \Omega_{2i}(A)$ et $p = \text{Rang}(E)$. Un théorème d'algèbre élémentaire permet de relier les éléments c_i aux traces des puissances de R .

(*) Plus généralement, il est facile de voir que $\tilde{\Omega}_q(A)$ s'identifie à $A \otimes A/k \otimes \dots \otimes A/k$ (n facteurs A/k) par l'application $a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \dots \otimes \bar{a}_q \rightarrow a_0 da_1 \dots da_q$, $\bar{a}_i$ désignant la classe de a_i dans A/k .

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R) &= c_1 \\ \text{Tr}(R^2) &= (c_1)^2 - 2c_2 \\ \text{Tr}(R^q) &= Q_q(c_1, \dots, c_q) \end{aligned}$$

où $Q_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ est le polynôme de Newton exprimant les fonctions symétriques $\sum (x_i)^q$ à partir des fonctions symétriques élémentaires

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum x_i \\ \sigma_2 &= \sum_{i < j} x_i x_j, \text{ etc...} \end{aligned}$$

On en déduit que les c_i sont des cycles de degré $2i$ et définissent des classes d'homologie $c_i(E) \in \bar{H}_{2i}(A)$, indépendantes du choix de la connexion, et qu'on appelle les classes de Chern du module E . On a bien entendu la relation

$$\text{Ch}_q(E) = \frac{1}{q!} Q_q(c_1(E), \dots, c_q(E))$$

Il faut noter ici que $\bar{H}_*(A)$ est une algèbre commutative graduée car $\bar{\Omega}_*(A)$ l'est.

1.26. THÉORÈME. Soient E et F deux A -modules projectifs de type fini. Alors

$$\begin{aligned} c_n(E \oplus F) &= \sum_{i+j=n} c_i(E) c_j(F) \\ \text{Ch}_n(E \otimes F) &= \sum_{i+j=n} \text{Ch}_i(E) \text{Ch}_j(F) \end{aligned}$$

Démonstration. La première relation peut être considérée comme une conséquence formelle de la relation

$$\text{Ch}_q(E \oplus F) = \text{Ch}_q(E) + \text{Ch}_q(F)$$

On peut en effet remarquer qu'on peut munir E , F et $E \oplus F$ de connexions D_E , D_F et $D_{E \oplus F} = D_E \oplus D_F$. Les courbures associées R_E , R_F et $R_{E \oplus F}$ vérifient aussi $R_{E \oplus F} = R_E \oplus R_F$. On peut donc décomposer matriciellement $1 + R_{E \oplus F}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 + R_E & 0 \\ 0 & 1 + R_F \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $\det(1+R_E) \cdot \det(1+R_F)$, ce qui conduit immédiatement à la première relation demandée.

Choisissons maintenant comme connexion sur $E \otimes F$ l'application $D_E \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D_F$. La courbure associée est

$$R_{E \otimes F} = R_E \otimes 1 + 1 \otimes R_F$$

car $(D_E \hat{\otimes} 1) \cdot (1 \hat{\otimes} D_F) = -(1 \hat{\otimes} D_F) \cdot (D_E \hat{\otimes} 1)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} (R_{E \otimes F})^n &= \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} (R_E \otimes 1)^i (1 \otimes R_F)^j \\ &= \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} (R_E)^i \otimes (R_F)^j \end{aligned}$$

$$\text{soit } \text{Tr}(R_{E \otimes F})^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} \text{Tr}(R_E)^i \text{Tr}(R_F)^j$$

$$\text{Donc } \text{Ch}_n(E \otimes F) = \sum_{i+j=n} \text{Ch}_i(E) \text{Ch}_j(F)$$

1.27. Exemple. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et soient $e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}$ des automorphismes de E vérifiant les relations

$$\begin{aligned} (e_\alpha)^2 &= 1 \\ e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha &= 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta \\ e_1 e_2 \dots e_{2n+1} &= i^n \end{aligned}$$

Un exemple d'un tel espace vectoriel sera donné plus loin. Soit

$X = S^{2n} = \{(x_1, \dots, x_{2n+1}) \mid \sum (x_i)^2 = 1\}$ la sphère de dimension $2n$ et soit V le fibré vectoriel associé au projecteur $p = (1+J)/2$

avec $J = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{2n+1} e_{2n+1}$

Ce fibré vectoriel engendre la K -théorie réduite de la sphère S^{2n} d'après [25] (voir aussi [1]) dans l'exemple plus loin. A un bord près, on a alors

$$n! \text{Ch}_n(V) = 2^{-2n-1} \text{Tr}(J \cdot (dJ)^{2n})$$

$$\text{avec } (dJ)^{2n} = (dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + \dots + dx_{2n+1} e_{2n+1})^{2n}$$

Puisque $(dx_\alpha e_\alpha) \cdot (dx_\beta e_\beta) = (dx_\beta e_\beta) \cdot (dx_\alpha e_\alpha)$, l'expression précédente est égale à

$$\sum_{\alpha} (2n)! (dx_1 e_1)(dx_2 e_2) \dots (\widehat{dx_\alpha e_\alpha}) \dots (dx_{2n+1} e_{2n+1})$$

$$= \sum_{\alpha} (2n)! dx_1 \dots \widehat{dx_\alpha} \dots dx_{2n+1} e_1 \dots \widehat{e_\alpha} \dots e_{2n+1}$$

$$= -i^n \sum_{\alpha} (2n)! (-1)^\alpha dx_1 \dots \widehat{dx_\alpha} \dots dx_{2n+1} e_\alpha$$

$$\text{Donc } \text{Trace}(J(dJ)^{2n}) = -i^n (2n)! \sum (-1)^\alpha x_\alpha dx_1 \dots \widehat{dx_\alpha} \dots dx_{2n+1}$$

a une forme exacte près. Or la forme différentielle

$$\sum (-1)^\alpha x_\alpha dx_1 \dots \widehat{dx_\alpha} \dots dx_{2n+1} \text{ est la forme volume sur}$$

S^{2n} qu'on notera $\text{Vol}(S^{2n})$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \text{Ch}_n(V) &= \frac{1}{n!} \text{Tr}(R^n) = \frac{1}{n!} \text{Tr}(p \cdot (dp)^{2n}) = \frac{1}{n! 2^{2n+1}} \text{Tr}(J \cdot (dJ)^{2n}) \\ &= \frac{i^n (2n)!}{2^{2n+1} (n)!} \text{Vol}(S^{2n}) \cdot \text{Dim}(E). \end{aligned}$$

Il reste à trouver l'espace vectoriel E avec les automorphismes e_α (en fait l'exemple que nous allons donner est "minimal" en raison de la théorie des modules sur les algèbres de Clifford (cf. [1] ou [25])). Pour cela on pose $E = \Lambda \mathbb{C}^n$ (algèbre extérieure de $\mathbb{C}^n$) qu'on écrit comme le produit tensoriel gradué

$$\Lambda \mathbb{C} \hat{\otimes} \Lambda \mathbb{C} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \Lambda \mathbb{C}$$

Sur chaque facteur $\Lambda \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, on peut considérer les automorphismes de degré 1 définis par les matrices

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

On pose alors $e_{2\alpha+1} = \eta$ sur le $(\alpha+1)^{\text{ième}}$ facteur $\Lambda \mathbb{C}$, $e_{2\alpha+2} = \zeta$ sur le $(\alpha+1)^{\text{ième}}$ facteur $\Lambda \mathbb{C}$ (et l'identité sur les autres) pour $0 \leq \alpha \leq n-1$. Enfin, on pose

$$e_{2n+1} = i^{-n} e_1 e_2 \dots e_{2n}$$

Puisque $\text{Dim}(E) = 2^n$, on trouve finalement

$$\text{Ch}_n(V) = \frac{(2n)!}{n! 2^{n+1}} i^n \text{Vol}(S^{2n}) = (2i\pi)^n [S^{2n}]$$

où $[S^{2n}]$ est la classe fondamentale de la sphère S^{2n} .

II. RELATION ENTRE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE ET L'HOMOLOGIE DE DE RHAM
 NON COMMUTATIVE. DÉFINITION DU CARACTÈRE DE CHERN EN K-THÉORIE ALGÈBRIQUE.

HOMOLOGIE CYCLIQUE (2.1-11)

2.1. Dans ce paragraphe nous développons les considérations résumées dans [2][8]
 De manière précise, nous démontrons que

$$\overline{H}_n(A) \approx \text{Ker}(\overline{HC}_n(A) \xrightarrow{B} H_{n+1}(A, A))$$

où $\overline{HC}_n(A)$ désigne l'homologie cyclique réduite (théorème 2.13). Nous interprétons le caractère de Chern sur le groupe K_0 à l'aide de l'homologie cyclique, ce qui permet de nous affranchir de toute hypothèse sur la caractéristique (théorème 2.16). Enfin, nous définissons des homomorphismes

$$K_i(A) \longrightarrow HC_{i+21}(A)$$

où les $K_i(A)$ sont les groupes de K-théorie algébrique de Quillen (théorème 2.28)

2.2. Pour réaliser ce programme, nous allons d'abord rappeler la définition de l'homologie cyclique (due à A. Connes [12] pour les $\mathbb{C}$ -algèbres, à A. Connes, J.L. Loday, D. Quillen et W.L. Tsygan [13][36][47] pour les algèbres quelconques). Pour cela, nous fixons un anneau commutatif de base k (qui peut être $\mathbb{Z}$) et nous considérons une k -algèbre A (non nécessairement commutative). On désigne par A^p le produit tensoriel de p copies de A et on fait opérer le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p$ sur A^p par la transformation

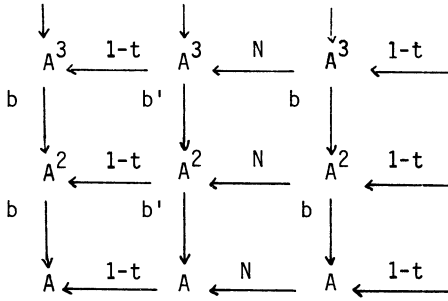
$$a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_p \mapsto (-1)^{p-1} a_p \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{p-1}$$

qu'on écrit t_p ou simplement t . Soit $N = N_p$ la transformation définie sur $N_p = 1+t + \dots + t^{p-1}$ (si $p = 1$, on convient que $t = N = \text{Id}$). Définissons b et $b' : A^{p+1} \rightarrow A^p$ par les formules

$$b'(a_0 \otimes \dots \otimes a_p) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_p$$

$$b(a_0 \otimes \dots \otimes a_p) = b'(a_0 \otimes \dots \otimes a_p) + (-1)^p a_p a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{p-1}$$

Par définition, l'homologie cyclique de A , notée $HC_*(A)$, est l'homologie du complexe simple associé au double complexe $C_{**}(A)$:



Par exemple, $HC_0(A) = A/[A, A]$. Si k contient $\mathbb{Q}$, les lignes sont des résolutions de $A^p/(1-t)_p$ et $HC_*(A)$ est alors l'homologie du complexe $(A^{**+1}/(1-t), b)$: c'est essentiellement la définition d'A. Connes qu'on notera $H_*^\lambda(A)$ (*). Plus généralement, si k contient $1/n!$, il est facile de voir que $HC_p(A) \approx H_p^\lambda(A)$ pour $p < n$. Dans ce bicomplexe, l'homologie des colonnes impaires

(A^{**+1}, b') est acyclique et celle des colonnes paires (A^{**+1}, b) est égale à l'homologie de Hochschild qu'on note $H_*(A, A)$. La suite exacte de bicomplexes

$$0 \longrightarrow (2 \text{ premières colonnes}) \longrightarrow C_{**}(A) \longrightarrow C_{**}(A)[-2] \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte naturelle

$$\longrightarrow H_p(A, A) \xrightarrow{I} HC_p(A) \xrightarrow{\tilde{S}} HC_{p-2}(A) \xrightarrow{B} H_{p-1}(A, A) \xrightarrow{I} \dots \quad (E)$$

2.3. Pour des considérations ultérieures, nous allons devoir expliciter les homomorphismes I , $\tilde{S}$ et B lorsqu'on identifie $HC_p(A)$ et $H_p^\lambda(A)$ (si $\mathbb{Q} \subset k$ ou, plus généralement, si quelques factorielles sont inversibles dans A lorsque p est borné, cas que nous laissons en exercice au lecteur). De ces trois homomorphismes seul I est évident : il est induit par l'homomorphisme de complexes $C_*(A) \longrightarrow C_*^\lambda(A)$ où on pose $C_*(A) = (A^{**+1}, b)$ et $C_*^\lambda(A) = (A^{**+1}/(1-t), b)$.

L'opérateur B peut être explicité grâce à une réduction du complexe total $Tot(C_{**}(A))$ associé au bicomplexe $C_{**}(A)$, réduction qui est décrite dans [12], [13] et [36]. On considère le bicomplexe $B_{**}(A)$:

(*) Si $k \supset \mathbb{Q}$, on notera indifféremment $H_*^\lambda(A)$ ou $HC_*(A)$ l'homologie cyclique. La première notation sera souvent utilisée quand on fera référence au complexe $C_*^\lambda(A) = (A^{**+1}/(1-t), b)$ introduit par A. Connes [12].

$$\begin{array}{ccccccc}
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A^1 & \xleftarrow{B'} & A^3 & \xleftarrow{B'} & A^2 & \xleftarrow{B'} & A \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow \\
 A^3 & \xleftarrow{B'} & A^2 & \xleftarrow{B'} & A & \xleftarrow{} & 0 \\
 \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow & & \downarrow \\
 A^2 & \xleftarrow{B'} & A & \xleftarrow{} & 0 & \xleftarrow{} & 0 \\
 \downarrow b & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xleftarrow{} & 0 & \xleftarrow{} & 0 & \xleftarrow{} & 0
 \end{array}$$

où $B' = (1-t)sN$ avec $s(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n$. On montre que $\text{Tot}(B_{**}(A))$ et $\text{Tot}(C_{**}(A))$ sont quasi-isomorphes par l'application du premier complexe vers le second définie par $x \mapsto x + sNx$. En fait, il faut regarder $\text{Tot}(B_{**}(A))$ comme un sous-complexe de $\text{Tot}(C_{**}(A))$ par l'application précédente. La suite exacte (E) est alors isomorphe à la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C_*(A) \longrightarrow \text{Tot}(B_{**}(A)) \longrightarrow \text{Tot}(B_{**}(A)[-1]) \longrightarrow 0$$

On notera que $C_*(A)$ est un sous-complexe de $\text{Tot}(C_{**}^2(A))$ où $C_{**}^2(A)$ est le double complexe formé des deux premières colonnes de $C_{**}(A)$.

En identifiant $HC_p(A)$ et $H_p^\lambda(A)$, on voit alors immédiatement que l'opérateur $B : H_p^\lambda(A) \longrightarrow H_{p+1}^\lambda(A, A)$ est défini par la même formule que B' , soit

$$\begin{aligned}
 B(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{in} 1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \\
 &+ \sum_{i=0}^n (-1)^{in+n-1} a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_{i-2}
 \end{aligned}$$

2.4. La définition explicite de $\tilde{S} : H_{n+1}^\lambda(A) \longrightarrow H_{n-1}^\lambda(A)$ est un peu plus délicate. Pour cela, il est commode de réintroduire la notion de forme différentielle non commutative esquissée dans le paragraphe précédent (cf. 1.24), mais en remplaçant A par A^+ où A^+ désigne l'algèbre A à laquelle on a ajouté un élément unité. Ainsi, on a $\tilde{\Omega}_1(A^+) = \text{Ker}(A^+ \otimes A^+ \longrightarrow A^+)$ qui est un A^+ -bimodule. Si on pose $d(x) = \tilde{1} \otimes x - x \otimes \tilde{1}$, où $\tilde{1}$ désigne l'élément unité de A^+ , on a $A^+ \otimes A \approx \Omega_1(A^+)$ par l'application $\tilde{a} \otimes a \mapsto \tilde{a} da$. En particulier, $d(uv) = du.v + u.dv$ pour $u, v \in A^+$ et $d(\tilde{1}) = 0$. Plus généralement, $A^+ \otimes A \otimes \dots \otimes A$ (n facteurs A) est isomorphe à $\tilde{\Omega}_1(A^+) \otimes_{A^+} \dots \otimes_{A^+} \tilde{\Omega}_1(A^+)$ (n facteurs $\tilde{\Omega}_1(A^+)$) par l'application $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto a_0 da_1 da_2 \dots da_n$. Ces considérations seront légèrement généralisées en 2.9.

En particulier, $C_n(A)$ s'identifie à un sous k -module de $\tilde{\Omega}_n(A^+)$ par l'application $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \omega = a_0 da_1 \dots da_n$. Grâce à cette identification, on peut notamment écrire l'identité suivante dont il sera fait un usage fréquent

$$b(\omega) = (-1)^n (a_n \omega' - \omega' a_n)$$

avec $\omega' = a_0 da_1 \dots da_{n-1}$. Si 1 désigne l'élément unité de A , on prendra garde cependant que $\omega \cdot 1 \neq \omega$ en général (par exemple $(a_0 da_1) \cdot 1 = a_0 da_1 - a_0 a_1 d(1) = a_0 \otimes a_1 - a_0 a_1 \otimes 1$). Par contre, si $\tilde{1}$ désigne l'élément unité de A^+ , on a bien entendu $\omega \cdot \tilde{1} = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega_n(A^+)$.

2.5. Pour revenir au problème posé, considérons le "diagramme en escalier" extrait du bicomplexe $C_{**}(A)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A^{n+2} & & \\
 & \swarrow c_{n+2} & \downarrow b & & \\
 C_{n+1}^\lambda(A) = A^{n+2}/(1-t) & & A^{n+1} & \xleftarrow{(1-t)} & A^{n+1} \\
 & & \downarrow -b' & & \downarrow \\
 & & A^n & \xleftarrow{N} & A^n \\
 & & & & \searrow c_n \\
 & & & & A^n/(1-t) = C_{n-1}^\lambda(A)
 \end{array}$$

Le calcul de $\tilde{S} : H_{n+1}^\lambda(A) \rightarrow H_{n-1}^\lambda(A)$ se ramène à la chasse au diagramme suivante.

Soit $x_{n+2} \in Z_{n+2}^\lambda(A)$ (ensemble des cycles de degré $n+2$ du complexe $C_*^\lambda(A)$) relevé en un élément $x_{n+2} \in A^{n+2}$. Il faut alors construire une suite descendante $(x_{n+2}, x_{n+1}, x_n, \dots)$ avec $x_i \in A^i$ telle que

$$b(x_{n+2}) = -(1-t)x_{n+1}$$

$$b'(x_{n+1}) = Nx_n$$

.....

La classe de $c_n(x_n)$ dans $H_{n-1}^\lambda(A)$ est alors l'image par S de la classe de x_{n+2} . Si $t = t_{n+1}$ est l'automorphisme de A^{n+1} explicité en 2.2., et si $N = 1+t+\dots+t^n$, on a l'identité formelle

$$v_{n+1} \cdot N + u_{n+1} \cdot (1-t) = 1$$

avec $v_{n+1} = 1/(n+1)$ et $u_{n+1} = (t^{n-1} + 2t^{n-2} + \dots + n)/(n+1)$.

Puisque les images de N et $(1-t)$ sont supplémentaires, on peut donc choisir

$$x_{n+1} = -u_{n+1} \cdot b \cdot x_{n+2}$$

$$x_n = v_n \cdot b' \cdot x_{n+1} = -v_n \cdot b' \cdot u_{n+1} \cdot b \cdot x_{n+2}$$

Nous allons simplifier l'expression de $c_n(x_n)$ grâce au lemme suivant (comparer avec [12] proposition 12).

2.6. LEMME. Modulo l'image de b , l'homomorphisme $c_n \cdot v_n \cdot b' \cdot u_{n+1}$ coïncide avec l'homomorphisme

$$\begin{aligned} a_0 da_1 \dots da_n &\mapsto \frac{1}{n(n+1)} [a_0 a_1 da_2 \dots da_n - (a_0 da_1) a_2 (da_3 \dots da_n) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} (a_0 da_1 \dots da_{n-1}) a_n] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (a_0 da_1 \dots da_{i-1}) a_i (da_{i+1} \dots da_n) \end{aligned}$$

Démonstration. Pour simplifier les calculs, posons $u' = (n+1)u_{n+1}$ et $v' = nv_n = \text{Id}$. Considérons une forme différentielle $\omega = a_0 da_1 \dots da_n$. On peut alors écrire

$$u'(\omega) = (t^{n-1} + 2t^{n-2} + \dots + n)(\omega)$$

Puisque v' est l'identité et que $b' + j = b$ avec $j(c_0 \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_n) = (-1)^n c_n c_0 \otimes c_1 \otimes \dots \otimes c_{n-1}$, on a $v' \cdot b' \cdot u'(\omega) = -j \cdot u'(\omega)$ modulo l'image de b . Par conséquent, avec les notations de [36] lemme 1.1., on a aussi modulo l'image de b :

$$\begin{aligned} c_n \cdot v' \cdot b' \cdot u' &= -(j \cdot t^{n-1} + 2j \cdot t^{n-2} + \dots + nj) \\ &= -(j \cdot t^{-2} + 2j \cdot t^{-3} + \dots + nj) \\ &= -(t \cdot j \cdot t^{-2} + 2t^2 \cdot j \cdot t^{-3} + \dots + nj) \\ &= n(j \cdot t^{-1} + tjt^{-2} + \dots + j) - (tjt^{-2} \cdot j \cdot t^{-2} + \dots + nj) \\ &= njt^{-1} + (n-1)tjt^{-2} + \dots + t^{-1}jt \end{aligned}$$

En définitive, l'image de ω mod. $\text{Im}(b)$ par $c_n \cdot v' \cdot b' \cdot u'$ est égale à $n a_0 a_1 da_2 \dots da_n - (n-1) a_0 d(a_1 a_2) da_3 \dots da_n + \dots + (-1)^{n+1} a_0 da_1 \dots d(a_{n-1} a_n)$ qui peut aussi s'écrire

$$a_0 a_1 da_2 \dots da_n - (a_0 da_1) a_2 (da_3 \dots da_n) + \dots + (-1)^{n+1} (a_0 da_1 \dots da_{n-1}) a_n.$$

2.7. PROPOSITION (cf. [12]). L'homomorphisme

$$\tilde{S} : H_{n+1}^\lambda(A) \longrightarrow H_{n-1}^\lambda(A)$$

est induit sur les cycles par l'homomorphisme qui, à une forme différentielle

$\omega = a_0 da_1 \dots da_{n+1}$ de degré $n+1$ associe la forme différentielle ω' de degré $n-1$ définie par la formule suivante $-n(n+1)\omega' = \Omega$

$$\begin{aligned} \text{où } \Omega = & a_0 a_1 a_2 da_3 \dots da_{n+1} + (a_0 da_1) a_2 a_3 (da_4 da_5 \dots da_n) + \\ & (a_0 da_1 da_2) a_3 a_1 (da_5 \dots da_n) + \dots + (a_0 da_1 \dots da_{n-2}) a_{n-1} a_n \end{aligned}$$

Démonstration. Désignons par $S(\omega)$ l'expression Ω et, pour $\theta = c_0 dc_1 \dots dc_n$,

écrivons $T(\theta) = T_1(\theta) - T_2(\theta) + \dots + (-1)^{n+1} T_n(\theta)$ avec

$$T_i(\theta) = (c_0 dc_1 \dots dc_{i-1}) c_i (dc_{i+1} \dots dc_n). \text{ D'après ce qui précède, on a } \tilde{S} = \frac{T.b.}{-(n)(n+1)}$$

On vérifie alors aisément les identités (pour $\omega = a_0 da_1 \dots da_{n+1}$) :

$$\begin{aligned} T_1(b(\omega)) &= a_0 a_1 a_2 da_3 \dots da_{n+1} \quad \text{mod. Im}(b) \\ -T_2(b(\omega)) &= (a_0 da_1) a_2 a_3 (da_1 \dots da_{n+1}) \quad \text{mod. Im}(b) \\ &\dots \dots \dots \\ (-1)^{n+1} T_n(b(\omega)) &= (a_0 da_1 \dots da_{n-1}) a_n a_{n+1} \quad \text{mod. im}(b) \end{aligned}$$

2.8. Remarque. Cette proposition explique les notations S et $\tilde{S}$. Dans [12]

A. Connes adopte une autre normalisation pour la définition de S (c'est la nôtre divisée par $2i\pi$). Nous avons choisi cette normalisation pour mettre en accord les classes caractéristiques en K -théorie algébrique et topologique.

2.9. Supposons maintenant que A soit une k -algèbre avec k facteur direct tant que k -module (et toujours $\mathbb{Q} \subset k$). Soit $\bar{C}_*^\lambda(A)$ le quotient de $C_*^\lambda(A)$ par le sous k -module engendré par les produits tensoriels $a_0 \otimes \dots \otimes a_p$ avec $a_i = 1$ pour un certain i . L'opérateur $b : C_*^\lambda(A) \rightarrow C_{*-1}^\lambda(A)$ passe alors au quotient et on définit l'homologie cyclique réduite $\bar{H}_*^\lambda(A)$ (notée aussi $\bar{H}_*^\lambda(A)$) comme l'homologie du complexe $(\bar{C}_*^\lambda(A), b)$. Si A est une algèbre augmentée sur k et si $\bar{A}$ désigne l'idéal d'augmentation, on peut montrer que $\bar{H}_*^\lambda(A)$ est aussi l'homologie du complexe $(\bar{A}^{*+1}/(1-t), b)$ (cf. [36]) et s'inscrit dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_*^\lambda(k) \longrightarrow H_*^\lambda(A) \longrightarrow \bar{H}_*^\lambda(A) \longrightarrow 0$$

Dans le cas général, cette définition de l'homologie cyclique réduite diffère de celle de [36]. Plus précisément on a le lemme suivant :

2.10. LEMME. Le k -module $\bar{H}_*^\lambda(A) = \bar{H}_*^\lambda(A)$ est isomorphe au conoyau de l'homomorphisme $HC_*(k) \longrightarrow HC_*(A)$.

Démonstration. Désignons par $T_*^\lambda(A)$ le complexe défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_*^\lambda(A) \longrightarrow C_*^\lambda(A) \longrightarrow \bar{C}_*^\lambda(A) \longrightarrow 0$$

Tout cycle de $T_*^\lambda(A)$ est l'image d'un cycle de $T_*^\lambda(M)$ où M est un quotient d'une algèbre de polynômes sur des variables non commutatives qui est augmentée sur k (on écrit formellement que $\sum_i b(1 \otimes a_1^i \otimes \dots \otimes a_n^i)$ s'écrit

(1-t) $(\sum_j c_0^j \otimes c_1^j \otimes \dots \otimes c_{n-1}^j) : l'augmentation$ envoie les a_α^i sur 1 et les c_β^j sur 0). Puisque l'homologie de $T_*^\lambda(M)$ est égale à k d'après [36], on a un épimorphisme $HC_n(k) \rightarrow H_n(T_*^\lambda(A))$. Par le même type d'argument, tout cycle de $\bar{C}_*^\lambda(A)$ est l'image d'un cycle de $\bar{C}_*^\lambda(N)$ où N est aussi une algèbre augmentée sur k . On a donc un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_*^\lambda(k) & \longrightarrow & H_*^\lambda(N) & \longrightarrow & \bar{H}_*^\lambda(N) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_*(T_*^\lambda(A)) & \longrightarrow & H_*^\lambda(A) & \longrightarrow & \bar{H}_*^\lambda(A) \end{array}$$

De cette discussion on déduit ainsi la surjectivité de l'application $H_*^\lambda(A) \rightarrow \bar{H}_*^\lambda(A)$, ce qui achève la démonstration du lemme. En fait, on a donc $H_*^\lambda(A) = \bar{H}_*^\lambda(A)$ si l'application $H_*^\lambda(k) \rightarrow H_*^\lambda(A)$ est réduite à 0 et $\bar{H}_*^\lambda(A) = H_*^\lambda(A)/H_*^\lambda(k)$ sinon.

2.11. Rappelons maintenant (cf. [9] [37]) que $H_n(A, A)$ est l'homologie de degré n du complexe de Hochschild normalisé $\bar{C}_*(A)$ avec

$$\bar{C}_p(A) = A \otimes \bar{A} \otimes \dots \otimes \bar{A} \quad (p \text{ facteurs } \bar{A})$$

avec $\bar{A} = A/k$ (qui est égal à l'idéal d'augmentation si A est une algèbre k -augmentée). Notons que $\bar{C}_p(A) \approx \tilde{\Omega}_p(A)$ avec les notations de 1.24 par l'application

$$a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \dots \otimes \bar{a}_p \longmapsto a_0 da_1 da_2 \dots da_p$$

$\bar{a}_i$ désignant la classe de a_i dans A/k .

RELATION ENTRE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE ET L'HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE (2.12-16)

2.12. LEMME. Pour $n > 0$, l'application $a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \dots \otimes \bar{a}_n \mapsto a_0 da_1 \dots da_n$ induit une injection de $H_n(A, A)$ dans $\tilde{\Omega}_n(A) (*)_0$.

Soit $\sigma : \sigma_n : \tilde{\Omega}_n(A) \rightarrow \tilde{\Omega}_n(A)$ l'application définie par

$$\sigma_n(a_0 da_1 \dots da_n) = (-1)^{n-1} da_n \cdot a_0 \cdot da_1 \dots da_{n-1}$$

Nous allons montrer les assertions préliminaires suivantes :

a) Si $\omega \in \tilde{\Omega}_n(A)$, $(\sigma \cdot b)(\omega) = (b \cdot \sigma)(\omega)$

(*) Pour toute k -algèbre graduée $\Omega_*(A)$, rappelons qu'on définit $\bar{\Omega}_*(A)$ comme le k -module quotient $\Omega_*(A)/[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$ où $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$ désigne le k -module engendré par les commutateurs gradués. Ici $\Omega_*(A) = \tilde{\Omega}_*(A)$ l'algèbre différentielle graduée universelle (cf. 1.24).

En effet, si $n = 1$, l'assertion est claire. Si $n > 1$, un élément de $\tilde{\Omega}_n(A)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments du type $\omega = \theta \cdot dx \cdot dy$ avec θ de degré $n-2$. On a alors

$$b(\omega) = (-1)^n (y \cdot \theta \cdot dx - \theta \cdot dx \cdot y) = (-1)^n (y \cdot \theta \cdot dx - \theta \cdot d(xy) + \theta x \cdot dy)$$

$$(\sigma \cdot b)(\omega) = dx \cdot y \cdot \theta - d(xy) \cdot \theta + dy \cdot \theta \cdot x = -x \cdot dy \cdot \theta + dy \cdot \theta \cdot x$$

D'autre part,

$$\sigma(\omega) = (-1)^{n-1} dy \cdot \theta \cdot dx$$

$$(b \cdot \sigma)(\omega) = -x \cdot dy \cdot \theta + dy \cdot \theta \cdot x, \text{ soit } (b \cdot \sigma)(\omega) = (\sigma \cdot b)(\omega)$$

b) Dans le groupe $\check{\Omega}_n(A) = \tilde{\Omega}_n(A)/\text{Im}(b)$, le groupe $\mathbb{Z}/n$ opère par la formule suivante

$$t(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n) = (-1)^{n-1} \omega_n \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1}$$

En effet, $t(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1} \otimes \lambda \omega_n) - t(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1} \lambda \otimes \omega_n)$

$$(-1)^{n-1} (\lambda \omega_n \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1} - \omega_n \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1} \lambda) = b(\omega_n \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1} \otimes d\lambda)$$

pour tout $\lambda \in A$.

c) Le groupe $\tilde{\Omega}_n(A)$ s'identifie au quotient de $\check{\Omega}_n(A)$ par l'action de $\mathbb{Z}/n$

Un commutateur gradué est combinaison linéaire d'éléments du type $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \lambda - \lambda \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n$ où $\lambda \in A$ et du type $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n - (-1)^{n-1} \omega_n \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1}$. Quotienter $\check{\Omega}_n(A)$ par les combinaisons linéaires du premier type revient à quotienter par l'image de b . Quotienter ensuite $\check{\Omega}_n(A)$ par les combinaisons linéaires d'éléments du deuxième type revient à quotienter $\check{\Omega}_n(A)$ par l'action du groupe $\mathbb{Z}/n$.

Démonstration du lemme.

Le groupe $H_n(A, A) = \text{Ker}(b)/\text{Im}(b)$ est un sous-groupe de $\check{\Omega}_n(A)$ et il est invariant par l'action du groupe $\mathbb{Z}/n$ d'après a). Puisque n est inversible dans k , la partie invariante s'identifie à la partie covariante. Donc l'application composée $H_n(A, A) \longrightarrow \check{\Omega}_n(A) \longrightarrow \tilde{\Omega}_n(A)$ est injective.

2.13. LEMME. L'application évidente $\tilde{\Omega}_n(A) \longrightarrow \bar{C}_n^\lambda(A)$ définie par $a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \longmapsto a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ induit un isomorphisme de $\tilde{\Omega}_n(A)/\text{Im}(d)$ sur $\bar{C}_n^\lambda(A)/\text{Im}(b)$.

Démonstration. L'application est bien définie car

$$1) \quad 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \text{ a comme image } 0 \text{ dans } \bar{C}_n^\lambda(A)$$

2) Un commutateur du type $a_{n+1}(a_0 da_1 \dots da_n) - (a_0 da_1 \dots da_n)a_{n+1}$ peut s'écrire $(-1)^{n-1} b(a_0 da_1 \dots da_{n+1})$

3) Un commutateur du type $a_0 da_1 \dots da_n - (-1)^{n-1} da_n a_0 \dots da_{n-1}$ peut s'écrire $(-1)^n d(a_n a_0) da_1 \dots da_{n-1} + a_0 da_1 \dots da_n - (-1)^n a_n da_0 \dots da_{n-1}$ et a donc 0 pour image dans le groupe $\bar{C}_n^\lambda(A)/\text{Im } b$.

On définit de manière évidente une application en sens inverse.

2.14. THÉORÈME. Pour $n \geq 2$, l'homologie cyclique réduite $\bar{H}C_{n-1}(A)$ s'identifie naturellement à l'homologie en degré $n-1$ du complexe

$$0 \rightarrow \bar{\Omega}_0(A) \rightarrow \bar{\Omega}_1(A) \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\Omega}_{n-1}(A) \rightarrow \bar{\Omega}_n(A)/H_n(A, A)$$

($H_n(A, A)$ s'identifiant à un sous k -module de $\bar{\Omega}_n(A)$ d'après le lemme 2.10).

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Omega}_{n-1}(A)/\text{Im}(d) \simeq \bar{C}_{n-1}^\lambda(A)/b(\bar{C}_n^\lambda(A)) & \xrightarrow{B} & \bar{C}_n(A)/b(\bar{C}_{n+1}(A)) \simeq \check{\Omega}_n(A) \\ b \downarrow & & \downarrow b \\ \bar{C}_{n-2}^\lambda(A) & \xrightarrow{B_1} & \bar{C}_{n-1}(A) \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'opérateur B de Connes :

$$a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \mapsto \sum_i (-1)^{i(n-1)} 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{i-1}$$

vérifie la propriété suivante : pour tout $\omega \in \bar{C}_{n-1}(A)/b(\bar{C}_n^\lambda(A))$, $B(\omega)$ appartient à la partie invariante de $\check{\Omega}_n(A)$ par l'action de $\mathbb{Z}/n$. Si on identifie encore la partie invariante à la partie coinvariante, l'opérateur B est égal à la différentielle $d : \bar{\Omega}_{n-1}(A)/\text{Im}(d) \rightarrow \check{\Omega}_n(A)$ à un facteur multiplicatif rationnel près.

D'autre part, l'opérateur B_1 est défini par la même formule que B et il est clairement injectif car l'application $x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \mapsto 1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1}$ de $A^{\otimes n-1}$ dans $A^{\otimes n}$ est injective.

Si $\omega \in \bar{C}_{n-1}^\lambda(A)/b(\bar{C}_n^\lambda(A))$, on a donc $B(\omega) \in H_n(A, A)$ si et seulement si $b(\omega) = 0$. En identifiant B et d , on en déduit l'énoncé du théorème.

2.15. THÉORÈME. Pour $n \geq 1$, l'homologie de De Rham non commutative $\bar{H}_n(A)$ s'identifie au noyau de l'homomorphisme

$$B : \bar{H}C_n(A) \rightarrow H_{n+1}(A, A)$$

$\bar{H}C_n(A)$ désignant l'homologie cyclique réduite. De même, $\bar{H}_0(A)$ s'identifie au noyau de $B : HC_0(A) \approx A/[A, A] \rightarrow H_1(A, A)$.

Démonstration. La dernière assertion du théorème résulte immédiatement des définitions et du fait que $H_1(A, A)$ s'identifie à un sous-groupe de $\tilde{\Omega}_1(A)$ (lemme 2.10). La première assertion résulte du théorème précédent en changeant n en $n+1$.

2.16. Il est peut-être bon de retracer ici l'historique de la démonstration de ce théorème (dans la mesure où on veut lui attacher de l'importance). Il a été trouvé dans le cadre de la cohomologie cyclique par A. Connes ([12] théorème 33) lors d'une discussion avec l'auteur à l'I.H.E.S. en 1983 (le lemme 3.11 étant déjà connu). Quelques semaines après, je découvrais une autre démonstration en homologie cyclique basée sur le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_p(A)/d(\tilde{\Omega}_{p-1}(A)) & \xrightarrow{\approx} & \bar{C}_p^\lambda(A)/b(\bar{C}_{p+1}^\lambda(A)) \\ d \downarrow & & \downarrow b \\ \tilde{\Omega}_{p+1}(A) & \xrightarrow{\phi} & \bar{C}_{p-1}^\lambda(A) \end{array}$$

où ϕ est induit par l'application $\tilde{\phi}$ sur $\tilde{\Omega}_{p+1}(A)$ définie par

$$\tilde{\phi}(da_1 \dots da_{p+1}) = b(a_1 da_2 \dots da_{p+1})$$

$$\tilde{\phi}(a_0 da_1 \dots da_{p+1}) = \sum_{i=0}^p \lambda_i b_i(b(a_0 da_1 \dots da_{p+1}))$$

Dans cette démonstration ancienne A était une algèbre augmentée d'idéal d'augmentation $\bar{A}$, $a_i \in \bar{A}$, $b_i = t^i j t^{-i-1}$ et les λ_i étaient des scalaires rationnels satisfaisant aux identités

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} = \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \quad \text{pour } i \leq p-2$$

$$\lambda_0 - \lambda_p = -1$$

Ces identités admettent des solutions évidentes ($\lambda_i = i/p$ par exemple). La formule obtenue alors pour $\tilde{\phi}$ présente des similitudes frappantes avec celle définissant S dans le § 3.7. En degré 3 par exemple on a la formule

$$\tilde{\phi}(a_0 da_1 da_2 da_3) = a_3 a_0 a_1 da_2 - 1/2 a_0 a_1 d(a_2 a_3) - 1/2 a_3 a_0 d(a_1 a_2)$$

Le lecteur pourra vérifier (les calculs sont faciles mais fastidieux) que la restriction de $\tilde{\phi}$ au k -module des commutateurs gradués $[\tilde{\Omega}_*(A), \tilde{\Omega}_*(A)]$ est bien égale à 0.

La démonstration finalement choisie dans ce livre est plus élémentaire que les deux évoquées (question de goût bien entendu !).

$$L'HOMOMORPHISME \quad \tilde{Ch}_0 ; K_0(A) \longrightarrow HC_{21}(A) \quad (2.17-21)$$

2.17. Venons en maintenant à l'objet essentiel de ce paragraphe, c'est-à-dire à la construction de classes caractéristiques sur les groupes $K_i(A)$ de Quillen et à valeurs dans l'homologie cyclique. Nous commencerons par réexaminer le cas du groupe de Grothendieck $K_0(A)$ déjà vu au paragraphe précédent dans le cadre de l'homologie de De Rham non commutative. Nous supposons que k est un anneau commutatif quelconque, par exemple $k = \mathbb{Z}$.

Soit donc E un A -module projectif de type fini. Ce module est l'image d'un projecteur p dans $M_r(A)$ pour un certain r , projecteur qui définit un homomorphisme d'anneaux

$$\sigma : R = k[x]/(x^2 - x) \longrightarrow M_r(A)$$

par la formule $\sigma(x) = p$. L'algèbre $R \approx k \times k$ est une algèbre augmentée sur k et son homologie cyclique réduite est isomorphe canoniquement à k en degrés pairs. De manière plus précise, le générateur canonique u_ℓ de $\overline{HC}_{2\ell}(R)$ est défini par la suite $(x_{2\ell+1}, x_{2\ell-1}, \dots, x_1)$ avec $x_i \in R^{i+1}$ et égaux respectivement à

$$x_1 = x$$

$$x_3 = -2x \otimes x \otimes x$$

$$x_5 = 12x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x = 12x^{\otimes 5}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{2\ell+1} = (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{\ell!} x^{\otimes (2\ell+1)}$$

comme on le voit dans une chasse au diagramme dont les premiers pas sont schématisés ainsi

$$\begin{array}{ccccccc}
 12x^{\otimes 5} & & & & & & \\
 \downarrow b & & & & & & \\
 12x^{\otimes 4} & \xleftarrow{1-t} & 6x^{\otimes 4} & & & & \\
 & & \downarrow -b' & & & & \\
 & & -6x^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & -2x^{\otimes 3} & & \\
 & & & & \downarrow b & & \\
 & & & & -2x^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & -x^{\otimes 2} \\
 & & & & & & \downarrow -b' \\
 & & & & & & x \xleftarrow{N} x
 \end{array}$$

Considérons l'image $c(p)$ de u_ℓ par l'homomorphisme composé

$$HC_{2\ell}(R) \longrightarrow HC_{2\ell}(M_r(A)) \xrightarrow{\text{Tr}} HC_{2\ell}(A)$$

où Tr désigne l'homomorphisme induit par la "trace" :

$$x^1 \otimes x^2 \otimes \dots \otimes x^n \longmapsto \sum x^1_{i_1 i_2} \otimes x^2_{i_2 i_3} \otimes \dots \otimes x^n_{i_n i_1}$$

($x^1, x^2, \dots, x^n$ désignant n matrices d'ordre r). On notera sur ce point que Tr est un isomorphisme (invariance de Morita; cf. [12], [36]).

2.18. THEOREME. La correspondance $p \mapsto c(p)$ induit un homomorphisme

$$\tilde{ch}_0^\ell : K_0(A) \longrightarrow HC_{2\ell}(A)$$

En outre, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & HC_{2\ell}(A) \\ & \nearrow \tilde{ch}_0^\ell & \downarrow \tilde{S} \\ K_0(A) & & \\ & \searrow \tilde{ch}_0^{\ell-1} & \downarrow \\ & & HC_{2\ell-2}(A) \end{array} \quad (\mathcal{A})$$

Démonstration. Montrons d'abord que $c(p)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de p . Pour cela, il suffit de montrer qu'un automorphisme intérieur

$u : \lambda \mapsto \alpha \lambda \alpha^{-1}$ d'une algèbre Λ induit l'identité sur $HC_*(\Lambda)$. Considérons alors l'algèbre $M_2(\Lambda)$ et l'automorphisme intérieur u' de $M_2(\Lambda)$ défini par

$$\lambda' \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda' \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque les homomorphismes (d'anneaux sans unité) $\Lambda \rightarrow M_2(\Lambda)$ définis par

$$\lambda' \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

induisent des isomorphismes en homologie cyclique inverses de

$\text{Tr} : HC_*(M_2(\Lambda)) \rightarrow HC_*(\Lambda)$, on voit que u' et l'identité induisent le même homomorphisme sur $HC_*(\Lambda) \approx HC_*(M_2(\Lambda))$, ce qui démontre notre première assertion. D'autre part, puisque $c(p \oplus q) = c(p) + c(q)$ de manière évidente et que la conjugaison des projecteurs équivaut stablement à l'isomorphisme des modules projectifs

associés ([25] p. 37), on voit que la correspondance $p \mapsto c(p)$ induit bien un homomorphisme $\tilde{Ch}_0^\ell : K_0(A) \rightarrow HC_{2\ell}(A)$. La commutativité du diagramme (2) est une conséquence directe de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} HC_{2\ell}(R) & \longrightarrow & HC_{2\ell}(A) \\ \tilde{S}_R \downarrow & & \downarrow \tilde{S}_A \\ HC_{2\ell-2}(R) & \longrightarrow & HC_{2\ell-2}(A) \end{array}$$

et du fait que $S_R(u_\ell) = u_{\ell-1}$.

2.18. Remarque. Le théorème précédent montre que les différents homomorphismes $\tilde{Ch}_0^\ell$ induisent un homomorphisme de $K_0(A)$ vers la limite projective $\varprojlim_\ell HC_{2\ell}(A)$.

2.20. Remarque. Dans le paragraphe précédent, nous avons défini par une méthode toute différente un autre "caractère de Chern"

$$Ch_\ell : K_0(A) \longrightarrow \bar{H}_{2\ell}(A)$$

Si nous remplaçons A par A^+ et si nous identifions $\bar{H}_{2\ell}(A^+)$ à un sous-groupe de $HC_{2\ell}(A)$ grâce au théorème 2.15 (en supposant $\mathbb{Q} \subset k$), nous voyons que les homomorphismes $\tilde{Ch}_0^\ell$ et Ch_ℓ coïncident à un facteur multiplicatif près. Plus précisément, on a l'identité (cf. 1.18 et 2.17)

$$Ch_\ell(E) = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} \tilde{Ch}_0^\ell(E)$$

INTERMÈDE SUR L'HOMOLOGIE CYCLIQUE DES GROUPES (2.21-26)

2.21. Nous nous proposons d'introduire maintenant des invariants de la K-théorie algébrique "supérieure" $K_1(A)$, $K_2(A)$,... à valeurs dans l'homologie cyclique de A . Pour cela, nous allons définir au préalable "l'homologie cyclique d'un groupe discret G ".

Nous désignerons par $\Lambda = k[G]$ l'algèbre du groupe et nous définirons β et $\beta' : \Lambda^{p+1} \rightarrow \Lambda^p$ par les formules usuelles ($g_i \in G$) :

$$\begin{aligned} \beta(g_0 \otimes \dots \otimes g_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i g_0 \otimes \dots \otimes \hat{g}_i \otimes \dots \otimes g_p \\ \beta'(g_0 \otimes \dots \otimes g_p) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i g_0 \otimes \dots \otimes \hat{g}_i \otimes \dots \otimes g_p \end{aligned}$$

Comme dans 2.2. on peut introduire un double complexe $\tilde{C}_{**}(G)$ de $k[G]$ -module libres en remplaçant b et b' par β et β' respectivement et A par $\Lambda = k[G]$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda^3 & \xleftarrow{1-t} & \Lambda^3 & \xleftarrow{N} & \Lambda^3 \\
 \beta \downarrow & & -\beta' \downarrow & & \beta \downarrow \\
 \Lambda^2 & \xleftarrow{1-t} & \Lambda^2 & \xleftarrow{N} & \Lambda^2 \\
 \beta \downarrow & & -\beta' \downarrow & & \beta \downarrow \\
 \Lambda & \xleftarrow{1-t} & \Lambda & \xleftarrow{N} & \Lambda
 \end{array}$$

En fait, comme il est bien connu, les colonnes impaires (resp. paires) sont des résolutions de 0 (resp. k) en tant que Λ -module trivial. Désignons par $C_{**}(G)$ le quotient du bicomplexe précédent par l'action à gauche de G et par $HC_*(G)$ l'homologie du complexe $\text{Tot}(C_{**}(G))$. Le bicomplexe $\tilde{C}_{**}(G)$ peut-être vu (au signe de β' près) comme une résolution du complexe

$$k. = k \leftarrow 0 \leftarrow k \leftarrow 0$$

Par conséquent, $H_*(\text{Tot}(C_{**}(G)))$ s'identifie canoniquement à l'hyperhomologie $H_*(G; k.) \approx H_*(G; k) \oplus H_{*-2}(G; k) \oplus \dots$ (cf. [9]), d'où la proposition:

2.22. PROPOSITION. Pour tout groupe discret G , on a un isomorphisme naturel

$$HC_n(G) \approx H_n(G) \oplus H_{n-2}(G) \oplus \dots$$

(somme directe de groupes d'homologie de G à coefficients dans k).

3.21. Regardons maintenant le bicomplexe $C_{**}(G)$ en termes d'éléments "non homogènes". De manière précise, nous identifions $k \otimes \Lambda^{p+1}$ à Λ^p par la transformation τ :

$$1. (g_0 \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_p) \mapsto g_0^{-1} g_1 \otimes g_1^{-1} g_2 \otimes \dots \otimes g_{p-1}^{-1} g_p = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$$

Il faut remarquer ici que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/(p+1)$ opère sur Λ^p par l'automorphisme $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p \mapsto (-1)^p (\alpha_1 \dots \alpha_p)^{-1} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{p-1}$. La transformation τ permet de définir un homomorphisme du bicomplexe $C_{**}(G)$ vers le bicomplexe $C_{**}(\Lambda)$ par la formule

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_p \mapsto (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)^{-1} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_p$$

(on notera que cette formule est compatible avec l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/(p+1)$). Cet homomorphisme admet une rétraction évidente

$$r : C_{**}(\Lambda) \longrightarrow C_{**}(G)$$

définie par

$$\begin{aligned} r(g_0 \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_p) &= g_1 \otimes \dots \otimes g_p \quad \text{si } g_0 g_1 \dots g_p = 1 \\ &= 0 \quad \text{si } g_0 g_1 \dots g_p \neq 1 \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que $HC_n(k[G])$ contient $HC_n(G)$ en facteur direct. Grâce au théorème 3.20, ceci démontre le théorème important suivant :

2.24. THÉORÈME. Le groupe $HC_n(k[G])$ contient de manière naturelle en facteur direct le groupe $H_n(G) \oplus H_{n-2}(G) \oplus \dots$

2.25. Remarques. Par la même méthode, on peut montrer que l'homologie de Hochschild $H_i(k[G], k[G])$ contient $H_i(G)$ en facteur direct. D'autre part, la démonstration précédente montre que $HC_n(G)$ peut s'identifier à l'homologie cyclique (dans le sens de [13] ou [28]) du sous-module de $k[G]^{\otimes*}$ engendré par les tenseurs $g_0 \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_p$ avec $g_i \in G$ et $g_0 g_1 \dots g_p = 1$.

2.26. Remarque. Si k contient $\mathbb{Q}$, A. Connes a aussi défini des homomorphismes $HC_n(k[G]) \rightarrow H_{n-2i}(G)$ par une méthode différente. J'ignore s'ils coïncident avec ceux définis ici. Par une troisième méthode D. Burghélée a récemment généralisé le théorème 2.22 en calculant le facteur complémentaire $HC_n(k[G])/HC_n(G)$ et il a montré qu'il n'est pas trivial en général [6].

$$\text{LES HOMOMORPHISMES } D_i : K_i(A) \rightarrow H_i(A, A) \text{ et } Ch_i^\ell : K_i(A) \rightarrow HC_{i+2\ell}(A) \\ (2.27-36)$$

2.27. Nous allons maintenant construire les invariants de la K-théorie algébrique promis. De manière précise, nous allons définir des homomorphismes

$$D_i : K_i(A) \rightarrow H_i(A, A) \text{ et } \tilde{Ch}_i^\ell : K_i(A) \rightarrow HC_{i+2\ell}(A)$$

Ici D_i est l'homomorphisme introduit par K. Dennis [15], Ch_i^0 est l'homomorphisme composé

$$K_i(A) \xrightarrow{D_i} H_i(A, A) \rightarrow HC_i(A)$$

et les $\tilde{Ch}_i^\ell$ rendent le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_i(A) & \xrightarrow{\tilde{Ch}_i^\ell} & HC_{i+2i}(A) \\ & \searrow \tilde{Ch}_i^{\ell-1} & \downarrow \tilde{S} \\ & & HC_{i+2i-2}(A) \end{array} \quad (\mathcal{Q}_i)$$

Pour cela, désignons par G_r le groupe $GL_r(A)$ et par ϕ_r l'homomorphisme canonique $k[G_r] \rightarrow M_r(A)$ qui envoie l'élément t de G_r sur la matrice correspondante.

Si $\theta_r : G_r \rightarrow G_{r+1}$ est l'homomorphisme de groupes défini par

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a un diagramme commutatif (pour $i \geq 1$)

$$\begin{array}{ccccccc} H_i(G_r) & \longrightarrow & H_i(k[G_r], k[G_r]) & \longrightarrow & H_i(M_r(A), M_r(A)) & \longrightarrow & H_i(A, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \approx & & \parallel \\ H_i(G_{r+1}) & \longrightarrow & H_i(k[G_{r+1}], k[G_{r+1}]) & \longrightarrow & H_i(M_{r+1}(A), M_{r+1}(A)) & \longrightarrow & H_i(A, A) \end{array}$$

On en déduit un homomorphisme canonique $H_i(GL(A)) \rightarrow H_i(A, A)$ et l'homomorphisme de Dennis D_i par composition des homomorphismes

$$K_i(A) = \pi_i(BGL(A)^+) \xrightarrow{h_i} H_i(BGL(A)^+) \approx H_i(GL(A)) \rightarrow H_i(A, A)$$

où h_i est l'homomorphisme de Hurewicz.

2.28. Remarque. Pour $i = 0$, on peut aussi définir directement un homomorphisme "rang" $Ch_0^O : K_0(A) \rightarrow H_0(A, A)$: à l'image d'un projecteur p de $M_r(A)$ il associe la classe de p dans $H_0(M_r(A), M_r(A)) \approx H_0(A, A)$.

2.29. La définition des classes caractéristiques $\tilde{Ch}_i^\ell$ (pour $i \geq 1$) suit le même schéma que celui décrit en 2.27. (l'ingrédient essentiel étant la proposition 2.22). En effet, on peut encore écrire un diagramme commutatif ($i \geq 1$)

$$\begin{array}{ccccccc} H_i(G_r) & \longrightarrow & HC_{i+2\ell}(k[G_r]) & \longrightarrow & HC_{i+2\ell}(M_r(A)) & \longrightarrow & HC_{i+2\ell}(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \approx & & \parallel \\ H_i(G_{r+1}) & \longrightarrow & HC_{i+2\ell}(k[G_{r+1}]) & \longrightarrow & HC_{i+2\ell}(M_{r+1}(A)) & \longrightarrow & HC_{i+2\ell}(A) \end{array}$$

(On remarquera que l'image de $H_i(G)$ dans $HC_{i+2\ell}(k[G])$ est contenue dans le sous-groupe $\bar{HC}_{i+2\ell}(k[G])$, homologie cyclique réduite de $k[G]$). On en déduit comme dans 2.27 un homomorphisme canonique $H_i(GL(A)) \rightarrow HC_{i+2\ell}(A)$, d'où l'homomorphisme $\tilde{Ch}_i^\ell$ par composition des flèches

$K_i(A) = \pi_i(BGL(A)^+) \rightarrow H_i(BGL(A)^+) = H_i(GL(A)) \rightarrow HC_{i+2\ell}(A)$. En résumé, on a ainsi démontré le théorème suivant

2.30. THÉORÈME. La composition des homomorphismes précédents définit un "caractère de Chern"

$$\tilde{\text{Ch}}_i^\ell : K_i(A) \longrightarrow \text{HC}_{i+2\ell}(A)$$

tel que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} K_i(A) & \xrightarrow{\tilde{\text{ch}}_i^0} & \text{HC}_i(A) \\ D_i \searrow & & \nearrow I \\ & H_i(A, A) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K_i(A) & \xrightarrow{\tilde{\text{ch}}_i^\ell} & \text{HC}_{i+2\ell}(A) \\ \tilde{\text{ch}}_i^{\ell+1} \searrow & & \nearrow S \\ & \text{HC}_{i+2\ell+2}(A) & \end{array}$$

D_i étant l'homomorphisme de Dennis (2.27).

2.31. Remarque. La commutativité du diagramme $(\mathfrak{S}_i)$ se démontre par inspection. D'autre part, un examen attentif de la définition montre que les homomorphismes $\tilde{\text{Ch}}_i^\ell$ se déduisent d'invariants plus fins appartenant à l'homologie cyclique "tronquée". De manière précise, posons $\text{HC}_p^{(q)}(A) = H_q(\text{Tot}(C_{**}^{(q)}(A)))$ où $C_{**}^{(q)}(A)$ est le sous bicomplexe de $C_{**}(A)$ formé des $(q+1)$ - premières colonnes. Alors l'homomorphisme $\tilde{\text{Ch}}_i^\ell$ se factorise en

$$K_i(A) \xrightarrow{\text{ch}_i^{\ell+1}} \text{HC}_{i+2\ell}^{(2\ell)}(A) \longrightarrow \text{HC}_{i+2\ell}(A)$$

En particulier, $\text{Ch}_\ell^0 = D_\ell$ (comparer avec [21]).

2.32. Remarque. Tous les homomorphismes que nous venons de définir de la K-théorie algébrique de A vers l'homologie de Hochschild ou l'homologie cyclique se factorisent à travers l'homologie du groupe linéaire infini $\text{GL}(A)$.

2.33. Pour une $\mathbb{Q}$ -algèbre A , nous allons expliciter l'homomorphisme

$$K_1(A) \longrightarrow \text{HC}_{2n-1}(A)$$

qu'on déduit des considérations générales précédentes. D'après 2.22, ceci revient à expliciter l'homomorphisme de rétraction défini pour tout groupe G :

$$H_1(G; \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{HC}_{2n-1}(\mathbb{Q}[G])$$

ce qu'il suffit de faire pour $G = \mathbb{Z}$ puisque tout élément de $H_1(G; \mathbb{Q})$ est, à un facteur multiplicatif non nul près, l'image d'un élément de $H_1(\mathbb{Z}; \mathbb{Q})$ par un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans G . D'après [36] §2, le groupe $\text{HC}_{2n-1}(\mathbb{Q}[\mathbb{Z}]) = \text{HC}_{2n-1}(\mathbb{Q}[u, u^{-1}])$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$. Nous allons en exhiber un générateur explicite par des méthodes topologiques.

2.34. PROPOSITION. La forme différentielle non commutative $\omega_n = (u^{-1}du)^{2n-1}$ engendre le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension un $\bar{H}_{2n-1}(\mathbb{Q}[u, u^{-1}]) \approx HC_{2n-1}(\mathbb{Q}[u, u^{-1}])$.

Démonstration. On a $\omega_n = (-1)^{n-1} u^{-1} du d(u^{-1}) du \dots d(u^{-1}) du$ (n facteurs du , $(n-1)$ facteurs $d(u^{-1})$) car $d(u^{-1}) = -u^{-1} du u^{-1}$. On en déduit que $d\omega_n = - (u^{-1}du)^{2n} = - (u^{-1}du)^{2n-1} (u^{-1}du) = + (u^{-1} du) = + (u^{-1}du)(u^{-1}du)^{2n-1} = 0$ dans $\bar{\Omega}_*(\mathbb{Q}[u, u^{-1}])$. Donc ω_n est bien une forme fermée définissant un élément de $\bar{H}_{2n-1}(\mathbb{Q}[u, u^{-1}])$. Pour voir que cette forme n'est pas triviale en homologie de De Rham non commutative, il suffit de trouver une variété X et une application $C^\infty \alpha : X \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$ telle que la forme différentielle "usuelle" $Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1}$ définisse un élément non trivial de la cohomologie de De Rham de la variété X . Pour cela, comme dans l'exemple 1.27, considérons un espace vectoriel E de dimension finie et des automorphismes $e_1, \dots, e_{2n+1}$ satisfaisant aux relations écrites en 1.27. Posons $E_0 = \text{Ker}(e_{2n+1} - 1)$, $E_1 = \text{Ker}(e_{2n+1} + 1)$, $X = S^{2n-1}$ et considérons l'application $\alpha : X \rightarrow \text{Aut}(E_0)$ induite par $e_1 \cdot J$ avec

$$J = x_1 e_1 + \dots + x_{2n} e_{2n}$$

(x_r) représentant les coordonnées d'un point de S^{2n-1} . Alors un calcul formel montre que $Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1} = (-1)^{n-1} Tr(J \cdot (dJ)^{2n-1}) = Tr(x_1 e_1 + \dots + x_{2n} e_{2n}) (dx_1 e_1 + \dots + dx_{2n} e_{2n})^{2n-1}$. Un calcul analogue à celui effectué en 1.27 montre alors que cette forme différentielle est égale à $(-1)^{n-1} (2n-1)! i^n \text{Dim}(E_0)$ multiplié par la forme volume de S^{2n-1} . Si on pose $E = \wedge \mathbb{C}^n$ comme en 1.27, on en déduit la formule suivante

$$Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} (2i\pi)^n [S^{2n-1}]$$

où $[S^{2n-1}]$ représente la classe fondamentale de la sphère S^{2n-1} .

2.35. Pour en revenir à l'homologie cyclique de $\mathbb{Q}[u, u^{-1}]$ en dimension $2n-1$, on applique l'homomorphisme $\bar{H}_{2n-1}(A) \rightarrow \bar{HC}_{2n-1}(A)$ décrit en 2.13 pour une algèbre quelconque A . On retrouve alors un résultat d'A. Connes [12]: le produit tensoriel

$$\theta_n = (u^{-1}-1) \otimes (u-1) \otimes \dots \otimes (u^{-1}-1) \otimes (u-1)$$

(n facteurs $(u-1)$ et $(u^{-1}-1)$) engendre $HC_{2n-1}(\mathbb{Q}[u, u^{-1}])$ en tant que $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension un. Ainsi, l'image du générateur canonique de $H_1(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$

par la composition des homomorphismes

$$H_1(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\mathbb{Z}; \mathbb{Q}) \longrightarrow HC_{2n-1}(\mathbb{Q}[\mathbb{Z}])$$

est de la forme $\lambda_n \theta_n$ où $\lambda_n \in \mathbb{Q}^*$. Dans le paragraphe 5 de ce livre nous calculerons λ_n explicitement (cf. 5.29).

2.39. Remarque. Il est bien connu que la cohomologie complexe du groupe unitaire $U(n)$ est une algèbre extérieure $\Lambda(\lambda^1, \dots, \lambda^{2n-1})$ avec des générateurs λ^{2i-1} en degrés impairs. En outre, les classes de cohomologie λ^{2i-1} sont duales de classes d'homologie appartenant à l'image de l'homomorphisme de Hurewicz

$$\pi_{2i-1}(U(n)) \longrightarrow H_{2i-1}(U(n)) \quad (\text{noter que l'homomorphisme}$$

$$\pi_{2i-1}(U(n)) \longrightarrow \pi_{2i-1}(U) \approx \mathbb{Z}$$

est surjectif pour $i \leq n$). Le calcul précédent montre donc que la forme différentielle $\text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2i-1}$ représente la classe de cohomologie λ^{2i-1} (à un facteur multiplicatif près). Il s'en suit que la forme différentielle biinvariante

$$\Omega = \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2n-1} \wedge \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2n-3} \wedge \dots \wedge \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)$$

est la forme volume biinvariante de $U(n)$ à un facteur multiplicatif près.

III. DÉFINITION DE LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE EN TERMES DE FIBRÉS PLATS

A-FIBRÉS PLATS VIRTUELS ET LEUR GROUPE DE GROTHENDIECK $\bar{K}_A(X)$ (3.1-5)

3.1. Dans le paragraphe précédent nous avons construit des "caractères de Chern" $K_i(A) \rightarrow HC_{i+2\ell}(A)$ qui se factorisent à travers l'homologie $H_i(GL(A))$ du groupe discret $GL(A)$. La méthode utilisée reposait essentiellement sur l'algèbre homologique (cf. plus précisément la proposition 2.22 qui joue un rôle clé). Ce paragraphe est une première étape vers une description plus "géométrique" de ces caractères de Chern. Nous y interprétons la K-théorie algébrique de A en termes de A-fibrés plats.

De manière plus précise, soit A un anneau unitaire et soit X un espace quelconque $(*)$. On définit classiquement la K-théorie algébrique de X associée à l'anneau A comme l'ensemble des classes d'homotopie

$$K_A(X) = [X, K_0(A) \times BGL(A)^+]$$

où $K_0(A)$ désigne le groupe de Grothendieck usuel (muni de la topologie discrète) et où $BGL(A)^+$ est le H-espace défini par Quillen et obtenu en attachant des cellules de dimension 2 et 3 à l'espace classifiant $BGL(A)$ du groupe discret $GL(A)$ (cf. [43][48]). En particulier, $K_A(X)$ est un groupe abélien et on a

$K_A(S^n) \approx K_n(A) \oplus K_0(A)$ où $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$ pour $n > 0$. Il n'est pas très difficile de voir que $K_1(A) \approx GL(A)/GL'(A)$ et que $K_2(A) \approx H_2(GL'(A), \mathbb{Z})$ sont les groupes définis par Bass [3] et Milnor [39] respectivement ($GL'(A)$ désignant le sous-groupe des commutateurs de $GL(A)$).

Cependant, dans beaucoup de situations en K-théorie algébrique cette définition relativement simple de $K_A(X)$ s'est révélée malcommode. Par exemple, Quillen a démontré les théorèmes fondamentaux de la K-théorie algébrique (suite exacte

(*) Tous les espaces considérés ici sont paracompacts et ont le type d'homotopie d'un CW-complexe.

de localisation, invariance homotopique, etc...) à partir d'une autre définition en termes d'espace classifiant associé à une catégorie convenable (la construction Q , cf. [43]. Nous allons maintenant développer un autre point de vue, plus proche de la géométrie différentielle, que le lecteur empreint d'ironie pourrait appeler la construction "s'il le désire". Ce point de vue nous sera utile pour interpréter géométriquement les classes caractéristiques secondaires si A est une algèbre de Banach par exemple.

3.2. Nous définirons ici un A-fibré plat sur un espace Y comme un revêtement $E \rightarrow Y$, les fibres étant munies d'une structure de A -module projectif de type fini. En outre, nous supposerons que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage U de y et un isomorphisme de revêtements

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\theta} & U \times P \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

où P est un A -module projectif de type fini et où θ est A -linéaire sur chaque fibre (pour fixer les idées, nous supposerons que tous les modules considérés sont des modules à droite). Si Y est connexe, la classe d'isomorphie de P est bien déterminée et, comme dans le cas des fibrés vectoriels usuels, l'ensemble des classes d'isomorphie de A -fibrés plats de fibre P est en correspondance bijective avec l'ensemble $H^1(Y; G)$ où G est le groupe discret $\text{Aut}(P)$. Cet ensemble s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaison d'homomorphismes $\pi_1(Y) \rightarrow G$. En particulier, si Y est simplement connexe, tout A -fibré plat sur Y est trivial.

3.3. Les considérations précédentes montrent qu'il est vain de tenter de définir $K_A(X)$ en termes de fibrés plats sur X . Nous allons voir cependant qu'il n'en est pas de même pour les fibrés plats sur Y où Y est "homologiquement équivalent" à X . De manière précise, désignons par $\mathcal{A}$ "l'ensemble" des espaces F dont l'homologie réduite entière $\check{H}_*(F)$ est nulle (un tel espace est dit acyclique). Une application $f : X \rightarrow Y$ est alors dite acyclique si la fibre homotopique de f au-dessus de chaque point y de Y appartient à $\mathcal{A}$. Une étude systématique des applications acycliques est développée dans [19].

Un A-fibré plat virtuel sur X est défini par une fibration (de Serre) acyclique $f : Y \rightarrow X$ et par un A -fibré plat sur Y . On pourra le noter

$E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X$. Deux tels fibrés plats virtuels $E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X$ et $E' \xrightarrow{\pi'} Y' \xrightarrow{f'} X$ seront dits équivalents s'il existe un fibré virtuel $E_1 \xrightarrow{\pi_1} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ et un diagramme commutatif

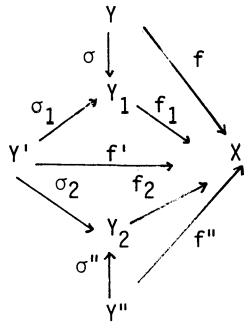
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \sigma \downarrow & \nearrow f_1 & \uparrow f' \\ Y_1 & \xleftarrow{\sigma'} & Y' \end{array}$$

avec f_1 fibration acyclique où $E \approx \sigma^* E_1$ et $E' \approx \sigma'^* E_1$.

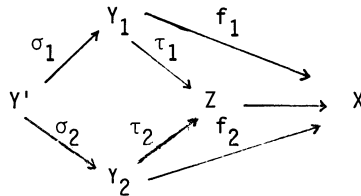
3.4. PROPOSITION. La relation ainsi définie entre fibrés virtuels est une relation d'équivalence.

Démonstration. Seule la transitivité n'est pas évidente. Supposons ainsi

$E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X$ équivalent à $E' \xrightarrow{\pi'} Y' \xrightarrow{f'} X$ et ce dernier équivalent à $E'' \xrightarrow{\pi''} Y'' \xrightarrow{f''} X$. On peut donc écrire un diagramme commutatif

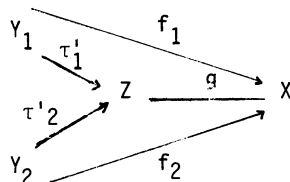


et des isomorphismes $E \approx \sigma^* E_1$, $E' \approx \sigma_1^* E_1 \approx \sigma_2^* E_2$, $E'' \approx \sigma''^* E_2$ où E_1 et E_2 sont des fibrés plats sur Y_1 et Y_2 respectivement. Soit alors Z la somme amalgamée homotopique de Y_1 et Y_2 par rapport à Y' (homotopiquement on a donc $Y' = Y_1 \cap Y_2$ et $Z = Y_1 \cup Y_2$). On peut ainsi écrire un autre diagramme commutatif à homotopie près

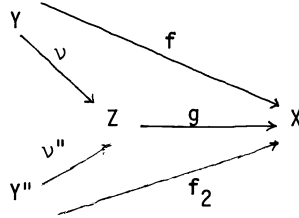


ainsi qu'un fibré plat F sur Z tel que $E_1 \approx \tau_1^* F$ et $E_2 \approx \tau_2^* F$.

D'autre part, sans modifier l'assertion précédente, on peut supposer que $Z \xrightarrow{g} X$ est une fibration de Serre et trouver des applications τ'_1 et τ'_2 homotopes à τ_1 et τ_2 telles que le diagramme



commute exactement (car $Z \rightarrow X$ est une fibration). On a ainsi construit un diagramme commutatif où $v = \tau_1' \cdot \sigma$ et $v'' = \tau_2' \cdot \sigma''$

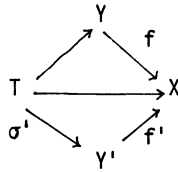


et un fibré plat F sur Z tel que $v F \approx E$ et $v'' F \approx E''$.

D'autre part, d'après la suite exacte de Mayer-Vietoris à coefficients locaux, g est une application acyclique [19]. Donc les fibrés virtuels

$$E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X \quad \text{et} \quad E'' \rightarrow Y'' \xrightarrow{f''} X \quad \text{sont équivalents.}$$

3.5. Remarque. Soient $E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X$ et $E' \xrightarrow{\pi'} Y' \xrightarrow{f'} X$ deux fibrés virtuels et soit le diagramme commutatif



avec $T \rightarrow X$ acyclique. Alors, si $\sigma^* E \approx \sigma'^* E'$, les fibrés virtuels E et E' sont équivalents. En effet, l'argument donné plus haut en considérant la somme amalgamée homotopique de Y et Y' par rapport à T permet de montrer de même l'équivalence des fibrés E et E' . La réciproque est cependant inexacte : l'équivalence de E et E' n'implique pas nécessairement l'existence d'un tel T (considérer par exemple un espace X acyclique tel que $\pi_1(X) \neq 0$).

$$\text{L'ISOMORPHISME } \bar{K}_A(X) \approx K_A(X) = [X, K_0(A) \times \text{BGL}(A)^+] \quad (3.6-13)$$

3.6. L'ensemble $\Phi_A(X)$ des classes d'équivalence de A -fibrés plats virtuels peut être muni d'une structure de monoïde abélien de la manière suivante. Si

$E \rightarrow Y \xrightarrow{f} X$ et $E' \rightarrow Y' \xrightarrow{f'} X$ sont deux tels fibrés, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ g \uparrow & & \uparrow f' \\ Z & \xrightarrow{g'} & Y' \end{array}$$

avec $Z = Y \times Y'$ et on définit la "somme" de E et E' comme la somme de Whitney $g^*E \oplus g'^*E'$. Par abus d'écriture, on notera $E \oplus E'$ la somme ainsi définie. On vérifie aisément que $\Phi_A(X)$ est ainsi muni d'une structure de monoïde abélien et que c'est un foncteur contravariant de X et covariant de A . On désigne (provisoirement) par $\bar{K}_A(X)$ son groupe symétrisé. En fait, on montrera plus loin que si X est un CW-complexe fini, $\bar{K}_A(X)$ et $K_A(X)$ sont naturellement isomorphes. Nous aurons auparavant besoin d'une définition et de quelques lemmes.

Un fibré virtuel $E \rightarrow Y \rightarrow X$ est dit virtuellement trivial s'il existe un espace acyclique T et un fibré plat F sur T ainsi qu'une application $\sigma: Y \rightarrow T$ telle que $E \approx \sigma^* F$.

3.7. LEMME. Soit E_1 un fibré plat virtuel sur un CW-complexe fini X . Il existe alors un fibré plat virtuel E_2 sur X tel que $E_1 \oplus E_2$ soit virtuellement trivial.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les fibres de E sont isomorphes à A^n pour un certain $n \geq 2$. Le fibré virtuel $E_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow X$ est ainsi classifié par une application $Y_1 \rightarrow BGL_n(A)$. Soit P la fibre de $Y_1 \rightarrow X$: c'est un espace acyclique par définition et X s'identifie à la cofibre homotopique de $P \rightarrow Y_1$ [19]. D'autre part, il est bien connu que l'image du sous-groupe des commutateurs de $GL_n(A)$ dans $GL_{2n}(A)$ est contenue dans le sous-groupe $E_{2n}(A)$ qui est engendré par les matrices élémentaires (et qui est parfait puisque $2n \geq 3$). Posons alors $m = 2n$ et désignons par $BGL_m(A)^+$ l'espace obtenu à partir de $BGL_m(A)$ par la construction + de Quillen appliquée au sous-groupe parfait $E_m(A)$. L'homomorphisme composé

$\pi_1(P) \rightarrow \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(BGL_m(A)) \rightarrow \pi_1(BGL_m(A)^+)$ étant trivial, l'application $P \rightarrow BGL_m(A)^+$ est homotope à l'application constante [19] et on en déduit ainsi un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & BGL_m(A)^+ \\ f_1 \uparrow & & \uparrow \\ Y_1 & \longrightarrow & BGL_m(A) \end{array}$$

Puisque $BGL(A)^+$ est un espace de lacets [48] et que X est un CW-complexe fini, il existe $g_2 : X \rightarrow BGL_q(A)^+$ tel que

$$g_1 \oplus g_2 : X \rightarrow BGL_{m+q}(A)^+$$

soit homotope à l'application constante. Remplaçons alors partout les applications $BGL_r(A) \rightarrow BGL_r(A)^+$ par des fibrations et considérons le produit fibré Y_2 de X et de $BGL_q(A)$ au-dessus de $BGL_q(A)^+$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & BGL_q(A)^+ \\ f_2 \uparrow & & \uparrow \\ Y_2 & \longrightarrow & BGL_q(A) \end{array}$$

Soit E_2 le fibré sur Y_2 image réciproque du fibré universel sur $BGL_q(A)$. Alors $E_1 \oplus E_2$ est un fibré sur $Y = Y_1 \times Y_2$ dont l'application classifiante $\tau : Y \rightarrow BGL_{m+q}(A)$ composée avec l'application $BGL_{m+q}(A) \rightarrow BGL_{m+q}(A)^+$ est homotope à l'application constante. Donc τ se factorise par la fibre de $BGL_{m+q}(A) \rightarrow BGL_{m+q}(A)^+$ qui est évidemment acyclique.

3.8. LEMME. Soit E un fibré virtuellement trivial. Alors E est équivalent à un fibré trivial de même fibre.

Démonstration. Soit $E \rightarrow Y \xrightarrow{f} X$ un fibré virtuel, T un espace acyclique et F un fibré sur T tel que $E \approx \sigma^*F$ avec $\sigma : Y \rightarrow T$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \tau \downarrow & \searrow f & \\ T \times X & \xrightarrow{pr_2} & X \\ \chi \uparrow & \nearrow Id & \\ X & & \end{array}$$

avec $\tau(y) = (\sigma(y), f(y))$ et $\chi(x) = (*, x)$. Si $pr_1 : T \times X \rightarrow T$ désigne la première projection, pr_1^*F est un fibré sur $T \times X$ dont l'image réciproque sur Y et X par τ et χ est respectivement E et le fibré trivial de même rang. Donc E est bien équivalent à un fibré trivial de même fibre (on remarquera que dans cette démonstration τ n'est pas nécessairement acyclique).

On a une application évidente de $\phi_A(X)$ dans l'ensemble des applications continues de X dans $K_0(A)$ (muni de la topologie discrète) : elle associe à un fibré vectoriel E la classe de chaque fibre au-dessus d'un point de X . Soit $\bar{K}_A^1(X)$ le noyau de l'homomorphisme

$$\bar{K}_A(X) \longrightarrow [X, K_0(A)]$$

qu'on en déduit. En suivant [25], on montre facilement que $\bar{K}_A(X) \approx \bar{K}'_A(X) \oplus [X, K_0(A)]$.

3.9. LEMME. Soit X un CW-complexe fini. Le groupe $K'_A(X)$ s'identifie alors de manière naturelle à la limite inductive

$$\phi_A^1(X) \rightarrow \dots \quad \phi_A^n(X) \xrightarrow{i_n} \phi_A^{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

$\phi_A^n(X)$ désignant l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés virtuels de fibre

A^n , i_n étant l'application qui consiste à ajouter le fibré trivial de rang 1 et la loi de composition dans la limite étant induite par la "somme"

$$\phi_A^n(X) \times \phi_A^p(X) \longrightarrow \phi_A^{n+p}(X)$$

Démonstration. Tout élément de $\bar{K}'_A(X)$ s'écrit formellement $E - F$ où E et F sont des fibrés virtuels de même fibre, A^n disons. Associons lui l'élément $E \oplus F_1$ de la liste inductive, F_1 étant un fibré virtuel de fibre libre tel que $F \oplus F_1$ soit virtuellement trivial de fibre libre (lemme 3.7). Cette application est bien définie et inverse de l'application qui à un élément de la limite inductive représenté par un fibré virtuel E de fibre A^n associe $E - T_n$ où T_n est le fibré trivial de fibre A^n .

3.10. LEMME. Soit X un CW-complexe fini. Alors $\lim \phi_A^n(X)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes d'homotopie de X dans $BGL(A)^+$.

Démonstration. Si $E \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} X$ est un fibré virtuel de fibre A^n , il est défini par une application classifiante $Y \rightarrow BGL(A)$ et, d'après les considérations développées en 3.7., on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & BGL_{2n}(A)^+ \\ \uparrow f & & \uparrow \\ Y & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & BGL_{2n}(A) \end{array}$$

La classe d'homotopie de $\bar{\sigma}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de σ . En outre, si $E \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} X$ et $E' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{f'} X$ sont équivalents, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ Z & \xrightarrow{g} & X \\ \uparrow & \nearrow f' & \\ Y' & & \end{array}$$

vérifiant les conditions de 3.3 (avec $Y_1 = Z$) et on peut choisir $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}'$ en sorte que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & BGL_{2n}(A)^+ \\
 \uparrow f & \nearrow & \uparrow \\
 Y & \xrightarrow{\sigma} & BGL_{2n}(A) \\
 & \nwarrow Z & \\
 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\bar{\sigma}'} & BGL_{2n}(A)^+ \\
 \uparrow f' & \nearrow & \uparrow \\
 Y' & \xrightarrow{\sigma} & BGL_{2n}(A) \\
 & \nwarrow Z & \\
 & &
 \end{array}$$

commutent avec en outre $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}'$. On définit bien ainsi une application

$$\gamma : \varinjlim \Phi_A^n(X) \longrightarrow [X, BGL(A)^+]$$

a) γ est surjective. Si $\tau : X \longrightarrow BGL(A)^+$, on peut la factoriser à travers un $BGL_m(A)^+$ car X est un CW-complexe fini, d'où un fibré plat en considérant le produit fibré de X et de $BGL_m(A)$ au-dessus de $BGL_m(A)^+$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & BGL_m(A)^+ \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 Y & \xrightarrow{\sigma} & BGL_m(A)
 \end{array}$$

b) γ est injective. Si τ est homotope à l'application constante, σ se factorise à travers la fibre de $BGL_m(A) \longrightarrow BGL_m(A)^+$ pour m assez grand. Donc E est virtuellement trivial et par conséquent équivalent à un fibré trivial de même fibre d'après le lemme 1.8.

En mettant bout à bout les différents lemmes, on a ainsi démontré le théorème suivant.

3.11. THÉORÈME. Soit X un CW-complexe fini. Alors les groupes $\bar{K}_A(X)$ et $[K_A(X) = [X, K_0(A) \times BGL(A)^+]]$ sont naturellement isomorphes.

Des variantes de ce théorème sont présentées en appendice. Notons déjà un avantage de notre présentation sur la présentation traditionnelle :

3.12. PROPOSITION. Le produit tensoriel des fibrés plats virtuels induit la structure multiplicative usuelle de la K-théorie algébrique (cf. [34]).

Démonstration. De manière plus précise, soient A_1, A_2 et A_3 trois anneaux (unitaires) et soit $\phi : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_3$ une application $\mathbb{Z}$ -bilinéaire induisant un homomorphisme d'anneaux $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \longrightarrow A_3$. Alors le produit tensoriel des matrices définit une application

$$\mathrm{BGL}_n(A_1) \times \mathrm{BGL}_m(A_2) \longrightarrow \mathrm{BGL}_{nm}(A_3)$$

d'où une application

$$\mathrm{BGL}_n(A_1)^+ \times \mathrm{BGL}_m(A_2)^+ \longrightarrow \mathrm{BGL}(A_3)^+$$

bien définie à homotopie près. Si $E_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow X_1$ et $E_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow X_2$ sont des fibrés virtuels de fibre A_1^n et A_2^m respectivement qui peuvent se représenter par des applications $X_1 \rightarrow \mathrm{BGL}_n(A_1)^+$ et $X_2 \rightarrow \mathrm{BGL}_m(A_2)^+$, $E_1 \otimes E_2$ est représenté par l'application composée

$$X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathrm{BGL}_n(A_1)^+ \times \mathrm{BGL}_m(A_2)^+ \longrightarrow \mathrm{BGL}_{nm}(A_3)^+$$

Soit T_n (resp. T'_m) le fibré trivial de fibre A_1^n (resp. A_2^m). Alors au cup-produit $(E_1 - T_n) \smile (E_2 - T'_m)$ est associé la différence des fibrés virtuels

$$[(E_1 \otimes E_2) \oplus (T_n \otimes T'_m)] - [(E_1 \otimes T'_m) \oplus (T_n \otimes E_2)]$$

En d'autres termes, le cup-produit

$$K'_{A_1}(X_1) \times K'_{A_2}(X_2) \longrightarrow K'_{A_3}(X_1 \times X_2)$$

est bien associé au produit tensoriel des fibrés plats. De même, aux cup-produits

$$K_0(A_1) \times K'_{A_2}(X) \longrightarrow K'_{A_3}(X) \quad \text{et} \quad K'_{A_1}(X) \times K_0(A_2) \longrightarrow K'_{A_3}(X)$$

est bien associé le produit tensoriel d'un fibré plat et d'un module projectif de type fini.

3.13. On procède de même pour définir des opérations λ^i de Grothendieck sur $K_A(X)$ lorsque A est un anneau commutatif. En effet, la définition de $\lambda^i(E)$ est claire lorsque E ne dépend que de la classe d'équivalence de E . Par conséquent, l'opération λ^i s'étend au groupe de Grothendieck par la méthode usuelle (cf. [25] par exemple). On retrouve ainsi les opérations introduites par Kratzer [33].

IV. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE CYCLIQUES TOPOLOGIQUES. DÉFINITION
DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES

HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE TOPOLOGIQUE (4.1-4)

4.1. Soit A une algèbre topologique localement convexe (sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Comme l'a fait A. Connes dans le cadre de la cohomologie cyclique [12], les résultats algébriques des paragraphes 1 et 2 se transposent aisément dans le cadre topologique en remplaçant les produits tensoriels ordinaires par les produits tensoriels complétés projectifs (au sens de Grothendieck [18]). On désigne ainsi par $C_p^{\text{top}}(A)$ le produit tensoriel topologique $A \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} A$ ($p+1$ facteurs) et $C_p^{\lambda \text{top}}(A)$ le quotient $C_p^{\text{top}}(A)/(1-t)$ (qui est séparé car $\text{Im}(1-t) = \text{Ker}(N)$). L'homologie de Hochschild topologique $H_*^{\text{top}}(A, A)$ est l'homologie du complexe $(C_*^{\text{top}}(A), b)$. L'homologie cyclique topologique $H_*^{\lambda \text{top}}(A)$ (notée aussi $HC_*^{\text{top}}(A)$) est l'homologie du complexe $(C_*^{\lambda \text{top}}(A), b)$.

On définit de même la cohomologie de Hochschild et la cohomologie cyclique topologiques $H_{\text{top}}^*(A, A)$ et $H_{\lambda \text{top}}^*(A)$ (notée aussi $HC_{\text{top}}^*(A)$) en appliquant le foncteur $\text{Hom}(\ ; k)$ aux complexes précédents (Hom désignant l'ensemble des applications linéaires continues). Comme dans le paragraphe précédent et dans [12], on a les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H_p^{\text{top}}(A, A) & \xrightarrow{I} & HC_p^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{S} & HC_{p-2}^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{B} & H_{p-1}^{\text{top}}(A, A) \\ H_{\text{top}}^p(A, A) & \xleftarrow{t_I} & HC_{\text{top}}^p(A) & \xleftarrow{t_S} & HC_{\text{top}}^{p-2}(A) & \xleftarrow{t_B} & H_{\text{top}}^{p-1}(A, A) \end{array}$$

Ces suites exactes se démontrent comme en 2.3 à l'aide du double complexe définissant l'homologie ou la cohomologie cyclique. Les homomorphismes I, S, B et leurs transposés sont définis par les mêmes formules. Il existe bien entendu un accouplement

$$HC_p^{\text{top}}(A) \times HC_{\text{top}}^p(A) \longrightarrow k$$

Cependant, contrairement à la situation algébrique, la cohomologie cyclique topologique n'est pas duale de l'homologie cyclique topologique en général.

La même remarque s'applique à l'homologie et à la cohomologie de Hochschild.

Il y a aussi ici un point technique qu'il convient de souligner : les espaces d'homologie ou de cohomologie obtenus, définis comme des espaces vectoriels topologiques quotients, ne sont pas séparés en général (cf. [12] §5 pour des exemples). Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, les classes caractéristiques que nous allons construire appartiendront à l'homologie séparée des complexes considérés (quotient des cycles par l'adhérence des bords). Par abus d'écriture, nous désignerons par les mêmes lettres H_*^{top} , HC_*^{top} , etc... les homologies séparées associées. J'ignore cependant si les suites exactes précédentes s'étendent aux homologies séparées.

L'homologie cyclique réduite topologique $\overline{HC}_n^{\text{top}}(A)$ se définit de la même manière qu'en 2.9 en considérant le complété $\bar{C}_*^{\lambda \text{top}}(A)$ de $C_*^{\lambda}(A)$. Si $A = B^+$, algèbre obtenue à partir de B en ajoutant un élément unité, on retrouve bien entendu l'homologie cyclique topologique de B .

Pour terminer cette introduction, mentionnons que l'homologie de De Rham non commutative $\overline{H}_*(A)$ définie en 1.3 a aussi un analogue topologique. Dans le cas universel (comparer avec 1.24), on définit $\tilde{\Omega}_1^{\text{top}}(A) = A \otimes A/k$ (avec $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\tilde{\Omega}_n^{\text{top}}(A) = A \otimes A/k \otimes \dots \otimes A/k$ (n facteurs A/k). Comme en 1.24 on peut démontrer que $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ est une algèbre topologique différentielle graduée. On définit $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ comme le quotient de $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ par l'adhérence de l'image de b comme en 2.12 et enfin $\tilde{\tilde{\Omega}}_*^{\text{top}}(A)$ comme le quotient de $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ par l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n$ opérant par

$$a_0 da_1 da_2 \dots da_n \mapsto (-1)^{n-1} da_n a_0 da_1 \dots da_{n-1}$$

Le noyau de $\tilde{\tilde{\Omega}}_*^{\text{top}}(A) \rightarrow \tilde{\tilde{\Omega}}_*^{\text{top}}(A)$ est l'adhérence du k -espace vectoriel engendré par les commutateurs gradués. Comme en 2.13, on a un homéomorphisme

$$\tilde{\tilde{\Omega}}_*^{\text{top}}(A)/d(\tilde{\tilde{\Omega}}_*^{\text{top}}(A)) \approx \overline{\tilde{C}_*^{\lambda \text{top}}(A)/b(C_*^{\lambda \text{top}}(A))}$$

ce qui montre que l'image de $d : \tilde{\tilde{\Omega}}_*^{\text{top}}(A) \rightarrow \tilde{\tilde{\Omega}}_{*+1}^{\text{top}}(A)$ est fermée.

4.2. Le but de ce paragraphe est de donner une définition géométrique des classes caractéristiques

$$K_i^{\text{top}}(A) \xrightarrow{\text{ch}_i^\ell} HC_{i+2\ell}(A)$$

pour $\ell \in \mathbb{Z}$ en sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_i(A) & \xrightarrow{\tilde{\text{ch}}_i^\ell} & HC_{i+2\ell}(A) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \\ K_i^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{\tilde{\text{ch}}_i^\ell} & HC_{i+2\ell}^{\text{top}}(A) \end{array}$$

où γ est l'application canonique, soit commutatif à une constante multiplicative rationnelle près ^(*). Dans notre contexte topologique (et en suivant le schéma du §1), nous nous donnons une algèbre topologique localement convexe graduée $\Omega_*(A)$ telle que $\Omega_0(A) = A$. L'algèbre $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ construite en 4.1 est "universelle" dans le sens qu'il existe une unique application linéaire continue $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A) \longrightarrow \Omega_*(A)$ qui soit un homomorphisme d'algèbres et qui soit l'identité sur A . D'autre part, si on pose

$$\bar{\Omega}_*(A) = \Omega_*(A) / [\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$$

quotient de $\Omega_*(A)$ par l'adhérence du k -espace vectoriel engendré par les commutateurs gradués, nous supposons que l'image de $d : \bar{\Omega}_*(A) \rightarrow \bar{\Omega}_{*+1}(A)$ est fermée. Par extension de la définition posée en 1.3, nous appellerons encore $\bar{\Omega}_*(A)$ une quasi-résolution (topologique) de A . Les classes caractéristiques que nous nous proposons de construire (cf. 4.12) seront à valeurs dans l'homologie du complexe $(\bar{\Omega}_*(A), d)$ que nous noterons $H\bar{\Omega}_*(A)$. Bien entendu, le caractère universel du complexe $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ montre qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{H}_*^{\text{top}}(A) \\ & \nearrow & \downarrow \\ K_i^{\text{top}}(A) & & H\bar{\Omega}_*(A) \\ & \searrow & \end{array}$$

Nous n'obtenons donc pas de classes caractéristiques nouvelles en considérant $\Omega_*(A)$ plutôt que $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$. Cependant, il est souvent plus facile de calculer $H\bar{\Omega}_*(A)$ que $\bar{H}_*^{\text{top}}(A)$ pour des choix judicieux de $\Omega_*(A)$.

4.3. Exemple. Soit X une variété compacte et soit $r \geq 1$. Soit $\Omega_i(A)$ l'espace vectoriel des formes différentielles ω de degré i telles que ω et $d\omega$ soient de classe C^{r-1} . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega_i(A) \xrightarrow{\sigma} \Omega_i^r(A) \times \Omega_{i+1}^r(A) \xrightarrow{\tau} \Omega_i^{r-1}(A)$$

où $\Omega_i^k(A)$ désigne l'ensemble des formes différentielles de degré i et de classe C^k , où $\tau(\omega, \alpha) = d\omega - \alpha$ et où $\sigma(\theta) = (\theta, d\theta)$. Ainsi, $\Omega_i(A)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $\Omega_i^r(A) \times \Omega_{i+1}^r(A)$. C'est donc un espace de Banach et on voit facilement que $\Omega_*(A)$ est bien une algèbre de Banach graduée. Ici $\Omega_0(A) = A$ est bien entendu l'algèbre des fonctions de classe C^r sur X . D'après le théorème de De Rham, $H\bar{\Omega}_*(A)$ s'identifie à la cohomologie réelle de X .

(*)

En fait, ce programme ne sera complètement réalisé que dans le paragraphe 5 grâce à l'introduction de méthodes simpliciales.

4.4. Exemple. Comme variante de l'exemple précédent, on peut aussi considérer l'espace $\Omega_i(A)$ constitué des formes différentielles ω de degré i telles que ω et $d\omega$ appartiennent à l'espace de Sobolev $\mathcal{G}^r(X)$ pour $r > n/2 - 1$, n étant la dimension de X . Les $\Omega_i(A)$ sont alors des espaces de Hilbert.

DÉFINITION ET CALCUL DE LA COHOMOLOGIE $H_A^*(X)$ (4.5-8)

4.5. Pour toute variété X et tout espace vectoriel topologique localement convexe E , nous désignerons par $\Omega^i(X; E)$ le produit tensoriel topologique $\Omega^i(X) \hat{\otimes} E$. Si E est un espace de Banach, $\Omega^i(X; E)$ se décrit simplement comme l'espace vectoriel des formes différentielles de degré i de classe C^∞ sur X et à valeurs dans E (ici $\Omega^i(X) = \Omega^i(X; k)$ est un espace nucléaire d'après Grothendieck [18]).

Nous nous intéressons en particulier au bicomplexe $\Omega^{p,q}(X, A) = \Omega^p(X; \Omega_q(A))$ et au complexe total associé $\Omega^n(X, A) = \bigoplus_{p+q=n} \Omega^{p,q}(X, A)$. Ici $\Omega_*(A)$ est un complexe d'espaces vectoriels topologiques qui sont des espaces de Fréchet et qui vérifient les conditions de 4.2. L'algèbre universelle $\tilde{\Omega}_*^{\text{top}}(A)$ si A est une algèbre de Fréchet en est un exemple. Cependant, il sera plus commode de travailler avec un complexe $\Omega_*(A)$ quelconque dans ce paragraphe (à l'exception des §4.13 et 4.17).

Désignons maintenant par $H_A^*(X)$ l'homologie de De Rham non commutative (séparée) de l'algèbre $\Omega^*(X, A)$ (notation qui sous-entend le complexe $\Omega_*(A)$). Pour calculer cette homologie (cf. 4.8), nous aurons besoin du lemme suivant dont il sera fait un usage fréquent.

4.6. LEMME. Soit $f : E \rightarrow E''$ une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Fréchet. Soit X une variété (de dimension finie) et soit ω une forme différentielle de classe C^∞ sur X à valeurs dans F (c'est-à-dire un élément de $\Omega^*(X) \hat{\otimes} E''$). Il existe alors une forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur X à valeurs dans E telle que $f(\tilde{\omega}) = \omega$.

Démonstration. En raison de l'importance de ce lemme nous allons en donner deux démonstrations.

Première démonstration. Puisque $\Omega^*(X)$ est un espace de Fréchet nucléaire et que le produit tensoriel topologique par un espace de Fréchet nucléaire est un foncteur exact d'après Grothendieck (cf. [16] par exemple), la suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \xrightarrow{f} E'' \longrightarrow 0$$

avec $E' = \text{Ker}(f)$ implique la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^*(X) \hat{\otimes} E' \longrightarrow \Omega^*(X) \hat{\otimes} E \longrightarrow \Omega^*(X) \hat{\otimes} E'' \longrightarrow 0$$

donc le lemme.

Deuxième démonstration. Dans celle-ci (plus élémentaire) nous supposons que E et E'' sont des espaces de Banach. Soit (U_i) un recouvrement ouvert localement fini de X par des ouverts relativement compacts difféomorphes à des ouverts d'un tore T^n . Soit (α_i) une partition de l'unité associée à ce recouvrement telle que $\sqrt{\alpha_i}$ soit aussi de classe C^∞ . Posons alors $\omega_i = \sqrt{\alpha_i} \omega$ et supposons qu'on puisse trouver une forme différentielle $\tilde{\omega}_i$ sur le tore T^n telle que $f(\tilde{\omega}_i)|_{U_i} = \omega_i$. Alors $\theta_i = \sqrt{\alpha_i} \tilde{\omega}_i$ est à support dans U_i et $\tilde{\omega} = \sum \theta_i$ vérifie bien les conditions du lemme. La démonstration du lemme se trouve ainsi ramenée à celle du cas particulier suivant : $\omega = \phi$ est une fonction de classe C^∞ et X est le tore T^n . Si $\sum a_I x^I$ est la série de Fourier de ϕ , on a $\|a_I\| = O(|I|^s)$ pour tout s . Puisque f est continue, il existe des éléments b_I de E tels que $\|b_I\| \leq 2 \|a_I\|$. Donc $\|b_I\| = O(|I|^s)$ et la somme de la série de Fourier $\sum b_I x^I$ réalise bien les conditions requises.

Pour toute algèbre graduée Ω , désignons par $\bar{\Omega}$ le quotient de Ω par l'adhérence des commutateurs gradués dans l'énoncé suivant (*).

4.7. LEMME. L'application canonique

$$\Omega^*(X) \otimes_{\Omega_*} (A) \longrightarrow \Omega^*(X, A)$$

induit un isomorphisme

$$\Omega^*(X) \hat{\otimes}_{\Omega_*} (A) \longrightarrow \bar{\Omega}^*(X, A)$$

Démonstration. L'ensemble $[\Omega^*(X, A), \Omega^*(X, A)]$ est le sous-espace vectoriel de $\Omega^*(X, A)$ dont les éléments sont des formes différentielles sur X prenant leurs valeurs dans le sous-espace vectoriel $[\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]$ de $\Omega_*(A)$. Par conséquent,

$[\Omega^*(X, A), \Omega^*(X, A)] \subset \Omega^*(X; [\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]) = \Omega^*(X) \hat{\otimes}_{[\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]}$. Tout élément du dernier espace vectoriel est limite d'une suite de formes différentielles appartenant à $\Omega^*(X) \otimes_{[\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]} \subset [\Omega^*(X, A), \Omega^*(X, A)]$, ce qui implique l'identité $[\Omega^*(X, A), \Omega^*(X, A)] = \Omega^*(X; [\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)])$ dans $\Omega^*(X, A)$. Si on pose $E = \bar{\Omega}_*(A)$ et $E' = [\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]$, le lemme résulte alors de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^*(X; E') \longrightarrow \Omega^*(X; E) \longrightarrow \Omega^*(X; E/E') \longrightarrow 0$$

(*) A partir de maintenant nous écrivons $\Omega_*(A)$, $\bar{H}_*(A)$, etc. au lieu de $\Omega_*^{\text{top}}(A)$, $\bar{H}_*^{\text{top}}(A)$, etc. puisque nous nous placerons exclusivement dans un contexte topologique. Nous nous permettons aussi d'écrire $\bar{H}_*(A)$ au lieu de $H_*^{\bar{\Omega}^{\text{top}}}(A)$ pour alléger les notations.

qui est une conséquence du lemme précédent.

4.8. THÉORÈME. L'espace vectoriel $H_A^n(X)$ est naturellement isomorphe à

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \approx \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}(H_p(X), \bar{H}_q(A))$$

On peut donner plusieurs démonstrations de ce théorème. La première consiste à considérer le produit tensoriel topologique des complexes $\Omega^*(X) \hat{\otimes} \bar{\Omega}_*(A)$. D'après la formule de Künneth appliquée au produit tensoriel complété [31], on a $H_A^n(X) \approx \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes \bar{H}_q(A)$, du moins si $H^*(X)$ est de dimension finie. Une seconde, d'inspiration plus élémentaire, consiste à reproduire le schéma de démonstration du théorème de De Rham. Nous la reproduisons ici pour la commodité du lecteur (cf. [32]).

Si ω est un élément de $\Omega^{**}(X, A)$ et si $c : \Delta^n \rightarrow X$ est une chaîne singulière différentiable, on définit

$$\int_c \omega = \int_{\Delta^n} c^*(\omega) \in \Omega^*(A)$$

Cette formule s'étend de manière évidente à $C_*(X, \mathbb{Z})$ par bilinéarité en posant

$$\int_{\sum \lambda_i c_i} = \sum \lambda_i \int_{c_i} \omega$$

Si d' et d'' désignent les deux différentielles du bicomplexe, on a en outre

$$\begin{aligned} d'' \int_c \omega &= \int_c d'' \omega \quad (\text{dérivation sous le signe somme}) \\ \int_{\partial c} \omega &= \int_c d' \omega \quad (\text{formule de Stokes}) \end{aligned}$$

En particulier, si $d\omega = 0$ et $\partial c = \emptyset$, on voit que

$$d'' \int_c \omega \equiv \int_c d'' \omega \equiv - \int_c d' \omega \equiv - \int_{\partial c} \omega \equiv 0 \text{ mod. } [\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]$$

L'accouplement

$$C_*(X; \mathbb{Z}) \times \Omega^{**}(X, A) \longrightarrow \Omega^*(A)$$

induit donc un accouplement

$$Z_*(X; \mathbb{Z}) \times \bar{Z}^{**}(X, A) \longrightarrow Z^*(A) .$$

Si $c = \partial c'$ et $d\omega = 0 \text{ mod. } [\bar{\Omega}_*(A), \bar{\Omega}_*(A)]$, on a les égalités suivantes dans le complexe $\bar{\Omega}_*(A)$:

$$\int_c \omega = \int_{\partial c'} \omega = \int_{c'} d' \omega = - \int_{c'} d'' \omega = - d'' \int_{c'} \omega \in \bar{B}^*(A)$$

Enfin, si $\omega = d\omega'$ et $\partial c = \emptyset$, on a aussi

$$\int_C \omega = \int_C d\omega' = d'' \int_C \omega' + \int_C d'\omega' = d'' \int_C \omega' + \int_{\partial C} \omega' = d'' \int_C \omega'$$

On en déduit une application bilinéaire

$$H_*(X; \mathbb{Z}) \times H_A^*(X) \longrightarrow \bar{H}_*(A)$$

donc un homomorphisme d'espaces vectoriels

$$H_A^*(X) \longrightarrow \text{Hom}(H_*(X, \mathbb{Z}), \bar{H}_*(A))$$

Si X est réunion de deux sous-variétés ouvertes, il est facile de montrer à l'aide d'une partition de l'unité, l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V; \bar{\Omega}_*(A)) \longrightarrow \Omega^*(U; \bar{\Omega}_*(A)) \oplus \Omega^*(V; \bar{\Omega}_*(A)) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V; \bar{\Omega}_*(A)) \longrightarrow 0$$

donc une suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_A^*(U) \oplus H_A^*(V) \longrightarrow H_A^*(U \cap V) \longrightarrow H_A^*(U \cup V) \longrightarrow H_A^*(U) \oplus H_A^*(V) \longrightarrow H_A^*(U \cap V)$$

On a aussi $H_A^*(X) \approx \bar{H}_*(A)$ si X est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ d'après le lemme de Poincaré dont la démonstration se transcrit sans changement à ce cadre [32].

En outre $H_A^*(\cup X_i) = \prod H_A^*(X_i)$. La démonstration suit alors le schéma bien tracé suivant. On commence par écrire le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \tilde{H}_A^*(U) \oplus \tilde{H}_A^*(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_A^*(U \cap V) & \xrightarrow{t_{\Delta'}} & \tilde{H}_A^*(U \cup V) & \longrightarrow & \tilde{H}_A^*(U) \oplus \tilde{H}_A^*(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_A^*(U \cap V) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H_A^*(U) \oplus H_A^*(V) & \longrightarrow & H_A^*(U \cap V) & \xrightarrow{\Delta} & H_A^*(U \cup V) & \longrightarrow & H_A^*(U) \oplus H_A^*(V) & \longrightarrow & H_A^*(U \cap V) \end{array}$$

où on pose $\tilde{H}_A^*(Y) = \text{Hom}(H_*(Y), \bar{H}_*(A))$. Tous les carrés de ce diagramme sont commutatifs d'après le calcul explicite des homomorphismes Δ et $t_{\Delta'}$ fait dans [32] par exemple.

Une variété X est dite de type fini si elle peut s'écrire comme une réunion finie d'ouverts U_i telle qu'une intersection quelconque d'entre eux soit vide ou difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Par exemple, il est bien connu que toute variété compacte est de type fini (cf. [32] par exemple). Plus généralement, pour toute variété X , on peut construire des sous-variétés ouvertes X_i , $i \in \mathbb{N}$, telles que

- 1) $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $|i-j| \geq 2$
- 2) X_i et $X_i \cap X_{i+1}$ soient des variétés de type fini.

Pour achever la démonstration du théorème 4.8, on raisonne alors de la manière suivante :

1) Le théorème est vrai pour $X = \mathbb{R}^n$, la démonstration du lemme de Poincaré se transcrivant sans changement à ce cadre.

2) Si le théorème est vrai pour U , V et $U \cap V$, il est vrai aussi pour $U \cup V$

d'après la comparaison des deux suites de Mayer-Vietoris vue plus haut.

3) Le théorème est vrai pour les variétés de type fini (raisonner par récurrence sur le "type").

4) Le théorème est vrai pour une réunion disjointe (éventuellement infinie) de variétés de type fini.

5) Le théorème est vrai en général. En effet, si X_i est la famille des sous-variétés ouvertes de X envisagée plus haut, il suffit d'appliquer le point 2) à $U = \bigcup X_{2p}$ et à $V = \bigcup X_{2p+1}$.

A-FIBRÉS TOPOLOGIQUES ET LEURS CLASSES CARACTÉRISTIQUES (4.9-18)

4.9. En suivant le schéma développé dans le §3 (adapté à la situation différentiable), nous définirons un A-fibré de classe C^∞ sur la variété X comme un fibré E au sens de Steenrod (46) défini par un cocycle $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}(P)$ de classe C^∞ où P est un A-module projectif de type fini (la "fibre" P pouvant varier suivant les composantes connexes de X). On désigne par $K_A^{\text{top}}(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-fibrés. Si A est une algèbre de Banach, on peut montrer que la classification des A-fibrés différentiables est équivalente à celle des A-fibrés continus. En outre, si X^+ (construction $^+$ de Quillen appliqué à X) a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini (ou plus généralement si X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes), l'ensemble des classes d'isomorphie de tels fibrés est en correspondance bijective avec l'ensemble des classes d'isomorphie de modules projectifs de type fini sur l'algèbre $B = \Omega^0(X, A)$ des fonctions différentiables sur X à valeurs dans A (variante du théorème de Serre-Swan [25], on a en outre l'isomorphisme $(*)$)

$$K_A^{\text{top}}(X) \approx [X, K_0(A) \times \text{BGL}(A)]$$

où $\text{BGL}(A)$ est l'espace classifiant du groupe topologique $\text{GL}(A)$ (la démonstration de cette assertion est identique à celle détaillée dans [25] lorsque $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

4.10. DÉFINITION. Soit E un A-fibré sur la variété X et soit $\Gamma(X, E)$ l'espace des sections (de classe C^∞) de E . Une A-connexion (resp. une A-connexion partielle) sur E est donnée par un homomorphisme d'espaces vectoriels

$(*)$ Si A est une algèbre de Fréchet, on peut généraliser ces résultats en utilisant des méthodes simpliciales (cf. le §5 et 6.15-18).

$$D : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) \otimes \Omega^1(X, A)$$

$$(\text{resp. } \Delta : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, E) \otimes \Omega^{1,0}(X, A))$$

tel que $D(s\lambda) = s \otimes d\lambda + D(s)\lambda$ (resp. $\Delta(s\lambda) = s \otimes d'\lambda + \Delta(s)\lambda$ pour tout $\lambda \in B$, $s \in \Gamma(X, E)$, d' désignant la première différentielle et d la différentielle totale du bicomplexe $\Omega^{**}(X, A)$ (Cf. 4.5).

Puisque $\Omega^1(X, A) = \Omega^{1,0}(X, A) \oplus \Omega^{0,1}(X, A)$, on voit qu'on peut associer à toute connexion D sa "première composante" D' qu'on appellera la connexion partielle associée à D . En suivant le §1, on définira de même la courbure partielle associée à D le morphisme D'^2 de $\Gamma(X, E)$ vers $\Gamma(X, E) \otimes \Omega^{2,0}(X, A)$.

4.11. Exemple. Soit E un A -fibré dont on suppose la fibre libre isomorphe à A^r nous simplifier. Le fibré E est alors défini par des fonctions de transition de classe C^∞ $g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL_r(A)$ où (U_i) est un recouvrement ouvert trivialisant de E . Munissons maintenant E d'une connexion. La trivialisation

$$E|_{U_i} \xrightarrow{\tau_i} U_i \times A^r$$

avec $g_{ji} = \tau_j \tau_i^{-1}$ permet de munir le fibré trivial $U_i \times A^r$ d'une connexion qui, d'après 1.8, est donnée par une application de classe C^∞ Γ_i de U_i vers $M_r(\Omega_1(A))$. La condition de recollement s'écrit alors

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \Gamma_j g_{ji}$$

(poser $\Gamma_i = \Gamma$, $\Gamma_j = \Gamma'$ et $\alpha = g_{ji}$ à la fin de 1.8). Cette relation classique sur les connexions implique par un calcul formel la relation suivante entre les courbures associées :

$$R_i = g_{ji}^{-1} R_j g_{ji}$$

il existe bien entendu plusieurs choix possibles pour les matrices Γ_i . L'un d'entre eux, qui servira plusieurs fois, consiste à partir d'une partition de l'unité (α_i) associée au recouvrement ouvert (U_i) et à poser

$$\Gamma_i(x) = \sum \alpha_k(x) g_{ki}^{-1} dg_{ki}$$

Ainsi, si on pose $\omega_{ki} = g_{ki}^{-1} dg_{ki}$, l'expression locale de la courbure au-dessus de U_i est égale à l'expression

$$R_i = \sum d\alpha_k \omega_{ki} + \sum \alpha_k d\omega_{ki} + \sum \alpha_k \alpha_r \omega_{ki} \omega_{ri}$$

On notera que $\text{Tr}(R_i^n) = \text{Tr}(R_j^n)$ car, pour tout ouvert U , on peut écrire $\bar{\Omega}^*(U, A) \approx \Omega^*(U) \hat{\otimes} \bar{\Omega}_*(A) \approx \bar{\Omega}^*(U; \bar{\Omega}_*(A))$ d'après 4.7 (Ici $U = U_i \cap U_j$).

4.12. Le formalisme adopté dans le §1 permet d'associer à tout A-fibré E muni d'une connexion D son "caractère de Chern" $Ch_n(E)$ dans le groupe $H_A^{2n}(X)$: c'est la trace de R^n avec $R = D^2$ multiplié par la constante de normalisation $c_n = 1/n!$. En appliquant le théorème 4.8, on en déduit un homomorphisme

$$K_A^{top}(X) \longrightarrow H_A^{2n}(X) \longrightarrow H^p(X; \bar{H}_q(A))$$

pour $p+q = 2n$. Si on considère A comme un sous-anneau de A^+ , tout A-module projectif de type fini peut être regardé comme un A^+ -module projectif de type fini (par la projection $A^+ \rightarrow A$). Choisissons maintenant comme complexe $\Omega_*(A^+)$ le complexe universel $\tilde{\Omega}_*^{top}(A^+)$ (cf. 4.1). En appliquant les considérations précédentes à l'algèbre A^+ , on en déduit un homomorphisme que nous noterons aussi Ch_n

$$K_A^{top}(X) \hookrightarrow K_{A^+}^{top}(X) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=2n} H^p(X; \bar{H}_q^{top}(A^+))$$

où $H_q^{top}(A^+) \approx \text{Ker}(\text{HC}_q^{top}(A) \xrightarrow{B} H_{q+1}^{top}(A, A))$ d'après 2.15 et 4.1. Ici nous avons indiqué exceptionnellement par le symbole "top" les homologies topologiques séparées considérées en 4.1.

4.13. Bien que nous n'ayons pas l'intention de développer ici de manière intensive les structures multiplicatives de l'homologie cyclique (cf. [12]) nous allons en esquisser une partie pour étudier la relation entre la périodicité de Bott et l'homologie cyclique. Soient donc A et B deux algèbres topologiques localement convexes et soient $A \hat{\otimes} B$ leur produit tensoriel complété projectif. Si de nouveau Ω_* désigne le complexe universel (topologique), on a un homomorphisme évident $\Omega_*(A \hat{\otimes} B) \rightarrow \Omega_*(A) \hat{\otimes} \Omega_*(B)$ induit par l'identité de $A \hat{\otimes} B$ mais qui n'est pas un isomorphisme en général. Cependant, faute d'un théorème de Kunnet pour l'homologie de De Rham non commutative, nous ne pouvons pas calculer l'homologie non commutative du deuxième membre en fonction de $\bar{H}_*(A)$ et $\bar{H}_*(B)$ (*). En fait, le cas qui nous intéresse ici est celui où B est l'anneau des fonctions C^∞ sur une variété X telle que X^+ ait le type d'homotopie d'un CW-complexe fini. Dans ce cas, l'intégration sur les cycles de X permet de définir comme en 4.8 des homomorphismes

$$\bar{H}_m(A \hat{\otimes} B) \times H_p(X) \longrightarrow \bar{H}_q(A)$$

pour $p+q = m$, soit de manière équivalente des homomorphismes

(*)

Notons ici que la situation est plus simple en cohomologie de De Rham (ou en cohomologie cyclique) qui se définit en considérant le complexe $\text{Hom}(\Omega_*, k)$: on a alors un cup-produit bien défini de $\bar{H}^p(A) \times \bar{H}^q(B)$ vers $\bar{H}^{p+q}(A \hat{\otimes} B)$. C'est une des raisons qui rendent la cohomologie cyclique plus maniable dans certaines situations. (cf. [12]).

$$H_m(A \hat{\otimes} B) \longrightarrow H^p(X; \bar{H}_q(A))$$

4.14. PROPOSITION. Le diagramme est commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_A^{\text{top}}(X) & \longrightarrow & K_0(A \hat{\otimes} C^\infty(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=2n} H^p(X; \bar{H}_q(A)) & \longleftarrow & H_{2n}(A \hat{\otimes} C^\infty(X)) \end{array}$$

où la deuxième flèche verticale est définie en 1.22 et la première en 4.11.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions en associant à un A-fibré sur X le C-module de ses sections avec $C = A \hat{\otimes} C^\infty(X)$.

4.15. Nous allons maintenant étudier le comportement du caractère de Chern vis-à-vis de la périodicité de Bott comme nous l'avons promis. Rappelons que la périodicité de Bott peut s'exprimer sur la manière suivante : A tout A-fibré E sur X on peut associer le A-fibré sur $X \times S^2$ obtenu comme produit tensoriel de E par le fibré de Hopf H sur S^2 . On définit alors un homomorphisme injectif

$$K_A^{\text{top}}(X) \xrightarrow{\beta} K_A^{\text{top}}(X \times S^2)$$

dont l'image a comme supplémentaire le groupe engendré par les fibrés sur $X \times S^2$ obtenus comme image réciproque de fibrés sur X par la projection $X \times S^2 \rightarrow X$.

Avant d'énoncer le théorème suivant, nous allons définir en homologie de De Rham non commutative pour le complexe universel l'analogue de l'homomorphisme fondamental S défini en 2.7 pour l'homologie cyclique. Dans ce but, introduisons l'anneau auxiliaire $R = k[t]/(t^2 - t)$ déjà utilisé en 2.17 et considérons l'homomorphisme d'anneaux (ne respectant pas les éléments unités) de A vers $A \otimes R$ défini par $a \rightarrow a \otimes t$. Il induit un homomorphisme d'algèbres avec élément unité $A^+ \rightarrow A^+ \otimes R$, donc un homomorphisme $\bar{\Omega}_m(A^+) \rightarrow \bar{\Omega}_m(A^+ \otimes R) \rightarrow \bigoplus_{p+q=m} \bar{\Omega}_p(A^+) \otimes \bar{\Omega}_q(R)$. En fait, la

projection ϕ sur la composante $p = p-m-2, q=2$, s'explicite aisément en tenant compte de l'identité $t \cdot dt \cdot t = 0$. Pour des éléments a_i de A on trouve ainsi $\phi(a_0 da_1 \dots da_m) = [a_0 a_1 a_2 da_3 \dots da_m + a_0 da_1 (a_2 a_3) da_4 \dots da_m + \dots] \otimes t \cdot dt \cdot dt$
 $\phi(da_1 da_2 \dots da_m) = d(\phi(a_1 da_2 \dots da_m)) \otimes t \cdot dt \cdot dt$

Autrement dit, l'homomorphisme $\bar{H}_m(A^+) \rightarrow \bar{H}_{m-2}(A^+)$ qu'on déduit de ϕ est induit par l'homomorphisme $S : HC_m(A) \rightarrow HC_{m-2}(A)$ défini dans le paragraphe 2 et adapté au cadre topologique. Par abus d'écriture, nous noterons encore S cet homomorphisme.

4.16. THÉORÈME. Soit $\gamma_n : K_A^{\text{top}}(X \times S^2) \rightarrow \bigoplus_{p+q=2n} H^p(X; \bar{H}_{q-2}(A^+))$ l'homomorphisme composé

$$K_A^{\text{top}}(X \times S^2) \xrightarrow{\quad} K_{A^+}^{\text{top}}(X \times S^2) \xrightarrow{\text{ch}_n} H^{p+2}(X \times S^2; \bar{H}_{q-2}(A^+)) \rightarrow H^p(X; \bar{H}_{q-2}(A^+))$$

On a alors le diagramme commutatif (pour $p+q = 2n$)

$$\begin{array}{ccc} K_A^{\text{top}}(X) & \xrightarrow{\beta} & K_A^{\text{top}}(X \times S^2) \\ \text{ch}_n \downarrow & & \downarrow \gamma_n \\ H^p(X; \bar{H}_q(A^+)) & \xrightarrow{\quad} & H^p(X; \bar{H}_{q-2}(A^+)) \end{array}$$

où la deuxième flèche horizontale est induite par l'homomorphisme S de $H_q(A^+)$ vers $H_{q-2}(A^+)$ multiplié par $2i\pi$.

Démonstration. Soit E un A -fibré sur X regardé comme un C -module projectif projectif de type fini avec $C = A \hat{\otimes} C^\infty(X)$, donc comme image d'un projecteur $Q \in M_r(C)$. Soit H le fibré de Hopf sur S^2 que nous voyons aussi comme image du projecteur P de $M_2(C^\infty(S^2))$ défini en 1.5. Il s'agit maintenant de calculer la trace de $\frac{1}{n!} v(dv.dv)^n$ avec $v = Q \otimes P$, d'intégrer sur la sphère S^2 puis sur les cycles de dimension p de X . Si on pose $A_0 = A^+$, $A_1 = C^\infty(X)$, $A_2 = C^\infty(S^2)$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_*(A_0 \hat{\otimes}_R A_1 \hat{\otimes} A_2) & \longrightarrow & \Omega_*(A_0 \hat{\otimes} A_1) \hat{\otimes} \Omega_*(A_2) & \longrightarrow & \Omega_*(A_0) \hat{\otimes}_R \Omega_*(A_1) \hat{\otimes} \Omega_*(A_2) \\ \Omega_*(A_0 \hat{\otimes} A_2 \hat{\otimes} A_1) & \longrightarrow & \Omega_*(A_0 \hat{\otimes} A_2) \hat{\otimes} \Omega_*(A_1) & \longrightarrow & \Omega_*(A_0) \hat{\otimes} \Omega_*(A_2) \hat{\otimes} \Omega_*(A_1) \end{array}$$

montre qu'on peut intervertir les deux intégrations. Ceci veut dire que la deuxième flèche horizontale doit être déduite d'un homomorphisme de $\bar{H}_q(A^+)$ vers $\bar{H}_{q-2}(A^+)$ induit par l'homomorphisme $\lambda \mapsto \lambda \otimes P$ sur des algèbres de matrices convenables suivi d'une intégration sur S^2 . Mais ceci est exactement le calcul formel précédant l'énoncé du théorème (car $P^2 = P$). Puisque

$$\int_{S^2} \text{Trace}(P.dP.dP) = 2i\pi$$

le théorème en résulte.

4.17. COROLLAIRE. On a un diagramme commutatif (comparer avec [12])

$$\begin{array}{ccc} K_i^{\text{top}}(A) & \xrightarrow{\beta} & K_{i+2}^{\text{top}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{H}_{2n-i}(A^+) & \xrightarrow{2i\pi S} & \bar{H}_{2n-i-2}(A^+) \end{array}$$

Démonstration. En effet, $K_i^{\text{top}}(A)$ est le sous-groupe "non trivial" de $K_A(S^i)$ et $K_i^{\text{top}}(A)$ s'identifie à un sous-groupe de $K_A(S^i \times S^2)$ grâce à une application de

degré un de $S^1 \times S^2$ vers S^{i+2} . Ce corollaire justifie le nom d'opérateur de périodicité à l'homomorphisme $S : HC_*(A) \rightarrow HC_{*-2}(A)$ introduit par Connes et qui induit l'homomorphisme analogue de $\bar{H}_*(A^+)$ vers $\bar{H}_{*-2}(A^+)$.

4.18. On remarquera que dans le théorème et le corollaire précédents, seul l'homomorphisme Ch_n pour un n fixé a été utilisé. La proposition 4.14 et la remarque 2.19 montrent qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & Ch_i^\ell & \\ & \nearrow & \\ K_i^{top}(A) & & HC_{i+2\ell}(A) \\ & \searrow & \downarrow S \\ & Ch_i^{\ell-1} & \\ & & HC_{i+2\ell-2}(A) \end{array}$$

où Ch_i^ℓ (resp. $Ch_i^{\ell-1}$) correspond à Ch_n (resp. Ch_{n-1}) avec $n = i + \ell$. Nous allons maintenant voir comment on peut affiner ces classes caractéristiques dans le cas des A -fibrés plats (ce qui correspond grosso-modo à considérer le groupe $K_i(A)$ d'après la philosophie du § 3). Ici $\Omega_*(A)$ désigne de nouveau une algèbre graduée quelconque vérifiant les conditions de 4.2.

A-FIBRÉS PLATS ET LEURS CLASSES CARACTÉRISTIQUES (4.19-33)

4.19. DÉFINITION. Soit E un A -fibré sur la variété X . Une A -connexion à courbure plate sur E est une A -connexion dont la courbure admet la factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X;E) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma(X;E) \otimes_B \Omega^2(X,A) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Gamma(X;E) \otimes_B [\Omega^{0,2}(X,A) + \Omega^{1,1}(X,A)] & \end{array}$$

avec $B = C^\infty(X,A)$. Autrement dit, c'est une A -connexion dont la courbure partielle $R' = D'^2$ est égale à 0.

4.20. Exemple fondamental. Supposons que E soit un A -fibré plat sur X (cf. §3). Comme dans le cas classique où $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E peut être muni d'une connexion partielle de la manière suivante : sur une carte $\Gamma(X;E)$ s'identifie à l'espace des applications de classe C^∞ de X dans la fibre P . On peut alors définir une connexion partielle (cf. 4.10) D' sur E en la faisant coïncider avec la différentielle ordinaire sur chaque carte. La connexion partielle est bien définie car les automorphismes de changement de cartes sont localement constants. Si, en outre, on suppose que E est trivial, soit $E = X \times P$, la donnée d'une connexion D''

sur P (dans le sens du §1) et de la connexion partielle précédente D' permet de munir E d'une A -connexion $D = D' + D''$ qui est à courbure plate car $D'^2 = 0$. Supposons maintenant que E soit localement trivial et soit (U_i) un recouvrement ouvert de X tel que $E|_{U_i}$ soit isomorphe à un fibré trivial (de manière compatible avec la structure plate). Soit (α_i) une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Si $D_i = D'_i + D''_i$ est la connexion sur $E|_{U_i}$ définie ci-dessus ($E|_{U_i}$ étant identifié à un fibré trivial), $D = \sum \alpha_i D_i$ définit une A -connexion à courbure plate sur E car $D'_i|_{U_i \cap U_j} = D'_j|_{U_i \cap U_j}$ et donc $D'^2 = D''^2 = 0$ sur U_i .

4.21. Explicitons la situation lorsque la fibre de E est libre, soit A^r .

Le fibré E est alors défini par un cocycle $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(A)$ qui est une fonction localement constante. Une connexion quelconque sur E est définie par des matrices $\Gamma_i \in M_r(\Omega^1(U_i, A))$ telles que, au-dessus de $U_i \cap U_j$ on ait la relation

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \Gamma_j g_{ji}$$

(dg_{ji} représentant la différentielle "non commutative" de g_{ji} à valeurs dans $M_r(\Omega^1(A))$). En particulier, si (α_i) est une partition de l'unité, on peut choisir

$$\Gamma_i = \sum \alpha_k(x) g_{ki}^{-1} dg_{ki}$$

ce qui est l'expression locale de la connexion définie en 4.11. Un calcul immédiat montre alors que $d\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$ est bien une matrice de formes différentielles dont les coefficients appartiennent à $\Omega^{0,2}(X, A) \oplus \Omega^{1,1}(X, A)$.

4.22. PROPOSITION. Soit A une algèbre de Banach et soit E un A -fibré sur X muni d'une connexion D à courbure plate $R = D^2$. Alors

- 1) E peut être muni (canoniquement) d'une structure de A -fibré plat dont la connexion partielle est égale à D' .
- 2) Si on désigne par $\tilde{\Gamma}(U, E)$ l'espace des sections localement constantes du fibré plat $E|_U, R^n|_U$ admet une factorisation (pour U assez petit et $B_U = \Omega^0(U, A)$).

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U; E) & \xrightarrow{R^n|_U} & \Gamma(U; E) \otimes_{B_U} \Omega^{2n}(U, A) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{\Gamma}(U; E) & \otimes_k [Z^n(U; \Omega_n(A)) \otimes \Omega^{n-1, n+1}(U, A) \otimes \dots \otimes \Omega^{0, 2n}(U, A)] & \end{array}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et soit V un voisinage de x_0 tel que $E|_V \approx V \times P$

où P est un A -module projectif de type fini. On peut alors écrire $D' = d' + \Gamma'$ où d' est la différentielle usuelle et où Γ' est une application B_V -linéaire de $\Gamma(V; E)$ vers $\Gamma(V; E) \otimes_{B_V} \Omega^1(V, A)$ représentée par une forme différentielle sur V à valeurs dans $\Lambda = \text{End}(P)$. Le théorème de Frobenius implique qu'il existe $U \subset V$, $x_0 \in U$, et une application $C^\infty \alpha: U \rightarrow \text{Aut}(P)$ telle que $\alpha(x_0) = 1$ et $d'\alpha = -\Gamma'\alpha$ (car $d'\Gamma' + (\Gamma')^2 = 0$). En effectuant l'isomorphisme α , on voit donc que D' est isomorphe à la différentielle usuelle d' . Autrement dit, les solutions de l'équation différentielle $D's = 0$ définissent des sections localement constantes s de $E|_U$ pour une trivialisat ion bien choisie. Si une autre trivialisat ion vérifie la même propriété et si g_{ji} désigne la fonction de transition, on doit avoir $d'(g_{ji} s) = (d'g_{ji})s + g_{ji}(d's) = 0$ pour toute section s telle que $d's = 0$, ce qui implique $d'g_{ji} = 0$, donc que g_{ji} est bien une section localement constante.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, on peut supposer que E est trivial et que $D' = d'$. En outre, la propriété est évidente pour les fibrés de la forme $X \times Q$ et $D = D' + D''$ où D'' est induit par une connexion sur Q car dans ce cas $R = R''$ est une fonction constante sur X . Dans le cas général où D' est quelconque, en ajoutant un supplémentaire Q à la fibre de E et en munissant $X \times Q$ de la connexion ci-dessus, on voit que sans restreindre la généralité on peut supposer que $E = X \times A^r$. La connexion est alors complètement déterminée par une application C^∞ de X vers $M_r(\Omega_1(A))$ notée Γ . En considérant des coordonnées locales, on voit ainsi que la composante de bidegré (p, q) avec $p > q$ de $R^n = (d\Gamma + \Gamma^2)^n$ est nulle et que la composante de bidegré (n, n) s'écrit :

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{i_1}} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{i_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

dont la différentielle usuelle est nulle.

4.23. Les considérations précédentes nous amènent ainsi à considérer la "moitié" du complexe de De Rham défini comme suit :

$$\mathcal{L}^{2n}(X, A) = \Omega^0(X; \bar{\Omega}_{2n}(A)) \oplus \dots \oplus \Omega^{n-1}(X; \bar{\Omega}_{n+1}(A)) \oplus Z^n(X; \bar{\Omega}_n(A))$$

$$\mathcal{L}^{2n+1}(X, A) = \Omega^0(X; \bar{\Omega}_{2n+1}(A)) \oplus \dots \oplus \Omega^n(X; \bar{\Omega}_{n+1}(A))$$

Ce sous-complexe est bien stable par la différentielle totale $d = d' + d''$. On notera $\mathcal{H}_A^*(X)$ son homologie. Le premier pas vers la construction d'un homomorphisme $K_A(X) \rightarrow \mathcal{H}_A^{2*}(X)$ (cf. 3.1 et 4.31) est la proposition suivante.

4.24. PROPOSITION. Soit E un A -fibré plat et soit D une connexion dont la connexion partielle associée D' est la connexion partielle canonique. Alors les

formes $\text{Ch}_n(E, D) = \frac{1}{n!} \text{Tr}(R^n)$ définissent des éléments de $\mathcal{K}_A^{2n}(X)$ qui ne dépendent que de la classe d'isomorphie de E (et donc pas du choix de D).

Démonstration. On va utiliser l'argument d'homotopie qui a déjà servi dans la démonstration du théorème 1.22. Si D_0 et D_1 sont deux connexions sur E telles que $D'_0 = D'_1$ soit la connexion partielle canonique, l'expression

$\Delta = tD_0 + (1-t)D_1$, $t \in [0, 1]$, représente une connexion à courbure plate sur π^*E avec $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ car $\Delta' = tD'_0 + (1-t)D'_1 = D'_0 = D'_1$.

Donc $\text{Ch}_n(E, D_1) - \text{Ch}_n(E, D_0)$ est la différentielle d'un élément $K(\omega)$ de

$\mathcal{C}^{2n-1}(X, A)$ où $K : \mathcal{C}^{2n}(X \times I, A) \rightarrow \Omega^{2n-1}(X, A)$ est la restriction à $\mathcal{C}^{2n}(X \times I, A)$ de l'opérateur d'homotopie usuel défini par intégration partielle par rapport à I sur $X \times I$ ($I = [0, 1]$). Puisque l'image de cette restriction de K appartient à $\mathcal{C}^{2n-1}(X, A)$, on voit que la classe de $\text{Ch}_n(E, D)$ dans $\mathcal{K}_A^{2n}(X)$ ne dépend pas du choix de D . Enfin, si $\alpha : E \rightarrow E'$ est un isomorphisme de fibrés plats, on peut choisir $D' = \alpha^*D$ comme connexion sur E' et $R' = \alpha R \alpha^{-1}$ est la courbure associée. On a alors $\text{Ch}_n(E, D) = \text{Ch}_n(E', D')$.

Pour appliquer la proposition 4.24, il nous reste à calculer explicitement les groupes $\mathcal{K}_A^{2n}(X)$. Ce calcul, ainsi que celui du groupe $\mathcal{K}_A^{2n+1}(X)$ qui nous servira plus loin, va reposer sur les trois lemmes suivants dont les deux derniers ont une portée plus générale.

4.25. LEMME. Soient E un espace de Fréchet, F un sous-espace fermé. On a alors la suite exacte d'espaces vectoriels.

$$0 \rightarrow Z^*(X; F) \rightarrow Z^*(X; E) \xrightarrow{\gamma} Z^*(X; E/F) \rightarrow 0 \quad (S)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.6, nous avons une suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega^*(X; E) \rightarrow \Omega^*(X; E) \rightarrow \Omega^*(X; E/F) \rightarrow 0$$

ce qui implique l'exactitude de (S) sauf peut-être la surjectivité de γ . Cette surjectivité est évidemment équivalente à celle de l'homomorphisme $H^*(X; E) \rightarrow H^*(X; E/F)$. Une démonstration en tout point analogue à celle du théorème 4.8 montre que $H^*(X; G) \approx \text{Hom}(H_*(X), G)$ pour tout espace de Fréchet G (isomorphisme entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie singulière). La surjectivité est alors évidente car E et E/F sont des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels.

4.26. LEMME. Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit x un élément de $\Omega^p(X, A)$ s'écrivant sous la forme $x_0 + \dots + x_s$ avec $x_\alpha \in \Omega^\alpha(X; \bar{\Omega}_{p-\alpha}(A))$ et $\alpha \leq p - \alpha - r$ (soit donc $s \leq (p-r)/2$) et tel que $dx = 0$. Il existe alors un élément $t = t_0 + \dots + t_s$ avec $t_\alpha \in \Omega^{\alpha-1}(X; \bar{\Omega}_{p-\alpha}(A))$ tel que $x - dt = z_0 + \dots + z_s$ avec $z_\alpha \in Z^\alpha(X; \bar{\Omega}_{p-\alpha}(A))$.

Démonstration. Pour un p fixé nous allons démontrer ce lemme par récurrence descendante sur r , celui-ci étant évident pour $r > p$ (x est alors nul). Puisque

$dx = 0$, x_s appartient déjà à $Z^S(X; \bar{\Omega}_{p-s} A)$. Soient d' et d'' les différentielles du bicomplexe $\Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A)$; on a $d = d' + d''$ et $-d'x_{s-1} = d''x_s$. Considérons le diagramme de suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z^*(X; \bar{B}_*(A)) & \longrightarrow & Z^*(X; \bar{\Omega}_*(A)) & \longrightarrow & Z^*(X; \bar{\Omega}_*(A)/\bar{B}_*(A)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^*(X; \bar{B}_*(A)) & \longrightarrow & \Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A)) & \longrightarrow & \Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A)/\bar{B}_*(A)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d' & & \downarrow d' & & \downarrow d' \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^*(X; \bar{B}_*(A)) & \longrightarrow & \Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A)) & \longrightarrow & \Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A)/\bar{B}_*(A)) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Une chasse au diagramme élémentaire montre l'existence d'un élément y_s de $\Omega^{s-1}(X; \bar{B}_{p-s+1} A)$ tel que $d'y_s = d''x_s$. Il existe donc $t_s \in \Omega^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A)$ tel que $y_s = -d''t_s$, soit $d''x_s = d''(d't_s)$. Posons alors $\bar{x}'_s = \bar{x}_s - dt_s = \bar{x}'_s + x'_s$ avec $x'_s \in \Omega^S(X; \bar{\Omega}_{p-s} A)$ et $\bar{x}'_s \in \Omega^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s+1} A)$. Par construction, on a $\bar{x}'_s \in Z^S(X; \bar{Z}_{p-s} A)$ et on peut écrire $x = (x_1 + \dots + x_{s-1} + \bar{x}'_s) + \bar{x}'_s + dt_s$. D'après l'hypothèse de récurrence, la parenthèse peut s'écrire $z_0 + \dots + z_{s-1} + d(t_0 + \dots + t_{s-1})$. Il suffit donc de poser $z_s = \bar{x}'_s$.

4.27. LEMME. Soit x un élément de $\Omega^p(X, A)$ s'écrivant $x_0 + \dots + x_s$ avec $x_\alpha \in Z^\alpha(X; \bar{Z}_{p-\alpha} A)$ tel que $x = dt$ avec $t = t_0 + \dots + t_s$ et $t_\alpha \in \Omega^{\alpha-1}(X; \bar{\Omega}_{p-\alpha} A)$. Alors $t_\alpha \in \Omega^{\alpha-1}(X; \bar{Z}_{p-\alpha} A) \oplus Z^{\alpha-1}(X; \bar{\Omega}_{p-\alpha} A)$; $x_\alpha \in B^\alpha(X; \bar{Z}_{p-\alpha} A) + Z^\alpha(X; \bar{B}_{p-\alpha} A)$ pour $\alpha < s$ et $x_s \in B^S(X; \bar{Z}_{p-s} A)$.

Démonstration. Nous allons démontrer ce lemme par récurrence descendante sur α .

Pour $\alpha = s$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s} A) & \longrightarrow & Z^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A) & \longrightarrow & Z^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A/\bar{Z}_{p-s} A) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s} A) & \longrightarrow & \Omega^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A) & \longrightarrow & \Omega^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A/\bar{Z}_{p-s} A) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z^S(X; \bar{Z}_{p-s} A) & \longrightarrow & Z^S(X; \bar{\Omega}_{p-s} A) & \longrightarrow & Z^S(X; \bar{\Omega}_{p-s} A/\bar{Z}_{p-s} A)
 \end{array}$$

montre que $x_s = d't'_s$ avec $t'_s \in \Omega^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s} A)$. Alors $d'(t_s - t'_s) = 0$, donc $t_s - t'_s \in Z^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A)$ et ainsi $t_s \in \Omega^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s} A) + Z^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s} A)$.

De même, puisque $x_{s-1} = d't_{s-1} + d''t_s$, on voit que

que $x_{s-1} - d''t_s \in B^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s+1}A) \cap Z^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s+1}A) = B^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s+1}A)$ d'après le diagramme suivant où toutes les lignes et les colonnes sont exactes d'après les lemmes précédents et le fait que $H^*(X; E) \approx \text{Hom}(H_*(X), E)$ pour tout espace de Fréchet E :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B^*(X; \bar{Z}_*A) & \longrightarrow & Z^*(X; \bar{Z}_*A) & \longrightarrow & H^*(X; \bar{Z}_*A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B^*(X; \bar{\Omega}_*A) & \longrightarrow & Z^*(X; \bar{\Omega}_*A) & \longrightarrow & H^*(X; \bar{\Omega}_*A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B^*(X; \bar{\Omega}_*A / \bar{Z}_*A) & \longrightarrow & Z^*(X; \bar{\Omega}_*A / \bar{Z}_*A) & \longrightarrow & H^*(X; \bar{\Omega}_*A / \bar{Z}_*A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Soit $t'_{s-1} \in \Omega^{s-2}(X; \bar{Z}_{p-s+1}A)$ tel que $d't'_{s-1} = x_{s-1} - d''t_s$. Alors $d'(t_{s-1} - t'_{s-1}) = 0$ donc $t_{s-1} \in Z^{s-2}(X; \bar{\Omega}_{p-s+1}A) + \Omega^{s-2}(X; \bar{Z}_{p-s+1}A)$, soit $x_{s-1} = d't_{s-1} + d''t_s \in B^{s-1}(X; \bar{Z}_{p-s+1}A) + Z^{s-1}(X; \bar{\Omega}_{p-s+1}A)$.

Supposons maintenant le lemme démontré pour $\alpha > r$ avec $r < s$.

Alors $x_r = d't_r + d''t_{r+1}$ avec $t_{r+1} \in \Omega^r(X; \bar{Z}_{p-r-1}A) + Z^r(X; \bar{\Omega}_{p-r-1}A)$ et $x_r - d''t_{r+1} \in B^r(X; \bar{\Omega}_{p-r}A) \cap Z^r(X; \bar{Z}_{p-r}A) = B^r(X; \bar{Z}_{p-r}A)$. Puisque $d'(t_r - t_{r+1}) = 0$ on a bien ainsi $t_r \in \Omega^{r-1}(X; \bar{Z}_{p-r}A) \oplus Z^{r-1}(X; \bar{\Omega}_{p-r}A)$ et $x_r = d't_r + d''t_{r+1} \in B^r(X; \bar{Z}_{p-r}A) + Z^r(X; \bar{\Omega}_{p-r}A)$.

4.28. THÉORÈME. L'homologie $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ en degré $2n$ du complexe $\mathcal{E}^*(X, A)$ défini en 4.23 est naturellement isomorphe à

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X; \bar{Z}_n A)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.26, l'homomorphisme

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} Z^p(X; \bar{Z}_q A) \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X)$$

est surjectif. D'après le lemme 4.27, son noyau est

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p = q}} [B^p(X; \bar{Z}_q A) + Z^p(X; \bar{B}_q(A))] \oplus B^n(X; \bar{Z}_n A)$$

donc l'homologie est bien celle annoncée.

4.29. PROPOSITION. L'homologie $\mathcal{H}_A^{2n+1}(X)$ en degré $2n+1$ du complexe $\mathcal{C}^*(X, A)$ est naturellement isomorphe à

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q}} H^p(X; \bar{H}_q(A))$$

Démonstration. D'après le lemme 4.26, l'homomorphisme

$$\bigoplus_{\substack{p < q \\ p+q=2n+1}} Z^p(X; \bar{Z}_q(A)) \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}_A^{2n+1}(X)$$

est surjectif. Soit maintenant $x = x_0 + \dots + x_n$ avec $x_\alpha \in Z^\alpha(X; \bar{Z}_{2n+1-\alpha}(A))$ un élément de $\text{Ker } \theta$. On a donc $x = dt$ avec $t = t_0 + \dots + t_{n+1}$ et $t_\alpha \in \Omega^{\alpha-1}(X; \bar{\Omega}_{2n+1-\alpha}(A))$ pour $\alpha \leq n$ et $t_{n+1} \in Z^n(X; \bar{\Omega}_n(A))$. Alors $x - dt_{n+1} = d(t_0 + \dots + t_n)$ et cet élément appartient à

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q \\ p \neq n}} [B^p(X; \bar{Z}_q(A)) + Z^p(X; \bar{B}_q(A))] \oplus B^n(X; \bar{Z}_{n+1}(A))$$

d'après le lemme 4.27. Donc $x \in \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q}} [B^p(X; \bar{Z}_q(A)) + Z^p(X; \bar{B}_q(A))]$ d'où le théorème.

4.30. Si E est un A -fibré plat de base une variété X , les théorèmes 4.24 et 4.28 permettent ainsi de lui associer des classes caractéristiques

$$\text{Ch}_n(E) \in \mathcal{H}_A^{2n}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X; \bar{Z}_n(A)).$$

En fait, pour construire ces classes caractéristiques, nous n'avons pas besoin de toute la force du théorème 4.28. Ceci peut se faire par intégration sur les simplexes singuliers comme en 4.8. Ainsi les composantes de $\text{Ch}_n(E)$ dans $H^p(X; \bar{H}_q(A))$ pour $p+q = 2n$, $p < q$, s'obtiennent en regardant E comme un A -fibré topologique et en appliquant le caractère de Chern topologique défini en 4.11. Explicitons donc la classe nouvelle appartenant à $H^n(X; \bar{Z}_n(A))$. On a un accouplement

$$Z_n(X) \times \mathcal{C}^{2n}(X, A) \longrightarrow Z_n(X) \times Z^n(X; \bar{\Omega}_n(A)) \longrightarrow \bar{\Omega}_n(A)$$

dont l'image est dans $\bar{Z}_n(A)$ pour les couples (c, ω) avec ω fermée car

$$d'' \int_c \omega = - \int_c d' \omega = \int_{\partial c} \omega = 0$$

Si c est un cycle et si $\omega \in \mathcal{C}^{2n}(X, A)$ est de la forme $d\omega'$ avec ω' appartenant à $\Omega^{0, 2n-1}(X, A) \oplus \dots \oplus \Omega^{n-1, n}(X, A)$, on a

$$\int_C \omega = \int_{\partial C} \omega = \int_{C'} d'\omega = 0$$

car $d'\omega$ est de premier degré $< n+1$. Ainsi, l'homomorphisme bilinéaire

$$H_n(X) \times \mathcal{K}_A^{2n}(X) \longrightarrow \bar{Z}_n A$$

est bien défini et coïncide évidemment avec celui résultant du théorème 4.28.

4.31. Nous allons voir maintenant comment les classes caractéristiques que nous venons de définir pour des A -fibrés différentiables ou plats permettent de construire des homomorphismes

$$K_A^{\text{top}}(X) \longrightarrow H_A^{2n}(X) \longrightarrow H^p(X; \bar{H}_q(A)) \quad (p+q = 2n)$$

$$K_A(X) \longrightarrow \mathcal{K}_A^{2n}(X) \approx \bigoplus_{p+q=2n, p < q} H^p(X; \bar{H}_q(A) \oplus H^n(X; \bar{Z}_n(A)))$$

pour tout CW-complexe fini X . Pour fixer les idées, nous nous limiterons à définir le second homomorphisme, le premier se construisant de manière analogue. D'après le §3, tout élément de $K_A(X)$ peut être représenté par la différence formelle de deux A -fibrés plats sur Y avec $f: Y \rightarrow X$ acyclique. Soit $\{Y_\alpha\}$ l'ensemble des sous-complexes finis de Y . Comme il est bien connu [49], Y_α a le type d'homotopie d'un complexe cellulaire fini, donc d'une variété (ouverte), la cohomologie $H^p(Y_\alpha; \bar{H}_q(A))$ ou $H^n(Y_\alpha; \bar{Z}_n(A))$ étant isomorphe à la cohomologie de De Rham à valeurs dans les espaces de Fréchet considérés. Si E est un A -fibré plat sur Y , il s'en suit qu'on peut lui associer des classes caractéristiques $\text{Ch}_n(E|_{Y_\alpha}) \in \mathcal{K}_A^{2n}(Y_\alpha)$. D'autre part, d'après la formule des coefficients universels, on a pour tout $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel F , $H^r(Y; F) \approx \text{Hom}(H_r(Y), F) = \text{Hom}(\varinjlim H_r(Y_\alpha), F) = \varinjlim H^r(Y_\alpha; F)$. On peut donc associer à E une "classe caractéristique" $\text{Ch}_n(E) \in \mathcal{K}_A^{2n}(Y) = \mathcal{K}_A^{2n}(X) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; \bar{H}_q(A) \oplus H^n(X; \bar{Z}_n(A)))$. Si l'élément x de $K_A(X)$ dont on est parti s'écrit formellement sous la forme $E - F$, on posera $\text{Ch}_n(x) = \text{Ch}_n(E) - \text{Ch}_n(F)$. On voit alors aisément que l'homomorphisme

$$\text{Ch}_n : K_A(X) \longrightarrow \mathcal{K}_A^{2n}(X)$$

est ainsi bien défini.

4.32. Exemple. Soit E un A -fibré plat sur S^1 de fibre A^q . Un tel fibré est déterminé par un élément g de $\text{GL}_q(A)$ bien défini à une conjugaison près. De manière plus précise, on peut recouvrir S^1 par les deux hémisphères $U_1 = S^1_+ = S^1 - \{-i\}$ et $U_2 = S^1_- = S^1 - \{i\}$. On pose alors $g_{21}(x) = g$ si $\Re(x) > 0$ et $g_{21}(x) = 1$ si $\Re(x) < 0$. La fonction de transition g_{21} est une

application localement constante de $U_1 \cap U_2$ vers $GL_q(A)$ qui définit le A -fibré plat E . Calculons maintenant son caractère de Chern en suivant la méthode de 4.20. On désigne par (α_1, α_2) une partition de l'unité associée au recouvrement (U_1, U_2) et on pose

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x) &= \alpha_2(x) g_{21}^{-1} \quad dg_{21} = \alpha_2(x) g^{-1} dg \quad \text{si } \mathcal{R}(x) > 0, \quad 0 \quad \text{sinon} \\ \Gamma_2(x) &= \alpha_1(x) g_{12}^{-1} \quad dg_{12} = -\alpha_1(x) dg g^{-1} \quad \text{si } \mathcal{R}(x) > 0, \quad 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Les matrices de courbure associées sont

$$\begin{aligned} R_1 &= d\alpha_2 g^{-1} dg - \alpha_1 \alpha_2 (g^{-1} dg) \quad \text{si } \mathcal{R}(x) > 0, \quad \text{sinon} \\ R_2 &= -d\alpha_1 dg g^{-1} - \alpha_1 \alpha_2 (dg g^{-1})^2 \quad \text{si } \mathcal{R}(x) > 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathcal{R}(x) > 0$, la composante de bidegré $(1, 2n-1)$ de la courbure élevée à la puissance n est égale à

$$R_1^n = (-1)^{n-1} n (\alpha_1 \alpha_2)^{n-1} d\alpha_2 (g^{-1} dg)^{2n-1}$$

On peut paramétrer le demi-cercle $S = \{x \mid \mathcal{R}(x) > 0\}$ par le segment $[0, 1]$. La fonction α_1 apparaît alors comme une fonction s'annulant au voisinage de 0 et égale à 1 au voisinage de 1. Donc

$$\begin{aligned} \int_S n (\alpha_1 \alpha_2)^{n-1} d\alpha_2 &= -n \int_0^1 \alpha_1(t)^{n-1} (1-\alpha_1(t))^{n-1} \alpha_1'(t) dt \\ &= - \int_0^1 n u^{n-1} (1-u)^{n-1} du = - \frac{n[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

Si on considère la classe de g dans $K_1(A)$, on trouve finalement la formule

$$\text{Ch}_n(g) = \frac{1}{n!} \text{Tr}(R_1^n) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \text{Tr}(g^{-1} dg)^{2n-1}$$

ce qui est cohérent avec les considérations de 2.33 et 2.34 à une constante de normalisation près.

4.33. Remarque. Nous avons défini en 4.31 un homomorphisme de $K_n(A)$ vers $\bar{Z}_n(A)$. Par ailleurs, nous avons défini en 2.27 un homomorphisme $K_n(A) \rightarrow H_n(A, A)$ (homomorphisme de Dennis). Il est facile de voir que $H_n(A, A) \subset \bar{Q}_n(A)$ (cf. 2.12).

Dans le §5 de ce travail, nous montrerons qu'on a en fait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_n(A) & \longrightarrow & H_n(A, A) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \bar{Z}_n(A) & & \end{array}$$

à une constante de normalisation près.

V. INTERPRÉTATION SIMPLICIALE DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES
G-FIBRÉS REPÉRÉS (5.1-4)

5.1. Soit G un groupe simplicial et soit X un ensemble simplicial. Par définition un G-fibré repéré est la donnée pour chaque cellule $\sigma \in X_n$ et pour i et $j \in \Delta_n = \{0, 1, \dots, n\}$ d'éléments $g_{ji} = g_{ji}(\sigma) \in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes

$$1) \quad g_{ki} = g_{kj} \cdot g_{ji}$$

2) Soit $\phi: \Delta_p \rightarrow \Delta_n$ une application croissante et soit $\phi^*: X_n \rightarrow X_p$ et $\phi^*: G_n \rightarrow G_p$ une notation indifférente pour les applications induites sur X et G . On a alors la formule

$$\phi^*(g_{\phi(j)\phi(i)}(\sigma)) = g_{ji}(\phi^*(\sigma))$$

Si $E = (g_{ji})$ et $F = (h_{ji})$ sont deux tels G-fibrés repérés, un morphisme $\lambda: E \rightarrow F$ est donné pour chaque cellule $\sigma \in X_n$ et pour $i \in \Delta_n$ par des éléments $\lambda_i = \lambda_i(\sigma) \in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes

$$1) \quad h_{ji} \cdot \lambda_i = \lambda_j \cdot g_{ji}$$

2) Avec ϕ comme ci-dessus, on a la formule

$$\phi^*(\lambda_{\phi(i)}(\sigma)) = \lambda_i(\phi^*(\sigma))$$

Les morphismes se composent de manière évidente (et sont tous des isomorphismes). On notera $\Phi_G(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de tels fibrés.

5.2. Exemple. Soit K un complexe cellulaire qu'on considère comme ensemble simplicial X en ordonnant ses sommets. Soit G un groupe topologique auquel on associe le groupe simplicial $G_n = \text{Hom}(\Delta^n, G)$, Δ^n étant le n -simplexe standard. Soit enfin E un G-fibré principal sur K . Puisque l'étoile $S(i)$ de chaque sommet i est contractile, le fibré E peut être défini par des fonctions de transition

$$g_{ji}: S(i) \cap S(j) \longrightarrow G$$

au sens de Steenrod. En se restreignant à chaque cellule σ ordonnée de K telle que (i, j) soient des sommets de σ , on obtient bien un fibré repéré sur K (en identifiant chaque cellule de dimension n à Δ^n). Il est immédiat de voir que

l'isomorphisme entre fibrés topologiques équivaut dans ce contexte à l'isomorphisme entre fibrés repérés.

5.3. Soit G un groupe discret, regardé comme groupe simplicial trivial et soit ξ un G -fibré principal de base B . Si (U_i) est un recouvrement trivialisant de X tel que les intersections $U_i \cap U_j$ soient connexes et si $\theta_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ sont les fonctions de transition constantes définissant le fibré plat ξ , on peut alors associer à ξ un G -fibré repéré sur le nerf X du recouvrement (U_i) . En effet, une cellule σ de dimension n de X est une suite d'indices $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset$. On pose alors $g_{ji}(\sigma) = \theta_{\alpha_i \alpha_j}$. En outre, si les ouverts U_i sont connexes et simplement connexes, il est facile de voir que les classes d'isomorphie de G -fibrés principaux sur B coïncident avec les classes d'isomorphie de G -fibrés repérés sur X .

Les exemples décrits en 5.2 et 5.3 fournissent la motivation pour le théorème général suivant :

5.4. THÉORÈME. L'ensemble $\Phi_G(X)$ des classes d'isomorphie de G -fibrés repérés sur l'ensemble simplicial X est naturellement isomorphe à l'ensemble $[X, BG]$ des classes d'homotopie d'applications de X dans le complexe de Kan BG .

Démonstration. Précisons d'abord la définition de BG que nous utilisons. On considère le groupe bisimplicial WG défini par $(WG)_n = G^{n+1}$ (produit de $n+1$ copies de G), toute application croissante de Δ_p dans Δ_n induisant de manière évidente une application simpliciale de G^{n+1} dans G^{p+1} . Le groupe G opère librement à droite sur WG et on définit BG comme l'ensemble quotient WG/G . Pour la structure simpliciale diagonale, les ensembles simpliciaux WG et BG sont des complexes de Kan et la projection canonique $WG \rightarrow BG$ est une fibration de Kan d'espace total contractile.

A tout fibré simplicial repéré E défini par des "fonctions de transition" g_{ji} , on peut associer le sous-ensemble simplicial (noté encore E) de $X \times WG$ dont les éléments de dimension n sont les suites $(\sigma, g_0, \dots, g_n)$ telles que $g_j \cdot g_i^{-1} = g_{ji}(\sigma)$. Puisque la seconde projection de E dans WG est équivariante on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & WG \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{u} & BG \end{array}$$

De manière explicite, l'application u associe à une cellule σ de dimension n la classe de $(g_0, \dots, g_n)$ avec $g_j \cdot g_i^{-1} = g_{ji}(\sigma)$. Nous avons ainsi établi une correspondance bijective entre l'ensemble des G -fibrés repérés sur X et l'ensemble des

applications simpliciales u de X dans BG .

D'autre part, puisque WG est un groupe, il opère à gauche sur $BG = WG/G$. Ceci permet d'interpréter la notion de morphisme de fibrés repérés de la manière suivante. Soient $u, v : X \rightarrow BG$ des applications représentant deux fibrés repérés associés aux fonctions de transition (g_{ji}) et (h_{ji}) . La relation $h_{ji} \cdot \lambda_i = \lambda_j \cdot g_{ji}$ peut alors s'écrire

$$h_j h_i^{-1} = (\lambda_j g_j)(\lambda_i g_i)^{-1}$$

Autrement dit, un morphisme $E \rightarrow F$ est défini par une application simpliciale $\lambda : X \rightarrow WG$ telle que $v(\sigma) = \lambda(\sigma) \cdot u(\sigma)$.

Nous pouvons maintenant commencer la démonstration du théorème annoncé. Si $u : X \rightarrow BG$, on peut lui associer par les remarques faites plus haut un G -fibré repéré sur X qui n'est autre que l'image réciproque du fibré principal "universel" WG sur BG . Supposons maintenant que $u_0, u_1 : X \rightarrow BG$ soient homotopes. Puisque BG est un complexe de Kan, u_0 et u_1 sont simplicialement homotopes et d'après un théorème bien connu [38], les fibrés principaux $E_0 = u_0^*(WG)$ et $E_1 = u_1^*(WG)$ sont des fibrés sur X isomorphes. Ecrivons maintenant E_0 (resp. E_1) comme le sous-ensemble de $X \times WG$ formé des couples $(\sigma; g_0, g_1, \dots, g_n)$ tels que $u_0(\sigma) = \pi(g_0, \dots, g_n)$ (resp. $u_1(\sigma) = \pi(g_0, \dots, g_n)$). Si $\lambda : E_0 \rightarrow E_1$ est un isomorphisme, il s'écrit nécessairement sous la forme

$$(\sigma; g_0, \dots, g_n) \longmapsto (\sigma; \lambda_0 g_0, \dots, \lambda_n g_n)$$

Si on pose $h_i = \lambda_i \cdot g_i$, on a donc la relation

$$h_j h_i^{-1} = \lambda_j (g_j g_i^{-1}) \lambda_i^{-1}$$

Les λ_i définissent ainsi un morphisme noté aussi $\lambda : X \rightarrow WG$ qui réalise l'isomorphisme entre les fibrés repérés E_0 et E_1 .

De cette discussion il résulte donc une application bien définie de l'ensemble $[X, BG]$ vers $\Phi_G(X)$ qui est clairement surjective. Pour démontrer son injectivité, il suffit d'utiliser la contractibilité de WG . En effet, si les fibrés repérés E_0 et E_1 sont isomorphes, on a $u_0(\sigma) = \lambda(\sigma) \cdot u_1(\sigma)$ pour une certaine application $\lambda : X \rightarrow WG$. Puisque WG est contractile, λ est homotope à l'application constante $\sigma \mapsto 1$. Donc u_0 et u_1 sont homotopes.

5.5. Nous nous intéressons ici au cas où A est une $\mathbb{Q}$ -algèbre, P un A -module projectif de type fini et $G = \text{Aut}(P)$ est muni de la structure simpliciale triviale (le cas général sera traité à la fin). Nous désignerons par $\Omega_*(A)$ une algèbre graduée vérifiant les axiomes écrits en 1.3 et $\text{Co}(P)$ l'espace affine des connexions sur P (cf. 1.7). En particulier, si $P = A^q$, $\text{Co}(P)$ s'identifie au

A-module formé des matrices carrées d'ordre q à coefficients dans $\Omega_1(A)$. D'autre part, pour tout ensemble simplicial X et pour toute cellule de dimension n de X , nous nous permettrons de désigner par $\Omega^*(\sigma)$ le complexe de De Rham-Sullivan (à coefficients rationnels) du simplexe type Δ^n . Ainsi $\Omega^*(\sigma)$ s'identifie à l'algèbre graduée $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n, dx_0, \dots, dx_n]$ quotientée par l'idéal engendré par les relations $\sum x_i = 1$ et $\sum dx_i = 0$.

INTERPRÉTATION SIMPLICIALE DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES (5.6-16)

5.6. DÉFINITION. Soit E un G -fibré repéré sur X . Une connexion simpliciale sur E est donnée pour chaque simplexe $\sigma \in X_n$ et chaque entier $i \in \Delta_n = \{0, \dots, n\}$ par des éléments

$$D_i(\sigma) \in \Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} \text{Co}(P)$$

vérifiant les axiomes suivants

1) Si τ est une "face" de σ associée à une application croissante $\alpha : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$, on a $D_{\alpha(j)}(\sigma)|_{\tau} = D_j(\tau)$.

2) Si $s = (ji)$ est l'arête orientée d'indice (j, i) de σ , on a la relation

$$D_i = g_{ji}^* (D_j)$$

où les g_{ji} représentent les fonctions de transition de E .

5.7. Exemple. Soit Δ une connexion fixe sur P et soit

$$D_i(\sigma) = \sum x_k g_{ki}^*(\Delta)$$

où les x_k représentent les coordonnées barycentriques de σ . On vérifie que c'est bien une connexion simpliciale par le calcul que voici

$$\begin{aligned} D_i &= \sum x_k (g_{kj} - g_{ji})^* (\Delta) = \sum x_k (g_{ji})^* (g_{kj})^* (\Delta) \\ &= g_{ji}^* (\sum x_k g_{kj}^* (\Delta)) = g_{ji}^* (D_j(\sigma)) . \end{aligned}$$

5.8. De manière plus explicite, supposons que $P = A^q$. Alors la donnée de $D_i(\sigma)$ équivaut à celle de $\Gamma_i(\sigma)$ avec les notations de 1.8. où $\Gamma_i(\sigma)$ est une matrice $p \times q$ à coefficients dans $\Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} \Omega_1(A)$. Les relations 1) et 2) de la définition 5.6 se transforment alors en $\Gamma_{\alpha(j)}(\sigma)|_{\tau} = \Gamma_j(\tau)$ et $\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot \Gamma_j \cdot g_{ji}$ respectivement. En particulier, si dans l'exemple 5.7 on choisit pour Δ la connexion triviale sur A^q , on trouve

$$\Gamma_i(\sigma) = \sum x_k g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$$

5.9. Remarque. Soit X une variété, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X par des ouverts

(U_i) tels que les intersections $U_i \cap U_j$ soient connexes et soit E un G -fibré plat sur X défini par des fonctions de transition $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G = \text{Aut}(P)$ qui sont nécessairement constantes. Une partition C^∞ de l'unité définit une application continue $X \xrightarrow{\phi} N(\mathcal{U})$, réalisation géométrique du nerf de $\mathcal{U}$. En fait, comme il est bien connu, l'application ϕ induit un homomorphisme de la cohomologie de De Rham Sullivan de $N(\mathcal{U})$ vers la cohomologie de De Rham de X (à coefficients dans un espace de Banach E). Par cette correspondance, les invariants cohomologiques de G -fibrés repérés sur le nerf de $\mathcal{U}$ se transforment en des invariants cohomologiques sur la variété X . Nous retrouverons ainsi par des méthodes simpliciales les définitions et résultats du paragraphe précédent.

5.10. Revenons à la situation générale d'une connexion simpliciale (D_i) . On peut regarder D_i comme une connexion $\tilde{D}_i$ sur le B -module à droite $\Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} P$ où $B = \Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} A$. En effet, si $u \otimes v \in \Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} P$, on pose $\tilde{D}_i(u \otimes v) = d'u \otimes v + u D_i(v)$. Ici d' désigne la différentielle usuelle sur $\Omega^0(\sigma)$. Comme dans les § 1 et 4, on peut associer à $\tilde{D}_i$ sa courbure $R_i = \tilde{D}_i^2$. Puisque $\tilde{D}_i = g_{ji}^*(\tilde{D}_j)$, on a $R_i = g_{ji}^{-1} R_j g_{ji}$.

5.11. Exemple. Reprenons l'exemple traité en 5.8. On trouve alors l'expression

$$R_i = \sum dx_k \omega_{ki} - \sum x_k (\omega_{ki})^2 + (\sum x_k \omega_{ki})^2$$

avec $\omega_{ki} = g_{ki}^{-1} dg_{ki}$, expression en tout point analogue à celle trouvée en 4.11 et conforme à la remarque 5.9.

5.12. Considérons maintenant le bicomplexe $\Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A))$ des formes différentielles de De Rham-Sullivan (à coefficients rationnels) sur l'ensemble simplicial X à valeurs dans $\bar{\Omega}_*(A) = \Omega_*(A) / [\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$. La relation $R_i = g_{ji}^{-1} R_j g_{ji}$ montre que la trace de R_i définit un élément bien déterminé de $\Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A))$ indépendant de i . En raisonnant dans chaque cellule (remarquer que $\Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} P$ est un $\Omega^0(\sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} A$ -module projectif de type fini avec la connexion D_i), on démontre que $\text{Tr}(R_i^n)$ est un cycle du complexe total associé au double complexe $\Omega^*(X; \bar{\Omega}_*(A))$. En fait, la connexion D_i se décompose en la somme des connexions partielles $D_i^! : u \otimes v \mapsto d'u \otimes v$ et $D_i'' : u \otimes v \mapsto u D_i(v)$ comme dans la situation géométrique du §4. Puisque $(D_i^!)^2 = 0$, la trace de R_i^n est la somme d'éléments $r_{p,q} \in \Omega^p(X; \bar{\Omega}_q(A))$ avec $p \leq q$. Puisque la trace de R_i^n est fermée, on voit que $r_{n,n} \in Z^n(X; \bar{\Omega}_n(A))$. Ceci nous ramène à considérer le sous-complexe $\mathcal{C}^*(X, A)$ de $\Omega^*(X, A) = \bigoplus \Omega^p(X; \bar{\Omega}_q(A))$ défini comme dans le §4 en posant

$$\mathcal{C}^{2n}(X, A) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} \Omega^p(X; \bar{\Omega}_q(A)) \oplus Z^n(X; \bar{\Omega}_n(A))$$

$$\mathcal{C}^{2n+1}(X, A) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q}} \Omega^p(X; \bar{\Omega}_q(A))$$

Si on note $\mathcal{H}_A^*(X)$ l'homologie du complexe $\mathcal{C}^*(X, A)$, une démonstration analogue à celle du théorème 4.24 montre que les formes différentielles $Ch_n(E, D) = \frac{1}{n!} \text{Tr}(R_i^n)$ sont des éléments bien déterminés de $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ qui ne dépendent que de la classe d'isomorphie de E (et donc pas du choix de la connexion D). On a de même l'analogue suivant des théorèmes 4.28 et 4.29.

5.13. PROPOSITION. L'homologie $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ en degré $2n$ du complexe $\mathcal{C}^*(X, A)$ défini plus haut est naturellement isomorphe à

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X; \bar{Z}_n(A))$$

Son homologie en degré $2n+1$ est naturellement isomorphe à

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q}} H^p(X; \bar{H}_q(A))$$

La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle des théorèmes 4.28 et 4.29. Elle est même en fait plus simple car le lemme 4.6 est ici évident dans le cadre algébrique où nous nous sommes placés.

5.14. PROPOSITION. Soit A une algèbre de Banach et soit E un A -fibré plat sur une variété X . Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X par des ouverts (U_i) tels que les intersections $U_i \cap U_j$ soient connexes. Soit E' le fibré repéré sur le nerf de $\mathcal{U}$ associé aux fonctions de transition g_{ji} . Alors les classes caractéristiques construites en 4.24 et 5.12 se correspondent par l'homomorphisme

$$\mathcal{H}_A^{2n}(N(\mathcal{U})) \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X)$$

induit par une partition de l'unité $(\alpha_k(x))$ associée au recouvrement $\mathcal{U}$.

Démonstration. Soit P la fibre de E (nous supposons X connexe pour simplifier) et soit Δ une connexion quelconque de P . Pour toute cellule σ de $N(\mathcal{U})$ nous pouvons considérer la connexion canonique définie par $\Gamma_i = \sum_k x_k g_{ki}^*(\Delta)$ où les x_k représentent les coordonnées barycentriques. L'application $X \longrightarrow N(\mathcal{U})$ associée à un point x de X le point de $N(\mathcal{U})$ de coordonnées barycentriques $(\alpha_k(x))$. Par "image réciproque" on retrouve bien ainsi la connexion "canonique" $\sum \alpha_k(x) g_{ki}^*(\Delta)$ considérée en 4.18. Le reste de la démonstration est évident.

Si on désigne par A^+ l'algèbre A augmentée d'un élément unité, on peut définir un homomorphisme

$$S_1 : \mathcal{H}_{A^+}^{2n}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{A^+}^{2n-2}(X)(-2)$$

où le deuxième groupe est le groupe d'homologie du sous-complexe $\mathcal{C}_2^*(X, A^+)$ (cf. 6.25). Cet homomorphisme S_1 est induit par l'homomorphisme de complexes défini par A. Connes

$$S : \bar{\Omega}_*(A^+) \longrightarrow \bar{\Omega}_{*-2}(A^+)$$

(cf. 2.7 et le calcul formel fait en 4.13). Toutes les considérations développées dans le §4 peuvent se transposer telles quelles dans le cadre simplicial. En particulier, si X est un ensemble simplicial, on peut définir le groupe $K_A(X)$ comme le groupe de Grothendieck de fibrés repérés sur des ensembles simpliciaux homotopiquement équivalents à X . Dans ce contexte on a le théorème suivant.

5.15. THÉORÈME. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_A(X) & \longrightarrow & K_{A^+}(X) & \xrightarrow{Ch_n} & \mathcal{K}_{A^+}^{2n}(X) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ K_{A^+}(X) & \xrightarrow{Ch_{n-1}} & & & \mathcal{K}_{A^+}^{2n-2}(X)(-2) \end{array}$$

En choisissant pour X une sphère de dimension 1, on en déduit une définition simpliciale d'homomorphismes.

$$K_i(A) \longrightarrow HC_{i+21}(A) \quad \text{et} \quad K_i(A) \longrightarrow \bar{Z}_i(A^+)$$

et le corollaire suivant.

5.16. COROLLAIRE. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & HC_{i+21}(A) \\ & \nearrow^{Ch_i^\ell} & \downarrow S \\ K_i(A) & & HC_{i+21-2}(A) \\ & \searrow_{Ch_i^{\ell-1}} & \end{array}$$

où Ch_i^ℓ (resp. $Ch_i^{\ell-1}$) est associé à Ch_n (resp. Ch_{n-1}) avec $i+\ell = 2n$

Démonstration du théorème. Soit E un A -fibré sur X et soit Λ l'algèbre $\mathbb{Q}[p](p^2-p)$. Si les (g_{ji}) représentent les fonctions de transition de E et si P est le Λ -module projectif associé au projecteur p , les $(g_{ji} \otimes 1)$ représentent les fonctions de transition de $E \otimes P$ en tant que fibré en $(A^+ \otimes \Lambda)$ -module (noter que $p = \text{Id}$ sur P). Si Δ est la connexion de Levi-Civita sur P (cf. 1.9) et si D est une connexion sur la fibre Q de E , $D \otimes 1 + 1 \otimes \Delta$ est une connexion sur $Q \otimes P$. La connexion canonique sur $E \otimes P$ (cf. 5.7) est donc

$$\sum x_k (g_{ki}^* \otimes 1) (D \otimes 1 + 1 \otimes \Delta) = \sum x_k g_{ki}^* (D) \otimes 1 + 1 \otimes \Delta$$

dont la courbure est $R_i \otimes 1 + 1 \otimes R$ où R est égal à l'expression p.dp.dp (cf. 1.15). Par conséquent, $Ch_n(E \otimes P) = Ch_{n-1}(E) Ch_1(P) + Ch_n(E) Ch_0(P)$ dans $\Omega^*(X; \Omega_*(A^+)) \otimes \Omega_*(\Lambda)$ avec $Ch_1(P) = p.dp.dp$ et $Ch_0(P) = \bar{p}$. D'autre part, l'homomorphisme $S : \bar{\Omega}_*(A^+) \rightarrow \bar{\Omega}_{*-2}(A^+)$ est l'homomorphisme composé

$$\bar{\Omega}_*(A^+) \xrightarrow{\theta} \bar{\Omega}_*(A^+ \otimes \Lambda) \longrightarrow \bar{\Omega}_*(A^+) \otimes \Omega_*(\Lambda) \xrightarrow{\gamma} \Omega_{*-2}(A^+)$$

où θ est induit par $x \mapsto x \otimes p$ pour $x \in A$ et où γ est induit par l'homomorphisme composé

$$\bar{\Omega}_2(\Lambda) \xrightarrow{S} \bar{\Omega}_0(\Lambda) \xrightarrow{j} Q$$

avec $j(a_0 + a_1 p) = a_1$ (Ici Λ est considérée comme algèbre augmentée sur Q et nous convenons que tous les $\bar{\Omega}_i(\Lambda)$ sont nuls pour $i > 2$ d'après le formalisme adopté dans le §1). Il s'en suit aussitôt que $S_1(Ch_n(E)) = Ch_{n-1}(E)$ déjà au niveau des formes différentielles sur X à valeurs dans $\Omega_*(A^+)$, donc à fortiori dans $\mathcal{H}_{A^+}^{2n-2}(X)(-2)$.

COMPARAISON DES DIVERSES CLASSES CARACTÉRISTIQUES EN K-THÉORIE ALGÈBRIQUE (5.17-29)

5.17. Il nous faut maintenant comparer les classes caractéristiques $\tilde{Ch}_n$ et Ch_n de $K_A(X)$ vers $\bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; HC_q(A))$ construites algébriquement (pour $\tilde{Ch}_n$ dans le §2) et simplicialement (pour Ch_n dans ce paragraphe). Il nous faut aussi comparer la "dernière" classe

$$\bar{D}_n : K_A(X) \longrightarrow H^n(X; \bar{Z}_n(A))$$

et la classe de Dennis D_n construite dans le §2

$$D_n : K_A(X) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X), H_n(A, A))$$

Pour cela, il convient de remarquer que toutes ces classes se factorisent à travers l'homologie du groupe $GL(A)$. Par exemple, Ch_n est déduit de l'homomorphisme

$$(Ch_n)_p : H_p(GL_r(A)) \longrightarrow HC_q(A)$$

obtenu de la manière suivante. Si E désigne le fibré universel sur l'ensemble simplicial $BGL_r(A)$, de fonctions de transition $g_{ji} = g_j^{-1} g_i$ en écriture homogène (cf. 5.4), on peut le munir de la connexion canonique définie par $\Gamma_i = \sum x_k g_{ki}^{-1} dg_{ki}$ et $(Ch_n)_p$ n'est autre que la classe du cocycle

$$\sigma \mapsto \frac{1}{n!} \int_{\sigma} \text{Tr}(R^n)$$

avec $R = d\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$ et σ chaîne de dimension p . On peut alors remarquer que dans l'écriture de R^n , tout élément de $\bar{\Omega}_*(M_r(A))$ est combinaison linéaire d'expressions de la forme $g_0 dg_1 \dots dg_q$ avec $\pi g_i = 1$. Si on pose $G = GL_r(A)$, on voit ainsi que $(Ch_n)_p$ est déduit d'un homomorphisme canonique

$$(Ch_n)_p : H_p(G) \longrightarrow HC_q(G) \subset HC_q(\mathbb{Q}[G]) \longrightarrow HC_q(A)$$

(cf. 2.21 pour la définition de $HC_q(G)$ ainsi que 2.29 pour la définition du dernier homomorphisme). Plus précisément, ces formules ont un sens pour l'homologie cyclique réduite (car $d1 = 0$), ce qui ne restreint pas la généralité puisque $p > 0$. En outre, $(Ch_p)_p$ est la composition

$$H_p(G) \xrightarrow{D'_p} H_p(G) \xrightarrow{\quad} HC_p(G)$$

où D'_p est l'analogue de D_p pour le groupe G .

Les considérations précédentes montrent ainsi que Ch_n (comme l'homomorphisme $\tilde{Ch}_n$ du § 2) résulte d'un homomorphisme canonique

$$H_p(G) \longrightarrow HC_q(G)$$

défini pour tout groupe discret G avec $q \geq p$ et $p+q = 2n$. Puisque cet homomorphisme est compatible avec l'homomorphisme de périodicité S (cf. 5.15 ou 5.16), il suffit de calculer l'homomorphisme $H_p(G) \rightarrow H_m(G)$ résultant de la décomposition de $HC_q(G)$ en somme directe de groupes d'homologie. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

5.18. LEMME. Soit G un groupe discret quelconque. Alors toute transformation naturelle $H_p(G) \rightarrow H_m(G)$ est nulle pour $m > p$ et est la multiplication par un scalaire rationnel si $m = p$.

Démonstration. D'après un théorème de Kan-Thurston [22], tout CW-complexe connexe a naturellement l'homologie d'un groupe discret G . Il suffit donc de démontrer le lemme dans la catégorie des CW-complexes connexes au lieu de celle des groupes discrets. Si X_p désigne le p -squelette du CW-complexe X , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_p(X_p) & \longrightarrow & H_m(X_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_p(X) & \longrightarrow & H_m(X) \end{array}$$

Puisque $H_p(X_p) \rightarrow H_p(X)$ est un épimorphisme et que $H_p(X_p) \rightarrow H_m(X_p)$ est nul

pour $m > p$, l'homomorphisme $H_p(X) \longrightarrow H_m(X)$ est réduit à 0, ce qui démontre la première partie du lemme. Considérons maintenant l'espace $Y = X/X_{p-1}$. La suite exacte

$$H_p(X_{p-1}) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_p(X, X_{p-1})$$

montre que l'application $H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$ est injective. La suite exacte

$$H_i(X_{p-1}) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(X, X_{p-1}) \longrightarrow H_{i-1}(X_{p-1}) \longrightarrow H_{i-1}(X)$$

montre que $H_i(X/X_{p-1}) = 0$ pour $i < p$. D'autre part, $\pi_1(X/X_{p-1}) = 0$ si $p > 1$. Donc $\pi_i(X/X_{p-1}) = 0$ pour $i < p$ et $\pi_p(X/X_{p-1}) \cong H_p(X/X_{p-1})$ si $p > 1$.

Soit maintenant λ_p le nombre rationnel défini par la transformation $x \mapsto \lambda_p x$ sur l'homologie $H^p(S^p)$ de la sphère S^p (rappelons que $p > 0$). Puisque le groupe abélianisé de $\pi_p(Y)$ est $H_p(Y)$ dans tous les cas d'après ce qui précède, on voit aussitôt que la transformation naturelle sur $H_p(Y)$ est aussi $x \mapsto \lambda_p x$. Il en est donc de même sur $H_p(X)$ puisque l'application $H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$ est injective.

5.19. PROPOSITION. La transformation naturelle $H_p(G) \longrightarrow HC_p(G)$ déduite de Ch_p est l'inclusion naturelle $H_p(G) \longrightarrow HC_p(G)$ (cf. 3.20) multipliée par $1/p!$.

Démonstration. D'après 5.17, nous savons que cette transformation est composée de $D'_p : H_p(G) \longrightarrow H_p(G)$ et de l'inclusion naturelle de $H_p(G)$ dans $HC_p(G)$. Il suffit donc de calculer D'_p qui doit être la multiplication par un scalaire λ_p d'après le lemme précédent. Pour déterminer ce scalaire, il suffit de considérer le cas où $G = \mathbb{Z}^p$ et plonger tous les groupes considérés dans l'homologie de De Rham non commutative de $A_p = \mathbb{Q}[\mathbb{Z}^p] = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_p, t_1^{-1}, \dots, t_p^{-1}]$. La transformation naturelle $a_0 da_1 \dots da_p \mapsto a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \dots \wedge da_p$ de $\bar{H}_p(A_p)$ dans l'homologie de De Rham commutative est la multiplication par $p!$ lorsqu'on identifie $\bar{H}_p(A_p)$ à $\mathbb{Q}$ d'après [36] §2. D'autre part, la transformation déduite du caractère de Chern

$$\mathbb{Q} \cong H_p(\mathbb{Z}^p) \longrightarrow H_p^{DR}(A_p) \cong \mathbb{Q}$$

est multiplicative en un sens évident par rapport à p (cf. 1.26) et c'est un isomorphisme pour $p = 1$. Enfin, la multiplication dans le complexe de De Rham-Sullivan correspond à la multiplication en cohomologie singulière (ici pour l'ensemble simplicial $B\mathbb{Z}^p$; cf. [18]). La proposition en résulte aussitôt.

5.20. THÉORÈME. La transformation naturelle

$$Ch_p^{(q-p)/2} : H_p(G) \longrightarrow HC_q(G)$$

déduite de Ch_n ($p+q = 2n$) coïncide avec l'inclusion naturelle $H_p(G) \hookrightarrow HC_q(G)$ définie en 2.22 multipliée par le facteur de normalisation $(-1)^{n-q}/q!$.

5.21. COROLLAIRE. Soient $\tilde{Ch}_i^{\ell}$ les classes caractéristiques définies en 2.30 et soient Ch_i^{ℓ} les classes caractéristiques déduites de Ch_n (en posant $n = i + \ell$). On a alors

le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & & HC_{i+2\ell}(A) \\
 & \nearrow \tilde{Ch}_i^\ell & \downarrow \\
 K_i(A) & & \\
 & \searrow Ch_i^\ell & \downarrow \\
 & & HC_{i+2\ell}(A)
 \end{array}$$

où la flèche verticale est la multiplication par $(-1)^{\ell(i+2\ell)}!$.

Démonstration. Le théorème et le corollaire résultent de la proposition 5.19 et de la comparaison entre les homomorphismes S et $\tilde{S}$ faite en 2.7.

5.22. Remarques. Le corollaire reste vrai pour $i = 0$ d'après la remarque 2.20. D'autre part, il convient de corriger [28] où s'est glissée une erreur de normalisation.

5.23. Nous allons maintenant comparer les classes caractéristiques

$$\bar{D}_n : K_n(A) \longrightarrow \bar{Z}_n(A)$$

$$D_n : K_n(A) \longrightarrow H_n(A, A)$$

définies en 5.13 et en 2.27 respectivement.

La comparaison va être basée sur le diagramme suivant dont nous allons démontrer la commutativité

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{Z}_n(A) & \xrightarrow{\theta} & \bar{C}_n(A)/b(\bar{C}_{n+1}A) \\
 & \nearrow \bar{D}_n & \downarrow n! & & \uparrow \\
 K_n(A) & \cdots & \bar{HC}_n(A) & \xleftarrow{D_n} & H_n(A, A)
 \end{array}$$

Ici on désigne par $\theta(\omega)$ la somme $\frac{n!}{n} \sum_s \omega \tau^s$, τ désignant la transformée de la forme différentielle ω par τ^s , τ engendrant le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n$ (cf. 2.12b). Puisque D_n et $\bar{D}_n$ se factorisent à travers l'homologie du groupe $GL(A)$, nous pouvons raisonner comme en 5.17. Il suffit donc de vérifier pour tout groupe G la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(G) & \xrightarrow{\gamma} & \bar{Z}_n(\mathbb{Q}[G]) & \xrightarrow{\theta} & \bar{C}_n(\mathbb{Q}[G])/b(\bar{C}_{n+1}(\mathbb{Q}[G])) \\
 & \searrow & & & \nearrow \\
 & & H_n(\mathbb{Q}[G], \mathbb{Q}[G]) & &
 \end{array}$$

où θ est défini par les mêmes formules que ci-dessus (remplacer A par $\mathbb{Q}[G]$). En effet, les formules définissant $\phi = \theta \cdot \gamma$, bien que compliquées, sont parfaitement explicites et ne dépendent que du groupe G (en l'occurrence $GL_r(A)$ pour tout r). Si $\sigma = (g_0, \dots, g_n)$ est une chaîne homogène de dimension n , on a la formule

$$\phi(\sigma) = \frac{n!}{n} \sum_{s=1}^n \left(\int_{\sigma} \left(\sum_{k=0}^n dx_k g_{ki}^{-1} dg_{ki} \right)^n \right)^{\tau^s} \quad \text{avec } g_{ki} = g_k^{-1} g_i$$

En termes d'homologie réduite de groupes, on voit donc que l'image de ϕ appartient à $C_n(G)/b(C_{n+1}(G))$ où $C_*(G)$ désigne le complexe normalisé définissant l'homologie d'Eilenberg-Mac Lane du groupe G (on rappelle que $C_*(G)$ est facteur direct canonique du complexe définissant l'homologie de Hochschild de $\mathbb{Q}[G]$ d'après la méthode développée en 2.25).

5.24. THÉORÈME. L'image de ϕ appartient au sous-groupe $H_n(G)$ de $C_n(G)/b(C_{n+1}(G))$. De manière plus précise, $\phi : H_n(G) \rightarrow H_n(G)$ est l'identité avec les constantes de normalisation choisies. En particulier, l'homomorphisme composé

$$K_n(A) \rightarrow H_n(GL(A)) \rightarrow \bar{Z}_n(A) \rightarrow C_n(\bar{A})/b(\bar{C}_{n+1}(A))$$

se factorise par l'homomorphisme de Dennis

$$D_n : K_n(A) \rightarrow H_n(GL(A)) \rightarrow H_n(A, A) \subset \bar{C}_n(A)/b(\bar{C}_{n+1}(A))$$

multiplié par $1/n!$.

Démonstration. Soit G' un groupe acyclique tel que $G \subset G'$ (cf. [22] pour des exemples). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_n(G) & \xrightarrow{\phi} & C_n(G)/b(C_{n+1}(G)) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(G') & \longrightarrow & C_n(G')/b(C_{n+1}(G')) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(G') \end{array}$$

Puisque $C_{n-1}(G)$ est un sous-groupe de $C_{n-1}(G')$ et que $H_n(G') = 0$, on a $b \cdot \phi = 0$, ce qui démontre la première partie du théorème. D'après 5.18, on sait donc que ϕ est la multiplication par un nombre rationnel. Pour le déterminer, on écrit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(G) & \xrightarrow{\bar{D}_n} & \bar{Z}_n(\mathbb{Q}[G]) \\ \downarrow \phi & \searrow & \downarrow \theta \\ H_n(G) & \longrightarrow & \bar{C}_n(\mathbb{Q}[G])/b(\bar{C}_{n+1}(\mathbb{Q}[G])) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \bar{H}_n^\lambda(\mathbb{Q}[G]) & \longrightarrow & \bar{C}_n^\lambda(\mathbb{Q}[G])/b(\bar{C}_{n+1}^\lambda(\mathbb{Q}[G])) \end{array}$$

D'après 5.19 on voit alors que ϕ est l'identité avec les constantes de normalisation choisies. Le reste du théorème en résulte d'après les remarques faites en 5.23.

5.25. Remarque. Dans 2.12, nous avons montré que l'homologie de Hochschild $H_n(A, A)$ s'identifie à un sous-groupe de $\bar{\Omega}_n(A)$. Si on note $H'_n(A, A)$ le noyau de l'homomorphisme composé

$$H_n(A, A) \longrightarrow HC_n(A) \xrightarrow{B} H_{n+1}(A, A)$$

le théorème précédent montre que l'homomorphisme de Dennis se factorise à travers $H'_n(A, A)$. En outre, l'homomorphisme composé $K_n(A) \longrightarrow H'_n(A, A) \xrightarrow{\sim} \bar{Z}_n(A)$ défini algébriquement coïncide avec l'homomorphisme défini simplicialement $K_n(A) \xrightarrow{\sim} K_n(A) \longrightarrow \bar{Z}_n(A)$ multiplié par $n!$.

5.26. Dans les paragraphes précédents nous avons essentiellement étudié le cas où A est un anneau discret. On peut de manière analogue traiter le cas où A est une algèbre de Fréchet (complexe pour fixer les idées). Soit ainsi P un A -module projectif de type fini et soit G le groupe simplicial associé à l'anneau simplicial $P_* = \text{End}(P) \hat{\otimes} C^\infty(\Delta^*)_{\Delta^n}$ désignant le n -simplexe standard. Nous nous proposons d'étendre à ce contexte topologique la notion de connexion sur un G -fibré repéré E de base un ensemble simplicial X .

Désignons par $\Omega^*(X)$ le complexe de De Rham-Sullivan des formes différentielles sur X à valeurs complexes. Ainsi, si σ est une cellule de dimension n , $\Omega^*(\sigma)$ s'identifie à l'algèbre graduée des formes différentielles usuelles sur le simplexe type Δ^n : par exemple $\Omega^0(\sigma)$ s'identifie à $C^\infty(\Delta^n)$. En particulier, $P_\sigma = \Omega^0(\sigma) \hat{\otimes} P$ est un module projectif de type fini sur $A_\sigma = \Omega^0(\sigma) \hat{\otimes} A$. Une connexion D sur P_σ (considéré comme A_σ -module avec $\Omega_*(A_\sigma) = \Omega^*(\sigma) \hat{\otimes} \Omega_*(A)$) est déterminée sur P considéré comme sous A -module de $\Omega^0(\sigma) \hat{\otimes} P$. En effet, si $u \otimes v \in \Omega^0(\sigma) \hat{\otimes} P$, on a $D(u \otimes v) = D((u \otimes 1)(1 \otimes v)) = d'u \otimes v + (u \otimes 1)D(1 \otimes v)$ où d' désigne la différentielle usuelle sur $\Omega^*(\sigma)$. Si on note

$\tilde{D} : P_\sigma \rightarrow P_\sigma \otimes_{A_\sigma} \Omega_1(A_\sigma) = P_\sigma \otimes_{\Omega^0(\sigma)} \Omega^1(\sigma) + P \otimes_A \Omega_1(A)$ cette restriction, la seule condition à laquelle doit satisfaire l'homomorphisme $\tilde{D}$ est la suivante

$$\tilde{D}(p\lambda) = \tilde{D}(p)\lambda + p \otimes d''\lambda$$

où $p \in P$, $\lambda \in A$ et où d'' désigne la différentielle sur le complexe universel $\Omega^*(A)$. En particulier, si θ est une face de σ associée à une application croissante $\alpha : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$, on a un homomorphisme d'anneaux $A_\sigma \rightarrow A_\tau$ et un homomorphisme de modules $P_\sigma \rightarrow P_\tau$ qui lui est compatible. Les considérations précédentes permettent de donner un sens à la "restriction" de D à P_τ : c'est la connexion associée à l'homomorphisme composé

$$P \xrightarrow{D} P_\sigma \otimes_{A_\sigma} \Omega_1(A_\sigma) \longrightarrow P_\tau \otimes_{A_\tau} \Omega_1(A_\tau)$$

On la notera $\alpha^*(D)$ ou simplement $D|_\tau$. Dans le cas où P est le module libre A^n , ces considérations se simplifient notablement: D est alors déterminée par une

matrice Γ à coefficients dans $\Omega_1(A_\sigma)$ (cf. 1.8); la restriction de D à P_τ est simplement associée à la restriction de la matrice Γ à $\Omega_1(A_\tau)$.

5.27. DÉFINITION (comparer avec 5.6). Une connexion simpliciale sur le fibré repéré E de base X et de groupe G est donnée pour chaque simplexe σ de X_n et chaque entier $i \in \Delta_n = \{0, \dots, n\}$ par des connexions $D_i(\sigma)$ sur P_σ (considéré comme A_σ -module) vérifiant les axiomes suivants

1) Si τ est une face de σ associée à une application croissante $\alpha: \Delta_m \rightarrow \Delta_n$, on a $D_{\alpha(j)}(\sigma)|_\tau = D_j(\tau)$.

2) Pour i et $j \in \Delta_n$, on a la relation $D_i(\sigma) = g_{ji}^*(D_j(\sigma))$ pour une cellule σ de dimension n .

5.28. Une fois cette définition posée, les considérations de 5.7, 5.10-11 s'étendent de manière triviale aux fibrés repérés. En particulier, à tout fibré repéré E on peut associer un caractère de Chern $Ch_n(E)$ qui appartient à la somme directe des espaces vectoriels de cohomologie $\bigoplus_{p+q=2n} H^p(X; \bar{H}_q(A))$. Si X est l'ensemble simplicial associé à un complexe cellulaire comme dans l'exemple 5.9 (les fonctions de transition n'étant plus nécessairement constantes), on voit aussitôt grâce à une partition de l'unité que les définitions géométrique et simpliciale du caractère de Chern coïncident.

5.29. THÉORÈME. Pour toute $\mathbb{Q}$ -algèbre l'homomorphisme

$$\tilde{Ch}_1^{n-1}: K_1(A) \longrightarrow \bar{H}_{2n-1}(A) \subset \bar{HC}_{2n-1}(A)$$

défini en 2.30 associe à la classe de $g \in GL(A)$ la classe d'homologie de la forme différentielle non commutative

$$(n-1)! \operatorname{Tr}(g^{-1}dg)^{2n-1}$$

Démonstration. Dans 2.35 nous avons montré que $\tilde{Ch}_1^{n-1}(g)$ est de la forme $\lambda_n \operatorname{Tr}(g^{-1}dg)^{2n-1}$ où λ_n est un nombre rationnel. Pour déterminer λ_n , il suffit de comparer Ch_n et $\tilde{Ch}_n$ pour l'algèbre de Banach des fonctions de classe C^1 sur le cercle par exemple. D'après 5.21 et 5.28, nous savons que $\tilde{Ch}_1^{n-1}(g) = (-1)^{n-1} (2n-1)! Ch_1^{n-1}(g)$. Puisque $Ch_1^{n-1}(g) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \operatorname{Tr}(g^{-1}dg)^{2n-1}$ d'après 4.32, on a bien $\tilde{Ch}_1^{n-1}(g) = (n-1)! \operatorname{Tr}(g^{-1}dg)^{2n-1}$. Donc $\lambda_n = (n-1)!$.

VI. CLASSES CARACTÉRISTIQUES "RELATIVES" DE A-FIBRÉS PLATS

K-THÉORIE RELATIVE DES ALGÈBRES DE BANACH (6.1-14)

6.1. Nous revenons maintenant à la situation développée dans le §4 c'est-à-dire celle des A-fibrés plats où A est une algèbre de Banach réelle ou complexe. En parallèle au groupe $K_A(X)$ défini dans le §3, on a introduit le groupe $K_A^{\text{top}}(X)$, c'est-à-dire la K-théorie topologique (*) associée à l'algèbre de Banach A et au CW-complexe fini X qui peut être définie comme l'ensemble des classes d'homotopie $[X, K_0(A) \times \text{BGL}(A)^{\text{top}}]$ où $\text{BGL}(A)^{\text{top}}$ est l'espace classifiant du groupe topologique $\text{GL}(A)$. Cette K-théorie topologique, qui est explicitée dans [25] par exemple, peut aussi être décrite en termes de fibrés virtuels suivant la méthode du §3. Cependant, si $f: Y \rightarrow X$ est une application acyclique, on a évidemment un isomorphisme $[X, K_0(A) \times \text{BGL}(A)^{\text{top}}] \approx [Y, K_0(A) \times \text{BGL}(A)^{\text{top}}]$, ce qui rend la K-théorie topologique plus facile à manipuler que la K-théorie algébrique. On définit de même des groupes $K_A^{-n}(X)$ et $K_A^{-n\text{top}}(X)$ comme $\tilde{K}_A^{-n}(S^n X^+)$ et $\tilde{K}_A^{-n\text{top}}(S^n X^+)$ avec les notations usuelles de la K-théorie réduite d'un espace pointé [25].

6.2. La comparaison entre les deux K-théories algébrique et topologique va être mieux comprise par l'introduction d'un groupe nouveau $K_A^{\text{rel}}(X)$ (défini pour X CW-complexe fini) qui va jouer un rôle fondamental par la suite. Ce groupe, dont la définition homotopique est donnée en 6.14, s'insère dans une suite exacte

$$K_A^{-1}(X) \longrightarrow K_A^{-1\text{top}}(X) \longrightarrow K_A^{\text{rel}}(X) \longrightarrow K_A(X) \longrightarrow K_A^{\text{top}}(X)$$

On va suivre pour cela la même méthode que celle développée dans le §3. Ainsi, nous allons considérer l'ensemble des triples (E, F, α) où E et F sont deux A-fibrés plats sur Y avec $f: Y \rightarrow X$ fibration acyclique et où

$$\alpha: E \longrightarrow F$$

(*) On verra en 6.15-18 comment généraliser cette K-théorie topologique à une algèbre de Fréchet quelconque en appliquant des méthodes simpliciales.

est un isomorphisme de fibrés topologiques sous-jacents. Deux tels triples (E, F, α) sur $Y \rightarrow X$ et (E', F', α') sur $Y' \rightarrow X$ sont dits équivalents s'il existe (E_1, F_1, α_1) sur $Y_1 \rightarrow X$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \sigma \downarrow & \nearrow f_1 & \uparrow f' \\ Y_1 & \xleftarrow{\sigma'} & Y' \end{array}$$

avec $(E, F, \alpha) \approx \sigma^*(E_1, F_1, \alpha_1)$ et $(E', F', \alpha') \approx \sigma'^*(E_1, F_1, \alpha_1)$. "L'isomorphisme" entre triplets noté par le symbole $\approx$ doit être compris ici dans le sens suivant : deux triplets (G, H, β) et (G', H', β') sont dits isomorphes s'il existe des isomorphismes $u : G \rightarrow G'$ et $v : H \rightarrow H'$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G' \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta' \\ H & \xrightarrow{v} & H' \end{array}$$

soit commutatif à isotopie près. En particulier, si α_0 est isotope à α_1 , (E, F, α_0) est "isomorphe" à (E, F, α_1) , donc lui est équivalent d'après la définition ci-dessus. En suivant ce qui a été fait en 3.4, on vérifie aisément que la relation entre triplets définie ci-dessus est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence de tels triples (E, F, α) forment un monoïde abélien $\Phi_A^{\text{rel}}(X)$. Soit $T_A^{\text{rel}}(X)$ le sous-monoïde formé des triplets (E, E, Id_E) . Soit $K_A^{\text{rel}}(X)$ le monoïde quotient de $\Phi_A^{\text{rel}}(X)$ par $T_A^{\text{rel}}(X)$.

6.3. PROPOSITION. Notons $d(E, F, \alpha)$ la classe du triplet (E, F, α) dans le monoïde $K_A^{\text{rel}}(X)$ en général. On a alors la relation

$$d(E, F, \alpha) + d(F, G, \beta) = d(E, G, \beta\alpha)$$

En particulier, $K_A^{\text{rel}}(X)$ est un groupe abélien.

Démonstration. Il suffit de suivre le schéma de la démonstration classique en K-théorie topologique (cf. [25] §II.2 par exemple). En effet, le premier membre est égal à $d(E \oplus F, F \oplus G, \alpha \oplus \beta) = d(E \oplus F, G \oplus F, \gamma)$ où γ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

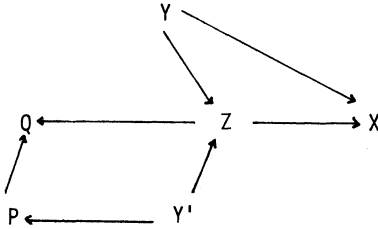
Comme cette matrice est isotope à $\beta\alpha \oplus \text{Id}$, la proposition en résulte.

6.4. En suivant encore le §3, on dira qu'un triplet (E, F, α) est virtuellement

trivial sur un espace Y au-dessus de X s'il existe un espace acyclique Z , une application $\theta : Y \rightarrow Z$ et un triplet (H, H', ϵ) sur Z tels que les triplets (E, F, α) et $\theta^*(H, H', \epsilon)$ soient isomorphes.

6.5. PROPOSITION. Pour que $d(E, F, \alpha) = 0$ dans le groupe $K_A^{rel}(X)$ il faut et il suffit qu'il existe G et un triple (H, H', ϵ) virtuellement trivial tels que $(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus Id_G)$ et (H, H', ϵ) soient isomorphes.

Démonstration. D'après la définition de $K_A^{rel}(X)$, il existe G et G' tels que $(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus Id_G)$ et $(G', G', Id_{G'})$ soient équivalents. Puisque tout fibré plat est facteur direct d'un fibré virtuellement trivial (3.7), on peut même supposer que G' est virtuellement trivial. On peut donc construire un diagramme commutatif à homotopie près.

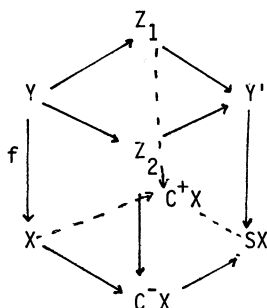


où Y' est la base de G' , où P est un espace acyclique qui assure la virtuelle trivialité de G' et où Q est la somme amalgamée homotopique de P et de Z au-dessus de Y' . Puisque Y' et Z ont la même homologie (à coefficients entiers), l'espace Q est acyclique. En outre, il existe un triplet (H_1, H'_1, ϵ_1) sur Q dont l'image réciproque (H, H', ϵ) au-dessus de Y par l'application composée $Y \rightarrow Z \rightarrow Q$ est isomorphe à $(E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus Id_G)$.

Réciproquement, si (H, H', ϵ) est virtuellement trivial, il est équivalent à un triple provenant d'un triple sur un point, donc équivalent à un élément de $T_A^{rel}(X)$.

6.6. Après cette brève discussion sur le groupe $K_A^{rel}(X)$ et avant de démontrer l'exactitude de la suite évoquée en 6.2, nous aurons besoin de quelques considérations élémentaires sur les groupes $\tilde{K}_A^{-1}(X) \approx \tilde{K}_A^{-1}(SX)$ et $\tilde{K}_A^{-1top}(X) \approx \tilde{K}_A^{-1top}(SX)$, du moins pour X connexe.

Soit donc $f : Y \rightarrow X$ une application acyclique et soient $f_1 : Y \rightarrow Z_1$ et $f_2 : Y \rightarrow Z_2$ deux cofibrations avec Z_1 et Z_2 acycliques. On peut alors écrire



où les deux carrés horizontaux sont cocartésiens. Puisque SX est simplement connexe et que l'application $Y' \rightarrow SX$ induit un isomorphisme en homologie, l'application $Y' \rightarrow SX$ est acyclique. Par conséquent, si E_1 et E_2 sont deux fibrés plats sur Z_1 et Z_2 respectivement et si α est un isomorphisme de leurs restrictions à Y , le triplet (E_1, E_2, α) définit un élément de $\tilde{K}_A(Y') \approx \tilde{K}_A(SX)$ qu'on notera $\delta(E_1, E_2, \alpha)$.

6.7. LEMME. Soient Z_1, Z_2 et Z_3 trois espaces acycliques contenant Y . Soient E_1, E_2 et E_3 trois fibrés plats sur Z_1, Z_2 et Z_3 respectivement. Dans le groupe $\tilde{K}_A(SX)$ on a alors la relation suivante :

$$\delta(E_1, E_2, \alpha) + \delta(E_2, E_3, \beta) = \delta(E_1, E_3, \beta \cdot \alpha)$$

Démonstration. Soient g'_1, g'_2 et g'_3 les applications classifiantes des fibrés E_1, E_2 et E_3 . Sans restreindre la généralité, on peut supposer que g'_1, g'_2 et g'_3 coïncident avec la même application g' sur Y . On peut aussi supposer que toutes les applications verticales du diagramme commutatif cubique précédent sont des cofibrations (en remplaçant X par le cylindre d'application de f et les cônes par des espaces contractiles). On peut ainsi construire des applications g_1, g_2 et g_3 rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Z_i & \xrightarrow{g'_i} & BGL(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & CX & \xrightarrow{g_i} & BGL(A)^+ \end{array}$$

de manière que $g_i|_X = g$ ne dépende pas de i . L'élément $\delta(E_1, E_2, \alpha)$ est ainsi représenté par l'application de SX dans $BGL(A)^+$ égale à g_1 (resp. g_2) sur le cône supérieur (resp. inférieur). On peut expliciter une représentation analogue pour les éléments $\delta(E_2, E_3, \beta)$ et $\delta(E_1, E_3, \beta \cdot \alpha)$. Le lemme résulte alors du fait que la loi de groupe de $[SX, BGL(A)^+]$ coïncide avec celle induite par la loi de cogroupe à homotopie près de SX .

6.8. Remarque. Dans le cas topologique, on peut bien entendu expliciter un lemme

analogue : si E_1 et E_2 sont deux A -fibrés topologiques et si $\alpha : E_1|_Y \rightarrow E_2|_Y$ est un isomorphisme topologique, on peut de même définir un élément $\bar{\delta}(E_1, E_2, \alpha) \in K_A^{\text{top}}(SX)$ comme en K -théorie algébrique. On a encore une relation du même type

$$\bar{\delta}(E_1, E_2, \alpha) + \bar{\delta}(E_2, E_3, \beta) = \bar{\delta}(E_1, E_3, \beta \cdot \alpha)$$

6.9. LEMME. Soit $f : Y \rightarrow SX$ une fibration de fibre acyclique P avec X connexe. Il existe alors une application $Y' \rightarrow Y$ et une suite de cofibrations homotopiques

$$X \rightarrow P \rightarrow Y' \rightarrow SX$$

où $Y' \rightarrow SX$ est l'application composée $Y' \rightarrow Y \rightarrow SX$ et est acyclique et où l'application composée $P \rightarrow Y' \rightarrow Y$ est l'inclusion canonique de P dans Y .

Démonstration. Soit $F : X \times I \rightarrow SX$ l'application qui à (x, t) associe sa classe et soit $G : X \times I \rightarrow Y$ une application telle que $G(x, 0) = y_0$ point base de Y et $f(G(x, t)) = F(x, t)$. Soit Y' la cofibre homotopique de l'application h de X dans P définie par $x \mapsto G(x, 1)$, c'est-à-dire le quotient de $CX \cup P$ par la relation qui identifie $(x, 1)$ à $h(x)$. L'homotopie G précédente permet de construire une application de Y' dans Y telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & SX \\ & & \searrow & & \uparrow & & \nearrow \\ & & & & Y' & & \end{array}$$

Puisque P est acyclique et SX simplement connexe, il en résulte aussitôt que l'application $Y' \rightarrow SX$ est acyclique.

6.10. En remplaçant éventuellement $X \rightarrow P$ par une cofibration, on voit ainsi que tout élément de $\tilde{K}_A^{-1}(X) = \tilde{K}_A(SX)$ peut être décrit à partir d'un fibré plat E sur P et d'un isomorphisme $\alpha : E|_X \rightarrow T|_X$ où T est un fibré trivial de fibre A^n (cf. 6.6 avec Z_2 réduit à un point).

Le groupe $\tilde{K}_A^{-1\text{top}}(X)$ se décrit bien sûr de la même manière. En fait, tout élément de $\tilde{K}_A^{-1\text{top}}(X)$ peut se représenter par un automorphisme α du fibré trivial $E = X \times A^n$ (ou, ce qui revient au même, par une application de X dans $GL_n(A)$). Associons à la classe de α la classe du triplet (E, E, α) . On définit ainsi un homomorphisme

$$\partial : K_A^{-1\text{top}}(X) \rightarrow K_A^{\text{rel}}(X)$$

car $d(E, E, \alpha)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de α .

6.11. THÉOREME. Soit X un CW-complexe fini. On a alors la suite exacte

$$K_A^{-1}(X) \xrightarrow{\chi_1} K_A^{-1\text{top}}(X) \xrightarrow{\partial} K_A^{\text{rel}}(X) \xrightarrow{\theta} K_A(X) \xrightarrow{\chi} K_A^{\text{top}}(X)$$

Démonstration.

a) Exactitude en $K_A(X)$. Il est clair que $\chi \cdot \theta = 0$. Si $\chi([E] - [F]) = 0$, il existe un fibré trivial T tel que $E \oplus T$ et $F \oplus T$ soient topologiquement isomorphes par un isomorphisme α . On a donc $[E] - [F] = \theta(d(E \oplus T, F \oplus T, \alpha))$.

b) Exactitude en $K_A^{\text{rel}}(X)$. On a aussi clairement $\theta \cdot \partial = 0$. Réciproquement, soit $d(E, F, \alpha)$ un élément de $K_A^{\text{rel}}(X)$ tel que $d(E, F, \alpha) = [E] - [F] = 0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que E et F sont virtuellement triviaux de fibre A^n . Ainsi, E et F sont deux fibrés sur Y avec $f: Y \rightarrow X$ acyclique et il existe E_1 et F_1 de fibre A^n sur Z acyclique tels que $E \approx g^*E_1$, $F \approx g^*F_1$ avec $g: Y \rightarrow Z$. Si $\beta_1: E_1 \rightarrow F_1$ est un isomorphisme topologique de E_1 sur F_1 , on a donc $d(F, E, g^*(\beta_1^{-1})) = g^*(d(F_1, E_1, \beta_1^{-1})) = 0$ et $d(E, F, \alpha) = d(E, F, \alpha) + d(F, E, g^*(\beta_1^{-1})) = d(E, E, \beta)$ avec $\beta = g^*(\beta_1^{-1}) \cdot \alpha$. Soit enfin $u: E \rightarrow T$ un isomorphisme topologique du fibré E sur le fibré trivial $Y \times A^n$. On a alors $d(E, F, \alpha) = d(E, E, \beta) = d(E, T, u) + d(T, T, u \cdot \beta \cdot u^{-1}) + d(T, E, u^{-1}) = d(T, T, u \cdot \beta \cdot u^{-1}) = \partial([u \cdot \beta \cdot u^{-1}])$ en identifiant $K_A^{-1\text{top}}(X)$ et $K_A^{-1\text{top}}(Y)$.

c) Exactitude en $K_A^{-1\text{top}}(X)$. Pour cette partie (qui est la plus délicate), nous allons supposer que X est connexe, ce qui ne restreint pas la généralité. Puisque l'homomorphisme $K_A^{-1}(\text{Point}) \rightarrow K_A^{-1\text{top}}(\text{Point})$ est surjectif, on est ramené à démontrer l'exactitude de la suite

$$\tilde{K}_A(SX) \longrightarrow \tilde{K}_A^{\text{top}}(SX) \longrightarrow K_A^{\text{rel}}(X)$$

et utiliser ainsi nos préliminaires sur les groupes $\tilde{K}_A(SX)$ et $\tilde{K}_A^{\text{top}}(SX)$ développés en 6.5-10.

D'après 6.10 tout élément a de $\tilde{K}_A(SX)$ peut être décrit par un couple (E, α) où E est un fibré plat sur P et où $\alpha: E|_X \rightarrow T|_X$ est une trivialisation de $E|_X$. Si γ est une trivialisation topologique de E (qui existe en stabilisant), on a donc $(\partial \chi_1)(a) = d(T|_X, T|_X, \alpha \cdot \gamma^{-1}|_X) = d(T|_X, E|_X, \gamma^{-1}|_X)$ est virtuellement trivial et on a $d(T|_X, E|_X, \gamma^{-1}|_X) = 0$, ce qui démontre que $\chi_1 \cdot \partial = 0$.

Réciproquement, soit α un automorphisme du fibré trivial $T = X \times A^n$ représentant un élément de $\tilde{K}_A^{-1}(X)$ tel que $\partial(\alpha) = 0$. D'après la proposition 6.5, il existe G qu'on peut supposer virtuellement trivial et un triplet (H, H', ϵ) virtuellement trivial tels que $(T \oplus G, T \oplus G, \alpha \oplus 1)$ et (H, H', ϵ) soient isomorphes

(au-dessus de $Y \rightarrow X$ convenablement choisi). On a donc un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} T \oplus G & \xrightarrow{\alpha \oplus 1} & T \oplus G \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ H & \xrightarrow{\epsilon} & H' \end{array}$$

avec u et v isomorphismes de fibrés plats. D'après 6.7 on a donc :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(T, T, \alpha) &= \bar{\delta}(T \oplus G, T \oplus G, \alpha \oplus 1) = \bar{\delta}(T \oplus G, H, u) + \bar{\delta}(H, H', \epsilon) + \bar{\delta}(H', T \oplus G, v^{-1}) = \\ \bar{\delta}(T \oplus G, H, u) + \delta(H', T \oplus G, v^{-1}) &= \chi_1(\delta(T \oplus G, H, u) + \delta(H', T \oplus G, v^{-1})) \end{aligned}$$

6.12. Afin d'interpréter de manière plus familière le groupe $K_A^{rel}(X)$ (cf. 6.14), nous allons rappeler un résultat bien connu sur les fibrations principales. Si $\phi : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme continu entre deux groupes qui sont des CW-complexes, on peut écrire une suite de fibrations homotopiques.

$$G \rightarrow G' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow BG \rightarrow BG'$$

Sur un CW-complexe X considérons maintenant l'ensemble des couples (E, α) où E est un G -fibré principal sur X et où

$\alpha : \phi_*(E) = E \times_G G' \rightarrow T = X \times G'$ est une trivialisation de G' -fibré principal induit. On dira que deux tels couples (E, α) et (E', α') sont équivalents s'il existe un isomorphisme $u : E \rightarrow E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \phi_*(E) & \xrightarrow{\alpha} & T \\ \phi_*(u) \downarrow & & \parallel \\ \phi_*(E') & \xrightarrow{\alpha'} & T \end{array}$$

commute à homotopie près.

6.13. PROPOSITION. L'ensemble des classes d'équivalence de tels couples (E, α) s'identifie naturellement à l'ensemble des classes d'homotopie de X dans $\mathcal{F}$.

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il est plus commode de considérer des fibrés sur des espaces pointés. Dans ce contexte légèrement différent, E sera un fibré "pointé" (on fixe la fibre au-dessus du point base égale à G) et α enverra identiquement la fibre au-dessus du point base en G' . De la même manière, les homotopies seront supposées respecter les "points base". La proposition 6.13 résultera alors de la proposition analogue dans le cas pointé en considérant $X \cup \{*\}$.

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence de couples (E, α) pointés.

Le groupe des classes d'homotopie pointées $[X, \Omega BG'] \approx [SX, BG'] \approx [X, G']$ opère sur $\mathcal{E}$. En effet, si $\alpha : \phi_*(E) \rightarrow T$ est une trivialisation et si $\sigma : X \rightarrow G'$ est une application pointée, σ définit un automorphisme $\hat{\sigma}$ de T et $(E, \hat{\sigma}.\alpha) \in \mathcal{E}$. De même, $[X, G']$ opère sur $[X, \mathcal{E}]$.

On a d'autre part des suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{u} & [X, BG] & \xrightarrow{\Gamma} & [X, BG'] \\ [X, \mathcal{E}] & \xrightarrow{v} & [X, BG] & \xrightarrow{\Gamma} & [X, BG'] \end{array}$$

d'où des surjections

$$\begin{array}{ccc} [X, \mathcal{E}] & \longrightarrow & \text{Ker } \Gamma \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \text{Ker } \Gamma \end{array}$$

Puisque le groupe $[X, G']$ opère transitivement sur les "fibres" de u et de v , le sous-groupe d'isotopie s'identifiant à l'image de l'homomorphisme $[X, G] \rightarrow [X, G']$ dans les deux cas, les ensembles $[X, \mathcal{E}]$ et $\mathcal{E}$ sont isomorphes.

Pour voir que l'isomorphisme précédent est naturel, il suffit de décrire une application naturelle $h : [X, \mathcal{E}] \rightarrow \mathcal{E}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [X, \mathcal{E}] & \xrightarrow{\theta} & [X, BG] \\ h \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\chi} & [X, BG] \end{array}$$

et qui est équivariante pour l'action de $[X, G']$.

Notons ξ (resp. ξ') le fibré universel sur BG (resp. BG') et notons encore $\phi : BG \rightarrow BG'$ l'application induite par l'homomorphisme ϕ . Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\phi^*(\xi') = \xi \times_G G'$ et que la fibre au-dessus du point base $*$ de BG' est G' . Si $f : X \rightarrow \mathcal{E}$ est une application continue (pointée), on peut lui associer $g : X \rightarrow BG$ et $F : X \times I \rightarrow BG'$ telles que $F(x, 0) = F(x_0, t) = *$, x_0 étant le point base de X , et telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & BG \\ j \downarrow & & \downarrow \phi \\ X \times I & \longrightarrow & BG' \end{array}$$

j étant l'application $x \mapsto (x, 1)$. Soit $\tau : F^*(\xi') \rightarrow X \times I \times G'$ une trivialisation de $F^*(\xi')$ qui soit l'identité au-dessus de $X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I$. Au-dessus de $X \times \{1\}$, on obtient alors une trivialisation de $E = g^*(\xi)$, d'où l'application

$[X, \mathcal{F}] \longrightarrow \mathcal{Z}$ cherchée.

6.14. THÉOREME. Soit X un CW-complexe fini. Alors le groupe $K_A^{\text{rel}}(X)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes d'homotopie

$$[X, \mathcal{F}_A]$$

où $\mathcal{F}_A$ désigne la fibre homotopique de l'application

$$\text{BGL}(A)^+ \longrightarrow \text{BGL}(A)^{\text{top}}$$

Démonstration. Dans la définition du groupe $K_A^{\text{rel}}(X)$ donnée en 6.2, on ne restreint pas la généralité en considérant des triplets (E, F, α) où F est virtuellement trivial de fibre libre d'après le lemme 3.7. Il convient de remplacer alors le sous-monoïde $T_A^{\text{rel}}(X)$ par le sous-monoïde formé des classes de triplets (T, T, Id) où T est virtuellement trivial.

Considérons maintenant un triplet (E, F, α) où E est un fibré plat sur Y avec $f : Y \rightarrow X$ acyclique et où F est virtuellement trivial. Il existe donc un espace acyclique Z , un fibré plat H sur Z , une application $g : Y \rightarrow Z$ et enfin un isomorphisme de fibrés plats $\tau : F \rightarrow g^*(H)$. En ajoutant éventuellement un fibré trivial de fibre A^0 , on peut supposer que H est topologiquement trivial par un isomorphisme $v : H \rightarrow T$. On en déduit une trivialisation du fibré topologique sous-jacent à E par la composition des isomorphismes $E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\tau} g^*(H) \xrightarrow{g^*(v)} g^*(T)$. D'après la proposition précédente, on en déduit un élément de $[Y, \mathcal{F}]$ où $\mathcal{F}$ est la fibre homotopique de $\text{BGL}(A) \rightarrow \text{BGL}(A)^{\text{top}}$, qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de (E, F, α) . En appliquant la construction $+$, on en déduit un élément de $[Y, \mathcal{F}_A] \approx [X, \mathcal{F}_A]$ qui ne dépend que de la classe de (E, F, α) dans le groupe $K_A^{\text{rel}}(X)$. Le théorème 6.14 résulte alors du théorème 6.11 et du lemme des cinq.

INTERPRÉTATION SIMPLICIALE DE LA K-THÉORIE RELATIVE ET EXTENSION AUX ALGÈBRES DE FRÉCHET (6.15-18)

6.15. Nous nous proposons de retrouver maintenant par des méthodes plus directes le théorème 6.14 en nous plaçant dans un cadre simplicial. Ceci aura l'avantage de généraliser la K-théorie topologique et la K-théorie relative au cas où A est une algèbre de Fréchet quelconque (cf. 6.18). Soit donc G_* un groupe simplicial et soit G le groupe "discret" G_0 vu comme groupe simplicial trivial. On peut alors définir un G -fibré repéré E (dans le sens de 5.4) sur l'ensemble simplicial quotient G_*/G en posant $g_{ji}(\sigma) = g_j \cdot g_i^{-1}$, où σ est une cellule de G_*/G et où $g_i = \sigma(i)$, i étant le $i^{\text{ème}}$ sommet de σ .

6.16. PROPOSITION. Avec les notations précédentes, on a la suite suivante de fibrations à homotopie près

$$G \longrightarrow G_* \longrightarrow G_*/G \xrightarrow{\theta} BG \longrightarrow BG_*$$

où θ est l'application classifiante du fibré repéré E .

Démonstration. Avec les notations du §5, $BG_* = WG_*/G_*$ et on peut prendre comme modèle de BG l'espace WG_*/G . Dans ces conditions $WG/G \rightarrow WG_*/G$ est une équivalence d'homotopie et on a une suite de fibrations à homotopie près

$$G \longrightarrow G_* \longrightarrow G_*/G \longrightarrow WG/G \xrightarrow{\phi} WG_*/G_*$$

où ϕ est définie par $\phi(\sigma) = (\sigma, \dots, \sigma)$ si $\sigma \in G_n$. Soit maintenant $\chi : G_*/G \rightarrow WG_*$ l'application définie par

$$\chi(\sigma) = (\sigma.\sigma(0)^{-1}, \sigma.\sigma(1)^{-1}, \dots, \sigma.\sigma(n)^{-1})$$

On a alors la relation $\chi.\theta = \phi$ pour l'action à gauche de WG_* sur WG_*/G . Puisque WG_* est contractile, ϕ est homotope à θ , ce qui démontre la proposition.

6.17. PROPOSITION. Soit G_* un groupe simplicial avec $\pi_0(G)$ abélien et soit G le groupe simplicial discret G_0 . On suppose que G_0 et $\pi_1(G_*/G)$ ont leur sous-groupe de commutateurs parfait. Alors la fibration

$$G_*/G \longrightarrow BG \longrightarrow BG_*$$

induit une fibration homotopique

$$(G_*/G)^+ \longrightarrow (BG)^+ \longrightarrow BG_*$$

Démonstration. Posons $X = BG_*$, $E = BG$, $F = G_*/G$, $\pi = \pi_0(G)$. Soit X_0 le revêtement universel de X et soit E' le produit fibré de X_0 et de E au-dessus de X

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & X \end{array}$$

D'après [24], on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F^+ & \longrightarrow & E'^+ & \longrightarrow & X_0^+ = X_0 \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ F^+ & \longrightarrow & E^+ & \longrightarrow & X^+ = X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B\pi & \longrightarrow & B\pi \end{array}$$

où toutes les suites sont des fibrations homotopiques sauf peut-être $F^+ \rightarrow E^+ \rightarrow X^+$. Il en est donc de même de cette dernière suite d'après un lemme classique sur les fibrations.

6.18. On va appliquer la proposition 6.17 à la situation suivante : A est une algèbre de Fréchet et G_* est le

groupe simplicial $GL(A_*)$ où $A_n = C^\infty(\Delta^n) \hat{\otimes} A$. Le groupe $\pi_1(G_*/G)$ s'identifie ainsi au groupe formé des couples $g_1 = (g, \tau)$ où $g \in G = GL(A)$ et où τ est une classe d'homotopie de chemin joignant 1 à g . En écrivant l'identité

$$g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & g_1^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & 1 & \\ & & h_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{-1} & & \\ & g_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & h_1 \end{pmatrix}$$

on voit immédiatement (lemme de Whitehead) que le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(G_*/G)$ est parfait. D'après le théorème 6.17, on a donc une fibration homotopique

$$(GL(A_*)/GL(A))^+ \longrightarrow BGL(A^+) \longrightarrow BGL(A_*)$$

Les considérations précédentes permettent de donner une interprétation simpliciale de la K-théorie relative. On a ainsi

$$K_A^{rel}(X) \approx [X, Z^+] \quad \text{et} \quad K_i^{rel}(A) \approx \pi_i(Z^+)$$

où Z est l'ensemble simplicial quotient $GL(A_*)/GL(A)$. Si X est un ensemble simplicial, tout élément de $K_A^{rel}(X)$ peut ainsi se représenter par un fibré plat virtuel E sur X muni d'une trivialisation $\alpha : E \longrightarrow T$ de G -fibré avec $G = GL(A_*)$ d'après 6.13. La relation d'équivalence entre deux tels triples (E, T, α) et (E', T', α') est bien entendu calquée sur celle décrivant la K-théorie relative dans le contexte topologique (cf. 6.2 et 2.3-4). On retrouve ainsi de manière plus simple l'analogue simplicial du théorème 6.14.

6.19. Après ces préliminaires théoriques, nous allons maintenant construire les classes caractéristiques "relatives" promises. Ceci peut être fait dans un cadre simplicial ou un cadre différentiable. Pour fixer les idées, nous nous placerons dans le deuxième cadre mais l'adaptation au cadre simplicial se fait sans problème. Soit donc $\Omega_*(A)$ une algèbre différentielle graduée, les $\Omega_i(A)$ étant des espaces de Banach (ou des espaces de Fréchet si on se place dans le cadre simplicial) et la différentielle $d : \Omega_i(A) \longrightarrow \Omega_{i+1}(A)$ étant continue (cf. les §1 et 4). Soit maintenant X une variété différentiable, E et F deux A -fibrés plats sur X et $\alpha : E \longrightarrow F$ un isomorphisme différentiable. Soient D_E et D_F deux connexions sur E et F dont les connexions partielles D_E^i et D_F^i sont celles associées à la structure plate de E et de F (cf. 4.10 et 4.20). Alors E peut être muni de deux connexions à courbure plate D_E et $\alpha^*(D_F)$ (4.19). Si $\pi^* : X \times I \longrightarrow X$ est la projection canonique, il s'en suit que π^*E peut être muni de la connexion suivante (à courbure non plate en général)

$$D_{E,F,\alpha} = (1-t) D_E + t \alpha^*(D_F)$$

où $t \in [0,1] = I$. Si $R_{E,F,\alpha}$ désigne la courbure de $D_{E,F,\alpha}$, on a donc

$$\text{Ch}_n(D_{E,F,\alpha}) = \text{Tr}(R_{E,F,\alpha}^n) \in \Omega^{2n}(X \times I, A)$$

(cf. 4.7). Comme en 4.23 posons

$$\Omega^{2n}(X, A) = \bigoplus_{p+q=2n} \Omega^p(X; \bar{\Omega}_q A) \oplus Z^n(X; \bar{\Omega}_n A)$$

$$\Omega^{2n+1}(X, A) = \bigoplus_{p+q=2n+1} \Omega^p(X; \bar{\Omega}_q A)$$

On voit alors que la restriction de $\text{Ch}_n(D_{E,F,\alpha})$ à $\Omega^*(X \times S^0, A)$ appartient en fait à $\mathcal{C}^*(X \times S^0, A)$. On est donc amené à considérer le produit fibré de complexes

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^*(X, A) & \longrightarrow & \mathcal{C}^*(X \times S^0, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^*(X \times D^1, A) & \xrightarrow{\sigma} & \Omega^*(X \times S^0, A) \end{array}$$

On en déduit la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega^*(X \times D^1, X \times S^0, A) \longrightarrow \Gamma^*(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}^*(X \times S^0, A) \longrightarrow 0$$

où $\Omega^*(X \times D^1, X \times S^0, A) = \text{Ker } \sigma$. Le complexe $\Gamma^*(X, A)$ contient naturellement $\mathcal{C}^*(X, A)$ en facteur direct. Si on pose $\mathcal{C}'^*(X, A) = \Gamma^*(X, A) / \mathcal{C}^*(X, A)$, on a finalement la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^*(X \times D^1, X \times S^0, A) \longrightarrow \mathcal{C}'^*(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}^*(X, A) \longrightarrow 0.$$

En notant $\mathcal{H}_A^{\mathcal{C}'^*}(X)$ la cohomologie de $\mathcal{C}'^*(X, A)$, on voit que $\text{Ch}_n(D_{E,F,\alpha})$ définit naturellement un élément noté $\text{Ch}_n^{\text{rel}}(E, F, \alpha)$ dans le groupe $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$.

6.20. Remarque. Le segment $[0,1]$ ne joue aucun rôle essentiel ici : faire le produit par $[0,1]$ revient à tensoriser les algèbres gradués par l'algèbre $\mathbb{Q}[t, dt]$ (cf. 1.20). D'autre part, l'intégration par rapport à t définit un morphisme de complexes

$$\mathcal{C}'^*(X, A) = \Gamma^*(X, A) / \mathcal{C}^*(X, A) \xrightarrow{\int} \Omega^{*-1}(X, A) / \mathcal{C}^{*-1}(X, A)$$

qui est un quasi-isomorphisme. Si on note $\tilde{\mathcal{H}}_A^i(X) = H^i(\Omega^* / \mathcal{C}^*)$, on a donc $\mathcal{H}_A^{2n}(X) \approx \tilde{\mathcal{H}}_A^{2n-1}(X)$.

6.21. PROPOSITION. L'élément $\text{Ch}_n^{\text{rel}}(E, F, \alpha)$ ne dépend pas du choix des connexions D_E et D_F . Il ne dépend que de la classe de (E, F, α) dans le groupe $K_A^{\text{rel}}(X)$ et induit un homomorphisme $\text{Ch}_n^{\text{rel}} : K_A^{\text{rel}}(X) \rightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X)$

Démonstration. D'après la méthode décrite en 4.31, le théorème résultera de l'identification des groupes $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ à des groupes de cohomologie classiques se comportant bien par passage à la limite projective (dans le cadre simplicial, nous

n'avons pas besoin de cette dernière vérification). La suite exacte d'homologie appliquée à la suite exacte de complexes ci-dessus s'écrit

$$\mathcal{H}_A^{2n-1}(X) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=2n} H^p(X; \bar{H}_q(A))$$

La suite exacte précédente se casse donc en petites suites exactes

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X) \longrightarrow H^n(X; \bar{B}_n A) \longrightarrow 0$$

d'après les calculs faits en 4.28. D'autre part, on ne change pas le calcul de $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ en supposant que $\Omega_n A = 0$ puisque l'homologie en degré $2n-1$ de $\Omega^*/\mathcal{E}^*$ ne dépend pas de $\Omega_n A$. Il en résulte aussitôt la décomposition

$$\mathcal{H}_A^{2n}(X) \cong \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q}} \bar{H}^p(X; \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A)$$

Il convient de remarquer aussi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_A^{2n}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}_A^{2n}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A) & \longrightarrow & H^n(X; \bar{Z}_n A) \end{array}$$

En effet, si $\omega \in H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A) \subset \mathcal{H}_A^{2n}(X)$ est représenté par une forme dans $Z^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A)$, la classe de $d\omega$ est évidemment associée à l'homomorphisme $d'' : \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A \longrightarrow \bar{\Omega}_n A$ d'après l'interprétation de l'homomorphisme bord de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^* \longrightarrow \Omega^* \longrightarrow \Omega^*/\mathcal{E}^* \longrightarrow 0$$

Pour définir l'homomorphisme

$$Ch_n^{rel} : K_A^{rel}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X)$$

cherché, on raisonne de la manière suivante : soit (E, F, α) un triplet définissant un élément de la K-théorie relative : E et F sont donc des A -fibrés plats sur un espace Y homologiquement équivalent à X et $\alpha : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme de fibrés topologiques sous-jacents. Soit $\{Y_r\}$ l'ensemble des sous-complexes finis de Y (donc ayant le type d'homotopie d'une variété qu'on notera encore Y_r). Sur Y_r , α est homotope à une application C^∞ : la construction précédente s'applique donc et on peut associer à cette donnée un élément de $\mathcal{H}_A^{2i}(Y_r)$. Puisque $\mathcal{H}_A^{2i}(Y) = \mathcal{H}_A^{2i}(X) = \varprojlim \mathcal{H}_A^{2i}(Y_r)$, on en déduit l'homomorphisme cherché puisque les triplets virtuellement triviaux et les triplets (E, E, Id) nous donnent 0 (cf. 6.5). Dans le cadre simplicial, le raisonnement est sensiblement le même en considérant des formes différentielles de De Rham-Sullivan sur les ensembles

simpliciaux considérés (cf. 6.18), ce qui évite le passage à la limite projective un peu artificiel ci-dessus.

6.22. Pour définir l'homomorphisme composé de Ch_n^{rel} avec les diverses projections

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q+1}} \bar{H}^p(X; \bar{H}_q A) \oplus H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A), \text{ on n'a pas vraiment besoin du calcul}$$

complet des groupes $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ et le lecteur peut préférer la présentation plus élémentaire qui va suivre. En effet, si on considère $\text{Ch}_n^{(D_{E,F,\alpha})}$ comme la forme différentielle avec paramètre t , soit $dt \wedge \omega + \omega'$ (cf. la remarque 6.20), l'intégrale par rapport à t

$$\int_0^1 dt \wedge \omega$$

est une forme différentielle de degré $2n-1$, fermée modulo $\mathcal{E}^*$ d'après les formules 2.19. La classe de cohomologie qu'elle définit dans le complexe quotient $\Omega^* / \mathcal{E}^*$ est évidemment la même que celle déduite de 6.19. Pour achever la construction du caractère de Chern relatif, il suffit de décrire un homomorphisme

$$H^{2n-1}(\Omega^* / \mathcal{E}^*) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q}} \text{Hom}(H_p(X), \bar{H}_q(A)) \oplus \text{Hom}(H_n(X), \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A).$$

Si c est un cycle de dimension p de X (avec $p > q$ et $p + q = 2n-1$) et si ω est une classe de cohomologie de degré $2n-1$ du complexe quotient, l'intégrale

$$\int_c \omega$$

définit un élément de $\bar{\Omega}_q A / \bar{B}_q A$ qui ne dépend que de la classe d'homologie de c . En effet, la restriction sur p impose que cette intégrale est nulle sur le sous-complexe $\mathcal{E}^*$; en outre, si $\tilde{c}$ est une chaîne de dimension $p+1$, on a

$$\int_{\partial \tilde{c}} \omega = \int_{\tilde{c}} d' \omega = - \int_{\tilde{c}} d'' \omega = - d'' \int_{\tilde{c}} \omega \in \bar{B}_q A$$

Si $p > n$, on a aussi $d'' \int_c \omega = \int_c d'' \omega = \int_c - d' \omega = - \int_{\partial c} \omega = 0$. La correspondance $\omega \rightarrow \int_c \omega$ définit donc bien des homomorphismes

$$H_p(X) \longrightarrow \bar{H}_q(A) \text{ pour } p > n \text{ et } H_n(X) \longrightarrow \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A \text{ pour } p = n.$$

6.23. THÉORÈME. Soit Ω^* (resp. $\mathcal{E}^*$) le complexe $\Omega^*(X, A)$ (resp. $\mathcal{E}^*(X, A)$). On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} K_A^{-1}(X) & \longrightarrow & K_A^{-1\text{top}}(X) & \longrightarrow & K_A^{\text{rel}}(X) & \longrightarrow & K_A(X) & \longrightarrow & K_A^{\text{top}}(X) \\ \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch}^{\text{rel}} & & \downarrow \text{ch} & & \downarrow \text{ch} \\ H^{(1)}(\mathcal{E}^*) & \longrightarrow & H^{(1)}(\Omega^*) & \longrightarrow & H^{(1)}(\Omega^* / \mathcal{E}^*) & \longrightarrow & H^{(0)}(\mathcal{E}^*) & \longrightarrow & H^{(0)}(\Omega^*) \end{array}$$

où Ch^{rel} est l'homomorphisme défini en 6.19, les autres "caractères de Chern" Ch étant définis en 4.31 et $H^{(0)}$ (resp. $H^{(1)}$) désignant la cohomologie paire (resp. impaire).

Démonstration. La commutativité des deux diagrammes extrêmes résulte immédiatement de 4.31. La commutativité du 2ème diagramme résulte du calcul fait en 4.32 : remarquer que l'élément de $H^{(1)}(\Omega^*)$ associé à un automorphisme g d'un A -fibré sur X est obtenu en faisant une homotopie entre la connexion de matrice $g^{-1}dg$ et la connexion triviale. Enfin, la commutativité du 3ème diagramme résulte de celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_A^{2n}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}_A^{2n}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1}A / \bar{B}_{n-1}A) & \longrightarrow & H^n(X; \bar{Z}_nA) \end{array}$$

déjà remarquée en 6.21.

6.24. COROLLAIRE. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{n+1}(A) & \longrightarrow & K_{n+1}^{top}(A) & \longrightarrow & K_n^{rel}(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & K_n^{top}(A) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bar{H}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \bar{\Omega}_{n-1}A / \bar{B}_{n-1}A & \longrightarrow & \bar{Z}_n(A) & \longrightarrow & \bar{H}_n(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. Appliquer le théorème précédent à une sphère homologique de dimension n (cf. le §3).

6.25. Dans le cas du complexe universel $\Omega_*(A)$, l'homomorphisme

$$S : \Omega_*(A) \longrightarrow \Omega_{*-2}(A)$$

(où $A = B^+$, B étant une algèbre de Fléchet) induit un homomorphisme

$\Omega^*(X, A) \longrightarrow \Omega^{*-2}(X, A)$ qui ne laisse pas le sous-complexe $\mathcal{E}^*(X, A)$ invariant. Désignons cependant par $\mathcal{E}_{2r}^*(X, A)$ le sous-complexe de $\Omega^*(X, A)$ constitué de sommes de formes différentielles de type (p, q) avec $p \leq q+2r$ (et qui sont d' fermées si $p = q+2r$). La cohomologie du complexe quotient $\Omega^* / \mathcal{E}_{2r}^*$ se calcule par la même méthode qu'en 6.21 et 4.28-29. On trouve la somme directe de groupes de cohomologie

$$\bigoplus_{\substack{p+q+2r+1 \\ p+q=2n-1-2r}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X; \bar{\Omega}_{n-2r-1}A)$$

On a alors un homomorphisme bien défini

$$S^r : \Omega^*(X, A) / \mathcal{E}^*(X, A) \longrightarrow \Omega^*(X, A) / \mathcal{E}_{2r}^*(X, A)$$

En utilisant la propriété de multiplivité du caractère de Chern comme en 4.14, on en déduit le théorème suivant

6.26. PROPOSITION. On a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 K_n^{\text{rel}}(A) & \longrightarrow & \bar{H}_{n-3}(A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A & \xrightarrow{S} & \bar{\Omega}_{n-3}A/\bar{B}_{n-3}A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & \bar{H}_{n-3}(A) \\
 K_n^{\text{rel}}(A) & \nearrow & \downarrow S^i \\
 & \searrow & \bar{H}_{n-3-2i}(A)
 \end{array}$$

Cette proposition montre que le caractère de Chern relatif est essentiellement déterminé par l'homomorphisme

$$K_n^{\text{rel}}(A) \longrightarrow \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A$$

ou plus généralement par l'homomorphisme

$$K_A^{\text{rel}}(X) \longrightarrow H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A)$$

dans le cas universel. Une étude plus précise de cet homomorphisme sera faite dans un prochain article d'A. Connes et l'auteur (cf. [14] pour un résumé de cet article).

LE CAS COMMUTATIF. EXEMPLES (6.27-32)

6.27. Au lieu de considérer le complexe universel $\Omega_*(A)$, supposons maintenant que $\Omega_*(A)$ soit une algèbre différentielle graduée vérifiant les hypothèses du §4. Supposons en outre que $\Omega_*(A)$ soit commutative au sens gradué (donc $\Omega_*(A) = \bar{\Omega}_*(A)$). On désignera encore par $\mathcal{H}_A^*(X)$ et $\tilde{\mathcal{H}}_A^*(X)$ les cohomologies de $\mathcal{C}^*$ et $\Omega^*/\mathcal{C}^*$ respectivement. On a alors le théorème suivant qui est analogue au théorème 1.26.

6.28. THÉORÈME. Les homomorphismes

$$\text{Ch} : K_A(X) \longrightarrow \mathcal{H}_A^*(X) \quad \text{et} \quad \text{Ch}^{\text{rel}} : K_A^{\text{rel}}(Y) \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}_A^*(Y)$$

vérifient la propriété multiplicative suivante

$$\text{Ch}^{\text{rel}}(x \cdot y') = \text{Ch}(x) \cdot \text{Ch}^{\text{rel}}(y') \quad \text{pour} \quad x \in K_A(X), y' \in K_A^{\text{rel}}(Y), xy' \in K_A^{\text{rel}}(X \times Y)$$

Démonstration. Soit G un fibré virtuel de classe x et soit $y' = d(E, F, \alpha)$ avec les notations de 6.3. Alors on a $xy' = d(G \otimes E, G \otimes F, 1 \otimes \alpha)$. D'après les définitions de 6.19, on a donc $D_{G \otimes E, G \otimes F, 1 \otimes \alpha} = D_G \otimes 1 + 1 \otimes D_{E, F, \alpha}$ et

$R_{G \otimes E, G \otimes F, 1 \otimes \alpha} = R_G \otimes 1 + 1 \otimes R_{E, F, \alpha}$. Le théorème résulte alors de la formule du binôme comme en 1.26.

6.29. En particulier, si $X = S^n$ et $Y = S^p$ et si $x \in K_n(A)$, $y' \in K_p^{\text{rel}}(A)$, on

peut considérer que $x.y'$ appartient à $K_{n+p}^{rel}(A)$ (en projetant $K_A^{rel}(S^{n+p})$ sur $K_{n+p}^{rel}(A)$). Dans ce cas, on a alors aussi la formule

$$Ch_r^{rel}(x.y') = \sum_{s+t=r} Ch_s(x).Ch_t^{rel}(y')$$

6.30. Nous allons maintenant donner des exemples où les classes Ch_r^{rel} ne sont pas triviales et détectent effectivement des éléments non triviaux de la K-théorie algébrique. Considérons d'abord un sous-groupe discret Γ de $G = GL_n(\mathbb{C})$ tel que G/Γ soit compact [5]. Le fibré $E = G \times_{\Gamma} \mathbb{C}^n$ peut être considéré comme un fibré plat

sur G/Γ . Ce fibré est différentiablement trivial par l'isomorphisme

$\alpha: E \longrightarrow G/\Gamma \times \mathbb{C}^n$ défini par $\alpha(g,v) = (\bar{g}, \rho(g)v)$ où $\rho: \Gamma \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est l'inclusion et où $\bar{g}$ est la classe de g dans G/Γ . Le triplet (E, T, α) où T est le fibré trivial $G/\Gamma \times \mathbb{C}^n$ définit ainsi un élément de $K_{\mathbb{C}}^{rel}(G/\Gamma)$. Dans cette situation, $\Omega_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $\Omega_i(\mathbb{C}) = 0$ pour $i > 0$ et $Ch_r^{rel}(d(E, T, \alpha))$ n'est autre, à un facteur rationnel près, que la classe de cohomologie de la forme différentielle bi-invariante $\omega_r = \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}$, soit $\text{Tr}(g^{-1} dg)^{2r-1}$ sur $GL_n(\mathbb{C})$. Nous avons démontré en 2.36 que la restriction de $\theta = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$ à $U(n)$ est la forme volume de $U(n)$. Puisque l'algèbre de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie complexifiée de $U(n)$, il en résulte que $\theta \wedge \bar{\theta}$ est une forme volume de $GL_n(\mathbb{C})$. La forme $\theta \wedge \bar{\theta}$ étant bi-invariante, elle définit aussi la forme volume de la variété compacte G/Γ . Donc les classes de cohomologie de ω_r ne sont pas triviales et ne sont pas proportionnelles à leurs conjuguées. Il en résulte que le fibré E définit un élément non trivial de la K-théorie algébrique $K_{\mathbb{C}}(X)$ avec $X = G/\Gamma$. En effet, on a le diagramme commutatif (cf. 6.24)

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathbb{C}}^{-1top}(X) & \longrightarrow & K_{\mathbb{C}}^{rel}(X) & \longrightarrow & K_{\mathbb{C}}(X) \\ \downarrow Ch_r & & \downarrow Ch_r^{rel} & & \\ H^{2r-1}(X; \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2r-1}(X; \mathbb{C}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où Ch_r vérifie la propriété bien connue $Ch_r(\bar{x}) = \overline{Ch_r(x)}$ si r est pair et $Ch_r(\bar{x}) = -\overline{Ch_r(x)}$ si r est impair (car tout fibré topologique peut être muni d'une métrique; cf. 6.32).

6.31. Voici maintenant un autre exemple fondamental, plus proche de la K-théorie algébrique des corps de nombres et dû à Borel. Soit $\Gamma = GL_n(\Lambda)$ où Λ est un anneau d'entiers dans un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$. Soit S_n l'ensemble des matrices hermitiennes positives. Alors Γ opère sur S_n par la formule $\gamma.s = \gamma s \gamma^*$. Quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que Γ y opère librement et ainsi S_n/Γ est un modèle de l'espace classifiant de Γ . Le fibré

complexe associé au fibré universel est $S_n \times_{\Gamma} \mathbb{C}^n$ qui est un $\mathbb{C}$ -fibré plat sur S_n/Γ . Sur ce fibré il existe une métrique différentiable canonique définie par le produit hermitien $(s,v).(s,v') = (s^{-1}v|v')$. Elle définit un isomorphisme de E sur son antidual $\bar{E}^*$ donné par la formule

$$\alpha : (s,v) \longmapsto (s, s^{-1}v)$$

Un calcul analogue à celui fait en 6.30 montre qu'à une constante rationnelle près, $Ch_r^{rel}(E, \bar{E}^*, \alpha)$ est la classe de $Tr(s^{-1}ds)^{2r-1}$ dans $H^{2r-1}(S_n/\Gamma)$. D'après Borel [5], on sait que pour $n \rightarrow \infty$, cette classe est une classe primitive σ_r de degré $2r-1$ de $H^*(BGL(\Lambda); \mathbb{C}) \otimes H^*(BGL(\Lambda)^+; \mathbb{C})$ (celle correspondant à la place complexe concernée). D'après les propriétés générales des H-espaces, il existe donc une application $S^{2r-1} \xrightarrow{u} BGL_n(\Lambda)^+$ pour n assez grand telle que $u^*(\sigma_r)$ engendre $H^{2r-1}(S^{2r-1}; \mathbb{C})$.

On peut interpréter ce qui précède autrement. Définissons une application

$$K_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow K_{\mathbb{C}}^{rel}(X)$$

par la formule $E \mapsto d(E, \bar{E}^*, \alpha)$ où α est une métrique quelconque de E^* (ceci ne dépend pas du choix de la métrique puisque deux métriques quelconques sont homotopes). Si X est une sphère S^{2r-1} , on voit ainsi que l'homomorphisme composé

$$K_{2r-1}(\Lambda) \longrightarrow K_{2r-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow K_{2r-1}^{rel}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

détecte le générateur de Borel de $K_{2r-1}(\Lambda)$ correspondant au plongement. On peut faire un calcul analogue pour les places réelles de Λ .

6.32. Comme autre application de ce qui précède, considérons une $\mathbb{C}$ -algèbre $(*)$ dans le sens de [26] p. 233 (par exemple les fonctions de classe C^k sur une variété compacte). Sur les groupes $K_n(A)$ et $K_n^{top}(A)$ on peut définir une involution qui est induite par $E \mapsto \bar{E}^*$ (antidualité) au niveau des fibrés virtuels. En fait, cette involution se réduit à l'identité sur les groupes $K_n^{top}(A)$ car un fibré topologique peut toujours être muni d'une métrique. D'autre part, un examen attentif de la matrice de courbure R montre qu'elle est changée en $-{}^t\bar{R}$ lorsqu'on passe de E à $\bar{E}^*$ (les fonctions de transition g_{ji} se transforment en ${}^t\bar{g}_{ji}^{-1}$). Il s'en suit que $Tr(R^r)$ est changée en $(-1)^r \overline{Tr(R^r)}$. Donc l'homomorphisme

$$Ch_r : K_n(A) \longrightarrow \bar{H}_{2r-n}(A) \text{ ou } \bar{Z}_n(A) \quad (\text{si } r = n)$$

vérifie l'identité $Ch_r(\bar{x}) = (-1)^r \overline{Ch_r(x)}$. Comme la même identité est vérifiée

(*) ou algèbre "symétrique" suivant une autre terminologie courante.

pour Ch_r^{top} , on en déduit que $Ch_r^{\text{top}}(x)$ est "réel" (resp. "imaginaire pur") si r est pair (resp. impair). Au niveau des groupes $K_n^{\text{rel}}(A)$, le même raisonnement montre que $Ch_r^{\text{rel}}(\bar{x}) = (-1)^r Ch_r^{\text{rel}}(x)$. Désignons par ${}^+K_n$ (resp. ${}^-K_n$) l'ensemble des éléments de $K_n(A)$ ou $K_n^{\text{rel}}(A)$ invariants (resp. anti-invariants) par l'involution $x \mapsto \bar{x}$. De nouveau l'existence de métriques sur les A -fibrés plats implique que ${}^-K_n(A)$ et ${}^-K_n^{\text{rel}}(A)$ sont isomorphes (modulo la 2-torsion). Soit maintenant T_n un sous-groupe de ${}^+K_n(A)$ tel que l'homomorphisme $Ch : T_n \rightarrow \bigoplus_{2=n}^{\infty} H_{2r-n}(A)$ soit injectif (modulo torsion). Soit u un élément de ${}^-K_{2p+1}(\mathbb{C}) \approx {}^-K_{2p+1}^{\text{rel}}(\mathbb{C})$ (modulo 2) détecté par Ch_p^{rel} (par exemple l'image d'un générateur de Borel de la K -théorie algébrique d'un corps de nombres plongé dans $\mathbb{C}$). Alors le cup-produit par u induit une injection (modulo torsion) de T_n dans ${}^-K_{n+2p+1}(A)$.

En particulier, si A est l'anneau des fonctions de classe C^k ($k \geq 1$) sur une variété compacte, on peut choisir $T_0 = K_0(A)$, $T_1 = SK_1(A)$ ou $T_2 = \pi_1(SL(A))$ [39]. La méthode précédente fournit donc des éléments non triviaux de $K_{2p+1}(A)$, $K_{2p+2}(A)$ et $K_{2p+3}(A)$. D'autres exemples sont décrits dans l'appendice 4.

VII. K-THÉORIE MULTIPLICATIVE ET HOMOLOGIE CYCLIQUE

DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE LA K-THÉORIE MULTIPLICATIVE (7.1-7)

7.1. Soient A une algèbre de Banach et X une variété C^∞ . Nous allons réinterpréter les classes caractéristiques du § précédent dans le cadre de la "K-théorie multiplicative" (cf. [29]). Un groupe nouveau $MK_A^{2r}(X)$ va être introduit (dépendant d'une quasi-résolution : cf. 1.3 et 4.2). Nous montrerons sommairement en 7.13 et 7.15 comment ces considérations peuvent se généraliser au cas où A est une algèbre de Fréchet quelconque et où X est un CW-complexe fini.

7.2. Avec les notations du §4, considérons le sous-complexe $\mathcal{C}_A^*(X) = \mathcal{C}^*(X, A)$ de $\Omega_A^*(X) = \Omega^*(X, A)$ constitué des formes différentielles de type (p, q) , $p \leq q$, qui sont en outre d'-fermées pour $p = q$.

($d' = d_X$ représentant la différentielle sur X et d'' la différentielle "non commutative" sur A). Nous notons $\tilde{\Omega}_A^*(X)$ le complexe quotient $\Omega_A^*(X)/\mathcal{C}_A^*(X)$, $\tilde{Z}_A^*(X)$ et $\tilde{B}_A^*(X)$ ses cycles et ses bords respectivement. Si $\theta \in \Omega_A^*(X)$, on désigne par $[\theta]$ sa classe dans $\tilde{\Omega}_A^*(X)$.

7.3. Soit $\mathcal{F}_r$ l'ensemble des triples (E, D, ω) où E est un A -fibré différentiable sur X , D une A -connexion sur E (cf. 4.10) et ω un élément de $\tilde{\Omega}_A^{2r-1}(X)$ tel que $[Ch_r(D)] \equiv d\omega$ où $Ch_r(D)$ a été défini en 4.12. Rappelons que si D_0 et D_1 sont deux connexions sur E , $Ch_r(D_1) - Ch_r(D_0)$ est canoniquement la différentielle d'une forme, qu'on notera $\theta_r(D_0, D_1)$, obtenue en considérant l'homotopie $(1-t)D_0 + tD_1$ (cf. 1.22 qu'on adaptera aisément au cas des fibrés en modules projectifs).

Définissons maintenant sur $\mathcal{F}_r$ la relation suivante : deux triplets (E_0, D_0, ω_0) et (E_1, D_1, ω_1) sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme $\alpha: E_0 \rightarrow E_1$ tel que

$$\omega_1 - \omega_0 = \theta_r(D_0, \alpha^* D_1) \text{ mod. } \tilde{B}_A^*(X).$$

7.4. LEMME. La relation précédente est une relation d'équivalence.

Démonstration. Soient $\mathcal{F}_i = (E_i, D_i, \omega_i)$, $i = 0, 1, 2$, trois triplets tels que $\tau_0 \sim \tau_1$ et $\tau_1 \sim \tau_2$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $E_0 = E_1 = E_2$ et il suffit de montrer que $\theta_r(D_0, D_2) = \theta_r(D_0, D_1) + \theta_r(D_1, D_2) \text{ mod. } \tilde{B}_A^*(X)$. Le deuxième

membre est obtenu en considérant l'homotopie composée $(1-t)D_0 + t D_1$ et $(1-t) D_1 + t D_2$ entre D_0 et D_2 . En changeant légèrement les notations, on est ainsi ramené à démontrer que deux homotopies (différentiables par morceaux) de D_0 à D_1 donnent naissance à deux formes différentielles cohomologues en appliquant l'opérateur d'homotopie $\bar{K}$ de 1.21.

Désignons par D_t^0 et D_t^1 ces deux homotopies de D_0 à D_1 et posons

$$D_t^u = (1-u)D_t^0 + u D_t^1$$

Considérons la forme différentielle intégrable double

$$\omega = \int_u \int_t \text{Ch } D_t^u$$

avec des notations évidentes, en mettant dt , puis du devant les expressions des formes différentielles (cf. 1.20). Si on note δ la différentielle totale du bicomplexe $\Omega_A^*(X)$, d_t et d_u les différentielles par rapport aux variables t et u respectivement, on a donc

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \int_u \int_t \delta(\text{Ch } D_t^u) = \int_u \int_t (-d_t - d_u)(\text{Ch } D_t^u) \\ &= \int_t \text{Ch } D_t^1 - \int_t \text{Ch } D_t^0 - \int_u \text{Ch } D_1^u + \int_u \text{Ch } D_0^u \end{aligned}$$

Puisque $D_1^u = D_1$ et $D_0^u = D_0$, les deux dernières intégrales sont égales à 0 (elles ne contiennent pas du) et on obtient bien le résultat annoncé :

$$\int_t \text{Ch } D_t^1 - \int_t \text{Ch } D_t^0 = \delta\omega$$

7.5. Si on définit la somme de deux triples (E, D, ω) et (E', D', ω') comme $(E \oplus E', D \oplus D', \omega + \omega')$, on voit que les classes d'équivalence de triples forment un monoïde abélien. On désignera par $MK_A^{2r}(X)$ son groupe de Grothendieck : c'est la "K-théorie multiplicative" associée à A et X (cf. [39] pour une définition de la K-théorie multiplicative dans des contextes géométriques différents). On notera $d(E, D, \omega)$ la classe du triple (E, D, ω) dans $MK_A^{2r}(X)$.

7.6. LEMME. Soit $x = d(E, D, \omega)$ un élément de $MK_A^{2r}(X)$. Il existe alors un élément $x' = d(E, D, \omega')$ tel que $E \oplus E'$ soit un A-fibré trivial T et tel que $(E \oplus E', D \oplus D', \omega + \omega')$ soit équivalent à $(T, 0, 0)$.

Démonstration. Si E_1 est un supplémentaire de E et D_1 une connexion quelconque sur E_1 , on sait que $\text{Ch}(D) + \text{Ch}(D_1) = d\theta$ pour une certaine forme θ (1.22). En ajoutant au triple initial le triple $(E_1, D_1, -\omega + d\theta)$, on peut ainsi supposer que E est trivial. En considérant l'homotopie $t D$ de D à 0, on peut aussi supposer que $D = 0$. On pose alors $E' = E$, $D' = 0$ et $\omega' = -\omega$.

7.7. THÉORÈME. Soit $\tilde{\mathcal{K}}_A^p(X)$ l'homologie en degré p du complexe quotient

$\tilde{\Omega}_A^*(X) = \Omega_A^*(X) / \mathcal{G}_A^*(X)$. On alors une suite exacte

$$K_A^{-1\text{top}}(X) \xrightarrow{\sigma_1} \tilde{\mathcal{K}}_A^{2r-1}(X) \xrightarrow{v} MK_A^{2r}(X) \xrightarrow{u} K_A^{\text{top}}(X) \xrightarrow{\sigma} \tilde{\mathcal{K}}_A^{2r}(X)$$

où les homomorphismes σ_1, v, u et σ sont explicités ci-dessous.

Démonstration. Voici d'abord la définition des homomorphismes

$$\sigma([E]) = [\text{Ch}_r(E)]$$

$$u(d(E, D, \omega)) = [E]$$

$v(\omega) = d(T, 0, \omega) - d(T, 0, 0)$ où T est un fibré trivial quelconque, définition indépendante de T .

$\sigma_1(\alpha) = c_r \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}$ où α représente un automorphisme d'un fibré trivial et où c_r est la constante rationnelle

$$(-1)^r \frac{(r-1)!}{(2r-1)!}$$

Exactitude en $K_A^{\text{top}}(X)$.

. L'identité $\sigma.u = 0$ est claire.

. Soit $x = [E] - [T]$ un élément de $K_A^{\text{top}}(X)$ où T est un fibré trivial, tel que $\sigma(x) = 0$. Pour toute connexion D sur E il existe ω tel que $[\text{Ch}_r(D)] = [d\omega]$ dans $\tilde{\Omega}_A^{2r}(X)$. Donc $x = u(d(E, D, \omega)) - u(d(T, 0, 0))$.

Exactitude en $MK_A^{2r}(X)$.

. L'identité $u.v = 0$ est claire.

. Soit $y = d(E, D, \omega) - d(T, 0, 0)$ un élément de $MK_A^{2r}(X)$ (cf. le lemme 7.6) tel que $u(y) = 0$. Quitte à ajouter à E et à T le même fibré trivial, on peut supposer que E est isomorphe à T grâce à un isomorphisme α . On a alors

$$\begin{aligned} y &= d(E, D, \omega) - d(T, 0, 0) = d(T, (\alpha^{-1})^* D, \omega) - d(T, 0, 0) \\ &= d(T, 0, \omega') - d(T, 0, 0) \text{ avec } \omega' = \omega + \theta_r(0, (\alpha^{-1})^* D) \end{aligned}$$

Exactitude en $\tilde{\mathcal{K}}_A^{2r-1}(X)$.

. Soit α un automorphisme du fibré trivial T et soit ω_r la forme différentielle $c_r \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}$. Alors

$$v(\omega_r) = d(T, 0, \omega_r) - d(T, 0, 0) = d(T, 0, 0) - d(T, 0, 0) = 0 \text{ car } \omega_r = \theta_r(0, \alpha^*(0))$$

d'après le calcul fait en 4.32 par exemple.

. Réciproquement, soit ω un élément de $\tilde{\mathcal{K}}_A^{2r-1}(X)$ tel que

$$v(\omega) = d(T, 0, \omega) - d(T, 0, 0) = 0. \text{ D'après le lemme 7.6, ceci implique, en ajoutant éventuellement à } T \text{ un fibré trivial, que } (T, 0, \omega) \text{ est équivalent à } (T, 0, 0). \text{ Il existe donc un isomorphisme } \alpha : T \rightarrow T \text{ tel que } \omega = \theta_r(0, \alpha^*(0)),$$

$$\text{soit } \omega = c_r \text{Tr}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}.$$

RELATION AVEC LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE ET LA K-THÉORIE RELATIVE (7.8-18)

7.8. L'intérêt du groupe $MK_A^{2r}(X)$ provient évidemment de sa relation avec la K-théorie algébrique $K_A(X)$ (relation que nous préciserons en 7.10 et 7.11). En effet, soit E un A -fibré plat sur X et soit D une connexion sur E telle que D' soit la connexion partielle canonique (4.20). Alors $Ch_r(D)$ appartient au sous-complexe $\mathcal{C}_A^*(X)$ de $\Omega_A^*(X)$ d'après 4.24. Le triple $(E, D, 0)$ définit ainsi un élément $d(E, D, 0)$ du groupe $MK_A^{2r}(X)$.

7.9. PROPOSITION. L'élément $d(E, D, 0)$ de $MK_A^{2r}(X)$ ne dépend pas du choix de la connexion D et ne dépend que de la classe d'isomorphie de E .

Démonstration. Soient E_0 et E_1 deux A -fibrés plats, $\alpha: E_0 \rightarrow E_1$ un isomorphisme de A -fibrés plats, D_0 et D_1 des connexions sur E_0 et E_1 respectivement dont les connexions partielles D'_0 et D'_1 sont associées à la structure plate (4.20). On va montrer que les triples $(E_0, D_0, 0)$ et $(E_1, D_1, 0)$ sont équivalents. En effet, $\tilde{D}_0 = \alpha^*(D_1)$ est une connexion sur E_0 telle que $D'_0 = \alpha^*(D'_1) = \alpha^*(D'_1)$ soit la connexion partielle canonique D'_0 associée à D_0 . On voit alors facilement (en prenant des cartes par exemple) que $\theta_r(D_0, \tilde{D}_0) \in \mathcal{C}_A^*(X)$ car $(1-t)\tilde{D}'_0 + t D'_0$ ne dépend pas de t .

7.10. La proposition précédente, jointe au théorème 7.7, permet de définir un homomorphisme

$$Ch_r : K_A(X) \rightarrow MK_A^{2r}(X)$$

pour tout CW-complexe fini X , en définissant le deuxième groupe comme étant $MK_A^{2r}(X')$ pour toute variété X' ayant le type d'homotopie de X (une méthode plus standard, utilisant des techniques simpliciales sera donnée dans l'appendice 3). En effet, d'après les calculs faits en 6.21. on a

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{K}}_A^{2n-1}(X) &\approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q-1}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A) \\ \check{\mathcal{K}}_A^{2n}(X) &\approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p>q}} H^p(X; \bar{H}_q(A)) \end{aligned}$$

avec des notations légèrement différentes. Les groupes $\check{\mathcal{K}}_A^p(X)$ ne dépendent donc que du type d'homologie de X et il en est de même des groupes $K_A^{\text{top}}(X)$ d'après la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch. La méthode suivie pour définir l'homomorphisme Ch_r est alors la même que celle décrite en 4.31.

7.11. THÉORÈME. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_A^{-1\text{top}}(X) & \longrightarrow & K_A^{\text{rel}}(X) & \xrightarrow{\gamma} & K_A(X) & \longrightarrow & K_A^{\text{top}}(X) \\
 \parallel & & \downarrow \text{Ch}_r^{\text{rel}} & & \downarrow \text{Ch}_r & & \parallel \\
 K_A^{-1\text{top}}(X) & \xrightarrow{\sigma_1} & \tilde{\mathcal{K}}_A^{2r-1}(X) & \xrightarrow{v} & MK_A^{2r}(X) & \xrightarrow{u} & K_A^{\text{top}}(X)
 \end{array}$$

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant :

7.12. LEMME. Dans le groupe $MK_A^{2r}(X)$ on a l'identité

$$d(E, D, \omega) - d(E, D, \omega') = d(T, 0, \omega - \omega') - d(T, 0, 0)$$

où T est un fibré trivial quelconque.

Démonstration du lemme. Soit F un supplémentaire de E et soit Δ une connexion quelconque sur F . Puisque $E \oplus F$ est trivial, il existe θ tel que $[d\theta] = [\text{Ch}_r(\Delta)]$.

$$\begin{aligned}
 & \text{On a alors } d(E, D, \omega) - d(E, D, \omega') \\
 &= d(E \oplus F, D \oplus \Delta, \omega + \theta) - d(E \oplus F, D \oplus \Delta, \omega' + \theta) \\
 &= d(T, 0, \omega + \theta + \theta_r(D \oplus \Delta, 0)) - d(T, 0, \omega' + \theta + \theta_r(D \oplus \Delta, 0)) \\
 &= d(T, 0, \omega - \omega') - d(T, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Démonstration du théorème. Soit $x = d(E_0, E_1, \alpha)$ un élément de $K_A^{\text{rel}}(X)$. Alors $\text{Ch}_r^{\text{rel}}(x)$ est obtenu en considérant l'homotopie $(1-t)D_0 + t\alpha^*(D_1)$ où D_0 et D_1 sont des connexions associées à la structure plate de E_0 et E_1 respectivement (6.19). Ainsi $\text{Ch}_r^{\text{rel}}(x)$ est la classe de $\theta_r(D_0, \alpha^*(D_1))$ avec les notations précédentes et on a donc $v(\text{Ch}_r^{\text{rel}}(x)) = d(T, 0, \theta_r(D_0, \alpha^*(D_1))) - d(T, 0, 0)$. Par ailleurs, $(\text{Ch}_r \cdot \gamma)(x) = d(E_1, D_1, 0)$. Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent avec $E = E_0$, $D = D_0$, $\omega = \theta_r(D_0, \alpha^*(D_1))$ et $\omega' = 0$.

7.13. Tout ce qui précède se transcrit sans peine dans un contexte simplicial grâce aux méthodes développées dans le §5, ce qui permet d'étendre ce formalisme aux algèbres de Fréchet (considérer le groupe simplicial $GL(A_*)$ défini en 6.18). Les formes différentielles utilisées doivent alors être comprises au sens de De Rham-Sullivan à valeurs dans les espaces de Fréchet $\bar{\Omega}_p(A)$. En outre, ceci permet d'éviter le recours à la méthode un peu artificielle développée en 4.31 et d'exhiber des espaces classifiants pour la K-théorie multiplicative (cf. l'appendice 3).

7.14. Considérons maintenant l'exemple important où X est la sphère S^i avec $i > 0$. On note alors $MK_A^{2r}(A)$ le groupe

$$\text{Coker}(MK_A^{2r}(\text{Point})) \rightarrow MK_A^{2r}(S^i).$$

D'après les calculs faits en 6.21, on a les isomorphismes

$$\tilde{\mathcal{K}}_A^{2r}(S^i) = \bar{H}_{2r-1}(A) \quad \text{pour } i > r$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_A^{2r}(S^r) &= 0 \\ \mathcal{K}_A^{2r}(S^i) &= \bar{H}_{2r-1-i}(A) \quad \text{pour } i > r \\ \mathcal{K}_A^{2r}(S^r) &= \bar{\Omega}_{r-1}(A)/\bar{B}_{r-1}(A)\end{aligned}$$

Le théorème 7.7. donne donc des suites exactes (avec $i > r$)

$$(E_i) \quad K_{i+1}^{\text{top}}(A) \longrightarrow \bar{H}_{2r-1-i}(A) \longrightarrow MK_i^{2r}(A) \longrightarrow K_i^{\text{top}}(A) \longrightarrow \bar{H}_{2r-i}(A)$$

$$(E_r) \quad K_{r+1}^{\text{top}}(A) \longrightarrow \bar{\Omega}_{r-1}(A)/\bar{B}_{r-1}(A) \longrightarrow MK_r^{2r}(A) \longrightarrow K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow 0$$

Remplaçons maintenant A par A^+ (algèbre A à laquelle on a ajouté un élément unité) et identifions $K_i(A)$ (resp. $K_i^{\text{top}}(A)$ et $K_i^{\text{rel}}(A)$) à un sous-groupe de $K_i(A^+)$ (resp. $K_i^{\text{top}}(A^+)$ et $K_i^{\text{rel}}(A^+)$). Identifions formellement $\bar{\Omega}_{r-1}(A^+)/\bar{B}_{r-1}(A^+)$ à $C_{r-1}^\lambda(A)/b(C_r^\lambda(A))$ (cf. 2.13 et 4.1), le complexe $\cdot \Omega_*(A^+)$ étant maintenant le complexe universel (cf. 4.1). Le théorème 7.11 donne alors deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} K_r^{\text{rel}}(A) & \longrightarrow & K_i(A) \\ \downarrow \text{Ch}_r^{\text{rel}} & & \downarrow \text{Ch}_r \\ H_{r-1-i}(A) & \longrightarrow & MK_i^{2r}(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_r^{\text{rel}}(A) & \longrightarrow & K_r(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{r-1}^\lambda(A)/b(C_r^\lambda(A)) & \longrightarrow & MK_r^{2r}(A) \end{array}$$

Examinons maintenant de manière plus précise la suite exacte (E_r) . Si A est une algèbre de Banach, nous désignerons par CA le "cône topologique" de A introduit dans [10] : il est formé des matrices infinies (a_{mn}) telles que $\sup_n \sum_m \|a_{mn}\| < +\infty$.

On a en outre $K_i^{\text{top}}(CA) = 0$ car CA est une algèbre de Banach flasque. En plongeant A dans CA par l'homomorphisme $a \mapsto (a_{mn})$ avec $a_{mn} = 0$ si $m \neq 1$ ou $n \neq 1$ et $a_{11} = a$, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K_{r+1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & C_{r-1}^\lambda(A)/b(C_r^\lambda(A)) & \longrightarrow & MK_r^{2r}(A) & \longrightarrow & K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow b & & \downarrow b_1 & & \\ & & C_{r-2}^\lambda(A) & \xrightarrow{\sigma} & C_{r-2}^\lambda(CA) & & \end{array}$$

Si on pose $MK_r(A) = \text{Ker}(MK_r^{2r}(A) \xrightarrow{b_1} C_{r-2}^\lambda(CA))$, on a la suite exacte suivante obtenue en considérant les noyaux des flèches verticales

$$K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-1}(A) \longrightarrow MK_r(A) \longrightarrow K_r^{\text{top}}(A)$$

(utiliser l'injectivité de σ). Finalement, définissons $MK_r(A)$ comme le noyau de l'homomorphisme composé

$$b_2: MK_r(A) \longrightarrow K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-2}(A)$$

on a la suite exacte

$$K_{r+1}^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-1}(A) \longrightarrow MK_r(A) \longrightarrow K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-2}(A)$$

7.15. Remarques. Il existe plusieurs variantes du cône topologique d'une algèbre de Banach qui sont décrites dans [10]. Si A est une algèbre de Fréchet, on peut aussi définir CA comme le produit tensoriel topologique $\mathbb{C} \hat{\otimes} A$. Ce qui précède et ce qui va suivre peut donc se généraliser sans problème aux algèbres de Fréchet (à condition de se placer dans un cadre simplicial : cf. 7.13). D'autre part, une définition légèrement différente de $MK_r(A)$ a été donnée dans la Note [29] sans utiliser le cône topologique. Les deux définitions s'insèrent dans la suite exacte précédente. Grâce au lemme des cinq, on en déduit que les deux définitions sont isomorphes.

Remarque.

7.16. THÉORÈME. L'homomorphisme composé

$$K_r(A) \longrightarrow K_A(S^r) \longrightarrow MK_r^{2r}(A)$$

défini en 7.10 et 7.11 se factorise à travers le groupe $MK_r(A)$.

Démonstration. Notons $\bar{b}_1$ l'application composée

$$K_r(A) \longrightarrow MK_r^2(A) \longrightarrow C_{r-2}^\lambda(CA)$$

En posant $A' = CA$, on peut donc écrire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_r(A) & \xrightarrow{\bar{b}_1} & C_{r-2}^\lambda(CA) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ K_r(A') & \longrightarrow & C_{r-2}^\lambda(CA') \end{array}$$

Puisque $K_r(A') = 0$ et que γ est injectif, $\bar{b}_1 = 0$, ce qui démontre que l'homomorphisme $K_r(A) \longrightarrow MK_r^{2r}(A)$ se factorise à travers $MK_r(A)$. D'après 4.31, l'homomorphisme composé

$$K_r(A) \longrightarrow K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-2}(A)$$

est réduit à 0. Donc l'homomorphisme $K_r(A) \longrightarrow MK_r^{2r}(A)$ se factorise à travers $MK_r(A)$.

7.17. Remarque. Graeme Segal [44] a aussi introduit un groupe analogue $MK_r(A)$ s'insérant dans une suite exacte

$$K_{r+1}^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-1}(A) \longrightarrow MK_r(A) \longrightarrow K_r^{\text{top}}(A) \longrightarrow HC_{r-2}(A)$$

J'ignore cependant si les deux définitions des groupes $MK_r(A)$ et $MK_r(A)$ sont isomorphes, la méthode de G. Ségal étant toute différente car basée sur la cohomologie des algèbres de Lie et le théorème de Loday-Quillen-Feigin-Tsygan [36] [47].

7.18. Remarque. Avec A. Connes nous avons démontré que le caractère de Chern relatif $K_r^{rel}(A) \longrightarrow \bar{\Omega}_{r-1}(A^+)/\bar{B}_{r-1}(A^+) = C_{r-1}^\lambda(A)/b(C_r^\lambda(A))$ se factorise à travers $HC_{r-1}(A)$ [14]. Compte tenu du théorème précédent, on peut donc écrire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K_{r+1}^{top}(A) & \longrightarrow & K_r^{rel}(A) & \longrightarrow & K_r(A) & \longrightarrow & K_r^{top}(A) \\ \parallel & & \downarrow Ch_r^{rel} & & \downarrow Ch_r & & \parallel \\ K_{r+1}^{top}(A) & \longrightarrow & HC_{r-1}(A) & \longrightarrow & MK_r(A) & \longrightarrow & K_r^{top}(A) \end{array}$$

Si A est l'algèbre de Banach $\mathcal{M}^{r-1}$ de [14], on a un isomorphisme $MK_r(A) \approx \text{Coker}(K_{r+1}^{top}(A) \longrightarrow HC_{r-1}(A))$ car $K_i^{top}(\mathcal{M}^{r-1}) = 0$ pour $i \neq r-1 \text{ mod } 2$.

En appliquant le caractère τ_{r-1} rappelé dans [14], on en déduit l'homomorphisme

$$K_r(\mathcal{M}^{r-1}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

qui est le caractère multiplicatif universel d'un module de Fredholm.

ÉTUDE DU CAS $A = \mathbb{C}$: CLASSES CARACTÉRISTIQUES DE FIBRÉS PLATS COMPLEXES (7.19-31).

7.19. Supposons $A = \mathbb{C}$. Comme dans l'exemple 7.18 avec r impair, on peut définir un homomorphisme

$$\alpha_n : K_{2n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

avec en fait ici $MK_{2n-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ et $MK_{2n}(\mathbb{C}) = 0$.

7.20. THÉORÈME. Les homomorphismes α_n vérifient les propriétés suivantes

- α_1 est l'identité quand on identifie $K_1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^*$.
- α_n induit un isomorphisme sur la torsion des deux groupes.
- Soit A l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres.

Ecrivons $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$. Alors l'homomorphisme composé

$$K_{2n-1}(A) \longrightarrow K_{2n-1}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \longrightarrow K_{2n-1}(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = K_{2n-1}(\mathbb{C}^{r_1+r_2}) \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2}$$

est injectif sur la partie libre de $K_{2n-1}(A)$ (qui est $\mathbb{Z}^{r_1+r_2}$ si n est impair et $\mathbb{Z}^{r_2}$ si n est pair).

La partie a) est évidente d'après 6.30. et la partie c) résulte des considérations de la fin du § précédent (régulateur de Borel). La partie b) sera démontrée

à la fin du paragraphe (7.31) en utilisant les espaces classifiants de la K-théorie multiplicative et le théorème de Suslin [46].

7.21. Pour mieux illustrer ce qui précède nous allons exhiber un espace classifiant $A = \mathbb{C}$ et en particulier exhiber un espace classifiant pour la K-théorie multiplicative (le cas général est traité dans l'appendice 3). Pour cela, il est plus judicieux de remplacer le caractère de Chern Ch_r défini en homologie cyclique par le caractère de Chern total allant de la K-théorie topologique vers la cohomologie de De Rham de la base. De manière plus précise, en suivant [8], on peut prendre comme modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{C}, n)$ le groupe abélien simplicial $s \mapsto Z^n(\Delta^S)$, groupe des formes différentielles C^∞ fermées de degré n à valeurs complexes sur le simplexe type Δ^S . Nous noterons ce modèle $Z^n(\mathbb{C})$. Si on considère les formes différentielles quelconques (non nécessairement fermées), on obtient un groupe simplicial contractile $\Omega^n(\mathbb{C})$. Désignons alors par $MK'_{(m)}(\mathbb{C})$ le produit fibré suivant

$$\begin{array}{ccc} MK'_{(m)}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \prod_{r=1}^{\infty} \Omega^{2r-1}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow d \\ BGL_m(\mathbb{C})^{top} & \xrightarrow{Ch} & \prod_{r=1}^{\infty} Z^{2r}(\mathbb{C}) = \prod_{r=1}^{\infty} K(\mathbb{C}, 2r) \end{array}$$

où Ch est le caractère de Chern total (défini par les méthodes simpliciales décrites précédemment en remplaçant A par $\mathbb{C}$). En considérant la limite inductive suivant n , on définit de même un espace $MK'(\mathbb{C})$ comme le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} MK'(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\theta} & \prod_{r=1}^{\infty} \Omega^{2r-1}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow d \\ BGL(\mathbb{C})^{top} & \xrightarrow{Ch} & \prod_{r=1}^{\infty} Z^{2r}(\mathbb{C}) \end{array}$$

et on pose $MK'_{\mathbb{C}}(X) = [X, MK(\mathbb{C})]$. La théorie $MK'_{\mathbb{C}}(X)$ s'insère dans une suite exacte

$$K_{\mathbb{C}}^{-1top}(X) \longrightarrow \bigoplus_{r \geq 0} H^{2r-1}(X; \mathbb{C}) \longrightarrow MK'_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow K_{\mathbb{C}}^{top}(X) \longrightarrow \bigoplus_{r \geq 0} H^{2r}(X; \mathbb{C})$$

où $K_{\mathbb{C}}^{top}(X) \approx [X, BGL(\mathbb{C})^{top}]$ et $K_{\mathbb{C}}^{-1top}(X) \approx [X, GL(\mathbb{C})]$

désignent les groupes de K-théorie topologique réduits usuels (X a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini). Compte tenu de cette suite exacte (qui résulte du produit fibré précédent), il semble raisonnable de noter $K_{\mathbb{C}}^{-1top}(X; \mathbb{C}^*)$ la théorie $MK'_{\mathbb{C}}(X)$: c'est une raison expliquant la terminologie "K-theorie multiplicative" choisie comme titre de ce paragraphe. Ainsi, à tout fibré plat sur un ensemble simplicial X , on peut définir une "classe caractéristique" $\psi(E) \in MK'_{\mathbb{C}}(X) = K_{\mathbb{C}}^{-1top}(X; \mathbb{C}^*)$

qui ne dépend que de la classe de E dans la K-théorie algébrique réduite de X . En termes d'espaces classifiants, on peut aussi dire qu'on a une application canonique de $BGL_n(\mathbb{C})^\delta$ (espace classifiant de $GL_n(\mathbb{C})$ muni de la topologie discrète) vers l'ensemble simplicial $\mathfrak{A}_n(\mathbb{C})$ qui est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \prod_{r=1}^n \Omega^{2r}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \prod_{r=1}^n Z^{2r}(\mathbb{C}) \end{array}$$

En remarquant que les ensembles simpliciaux $\Omega^r(\mathbb{C})$ sont contractiles et en faisant tendre n vers l'infini, on en déduit une application canonique de $BGL(\mathbb{C})^\delta$ vers la fibre homotopique $\mathfrak{A}$ de l'application "caractère de Chern total"

$$BGL(\mathbb{C})^{\text{top}} \longrightarrow \prod Z^{2r}(\mathbb{C}) = \prod K(\mathbb{C}, 2r)$$

On en déduit un homomorphisme

$$K_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow [X, \mathfrak{A}] = K_{\mathbb{C}}^{-1\text{top}}(X; \mathbb{C}^*) = MK'_{\mathbb{C}}(X)$$

On passe du cadre des fibrés plats sur une variété à celui des fibrés plats sur un ensemble simplicial par le dictionnaire bien connu explicité en 5.9.

7.30. La méthode précédente permet aussi de définir des invariants de fibrés plats appartenant à la cohomologie impaire de X à coefficients dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/(2i\pi)\mathbb{Z}$. De manière plus précise, considérons le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} BGL(\mathbb{C})^{\text{top}} & \xrightarrow{\text{Ch}} & \prod_{r=1}^{\infty} K(\mathbb{C}, 2r) \\ \downarrow c = \pi c_r & & \downarrow u \\ \prod_{r=1}^{\infty} K(\mathbb{Z}, 2r) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{r=1}^{\infty} K(\mathbb{C}, 2r) \end{array}$$

Ici c_r est la classe de Chern usuelle, α est induit par l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\lambda \mapsto (2i\pi)^r$ sur chaque facteur et u est l'automorphisme simplicial exprimant (rationnellement) les classes de Chern en fonction du caractère de Chern

$$\begin{aligned} c_1 &= Ch_1 \\ c_2 &= ((Ch_1)^2 - Ch_2)/2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Puisque la cohomologie complexe impaire de $BGL(\mathbb{C})^{\text{top}}$ est triviale, on en déduit une application bien définie à homotopie près de la fibre homotopique de Ch vers la fibre homotopique de α c'est-à-dire $\pi K(\mathbb{C}^*, 2r-1)$. La fibre homotopique de Ch étant l'espace classifiant $MK'(\mathbb{C})$ de la K-théorie multiplicative réduite, on a

donc une application bien définie à homotopie près

$$MK'(\mathbb{C}) \longrightarrow \prod_{r=1}^{\infty} K(\mathbb{C}^*, 2r-1)$$

Ainsi, à tout fibré plat E on peut associer une classe caractéristique $\check{c}_r(E) \in H^{2r-1}(X; \mathbb{C}/(2i\pi)^r \mathbb{Z})$ redonnant la classe de Chern usuelle par l'opérateur de Bockstein

$$H^{2r-1}(X; \mathbb{C}/(2i\pi)^r \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2r}(X; (2i\pi)^r \mathbb{Z}) \approx H^{2r}(X; \mathbb{Z})$$

(le facteur $(2i\pi)^r$ provient du fait qu'on a défini le caractère de Chern sans ce facteur de manière à pouvoir généraliser la théorie dans un contexte purement algébrique comme nous l'avons fait depuis le début). Il est probable que cette classe caractéristique coïncide avec celle définie par Cheeger-Simons [10]. Par ailleurs dans la Note [41], Osmo Pekonen a donné une autre variante de la construction précédente en termes de cochaines singulières. Mentionnons aussi un travail de H. Esnault dans le cadre des fibrés plats sur une variété algébrique [17].

En conclusion, ce qui précède peut être ainsi résumé par l'existence de classes caractéristiques obtenues en composant les homomorphismes

$$K_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow MK_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \prod_{r=1}^{\infty} H^{2r-1}(X; \mathbb{C}/(2i\pi)^r \mathbb{Z})$$

7.31. Nous allons terminer ce paragraphe par la démonstration du théorème 7.20 b) en utilisant le fait que l'homomorphisme α_n est induit par une application $BGL(\mathbb{C})^+ \longrightarrow MK(\mathbb{C})^+ \sim MK(\mathbb{C})$. Si on note $MK_i(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p)$ la K-théorie multiplicative à coefficients, c'est-à-dire $\pi_i(MK(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p))$ ($i \geq 2$), on a évidemment $MK_i(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) \approx K_i^{\text{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p)$ car $\pi_i(K(\mathbb{C}, r); \mathbb{Z}/p) = 0$. D'après Suslin [46], il en résulte qu'on a des isomorphismes

$$K_i(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) \approx MK_i(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) \approx K_i^{\text{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p),$$

ces groupes étant isomorphes à $\mathbb{Z}/p$ si i est pair et étant nuls si i est impair. Si $a \in \mathbb{C}^*$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, elle est l'image par ∂ d'un élément $a_n \in MK_{2n}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p)$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K_{2n}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\bar{\alpha}_n} & MK_{2n}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\sim} & K_{2n}^{\text{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ K_{2n-1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\alpha_n} & MK_{2n-1}(\mathbb{C}) & = & \mathbb{C}^* \end{array}$$

Puisque $\bar{\alpha}_n$ est surjectif, il existe b_n tel que $a_n = \bar{\alpha}_n(b_n)$, donc $a = (\alpha_n \cdot \partial)(b_n)$ et α_n est surjectif sur la torsion. De la même manière, si b est un élément de $K_{2n-1}(\mathbb{C})$ tel que $pb = 0$ et $b \neq 0$, il existe $b_n \in K_{2n}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p)$ tel que $\partial(b_n) = b$ et $\bar{\alpha}_n(b_n) \neq 0$. Il s'en suit que $\alpha_n(b) = (\partial \bar{\alpha}_n)(b_n) \neq 0$ car la suite exacte

$$MK_{2n-1}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/p) \longrightarrow MK_{2n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow MK_{2n-1}(\mathbb{C})$$

s'identifie à

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$$

APPENDICES

APPENDICE I. COMPLÉMENTS SUR LE CHAPITRE 3.

Pour ne pas alourdir le chapitre 3 par des considérations qui ne sont pas vraiment utiles dans les autres chapitres, nous avons voulu décrire seulement ici des variantes du lemme 3.10 et du théorème 3.11 dans d'autres situations en K-théorie algébrique. En effet, on pourrait par exemple considérer des A-fibrés virtuels munis de formes ϵ -quadratiques dans le sens de [26]. La K-théorie obtenue est alors la K-théorie hermitienne

$${}_{\epsilon}L_A(X) \approx [X, {}_{\epsilon}L_0(A) \times B_{{}_{\epsilon}O(A)}^+]$$

On pourrait de même considérer les revêtements finis sur Y où $f: Y \rightarrow X$ est acyclique. La "K-théorie" obtenue est alors $\pi_S^0(X) \approx [X, \mathbb{Z} \times B \sum_{\infty}^+]$, c'est-à-dire la cohomotopie stable d'après Barratt, Priddy et Quillen [42].

A.1.2. Pour trouver un cadre commun à ces diverses généralisations, plaçons nous pour simplifier "à l'infini", c'est-à-dire considérons des groupes G tels que $GL(A)$, ${}_{\epsilon}O(A)$ ou $\sum_{\infty}$. De tels groupes ont un sous-groupe des commutateurs $[G, G]$ qui est parfait. Dans ce cadre général, on définira un G-fibré virtuel sur X comme la donnée d'une fibration acyclique $f: Y \rightarrow X$ et d'un G -fibré principal E sur Y . Deux tels G -fibrés $E \rightarrow Y \xrightarrow{f} X$ et $E' \rightarrow Y' \xrightarrow{f'} X$ sont dits équivalents s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \sigma \downarrow & \nearrow f_1 & \uparrow f' \\ Y_1 & \xleftarrow{\sigma'} & Y' \end{array}$$

avec f_1 fibration acyclique et un G -fibré E_1 sur Y_1 tel que $E \approx \sigma^* E_1$ et $E' \approx \sigma'^* E_1$. On vérifie formellement comme dans 3.4 qu'on a bien défini ainsi une relation d'équivalence. On note $\Phi_G(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de G -fibrés virtuels sur X .

A.1.3. THÉORÈME. Pour tout CW-complexe X on a un isomorphisme naturel

$$\Phi_G(X) \simeq [X, BG^+]$$

Démonstration. Elle va être une variante de celle du lemme 3.10 (noter cependant que l'hypothèse de finitude du CW-complexe X n'est pas utilisée ici). Soit $E \rightarrow Y \rightarrow X$ un G -fibré virtuel défini par une application classifiante $Y \rightarrow BG$. Comme dans 1.9. on peut construire une application $X \rightarrow BG^+$ bien définie à homotopie près et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & BG^+ \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & BG \end{array}$$

(on suppose que $BG \rightarrow BG^+$ est une fibration). On a ainsi défini une application $\gamma: \Phi_G(X) \rightarrow [X, BG^+]$.

a) γ est surjective. En effet, si $f: X \rightarrow BG^+$, on peut choisir pour Y le produit fibré de X et de BG au-dessus de BG^+ , d'où un G -fibré sur Y .

b) γ est injective. Soient $E \rightarrow Y \rightarrow X$ et $E' \rightarrow Y' \rightarrow X$ deux G -fibrés virtuels dont les images dans $[X, BG^+]$ sont égales et qui sont définis par des applications classifiantes $Y \rightarrow BG$ et $Y' \rightarrow BG$. Puisque $BG \rightarrow BG^+$ est une fibration, il existe une application de X dans BG^+ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & BG^+ \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & BG \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & BG^+ \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y' & \longrightarrow & BG \end{array}$$

commutent. Si Y_1 désigne le produit fibré de X et de BG au-dessus de BG^+ , on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \longrightarrow & BG^+ \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & Y_1 & \longrightarrow & BG \\ & \swarrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \\ Y & & & & Y' \end{array}$$

d'où l'équivalence des fibrés virtuels.

A.1.4. Comme autre variante du théorème 3.11, voyons comment on peut interpréter celui-ci en termes purement algébriques (c'est-à-dire ici en termes de représentations de groupes discrets). D'après Kan-Thurston [22], il existe pour tout espace connexe X un groupe discret Γ_X (qu'on peut choisir fonctoriellement par rapport

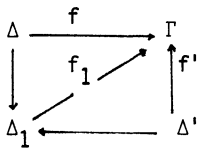
à X) et une application acyclique $B\Gamma_X \rightarrow X$. L'idée de ce qui va suivre est d'exprimer les éléments de $K_A(X)$ comme des "représentations virtuelles" de Γ_X .

De manière plus précise, un groupe discret Γ est dit acyclique si son homologie réduite (à coefficients entiers) est triviale. Un homomorphisme de groupes discrets $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ est dit acyclique s'il est surjectif et si son noyau est acyclique (ceci équivaut à l'acyclicité de l'application $B\Gamma_1 \rightarrow B\Gamma_2$ entre les espaces classifiants).

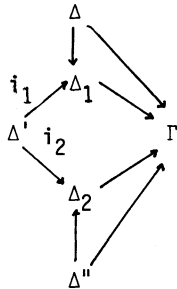
Une A-représentation virtuelle de Γ est alors la donnée d'un homomorphisme acyclique $\Delta \xrightarrow{f} \Gamma$ et d'une représentation $\rho: \Delta \rightarrow \text{Aut}_A(P)$ où P est un A-module projectif de type fini. Deux représentations virtuelles



sont dites équivalentes s'il existe un diagramme commutatif (avec f_1 acyclique)



et une représentation de Δ_1 dans $\text{Aut}(P)$ qui induit sur Δ et Δ' des représentations isomorphes aux représentations données. Comme dans 3.4, on vérifie qu'on a bien une relation d'équivalence. En effet, pour la transitivité par exemple, on peut écrire le diagramme commutatif



Si on désigne par Δ_3 la somme amalgamée (*) de Δ_1 et Δ_2 par rapport à Δ' ,

(*) Comme dans le cas topologique, il convient ici de remplacer i_1 ou i_2 par une injection en plongeant Δ' dans un groupe acyclique par exemple [22].

on a un homomorphisme $\Delta_3 \rightarrow \Gamma$ qui est aussi acyclique (appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris aux espaces classifiants par exemple). Ainsi, si

$\rho_1 : \Delta_1 \rightarrow \text{Aut}(P)$ et $\rho_2 : \Delta_2 \rightarrow \text{Aut}(P)$ sont deux représentations isomorphes lorsqu'on les restreint à Δ' , elles induisent une représentation de Δ_3 dans $\text{Aut}(P)$ dont les restrictions à Δ et Δ'' sont isomorphes aux représentations données.

L'ensemble des classes d'équivalence de A-représentations virtuelles de Γ (à isomorphisme près) peut être muni d'une structure de monoïde abélien pour la somme directe des représentations de A-modules (on recopie algébriquement le §3.6). On désigne par $R_A(\Gamma)$ son groupe de Grothendieck.

Si maintenant $\rho : \Delta \rightarrow \text{Aut}(P)$ est une représentation, on peut lui associer d'une part la classe d'isomorphie de P, d'autre part son application classifiante $B\Delta \rightarrow B \text{Aut}(P)$. Si on plonge P dans A^n et si on stabilise, on en déduit une application bien définie à homotopie près $B\Delta \rightarrow \text{BGL}(A)^+$ qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de ρ . Puisque $B\Delta$ a même homologie que $B\Gamma$ et que $\text{BGL}(A)^+$ est un H-espace, on en déduit finalement un homomorphisme

$$R_A(\Gamma) \rightarrow K_A(X) \approx [X, K_0(A) \times \text{BGL}(A)^+]$$

avec $X = B\Gamma$.

A.1.5. THÉORÈME. Supposons que $B\Gamma$ ait le type d'homologie d'un CW-complexe fini. Alors l'homomorphisme précédent

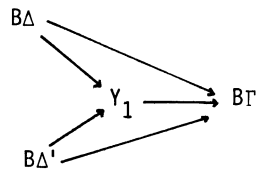
$$R_A(\Gamma) \rightarrow K_A(B\Gamma)$$

est un isomorphisme.

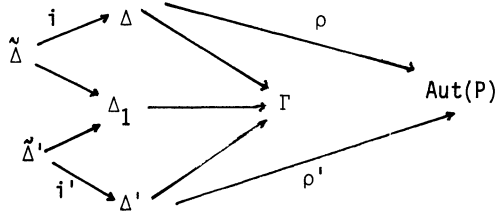
Démonstration. Il existe par hypothèse un CW-complexe fini T et une application acyclique $B\Gamma \rightarrow T$. Les représentations virtuelles de Γ , c'est à dire les représentations de Δ dans $\text{Aut}(P)$ avec $\Delta \rightarrow \Gamma$ acyclique définissent des fibrés virtuels (dans le sens de 3.3) sur l'espace T car la composition $B\Delta \rightarrow B\Gamma \rightarrow T$ est acyclique. D'après le théorème 3.11, il suffit donc de vérifier que la relation d'équivalence entre fibrés virtuels est équivalente à la relation d'équivalence entre représentations virtuelles définie ci-dessus. Ceci est évident dans le sens

représentations $\rightarrow$ fibrés

Dans l'autre sens, supposons que deux fibrés sur $B\Delta$ et $B\Delta'$ avec $B\Delta \rightarrow B\Gamma$ et $B\Delta' \rightarrow B\Gamma$ acycliques soient équivalents. Il existe donc Y_1 , un diagramme commutatif à homotopie près



avec $Y_1 \rightarrow B$ acyclique, ainsi qu'un A -fibré plat sur Y_1 qui induit sur $B\Delta$ et $B\Delta'$ les A -fibrés plats donnés. D'après le théorème de Kan-Thurston [22] il existe un groupe discret Δ_1 et une application acyclique $B\Delta_1 \rightarrow Y_1$, donc un homomorphisme acyclique $\Delta_1 \rightarrow \Gamma$. Soient $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}'$ les produits fibrés



Alors $\rho \sim \rho \circ i \sim \rho_1 \sim \rho' \circ i' \sim \rho'$ où $\rho_1 : \Delta_1 \rightarrow \text{Aut}(P)$ est associé au fibré plat d'application classifiante $B\Delta_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow B(\text{Aut}(P))$.

A.1.6. En conclusion à ce que nous avons annoncé en A.1.5., si on désigne par Γ_n le groupe de Kan-Thurston associé à la sphère S^n ($n > 0$), donc tel que l'application $B\Gamma_n \rightarrow S^n$ soit acyclique, on voit que $R_A(\Gamma_n)$ est isomorphe à $K_0(A) \oplus K_n(A)$. Ceci donne bien une description purement algébrique de $K_n(A)$, à savoir $\text{Coker}(K_0(A) \rightarrow R_A(\Gamma_n))$.

A.1.7. Comme troisième complément au chapitre III, nous allons voir comment les méthodes de ce chapitre permettent de munir les groupes $K_n(A)$ (et même plus généralement les groupes $K_A(X)$ lorsque X est un CW-complexe fini connexe) d'une topologie naturelle lorsque A est un anneau topologique.

Pour les deux premiers groupes $K_0(A)$ et $K_1(A)$, la réponse est immédiate. En effet, $K_0(A) \approx \varinjlim \widetilde{\text{Proj}}(M_{2r}(A))$ où $\widetilde{\text{Proj}}(M_{2r}(A))$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $2r$ qui sont idempotentes prises à conjugaison près (cf [25] par exemple): $K_0(A)$ est muni d'une topologie limite inductive de topologies quotients. Il en est de même de $K_1(A) = \varinjlim GL_r(A)/E_r(A)$.

Dans le cas général, il est commode d'utiliser la description de $K_A(X)$ en termes de représentations virtuelles donnée dans le théorème A.1.5. De manière précise, soit X un CW-complexe fini connexe et soit Γ_X un groupe de Kan-Thurston associé à X (on a donc une application acyclique $B\Gamma_X \rightarrow X$). D'après le lemme 3.10 (qui se transpose aisément au cadre algébrique), on a $K_A(X) \approx K_0(A) \oplus \varinjlim R_{G_r}(\Gamma_X)$ où $R_{G_r}(\Gamma_X)$ désigne "l'ensemble" des classes d'équivalence de représentations virtuelles de Δ_X dans $G_r = GL_r(A)$. Une telle représentation virtuelle est donnée par un homomorphisme acyclique $\Delta \rightarrow \Gamma_X$ et par une classe de représentations $\rho : \Delta \rightarrow GL_r(A)$.

L'ensemble des classes de représentations $\mathcal{R}(\Delta)$ d'un groupe Δ dans $GL_r(A)$ a une topologie naturelle induite par celle de $M_r(A)$ (c'est un quotient de la topologie produit $M_r(A)^\Delta$). Si $\Delta' \rightarrow \Delta$ est un homomorphisme, l'application induite $\mathcal{R}(\Delta) \rightarrow \mathcal{R}(\Delta')$ est continue (et même ouverte). Les $\mathcal{R}(\Delta)$ constituent donc un système inductif d'espaces topologiques (l'ensemble d'indices étant l'ensemble des homomorphismes acycliques $\Delta \rightarrow \Gamma_X$). On munira $R_{G_r}(\Gamma_X) = \varinjlim_{\Delta} \mathcal{R}(\Delta)$ de la topologie limite inductive.

A.1.8. LEMME. La topologie de $R_{G_r}(\Gamma_X)$ ne dépend pas du choix de Γ_X .

Démonstration. Si Γ_X et Γ'_X sont deux choix, il existe Γ''_X et des homomorphismes $\Gamma''_X \rightarrow \Gamma_X$ et $\Gamma''_X \rightarrow \Gamma'_X$ qui sont acycliques. Si $\rho: \Delta \rightarrow \Gamma_X$ est acyclique et si Δ_1 désigne le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\quad} & \Delta \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ \Gamma''_X & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_X \end{array}$$

l'application $\mathcal{R}(\Delta) \rightarrow \mathcal{R}(\Delta_1)$ est continue et ouverte. Il en résulte que l'application $R_{G_r}(\Gamma_X) \rightarrow R_{G_r}(\Gamma''_X)$ est aussi continue et ouverte. Puisqu'elle est bijective, c'est un homéomorphisme. On démontre de même que l'application $R_{G_r}(\Gamma_X) \rightarrow R_{G_r}(\Gamma'_X)$ est un homéomorphisme.

A.1.9. Il résulte ainsi du lemme que $K'_A(X) = \varinjlim_{\Gamma} R_{G_r}(\Gamma_X)$ et donc $K_A(X) = K_0(A) \oplus K'_A(X)$ ont une topologie limite inductive naturelle. Le théorème suivant est maintenant un simple exercice (compte tenu de 3.12 et 3.13 en remplaçant les produits tensoriels de fibrés ou leurs puissances extérieures par les opérations analogues sur les représentations).

A.1.10. THÉORÈME. Soient A_1, A_2 et A_3 trois anneaux topologiques et soit $\phi: A_1 \times A_2 \rightarrow A_3$ une application $\mathbb{Z}$ -bilineaire, continue et induisant un homomorphisme d'anneaux

$$A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \rightarrow A_3$$

Si X_1 et X_2 sont deux CW-complexes finis, le cup-produit

$$K_{A_1}(X_1) \times K_{A_2}(X_2) \rightarrow K_{A_3}(X_3)$$

est alors une application continue. De même, si A est un anneau topologique commutatif, l'opération $\lambda^1: K_A(X) \rightarrow K_A(X)$ est une application continue.

A.1.11. Remarque. Si A est séparé, la topologie de $K_n(A)$ n'est pas nécessairement séparée. Par exemple, la topologie de $K_2(\mathbb{C})$ est la topologie grossière

d'après le théorème précédent et [39]. On voit qu'il n'en est pas de même pour $K_n(\mathbb{C})$ pour n impair d'après le §7. En particulier, le "régulateur" $K_{2n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ défini dans ce paragraphe est une application continue non triviale.

APPENDICE 2. INVARIANCE HOMOTOPIQUE DE L'HOMOLOGIE DE DE RHAM NON COMMUTATIVE

Soit A une k -algèbre quelconque avec $k \supset \mathbb{Q}$. Le but de cet appendice est la démonstration du théorème suivant :

A.2.1. THÉORÈME. Soit $\tilde{H}_n(A)$ le noyau de l'homomorphisme

$$B : HC_n(A) \longrightarrow H_{n+1}(A, A)$$

On a alors un isomorphisme

$$\tilde{H}_n(A[t]) \approx \tilde{H}_n(A)$$

Démonstration. L'homologie de De Rham non commutative $\bar{H}_n(A)$ est isomorphe à

$\text{Ker}(\bar{HC}_n(A) \xrightarrow{B} H_{n+1}(A, A)) \approx \text{Coker}(H_n(k) \rightarrow \bar{H}_n(A))$ d'après 2.10 et 2.15. On a donc

$\tilde{H}_n(\Lambda) \approx H_n(\Lambda)$ ou $H_n(\Lambda) \oplus HC_n(k)$ pour $\Lambda = A$ ou $A[t]$. Le théorème précédent est ainsi équivalent au même théorème pour l'homologie de De Rham non commutative, soit

$$\bar{H}_n(A[t]) \approx \bar{H}_n(A)$$

Si $\tilde{\Omega}_*(A)$ est l'algèbre graduée universelle construite en 1.24, le produit tensoriel gradué $k[t, dt] \otimes \tilde{\Omega}_*(A)$ est une quasi-résolution de $A[t]$ (dans le sens de 1.3) qu'on note $\Omega_*(A[t])$. Soit $K : \tilde{\Omega}_*(A[t]) \rightarrow \tilde{\Omega}_{*-1}(A)$ l'opérateur d'homotopie construit en 1.21 : on a alors l'identité

$$dK + Kd = \mathcal{J}_1^* - \mathcal{J}_0^*$$

où $\mathcal{J}_0^*$ et $\mathcal{J}_1^*$ sont les homomorphismes $\tilde{\Omega}_*(A[t]) \rightarrow \tilde{\Omega}_*(A)$ constituant à poser $t = 0$ ou $t = 1$. Cette identité implique que les homomorphismes correspondants (notés encore $\mathcal{J}_0^*$ et $\mathcal{J}_1^*$) :

$$\bar{H}_*(A[t]) \longrightarrow \bar{H}_*(A)$$

coïncident car on a un homomorphisme unique d'algèbres différentielles graduées

$\tilde{\Omega}_*(A[t]) \rightarrow \Omega_*(A[t])$ qui est l'identité sur $A[t]$. En considérant maintenant

$\Omega_*(A[t, u])$ et l'homomorphisme $A[u] \xrightarrow{\phi} A[u, t] = A[u][t]$ défini par $\phi(u) = ut$,

on en déduit que l'homomorphisme $\mathcal{J}_0^* : \bar{H}_*(A[u]) \rightarrow \bar{H}_*(A)$ est injectif

(faire $t = 0$ et $t = 1$). Donc $\bar{H}_*(A) \approx \bar{H}_*(A[u])$.

A.2.2. Exemple d'application. Soit A la k -algèbre des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans k (avec le même élément sur la diagonale). Soit

$\phi_t : A \rightarrow A[t]$ l'homomorphisme d'algèbres défini par la formule

$$\phi_t(a_{ji}) = (t^{j-i} a_{ji})$$

l'homomorphisme ϕ_t réalise une homotopie entre $\phi_1 = \text{Id}$ et ϕ_0 qui est l'augmentation sur k . Par conséquent, $\bar{H}_*(A) \approx \bar{H}_*(k)$ et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{HC}_n(A) \longrightarrow H_{n+1}(A, A) \longrightarrow \bar{HC}_{n+1}(A) \longrightarrow 0$$

$\bar{HC}_*$ désignant l'homologie cyclique réduite. Le calcul complet de $H_n(A, A)$ et de $HC_n(A)$ a été fait par A. Calvo [7] en s'appuyant sur ce résultat.

A.2.3. Remarque. On pourra comparer ce résultat avec celui d'A. Connes ([12] p. 125) et de T. Goodwillie (Topology 1984).

APPENDICE 3. ESPACES CLASSIFIANTS DE LA K-THÉORIE MULTIPLICATIVE

A.3.1. Soit E un A -fibré de fibre libre A^n défini par des fonctions de transition g_{ji} et soit (α_i) une partition de l'unité associée au recouvrement trivialisant.

On peut toujours munir E de la "connexion canonique" (4.18) définie par l'expression

$$\Gamma_i(x) = \sum \alpha_k(x) g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$$

Puisque toute connexion est homotope à la connexion canonique, la théorie précédente se recopie telle quelle dans un cadre simplicial, les α_k étant remplacés par les coordonnées barycentriques comme en 5.8.

Plus précisément, soit G le groupe topologique $GL(A)^{\text{top}}$ et soit $BG = BGL(A)^{\text{top}}$ son espace classifiant. Si A_* désigne l'anneau simplicial défini par $A_n = C^\infty(\Delta^n) \hat{\otimes} A$, on a aussi $BG = BGL(A_*)$. Soient maintenant Ω_A^* et $Z\Omega_A^*$ les groupes abéliens simpliciaux gradués définis par

$$\Omega_A^*(s) = \Omega_A^*(\Delta^s) \quad Z\Omega_A^*(s) = Z_A^*(\Delta^s)$$

(comparer avec [8] p. 264). Si X est un ensemble simplicial, l'ensemble des applications simpliciales de X dans Ω_A^* (resp. dans $Z\Omega_A^*$) s'identifie au groupe abélien des formes différentielles quelconques (resp. fermées pour la différentielle totale) de degré total n et à valeurs dans l'espace de Banach $\bar{\Omega}_*(A)$. Les groupes d'homotopie de Ω_A^* sont tous nuls d'après l'argument utilisé dans [8] p. 265. D'autre part, d'après le calcul des groupes $H_A^*(X)$ effectué en 4.8 (et qu'on doit transposer dans un contexte simplicial), on a une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux

$$0 \rightarrow Z\Omega_A^{n-1} \rightarrow \Omega_A^{n-1} \xrightarrow{d} Z\Omega_A^n$$

L'image de d est la composante neutre de $Z\Omega_A^n$ et la suite exacte précédente s'identifie à une fibration principale de groupe $Z\Omega_A^{n-1}$ et d'espace total contractile. Le même argument que celui utilisé dans 5.4 montre ainsi que les classes d'homotopie d'applications de X dans $Z\Omega_A^n$ s'identifie à $H_A^n(X) \approx \bigoplus_{p+q=n} H^p(X; \bar{H}_q(A))$. En particulier, le groupe abélien simplicial $Z\Omega_A^n$ s'identifie à un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane $\prod_{p+q=n} K(\pi_q, p)$ avec $\pi_q = \bar{H}_q(A)$.

A.3.2. De manière analogue, nous pouvons considérer le groupe abélien simplicial $\mathcal{C}_A^*$ défini par

$$\mathcal{C}_A^{2n}(s) = Z^n(\Delta^S; \bar{\Omega}_n A) \oplus \bigoplus_{\substack{p < q \\ p+q=2n}} \Omega^p(\Delta^S; \bar{\Omega}_q A)$$

$$\mathcal{C}_A^{2n+1}(s) = \bigoplus_{\substack{p < q \\ p+q=2n+1}} \Omega^p(\Delta^S; \bar{\Omega}_q A)$$

$\mathcal{C}_A^m(s)$ est contractile pour m impair (pour la même raison que Ω_A^n). Si on note $Z\mathcal{C}_A^m$ le noyau de la différentielle totale en général, on a ainsi la fibration principale d'espace total contractile

$$0 \longrightarrow Z\mathcal{C}_A^{2n-1} \longrightarrow \mathcal{C}_A^{2n-1} \xrightarrow{d} Z\mathcal{C}_A^{2n}$$

où l'image de d est la composante neutre de $Z\mathcal{C}_A^{2n}$ (d'après le calcul général des groupes $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ introduits dans 4.23). Le même argument que celui utilisé plus haut pour les groupes $H_A^n(X)$ montre que $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ s'identifie au groupe des classes d'homotopie d'applications de X dans $Z\mathcal{C}_A^{2n}$. On a ainsi les isomorphismes

$$[X, Z\mathcal{C}_A^{2n}] \approx H^n(X; \bar{\Omega}_n A) \oplus \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; \bar{\Omega}_q A) \approx \mathcal{H}_A^{2n}(X)$$

$$[X, Z\mathcal{C}_A^{2n-1}] \approx H^{n-1}(X; \bar{\Omega}_n A) \oplus \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p < q-1}} H^p(X; \bar{\Omega}_q A)$$

On notera que le deuxième groupe est différent de $\mathcal{H}_A^{2n-1}(X)$ en général.

A.3.3. Notons maintenant $Z\tilde{\Omega}_A^m$ le groupe abélien simplicial quotient $Z\mathcal{C}_A^m / Z\mathcal{C}_A^m$.

On a alors un diagramme commutatif de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} Z\mathcal{C}_A^{m-1} & \longrightarrow & \mathcal{C}_A^{m-1} & \xrightarrow{d} & Z\mathcal{C}_A^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z\Omega_A^{m-1} & \longrightarrow & \Omega_A^{m-1} & \xrightarrow{d} & Z\Omega_A^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z\tilde{\Omega}_A^{m-1} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_A^{m-1} & \xrightarrow{d} & Z\tilde{\Omega}_A^m \end{array}$$

avec aussi $\tilde{\Omega}_A^m = \Omega_A^m / \mathcal{C}_A^m$. Il est clair que $Z\tilde{\Omega}_A^m$ s'identifie à l'ensemble des formes fermées de $\tilde{\Omega}_A^m$ et que la deuxième colonne de ce diagramme est formé d'espaces acycliques si m est pair. Si X est un ensemble simplicial, un élément $\tilde{\omega}$ de $\Omega_A^m(X) / \mathcal{C}_A^m(X) = \tilde{\Omega}_A^m(X)$ définit une application simpliciale $f = f(\tilde{\omega})$ de X vers $\tilde{\Omega}_A^m$. En outre, si $\tilde{\omega}$ est fermée ($d\tilde{\omega} = 0$ dans $\tilde{\Omega}_A^{m+1}(X)$), f se factorise à travers $Z\tilde{\Omega}_A^m$: en effet, si ω est une forme sur Δ^S telle que $d\omega \in \mathcal{C}_A^*(\Delta^S)$, il existe

$\omega' \in \mathcal{C}_A^*(\Delta^S)$ telle que $d\omega' = d\omega$ car $\mathcal{H}_A^m(\Delta^S)$ est isomorphe à $\bar{H}_m(A) \approx H_A^m(\Delta^S)$. La correspondance $\tilde{\omega} \mapsto f(\tilde{\omega})$ définit ainsi un homomorphisme de $Z\tilde{\Omega}_A^m(X)$ vers l'ensemble des applications de X dans $Z\tilde{\Omega}_A^m$. En outre, si $\tilde{\omega} = d\omega_1$, l'application f se factorise en $d.f_1$:

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega_A^{m-1} \\ & \nearrow f_1 & \downarrow d \\ X & \xrightarrow{f} & Z\tilde{\Omega}_A^m \end{array}$$

avec Ω_A^{m-1} contractile. Donc f est homotope à 0 et on a ainsi défini un homomorphisme

$$\theta : \mathcal{H}_A^m(X) \longrightarrow [X, Z\tilde{\Omega}_A^m]$$

A.3.4. THÉORÈME. L'homomorphisme θ est injectif pour tout m . Si m est impair, θ est un isomorphisme. Plus précisément, on a les identités

$$\mathcal{H}_A^{2n-1}(X) \approx [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n-1}] \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q-1}} H^p(X; \bar{H}_q A) + H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A)$$

$$\mathcal{H}_A^{2n-1}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p>q \\ p+q=2n}} H^p(X; \bar{H}_q A)$$

$$[X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n}] \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p>q-2}} H^p(X; \bar{H}_q A) \oplus H^{n+1}(X; \bar{\Omega}_{n-1} A / \bar{B}_{n-1} A)$$

Dans le cas où $m = 2n$, l'application θ est induite par l'inclusion de $\bar{H}_{n-1}(A)$ dans $\bar{\Omega}_{n-1}(A) / \bar{B}_{n-1}(A)$ et est l'identité sur les autres composantes $H^p(X; \bar{H}_q A)$.

Démonstration. Soit $\tilde{\omega}$ un élément de $Z\tilde{\Omega}_A^m(X) / Z\mathcal{C}_A^m(X)$ tel que l'application $f = f(\tilde{\omega}) : X \rightarrow Z\tilde{\Omega}_A^m$ soit homotope à 0. Puisque $\Omega_A^{m-1} \xrightarrow{d} Z\tilde{\Omega}_A^m$ est une fibration, il en résulte que $\tilde{\omega} = d\omega'$. Donc θ est injectif. D'autre part, toute application $X \rightarrow Z\mathcal{C}_A^{2n}$ définit un élément de $\mathcal{H}_A^{2n}(X)$ et la fibration

$$Z\mathcal{C}_A^{2n-1} \longrightarrow \mathcal{C}_A^{2n-1} \longrightarrow Z\mathcal{C}_A^{2n}$$

d'espace total montre qu'on a un isomorphisme

$$\alpha : [X, Z\mathcal{C}_A^{2n}] \longrightarrow \mathcal{H}_A^{2n}(X)$$

(cf. A.3.3). Considérons maintenant le diagramme commutatif formé de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} H_A^{2n-1}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}_A^{2n-1}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}_A^{2n}(X) & \longrightarrow & H_A^{2n}(X) \\ \gamma \downarrow & & \theta \downarrow & & \downarrow \alpha^{-1} & & \downarrow \beta \\ [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n-1}] & \longrightarrow & [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n-1}] & \longrightarrow & [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n}] & \longrightarrow & [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n}] \end{array}$$

Dans ce diagramme, la première suite exacte est induite par la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_A^*(X) \longrightarrow \Omega_A^*(X) \longrightarrow \tilde{\Omega}_A^*(X) \longrightarrow 0$$

et la deuxième est induite par la fibration

$$Z\mathcal{C}_A^{2n} \longrightarrow Z\Omega_A^{2n} \longrightarrow Z\tilde{\Omega}_A^{2n}$$

La commutativité du diagramme de suites exactes résulte d'un examen du diagramme à neuf termes écrit en A.3.3. Puisque β, γ et α^{-1} sont des isomorphismes, θ est surjectif, donc bijectif (pour m impair).

D'après les calculs faits en 6.21, on a

$$Z\mathcal{C}_A^{2n-1}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n-1 \\ q>p-1}} H^p(X; \bar{H}_q(A) + H^n(X; \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A))$$

ce qui montre que $Z\tilde{\Omega}_A^{2n-1}$ est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane

$G = \prod_{\substack{p+q=2n-1 \\ p>q}} K(\pi_q, p)$ avec $\pi_q = \bar{H}_qA$ si $p > q-1$ et $\pi_q = \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A$ si $p = q-1$. La fibration

$$Z\tilde{\Omega}_A^{2n-1} \longrightarrow Z\Omega_A^{2n-1} \longrightarrow Z\tilde{\Omega}_A^{2n}$$

avec $Z\tilde{\Omega}_A^{2n-1}$ contractile montre donc que $Z\tilde{\Omega}_A^{2n}$ a le type d'homotopie de BG. En particulier, on a un isomorphisme de groupes

$$[X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n}] \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p>q-2}} H^p(X; \bar{H}_qA) \oplus H^{n+1}(X; \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A)$$

Il reste à déterminer l'homomorphisme $Z\mathcal{C}_A^{2n}(X) \xrightarrow{\theta} [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n}]$ compte tenu des isomorphismes précédents. Pour cela, on remarque le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p>q}} H^p(X; \bar{H}_qA) \approx Z\mathcal{C}_A^{2n} & \xrightarrow{\theta} & [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2n}] \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p>q-2}} H^p(X; \bar{H}_qA) + \\ & \uparrow & \uparrow \\ & & H^{n+1}(X; \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A) \\ \bigoplus_{p+q=2n} H^p(X; \bar{H}_qA) \approx H_A^{2n}(X) & \xrightarrow{\approx} & [X, Z\Omega_A^{2n}] \end{array}$$

Par une chasse au diagramme, on voit alors que θ est l'identité sur les composantes $H^p(X; \bar{H}_qA)$ pour $p > q-2$ et est induit par l'inclusion de $\bar{H}_{n-1}(A)$ dans $\bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A$ pour $p = q-2$.

A.3.5. Le caractère de Chern Ch_r pour des fibrés de fibre A^m peut s'interpréter comme un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$Ch_r : BGL_m(A)^{\text{top}} \longrightarrow Z\Omega_A^{2r}$$

En effet, au fibré universel défini par ses fonctions de transition

$g_{ji} : \Delta^S \rightarrow GL_m(A)$ (cf. 5.4), on peut associer la forme différentielle fermée

$$\frac{1}{r!} \text{Tr}(R^r)$$

où $R = d\Gamma + \Gamma^2$ est la courbure associée à la connexion Γ définie "localement" par la formule éprouvée

$$\Gamma_i = \sum x_k g_{ki}^{-1} dg_{ki}$$

les x_k représentant les coordonnées barycentriques (cf. 5.8 et 5.27). Les applications Ch_r se stabilisent et définissent une application notée encore Ch_r

$$Ch_r : BGL(A)^{\text{top}} \rightarrow Z\Omega_A^{2r}$$

dont l'image est dans la composante neutre du groupe simplicial $Z\Omega_A^{2r}$. On notera $\tilde{Ch}_r$ la composition des applications

$$BGL(A)^{\text{top}} \rightarrow Z\Omega_A^{2r} \rightarrow \tilde{Z}\Omega_A^{2r} = Z\Omega_A^{2r}/Z\mathcal{C}_A^{2r}$$

Considérons maintenant le produit fibré MK_A^{2r} défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_A^{2r} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_A^{2r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL(A)^{\text{top}} & \longrightarrow & \tilde{Z}\Omega_A^{2r} \end{array}$$

où $\tilde{\Omega}_A^{2r-1}$ est l'espace contractile $\Omega_A^{2r-1}/\mathcal{C}_A^{2r-1}$. Nous définissons enfin la "K-théorie multiplicative réduite" $MK_A^{2r}(X)$ comme

$$\bigcap_{x \in X^0} \text{Ker}(MK_A^{2r}(X) \rightarrow MK_A^{2r}(\{x\}))$$

ou encore (si X est connexe) comme le conoyau de l'homomorphisme $MK_A^{2r}(\text{Point}) \rightarrow MK_A^{2r}(X)$. Cette K-théorie réduite est construite sur le même modèle que $MK_A^{2r}(X)$, mais en considérant des fibrés de fibre libre et en identifiant à 0 les éléments de $\mathcal{C}_r$ de la forme $(T, 0, 0)$ avec T trivial sur chaque composante connexe de X (cf. [25] p. 57 pour une discussion analogue).

A.3.6. THÉORÈME. Soit X un ensemble simplicial tel que sa réalisation géométrique $|X|$ ait le type d'homotopie d'un CW-complexe fini. On a alors un isomorphisme naturel

$$MK_A^{2r}(X) \approx [X, MK_A^{2r}]$$

la structure de groupe du deuxième membre étant induite par la structure de H-espace sur le produit fibré MK_A^{2r} .

Démonstration. Reconsidérons la définition de la K-théorie multiplicative (réduite)

en nous plaçant dans un cadre simplicial et en munissant tous les fibrés repérés de la connexion canonique (5.1 et 5.8) : nous obtenons bien entendu le même groupe car toute connexion est homotope à la connexion canonique. Considérons le produit fibré MK_A^{2r} défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} MK_A^{2r} & \longrightarrow & \Omega_A^{2r-1} \\ \downarrow & & \downarrow d_1 \\ BGL(A)^{top} & \xrightarrow{\tilde{Ch}_r} & Z\tilde{\Omega}_A^{2r} \end{array}$$

La projection $MK_A^{2r} \rightarrow MK_A^{2r}$ est une équivalence d'homotopie (car Ω_A^{2r-1} et $\tilde{\Omega}_A^{2r-1}$ sont tous deux contractiles), $\text{Ker } d_1$ a le type d'homotopie de $Z\tilde{\Omega}_A^{2r-1} = \text{Ker } d : \tilde{\Omega}_A^{2r-1} \rightarrow Z\tilde{\Omega}_A^{2r}$ et on a le diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2r-1}] & \xleftarrow{u} & [X, \text{Ker } d_1] \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & \tilde{\mathcal{K}}_A^{2r-1}(X) & \end{array}$$

Une application $X \rightarrow MK_A^{2r}$ définit un fibré repéré E sur X et une forme différentielle $\omega_r \in \Omega_A^{2r-1}(X)$ telle que $Ch_r D \equiv d\omega_r \pmod{\mathcal{C}_A^{2r}(X)}$, donc définit un élément de $MK_A^{2r}(X)$. Puisque $MK_A^{2r}(X \times I) \approx MK_A^{2r}(X)$ (appliquer le lemme des cinq à la suite exacte 7.7 écrite en K-théorie réduite), on a un homomorphisme bien défini

$$\sigma : [X, MK_A^{2r}] \approx [X, MK_A^{2r}] \longrightarrow MK_A^{2r}(X)$$

Enfin, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} K_A^{2r-1, top}(X) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{K}}_A^{2r-1}(X) & \longrightarrow & MK_A^{2r}(X) & \longrightarrow & K_A^{2r, top}(X) \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}_A^{2r}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \approx & & \uparrow \sigma & & \downarrow \approx \\ [X, GL(A)^{top}] & \longrightarrow & [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2r-1}] & \longrightarrow & [X, MK_A^{2r}] & \longrightarrow & [X, BGL(A)^{top}] \longrightarrow [X, Z\tilde{\Omega}_A^{2r}] \end{array}$$

Dans ce diagramme, θ est injectif d'après A.3.4; la quatrième flèche verticale est un isomorphisme car X a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini et il en est de même de la première pour la même raison. Enfin, la deuxième flèche est un isomorphisme d'après ce qui précède. Il en résulte que σ est un isomorphisme d'après une variante du lemme des cinq.

A.3.7. L'application composée

$$BGL(A) \longrightarrow BGL(A)^{top} \longrightarrow Z\tilde{\Omega}_A^{2r}$$

est réduite à 0 car les fonctions de transition définissant un A-fibré plat sont localement constantes. Ceci montre que l'application $BGL(A) \rightarrow BGL(A)^{top}$ se relève canoniquement en une application $\phi: BGL(A) \rightarrow MK_A^{2r}$: considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & MK_A^{2r} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\Omega}_A^{2r-1} \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 BGL(A) & & & & \\
 & \searrow & & & \\
 & & BGL(A)^{top} & \xrightarrow{\quad} & Z\tilde{\Omega}_A^{2r}
 \end{array}$$

Ainsi l'application $K_A^i(X) \rightarrow MK_A^{2r}(X)$ définie en 7.10 et 7.11 (du moins en K-théorie réduite) est induite par une application au niveau des espaces classifiants.

A.3.8. Les homomorphismes $Ch_r: K_A(X) \rightarrow MK_A^{2r}(X)$ et les applications associées $BGL(A) \rightarrow MK_A^{2r}$ ne sont pas indépendantes par rapport à r . Ainsi l'homomorphisme S de Connes induit un endomorphisme de degré -2 du complexe $\Omega_A^*(X)$ mais ne respecte pas malheureusement le sous-complexe $\mathcal{E}_A^*(X)$. Ceci conduit à des complications analogues à celles décrites en 6.25 et que nous ne détaillerons pas. Si par exemple X est une sphère S^r , l'homomorphisme $Ch_r: K_r(A) \rightarrow MK_r(A)$ que nous avons construit en 7.15 détermine en fait tous les autres

$Ch_{r-i}: K_r(A) \rightarrow MK_r^{2r-2i}(A)$ (dans le cas du complexe universel).

APPENDICE 4. K-THÉORIE ALGÈBRE DE L'ALGÈBRE DES FONCTIONS C^∞
 SUR UNE VARIÉTÉ

A.4.1. Soit Λ l'algèbre commutative $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et soit f l'élément $1 - x_1 x_2 \dots x_n \in \Lambda$. Alors l'algèbre Λ/f s'identifie à $\mathbb{Z}[x_2, \dots, x_n, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$ et le symbole $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ est l'élément de $K_n(\Lambda_f)$ défini par $\partial(x) = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ où ∂ est l'opérateur bord de la suite exacte de localisation de Quillen

$$K_n(\Lambda) \rightarrow K_n(\Lambda_f) \rightarrow K_{n-1}(\Lambda/f) \rightarrow K_{n-1}(\Lambda) \rightarrow \dots$$

et où $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ est le symbole de Steinberg (cup-produit d'éléments de K_1 représentés par les éléments x_i).

Si A est une algèbre commutative quelconque et si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des éléments de A tels que $1 - a_1 a_2 \dots a_n$ soit inversible, on définit le symbole $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ comme l'élément de $K_n(A)$ image de $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ par l'homomorphisme évident de Λ_f dans A (cf. [35]).

Soit maintenant $\Omega_*(A)$ le complexe de De Rham commutatif (au sens gradué) universel : $\Omega_1(A)$ est ainsi $H_1(A, A)$ et $\Omega_n(A)$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure de $\Omega_1(A)$ vu comme un A -module.

A.4.2. THEOREME. Soit A une $\mathbb{Q}$ -algèbre. Alors l'homomorphisme $Ch_n : K_n(A) \rightarrow Z_n(A)$ défini dans 5.13 associe au symbole $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme différentielle fermée

$$- \frac{da_1 \wedge da_2 \wedge \dots \wedge da_n}{1 - a_1 a_2 \dots a_n}$$

Démonstration. Soit Λ' l'algèbre $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et soit Λ'' l'algèbre

$\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n, y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1}]$. On définit un homomorphisme de Λ' dans Λ'' en posant

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - x_1 x_2 \dots x_n \\ y_2 &= x_2 \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= x_n \end{aligned}$$

(la première relation définit x_1 en termes de $y_1, \dots, y_n, y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1}$).

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_n(\Lambda') & \longrightarrow & K_n(\Lambda'') \\ c_n' \downarrow & & \downarrow c_n'' \\ Z_n(\Lambda') & \longrightarrow & Z_n(\Lambda'') \end{array}$$

où $\Omega_*(\Lambda')$ (resp. $\Omega_*(\Lambda'')$) est obtenu à partir de $\Omega_*(\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n])$ (resp. $\Omega_*(\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n])$) en inversant $1 - x_1 \dots x_n$ (resp. $y_1, y_2, \dots, y_n$). Puisque $\Omega_1(\Lambda') \longrightarrow \Omega_1(\Lambda'')$ est injective, il en est de même de $Z_n(\Lambda') \longrightarrow Z_n(\Lambda'')$.

D'autre part, le symbole $\{y_1, \dots, y_n\}$ est l'image du symbole $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ par l'homomorphisme $K_n(\Lambda') \longrightarrow K_n(\Lambda'')$: on a en effet le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_n(\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n, y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1}]) & \longleftarrow & K_n(\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n, (1-x_1 \dots x_n)^{-1}]) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ K_{n-1}(\mathbb{Q}[y_2, \dots, y_n, y_2^{-1}, \dots, y_n^{-1}]) & \longleftarrow & K_{n-1}(\mathbb{Q}[y_2, \dots, y_n]) \end{array}$$

En outre,

$$\begin{aligned} c_n''(\{y_1, y_2, \dots, y_n\}) &= \frac{dy_1}{y_1} \wedge \frac{dy_2}{y_2} \wedge \dots \wedge \frac{dy_n}{y_n} \\ &= \frac{(dx_1 \cdot x_2 \dots x_n + x_1 \cdot dx_2 \cdot x_3 \dots x_n + \dots + x_1 \dots x_{n-1} dx_n) \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n}{(1-x_1 x_2 \dots x_n) x_2 \dots x_n} \\ &= - \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{1 - x_1 x_2 \dots x_n} \end{aligned}$$

A.4.3. THÉORÈME. Soit X une variété différentiable ayant un nombre fini de cartes et soit $A = C^\infty(X)$. Alors l'homomorphisme composé évident $K_n(A) \rightarrow Z_n(A) \rightarrow Z^n(X)$ contient $B^n(X)$.

Démonstration. Soit (U_k) un recouvrement ouvert de X par un nombre fini de cartes $U_k \approx \mathbb{R}^n$ et soit (η_k) une partition de l'unité associée à (U_k) .

Soit $\omega \in B^n(X)$, i.e. $\omega = d\alpha = \sum d\omega_k$ avec $\omega_k = \eta_k \alpha$. En outre, chaque ω_k s'écrit en coordonnées locales comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de la forme $d(\eta_k g_1) \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$ ou encore

$d(\eta_k g_1) \wedge d(\xi x_{i_2}) \wedge d(\xi x_{i_3}) \wedge \dots \wedge d(\xi x_{i_n})$ où ξ est à support compact et égal à 1 au voisinage du support de η_k . Par conséquent, ω est combinaison linéaire à coefficients entiers de formes différentielles du type $\bar{\omega} = df_1 \wedge \dots \wedge df_n$ où les f_i sont à support compact. Il suffit donc de montrer que

$\bar{\omega} = df_1 \wedge \dots \wedge df_n \in \text{Im}(K_n(A) \rightarrow Z^n(X))$. Si on pose $f = (f_1, \dots, f_n)$, on voit que $\bar{\omega} = f^*(dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n)$ avec $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ (à support dans U_k), (t_i) représentant les coordonnées locales de $\mathbb{R}^n$. Puisque f est à support compact, il existe un réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$ et une factorisation de f

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\
 & \searrow h & \downarrow p \\
 & & \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = T^n
 \end{array}$$

où p^* est la projection canonique et où $p^*(\theta) = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$, θ étant la forme volume de $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Donc $\bar{\omega}$ est aussi égal à $h^*(\theta)$ et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 K_n(C^\infty(T^n)) & \xrightarrow{\quad} & K_n(C^\infty(X)) \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \\
 Z^n(T^n) & \xrightarrow{h^*} & Z^n(X)
 \end{array}$$

Puisque $h^*(\theta) = \bar{\omega}$ et que ϕ est surjectif (par cup-produit), le théorème en résulte.

A.4.4. THÉORÈME. Soit X une sphère de dimension n . Alors l'homomorphisme composé $K_n(C^\infty(X)) \rightarrow Z^n(X) \rightarrow H^n(X) = \mathbb{R}$ est différent de 0 : son image est un sous-groupe de rang 1 de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit V la sous-variété ouverte de $\mathbb{C}^n$ définie par l'inéquation $y_1 y_2 \dots y_n \neq 1$ et soit $\psi: T^n \rightarrow V$ l'application définie par $\psi(x_1, \dots, x_n) = ((1-x_1)x_2^{-1} \dots x_n^{-1}, x_2, \dots, x_n)$.

Comme nous l'avons vu précédemment,

$$\psi^* \left(\frac{dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n}{1 - y_1 \dots y_n} \right) = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$$

qui est la forme volume de T^n : donc $H^n(V) \neq 0$. Remarquons que $\psi|_{T^{n-1}}$ est

l'application $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (0, x_2, \dots, x_n)$, donc est homotope à une application constante. Par le théorème d'extension des homotopies, ψ est donc homotope à

$\psi': T^n \rightarrow V$ avec $\psi'|_{T^{n-1}}$ constante. D'autre part, $T^n/T^{n-1} \sim T^{n-1} \times S^1/T^{n-1} \sim S(T_+^{n-1}) \sim S(T^{n-1}) \vee S^1$ et $S(T^{n-1}) \sim S^n \vee Y$ pour un certain Y . Il existe donc une application de degré 1 de S^n dans T^n/T^{n-1} (i.e. induisant un isomorphisme sur H_n). En composant cette application avec $\psi': T^n/T^{n-1} \rightarrow V$, on en déduit par homotopie une application C^∞

$$\gamma: S^n \rightarrow V$$

induisant une injection au niveau des groupes H_n . Considérons maintenant le symbole $\langle y_1, \dots, y_n \rangle \in K_n(C^\infty(V))$. Son image dans $K_n(C^\infty(T^n))$ a une classe caractéristique dans $H^n(T^n)$ non triviale. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_n(C^\infty(S^n)) & \longleftarrow & K_n(C^\infty(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(S^n) & \longleftarrow & H^n(V) \end{array}$$

permet de montrer que l'image de $K_n(C^\infty(S^n))$ dans $H^n(S^n)$ est non triviale. Pour démontrer que c'est un sous-groupe de rang 1, il suffit de remarquer que l'application $K_n(C^\infty(S^n)) \rightarrow H^n(S^n)$ se factorise à travers $K_n^{\text{top}}(C^\infty(S^n))$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$ d'après la périodicité de Bott.

A.4.5. Remarque. Il serait intéressant de comparer les deux réseaux de $\mathbb{R}$ formés des images de $K_n(C^\infty(S^n))$ et de $K_n^{\text{top}}(C^\infty(S^n))$ respectivement; en d'autres termes de déterminer l'image de $K_n(C^\infty(S^n))$ dans $K_n^{\text{top}}(C^\infty(S^n)) \approx \mathbb{Z}$.

A.4.6. THÉORÈME. Soit X une variété quelconque et soit n un entier impair. Alors l'image de $K_n(C^\infty(X))$ dans $H^n(X)$ est un sous-groupe libre de rang la dimension de $H^n(X)$.

Démonstration. Une sphère de dimension impaire n est un modèle rationnel de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Q}, n)$. Par conséquent, à une constante multiplicative près, les générateurs de $H^n(X)$ sont représentés par des applications $X \rightarrow S^n$ indépendantes. Le théorème A.4.6. résulte alors du théorème précédent.

A.4.7. THÉORÈME. Soit X une variété orientée de dimension n . Alors l'image de l'homomorphisme $K_n(C^\infty(X)) \rightarrow H^n(X) \approx \mathbb{R}$ est un sous-groupe de rang un.

Démonstration. Puisque X est orientée, il existe une application f de degré un de X dans S^n . Il suffit donc de contempler le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_n(C^\infty(X)) & \longrightarrow & K_n(C^\infty(S^n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X) & \longrightarrow & H^n(S^n) \end{array}$$

en appliquant le théorème A.4.4.

Les considérations du §6 se généralisent sans peine à des algèbres plus générales que les algèbres de Banach comme l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété. Dans cette direction, on peut par exemple démontrer le théorème suivant :

A.4.8. THÉORÈME. Soit X une variété orientée de dimension n . Alors le caractère de Chern relatif $K_{n+1}^{\text{rel}}(C^\infty(X)) \rightarrow H^n(X) \approx \mathbb{R}$ est surjectif.

Démonstration. On sait que l'homomorphisme $K_1^{rel}(\mathbb{R}) \rightarrow HC_0(\mathbb{R}) \approx H^0(\text{Point}) \approx \mathbb{R}$ est surjectif et que l'homomorphisme $K_n(C^\infty(X)) \rightarrow H^n(X)$ a comme image un sous-groupe de rang 1 (théorème A.4.7). D'après la propriété multiplicative du caractère de Chern relatif (6.28), le théorème en résulte. Bien entendu, on a un théorème analogue pour les fonctions à valeurs complexes.

A.4.9. Remarque. Soit $X_n = \text{Ker}(K_{n+1}(C^\infty(X)) \rightarrow K_{n+1}^{top}(C^\infty(X))) =$
 $= \text{Im}(K_{n+1}^{rel}(C^\infty(X)) \rightarrow K_{n+1}(C^\infty(X)))$. Puisque l'image de $K_{n+2}^{top}(C^\infty(X))$ dans $H^n(X)$ est un réseau de rang ≤ 1 , les considérations précédentes montrent que X_n se surjette sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ($\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ si on considère des fonctions à valeurs complexes).

APPENDICE 5. HOMOLOGIE CYCLIQUE DE L'ALGÈBRE DES FONCTIONS C^∞ SUR UNE VARIÉTÉ

A.5.1. Dans [12] A. Connes a calculé l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique topologique (4.1) de l'algèbre A des fonctions C^∞ sur une variété compacte. On trouve

$$H_n^{\text{top}}(A, A) \approx \Omega^n(X)$$

$$HC_n^{\text{top}}(A) \approx \Omega^n(X)/B^n(X) \oplus H^{n-2}(X) \oplus H^{n-4}(X) \oplus \dots$$

Nous allons démontrer ici un résultat voisin, à savoir l'existence d'homomorphismes

$$H_n(A, A) \xrightarrow{u_n} \Omega^n(X)$$

$$HC_n(A) \xrightarrow{v_n} \Omega^n(X)/B^n(X) \oplus H^{n-2}(X) \oplus H^{n-4}(X) \oplus \dots$$

qui sont des épimorphismes. Ici, $H_n(A, A)$ et $HC_n(A)$ représentent bien entendu les homologies de Hochschild ou cyclique algébriques de A .

Le premier homomorphisme u_n est simplement induit par l'application

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \longrightarrow a_0 \, da_1 \wedge da_2 \wedge \dots \wedge da_n$$

Puisque la variété est compacte, toute forme différentielle de degré n est combinaison linéaire finie de formes du type $a_0 \, da_1 \wedge \dots \wedge da_n$. L'élément

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_0 \otimes a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)}$$

est alors un cycle dans le complexe de Hochschild dont l'image par u_n est la forme différentielle $a_0 \, da_1 \wedge \dots \wedge da_n$.

A.5.2. L'existence et la surjectivité de l'homomorphisme v_n est plus délicate à montrer. Cependant, la première composante $v_n^0 : HC_n(A) \longrightarrow \Omega^n(X)/B^n(X)$ est facile à définir : elle résulte évidemment de A.5.1. et du fait que la différence $a_0 \, da_1 \wedge \dots \wedge da_n - (-1)^n a_n \, da_0 \wedge da_1 \wedge \dots \wedge da_{n-1}$ est une forme exacte.

L'image de $S : HC_n(A) \rightarrow HC_{n-2}(A)$ est le noyau de

$$B : HC_{n-2}(A) \rightarrow H_{n-1}(A, A)$$

c'est-à-dire essentiellement l'homologie de De Rham non commutative $\bar{H}_{n-2}(A)$.

Plus précisément, d'après le théorème 2.15, on trouve $\bar{H}_{n-2}(A)$ si $n = 2$ où $\bar{H}_{n-2}(A) \oplus HC_{n-2}(k)$ ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si $n > 2$. Il est facile de décrire un homomorphisme

$$\bar{H}_{n-2}(A) \rightarrow H^{n-2}(X)$$

par la correspondance $a_0 da_1 \dots da_{n-2} \mapsto a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge \dots \wedge da_{n-2}$. Ainsi, en appliquant l'homomorphisme S un certain nombre de fois, on définit complètement l'homomorphisme v_n cherché.

A.5.3. THÉORÈME. L'homomorphisme v_n décrit précédemment est un épimorphisme.

Démonstration. Un élément ω_n de $\Omega^n(X)/B^n(X)$ est l'image par v_n de $I(\theta_n)$ où $\theta_n \in H_n(A, A)$ et $I : H_n(A, A) \rightarrow HC_n(A)$. En raison de la suite exacte

$$H_n(A, A) \rightarrow HC_n(A) \rightarrow \tilde{H}_{n-2}(A) \rightarrow 0$$

où $\tilde{H}_{n-2}(A) = \bar{H}_{n-2}(A)$ si $n = 2$ et

$$= \bar{H}_{n-2}(A) \oplus HC_{n-2}(k) \text{ si } n > 2.$$

on voit que la surjectivité de v_n est équivalente à la surjectivité de l'homomorphisme

$$w_n : \bar{H}_{n-2}(A) \rightarrow E_{n-2}$$

où

$$E_{n-2} = H^{n-2}(X) \oplus H^{n-4}(X) \oplus \dots \oplus H^1(X) \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$E_{n-2} = H^{n-2}(X) \oplus H^{n-4}(X) \oplus \dots \oplus H^2(X) \oplus \tilde{H}^0(X) \text{ si } n \text{ est pair.}$$

D'après [23], nous savons par ailleurs que le caractère de Chern tronqué

$$K_0(A) \rightarrow E_{n-2}$$

est un réseau dans l'espace vectoriel de dimension finie E_{n-2} . D'autre part, d'après le §1, il se factorise à travers $\bar{H}_{n-2}(A)$. La surjectivité de w_n , donc celle de v_n , en résulte immédiatement.

A.5.4. Remarque. L'argument précédent s'applique aussi à l'algèbre A des fonctions de classe C^k sur X avec $k \geq 1$.

Max KAROUBI
UFR de Mathématiques
Université Paris VII
2 place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05

RÉFÉRENCES

- [1] M.F. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro. Clifford modules. *Topology* 3, 3-38 (1964)
- [2] M.F. Atiyah et F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. *Proc. symposium in Pure Maths, Amer. Math. Soc.* 3, 7-38 (1961).
- [3] H. Bass. *Algebraic K-theory*. Benjamin (1968)
- [4] A.A. Beilinson. Higher regulators and values of L-functions of curves. *Funk. Analysis* 14, n°2, 116-117 (1980).
- [5] A. Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Annales Sci. Ec. Norm. Sup.* (4) 7, 235-272 (1974).
- [6] D. Burghélée. The cyclic homology of the group rings-*Comment. Math. Helvetici* 60, 354-365 (1985).
- [7] A. Calvo. Homologie cyclique de l'algèbre des matrices triangulaires (à paraître).
- [8] H. Cartan. Théories cohomologiques. *invent. Math.* 35, 261-271 (1976).
- [9] H. Cartan et S. Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press. Princeton, New-Jersey (1956).
- [10] J. Cheeger et J. Simons. Differential characters and geometric invariants. *Lecture Notes in Math.* 1167, Springer (1985).
- [11] S.S. Chern et J. Simons. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals of Math.* 99, 48-69 (1974).
- [12] A. Connes. Non commutative differential geometry. *Publ. Math. I.H.E.S.* n° 62, 257-360 (1985).
- [13] A. Connes. Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n . *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 296, 953-959 (1983).
- [14] A. Connes et M. Karoubi. Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm. *C.R. Acad. Sci. Paris*. t. 299, 963-968 (1984).
- [15] K. Dennis. Conférence Evanston 1976 (non publiée).
- [16] R. Douady. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Astérisque* 16, Société Mathématique de France (1974).

- [17] H. Esnault. (à paraître).
- [18] A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques. Memoirs of the A.M.S., n°16 (1955).
- [19] J.C. Hausmann et D. Husemoller. Acyclic maps. L'enseignement mathématique XXV, 73-75 (1979).
- [20] G. Hochschild, B. Kostant et A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 102, 383-408 (1962).
- [21] J. Jones. (à paraître).
- [22] D.M. Kan et W.P. Thurston. Every connected spaces has the homology of a $K(G,1)$. Topology 15, n° 3, 253-258 (1976).
- [23] M. Karoubi. Séminaire Cartan-Schwartz 1963/1964, exposé 16, New-York, Benjamin (1967).
- [24] M. Karoubi. Foncteurs dérivés et K-théorie. Springer Lecture Notes 136 (1970).
- [25] M. Karoubi. K-theory. An introduction. Grundlehren 226. Springer-Verlag (1978).
- [26] M. Karoubi. Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal. Annals of Math. 112, 205-257 (1980).
- [27] M. Karoubi. Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique. Canadian Math. Soc. Conference Proceedings, vol. 2, Part I, 19-27 (1982).
- [28] M. Karoubi. Quatre Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris t. 297, 381-384, 447-450, 513-516 et 557-560 (1983).
- [29] M. Karoubi. K-théorie multiplicative : deux Notes aux C.R. Acad. Sci. Paris t. 302, 321-324 et t. 303, 507-510 (1986)
- [30] M. Karoubi. K-théorie multiplicative. Prépublication Université Paris VII (1985).
- [31] M. Karoubi, Formule de Künneth en homologie cyclique. C.R. Acad. Sc. Paris t. 303 p. 527,595.
- [32] M. Karoubi et C. Leruste. Méthodes de géométrie différentielle en topologie algébrique. Publications Université de Paris VII (1982).
A paraître en version anglaise dans Cambridge University Press (1987).

- [33] Ch. Kratzer. λ -structure en K-théorie algébrique. *Commentarii Math. Helvetici* 55, 233-253 (1980).
- [34] J.L. Loday. K-théorie algébrique et représentations de groupes. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.*, 309-377 (1976).
- [35] J.L. Loday. Symboles en K-théorie algébrique supérieure. *C.R. Acad. Sci. Paris* 292, 863-866 (1981).
- [36] J.L. Loday et D. Quillen. Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. *Commentarii Math. Helvetici* 59, 565-591 (1984).
- [37] Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg - New-York (1975).
- [38] J.P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Princeton, New-Jersey, Van Nostrand (1968).
- [39] J. Milnor. *Introduction to algebraic K-theory*. *Annals of Math. Studies* n°72. Princeton University Press (1974).
- [40] J. Milnor et J. Stasheff. *Lectures on characteristic classes*. *Ann. of Math. Studies* n°197. Princeton University Press (1974).
- [41] O. Pekonen. Secondary invariants of flat bundles. *C.R. Acad. Sci. Paris* t. 304, 13-14 (1987).
- [42] S.B. Priddy. On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group. *Proc. Symp. in Pure Math.*, Amer. Math. Soc., 217-220 (1971).
- [43] D. Quillen. Higher algebraic K-theory. *Lecture Notes in Math.* 341, 85-147 (1973).
- [44] G. Segal. En préparation.
- [45] N. Stenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press (1951)
- [46] A. Suslin. On the K-theory of local fields. *Journal of Pure and Applied Algebra* 34, 301-318 (1984).
- [47] B.L. Tsygan. Homology of Lie algebras of matrices over rings and Hochschild homologies. *Uspehi Mat. Nauk.* tom 38, 217-218 (1983).
- [48] J.B. Wagoner. Delooping classifying spaces in algebraic K-theory. *Topology* 11, 340-370 (1972).
- [49] J.H.C. Whitehead. Combinatorial homotopy I. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55, 213-245 (1949).

INDEX TERMINOLOGIQUE

Acyclique (espace)	43
Acyclique (application)	43
A-fibré	58
A-fibré plat	43
A-fibré plat virtuel	43
Caractères de Chern	
pour K_0	18,34
pour K_1	39
pour K_i	39
pour K_i^{rel}	100
pour K_i^{top}	62,63
pour $K_A(X)$	70
pour $K_A^{rel}(X)$	97
pour $K_A^{top}(X)$	60
Classes de Chern	20
Complexe de Hochschild	24
Complexe de Hochschild normalisé	29
Complexes définissant l'homologie cyclique	24,25
Connexion	11,59
Connexion partielle	58
Connexion de Levi-Civita	12
Connexion simpliciale	75,84
Connexion à courbure plate	63
Connexion (Matrice d'une)	11,12
Courbure	13,59
Fibré repéré	72
Fibré plat.	43
Homologie de Hochschild	24
Homologie cyclique	23,24,25

Homologie cyclique réduite	28
Homologie cyclique d'un groupe	36
Homologie et cohomologie cycliques topologiques	51,52
Homologie de De Rham non commutative	9,19,52
Invariance de Morita	10,34
K-théorie algébrique	42
K-théorie topologique	58
K-théorie relative	87,94,96
K-théorie multiplicative	106,110
Opérateur d'homotopie	17
Quasi-résolution d'une algèbre	9
Représentation virtuelle	119
Trace graduée	9

INDEX DES NOTATIONS

A^+	algèbre A à laquelle on a ajouté un élément unité	25
A_*	anneau simplicial	84
b	différentielle du complexe de Hochschild ou du complexe cyclique	23
b'		23
B		24
B'		25
BG	espace classifiant du groupe (discret ou topologique) G	73
$BGL(A)$ ou $BGL(A)^\delta$	espace classifiant du groupe discret $GL(A)$	
$BGL(A)^{top}$	espace classifiant du groupe topologique $GL(A)$	
$C_n^\lambda(A)$	complexe définissant l'homologie cyclique	24
$ch, \tilde{ch}_r, ch_r^{top}$, etc...	différentes notations pour les caractères de Chern : voir l'index terminologique	
C_n	classes de Chern	20
$\mathcal{C}_n^n(X, A)$ ou $\mathcal{C}_A^n(X)$		65
D_n	homomorphisme de Dennis	37
d	différentielle du complexe de De Rham	9,19,52
$H_n(A, A)$	homologie de Hochschild de A à coefficients dans le bimodule A	24
$H_n^\lambda(A)$ ou $HC_n(A)$	homologie cyclique	23,24
$H_n^n(A)$ ou $HC^n(A)$	cohomologie cyclique	51
$\bar{H}_n^\lambda(A)$ ou $\bar{H}_n(A)$	homologie cyclique réduite	28
$\bar{H}_n(A)$ ou $H_n^{\Omega}(A)$	homologie de De Rham non commutative	9,19,52
$H_n^{\lambda top}(A)$ ou $HC_n^{top}(A)$	homologie cyclique topologique	51,52
$\bar{H}_n^{top}(A)$ (ou simplement $\bar{H}_n(A)$)	homologie de De Rham non commutative topologique	51,52
$H_A^*(X)$		54,56
$\mathcal{H}_A^*(X)$		65,68

$\mathcal{H}_A^{i*}(X)$	97
$\tilde{\mathcal{H}}_A^{i*}(X)$	97
$HC_n(G)$ homologie cyclique du groupe G	36
$K_n(A)$	42
$K_n^{top}(A)$	62
$K_A(X)$	49
$K_A^{top}(X)$	58
$K_A^{-1top}(X)$ ensemble des classes d'homotopie de X dans $GL(A)$	
$K_n^{rel}(A)$	87,94,96
$K_A^{rel}(X)$	87,94,96
$MK_{\mathbb{C}}(X)$	115
$MK_{\mathbb{C}}^i(X)$	113
$M_n(A)$ algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans A	
$MK_A^{2r}(X)$ K-théorie multiplicative	106
$MK_n(A)$ K-théorie multiplicative	110
S homomorphisme de périodicité en homologie cyclique	28
$\tilde{S}$ variante de S	27
Tr trace ou trace graduée	9,15
$\theta(D^0, D^1)$ première transgression du caractère de Chern	105
$\Phi_A^{rel}(X)$	87
$\Omega(A)$ complexe de De Rham non commutatif	9
$\tilde{\Omega}_*(A)$ complexe universel	18
$\tilde{\Omega}_*(A)$	30
$\bar{\Omega}_*(A)$ quotient de $\Omega_*(A)$ par le k -module engendré par les commutateurs gradués	9
$\Omega_*^{top}(A)$	52
$\bar{\Omega}_*^{top}(A)$	52
$\Omega^i(X; E)$	54
$\Omega^{p,q}(X, A)$	54
$\Omega^n(X, A) = \Omega_A^n(X)$	54

ABSTRACT

This book is an expanded version of some ideas related to the general problem of characteristic classes in the framework of Chern-Weil theory.

These ideas took their origins independtly from the work of Alain Connes and the author. They were motivated by considerations of operator algebras and algebraic K-theory. The good framework to develop these considerations is cyclic homology (or non commutative De Rham homology). This enables us to extend the classical Chern-Weil theory far beyond his original scope (at least for the general linear group).

Cyclic homology is the natural target for characteristic classes and its computation is a matter of homological algebra as was shown by A. Connes. On the other hand, the objets we are taking the characteristic classes of are elements of the K-theory of a ring. This K-theory (algebraic or topological) is difficult to compute in general. Cyclic homology (also called "additive K-theory" by Feigin and Tsygan) appears therefore as a first step to compute the K-groups for general algebras.

We have tried to make this book as self-contained as possible. Together with the motivations provided by A. Connes, the reader should not find any special difficulty to read it. In particular, the first chapters can be easily integrated in a graduate course on the subject.