Astérisque

ERNST-ULRICH GEKELER

Cohomologie des sous-groupes s-arithmétiques de $GL(2)$ sur un corps de fonctions

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 285-289

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__285_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 147-148 (1987), p.285-289.

COHOMOLOGIE DES SOUS-GROUPES S-ARITHMÉTIQUES DE GL(2) SUR UN CORPS DE FONCTIONS

Ernst-Ulrich GEKELER

Soient:
$\mathbb{F}_q$, le corps fini avec q éléments de caractéristique p;
K, un corps de fonctions d'une variable sur le corps $\mathbb{F}_q$ des constantes;
∞, une place fixée de K, de degré δ;
A, l'anneau des fonctions $f \in K$ entières en dehors de ∞;
K_∞, la complétion de K en ∞;
$\Gamma = GL(2,A)$, et G un sous-groupe de congruence de Γ.
G est dit sans p'-torsion si tout élément de torsion de G est de p-torsion. C'est le cas, par exemple, si G est le sous-groupe de congruence principal $\Gamma(\mathfrak{m})$ de Γ pour un ideal non nul $\mathfrak{m} \subsetneq A$.

La méthode usuelle d'étudier G est de considérer l'opération de G sur l'immeuble $\mathcal{T}$ de Bruhat-Tits de $PGL(2,K_\infty)$. En utilisant cette opération, Serre a demontré [8]:
Si G est sans p'-torsion, on a

$$b(G) := \dim H^1(G,\mathbb{Q}) = 1 + (q^\delta - 1)[\Gamma : G]\, \zeta_K(-1)/(q-1) - s(G),$$

où ζ_K resp. s(G) désigne la fonction zêta de K resp. le nombre de "pointes" de G.
La condition de p'-torsion n'est pas remplie si $G = \Gamma_0(\mathfrak{m})$ (sous-groupe de congruence de Hecke) ou si $G = \Gamma$ lui-meme.
Pour contrôler les éléments de p'-torsion, il est mieux d'utiliser le demi-plan supérieur de Drinfeld, qui a une géométrie plus fine que $\mathcal{T}$.
Soit $C = \widehat{\bar{K}}_\infty$ (complétion d'une clôture algébrique de K_∞) et $\Omega = C - K_\infty$. Ω a une structure naturelle d'espace analytique sur C.
(Il faut se représenter l'analogie entre les sextuples $(A,K,K_\infty,C,\Omega,\Gamma)$ et $(\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},H,SL(2,\mathbb{Z}))$!)
G opere sur Ω par les transformations fractionnaires, et l'espace

$G\backslash\Omega$ est l'espace analytique associé a une courbe algébrique affine non-singulière M_G. En fait, M_G est définie sur une extension abélienne finie de K, et b(G) égale le genre $g(\bar{M}_G)$ de la compactification non-singulière $\bar{M}_G$ de M_G.

Par abus de langage, nous écrivons M_G au lieu de $M_G(C)$ etc. (Nous considérons seulement les structures de courbe algébrique sur C.)

Il y a des bijections canoniques

$\bar{M}_G - M_G \xrightarrow{\sim}$ (pointes de G sur $\mathfrak{T}$) $\xrightarrow{\sim} G\backslash\mathbf{P}_1(K)$,

et pour $G = \Gamma$ $\quad \Gamma\backslash\mathbf{P}_1(K) \xrightarrow{\sim}$ Pic A

$(a:b) \longmapsto$ classe de $Aa+Ab$.

La plupart de ces propriétés sont dues a Drinfeld [1].

Une <u>forme modulaire de poids k</u> pour G est une fonction $f: \Omega \longrightarrow C$ aux propriétés suivantes:

(i) $f((az+b)/(cz+d)) = (cz+d)^k f(z) \qquad z \in \Omega, \ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G;$

(ii) f est holomorphe au sens rigide-analytique;

(iii) f est holomorphe aux pointes.

Pour la signification de (iii), voir [6].

<u>Exemple 1</u> (séries d'Eisenstein): (i) Pour $z \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, soit

$$E^{(k)}(z) = \sum{}'(az+b)^{-k}.$$

$a,b \in A$

(ii) Pour $0 \neq u = (u_1,u_2) \in (\mathfrak{m}^{-1}/A)^2$ $\quad (0 \subsetneq \mathfrak{m} \subsetneq A$ un idéal)

soit $\qquad E_u^{(k)}(z) = \sum (az+b)^{-k}.$

$(a,b) \equiv u \bmod A^2$

Alors, les $E^{(k)}$ resp. $E_u^{(k)}$ sont des formes modulaires de poids k pour Γ resp. $\Gamma(\mathfrak{m})$.

On peut utiliser les formes modulaires pour décrire les courbes M_G.

<u>Exemple 2</u>: Soit A l'anneau $\mathbf{F}_q[T]$ des polynômes. Alors, il y a deux formes modulaires g, Δ de poids $q-1, q^2-1$ pour Γ, de façon que $j := g^{q+1}/\Delta$ définit une bijection $j: \Gamma\backslash\Omega \xrightarrow{\sim} C$. Dans ce cas, M_Γ est de genre zéro, et est compactifiée par adjonction d'une seule pointe $j = \infty$. De plus:

(i) $g = (T^q-T)E^{(q-1)}$, et g ne s'annulle pas en ∞;

(ii) $\Delta = (T^{q^2}-T)E^{(q^2-1)} + (T^q-T)^q[E^{(q-1)}]^{q+1}$, et Δ a un zéro simple en ∞;

(iii) g et Δ engendrent la C-algebre des formes modulaires de Γ.

Les g et Δ ont une signification dans la théorie des modules de Drinfeld analogue a celle des formes g_2, g_3, Δ dans la

théorie des formes modulaires elliptiques sur le demi-plan complexe (voir[2,5]). Mais notons que, pour des anneaux A plus compliqués, la situation est loin d'être si transparent.

Par définition, un point elliptique de Γ est un $z \in \Omega$ tel que le stabilisateur Γ_z est strictement plus grand que le centre de Γ. Dans l'exemple 2, il existe une seule Γ - classe des points elliptiques, donnée par $j = 0$. Avec une transscription des méthodes de la multiplication complexe des courbes elliptiques, on peut démontrer:

Proposition 1: Si δ est pair, il n'y a pas des points elliptiques. Si δ est impair, il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble de classes des points elliptiques et le noyau de l'application

$$\text{norme}: \quad J(\mathbf{F}_{q^2}) \longrightarrow J(\mathbf{F}_q),$$

et les stabilisateurs des points elliptiques sont isomorphes au groupe multiplicatif du corps $\mathbf{F}_{q^2}$.

(Ici, J est la jacobienne du corps de fonctions K.)

Comme dans le cas classique, il y a une relation entre les formes modulaires et les differentielles.

Proposition 2: Soit $k \equiv 0 \pmod{q^2-1}$. Le faisceau sur $\overline{M}_\Gamma$ des formes modulaires de poids $2k$ de Γ est canoniquement isomorphe au faisceau des differentielles de degre k sur $\overline{M}_\Gamma$ avec des pôles d'ordre $\leq kq/(q-1)$ aux pointes (resp. $\leq kq/(q+1)$ aux points elliptiques) de Γ et pas d'autres pôles.

Posons, pour chaque ideal $\mathfrak{m}$ non trivial de A de degré d

$$\Delta_{\mathfrak{m}} = \prod_{0 \neq u \in (\mathfrak{m}^{-1}/A)^2} E_u^{(1)} .$$

Alors, $\Delta_{\mathfrak{m}}$ est une forme modulaire parabolique de poids $q^{2d}-1$ pour Γ qui n'a pas de zéro sur Ω. Le point essentiel est que l'on peut calculer les développements de E_u et de $\Delta_{\mathfrak{m}}$ autour des pointes. On obtient des produits infinis (convergeants dans des boules a radius positif), très proches des developpements classiques des séries d'Eisenstein et de $\Delta = (2\pi i)^{12} q \prod (1-q^n)^{24}$, voir [2] et [4]. Notons seulement la conséquence la plus importante:

Théorème: $\Delta_{\mathfrak{m}}$ a un zéro d'ordre $\zeta_{(\tau\mathfrak{m})}(-1) - q^{2d}\,\zeta_{(\tau)}(-1)$ à la pointe correspondant à $\tau \in \mathrm{Pic}\ A$.

Dans cette formule, $\zeta_{(\tau)}(s) = \sum |\mathfrak{m}|^{-s}$, où la sommation porte sur les diviseurs positifs $\mathfrak{m}$ de K premiers à ∞ appartenants à $\tau \in \mathrm{Pic}\ A$.

Par conséquent, le degré du diviseur $\mathrm{div}(\Delta_{\mathfrak{m}})$ est donné par

$$(1-q^{2d}) \sum_{\chi \in \mathrm{Pic}\, A} \zeta_{(\chi)}(-1) = (1-q^{2d})(1-q^{\delta})\, \zeta_K(-1).$$

En comparant avec les propositions, on peut calculer le genre de $\overline{M}_\Gamma$.

Corollaire 1 (voir [3]):

$$g(\overline{M}_\Gamma) = 1 + (q^2-1)^{-1}[(q^{\delta}-1)P(q)/(q-1) - \delta q(q+1)P(1)/2 + e],$$

ou $e = 0$ si δ est pair, $e = -q(q-1)P(-1)/2$ si δ est impair, et $\zeta_K(s) = P(q^{-s})/(1-q^{-s})(1-q^{1-s})$ avec un polynôme $P(X)$ à coefficients entiers. (Rappelons-nous que l'on a $g(\overline{M}_\Gamma) = b(\Gamma)$!)

Corollaire 2: Les pointes engendrent un groupe d'ordre fini dans la jacobienne de $\overline{M}_\Gamma$.

(Il suffit de voir que les $\mathrm{div}(\Delta_{\mathfrak{m}})$ engendrent un sous-groupe d'indice fini dans le groupe des diviseurs à support dans les pointes. Ceci est une conséquence facile (i) du théorème, (ii) de la formule de déterminant de Frobenius, et (iii) du fait $L(\chi,-1) \neq 0$ pour les séries L des caractères χ de Pic A.)

Remarques: (i) Les corollaires 1 et 2 restent valables si l'on remplace Γ par $GL(Y)$ (ou Y est un sous-A-module projectif de rang 2 arbitraire de K^2), le corollaire 2 aussi pour les sous-groupes de congruence de tels groupes.

(ii) Le groupe fini du corollaire 2 semble être interessant vu les travaux de Ribet, Wiles et Mazur/Wiles ou figurent de tels groupes.

(iii) C'est un problème purement combinatoire que de calculer $g(\overline{M}_G)$ pour $G \subset \Gamma$, par exemple $G = \Gamma_0(\mathfrak{m}), \Gamma_1(\mathfrak{m})\ldots$ On utilise la formule de Hurwitz et le fait que les seuls points eventuellement ramifiés dans les revêtements $\overline{M}_G \longrightarrow \overline{M}_\Gamma$ sont les points elliptiques et les pointes, la ramification de tels points étant connue. Pour quelques formules explicites, voir [3]. Remarquons aussi que, pour $G = \Gamma(\mathfrak{m})$, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G)$ de [8] est $-\deg \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est le faisceau inversible sur $\overline{M}_G$ des formes modulaires de poids 1.

(iv) Il y a des généralisations évidentes pour les séries d'Eisenstein, Ω, $\Gamma = GL(2,A)$ (ainsi que pour les modules de Drinfeld de rang 2 utilisés dans la démonstration du théorème) considérant une situation de dimension r au lieu de $r = 2$. Il est très probable que l'on obtiendra des résultats analogues avec des valeurs des fonctions zêta partielles en $1-r$. Pour $r = 1$, on obtient le théorème de Deligne/Tate sur les conjectures abéliennes de Stark dans le cas des corps de fonctions, voir [9,7,4].

Bibliographie:

[1] V.G.Drinfeld: Des modules elliptiques (en russe).Math.Sbornik 94, 594-627,1974.Traduction anglaise:Math.U.S.S.R-Sbornik 23 no 4,561-592,1976

[2] E.-U.Gekeler: Modulare Einheiten für Funktionenkörper. J.reine. angew.Math.348,94-115,1984

[3] E.-U.Gekeler: Le genre des courbes modulaires de Drinfeld. C.R.Acad.Sc.t.300,serie I no 19,647-650,1985

[4] E.-U.Gekeler: Drinfeld'sche Modulkurven. à paraître

[5] D.Goss: Modular Forms for $\mathbf{F}_q[T]$. J.reine angew. Math.331,16-39,1980

[6] D.Goss: π-adic Eisenstein Series for Function Fields. Comp.Math.41,3-38,1980

[7] D.Hayes: Stickelberger Elements in Function Fields. Comp.Math.55,209-239,1985

[8] J.-P.Serre: Arbres,Amalgames,SL_2. Astérisque 46,1977

[9] J.Tate: Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en s = 0. Birkhäuser,Boston-Basel-Stuttgart,1984

Ernst-Ulrich Gekeler
Mathematisches Institut
Beringstrasse 4
5300 Bonn 1
R.F.A.