Astérisque

CHRISTOPHE SOULÉ

Éléments cyclotomiques en K-théorie

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 225-257

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__225_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 147-148 (1987), p.225-257.

ÉLÉMENTS CYCLOTOMIQUES EN K-THÉORIE

Christophe SOULÉ

Soit $F = \mathbb{Q}(\mu_q)$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ engendrée par les racines q-ièmes de l'unité, $q \geq 1$. On sait que le groupe des unités de F contient un sous-groupe d'indice fini engendré par des éléments explicites, les unités cyclotomiques. Si χ est un caractère non trivial de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ on peut évaluer le régulateur (resp. le régulateur p-adique) sur la χ-composante du groupe des unités cyclotomiques, et l'on obtient (essentiellement) la valeur en $s=1$ de la fonction L (resp. la fonction L p-adique) du caractère χ [14] .

Les groupes de K-théorie algébrique $K_m(\mathcal{O}_F)$ de l'anneau des entiers de F , introduits par Quillen, constituent, quand m est impair, des analogues du groupe des unités $K_1(\mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_F^*$. Le but de ce texte est la construction et l'étude d'éléments explicites de $K_m(\mathcal{O}_F)$, analogues aux unités cyclotomiques, les "éléments cyclotomiques".

Il existe deux constructions d'éléments cyclotomiques en K-théorie. La première est due à Bloch pour $K_3(F)$ [3], et Beilinson l'a étendue aux groupes $K_m(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, m impair [2] . La seconde est une construction p-adique [24] qui utilise la limite projective $\overline{C}$

des groupes d'unités cyclotomiques de $\mathbb{Q}(\mu_{qp^n})$ (complétée en p) ; son analogue en cohomologie galoisienne a été considérée indépendamment par Deligne [8]. La construction p-adique fournit des éléments de $K_m(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, où m est impair et où $\mathbb{Z}_p$ désigne l'anneau des entier p-adiques.

Le premier résultat de cet article (Théorème 1) est que ces deux constructions fournissent le même sous-groupe de $K_3(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ (ou plutôt de son quotient indécomposable). La théorie des régulateurs transcendants attachés à K_3 montrent que la construction de Bloch fournit un sous-groupe d'indice fini de $K_3(F)$. Il en est donc de même pour la construction p-adique.

Désignons par E la complété p-adique de la limite projective des p-unités de $\mathbb{Q}(\mu_{qp^n})$, $n \geq 1$, et par G_∞ le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{Q}(\mu_{qp^\infty})$ de F. Une conséquence du résultat précédent est que le groupe des coinvariants $(\overline{E}/\overline{C})(1)_{G_\infty}$ du tordu à la Tate de $\overline{E}/\overline{C}$ est un groupe fini (Corollaire 1). On peut plus généralement étudier les groupes $(\overline{E}/\overline{C})(i-1)_{G_\infty}$, $i \geq 2$. Le théorème 3 est que, si p est impair, ces groupes sont finis.

Le Théorème 3 est obtenu par une méthode proposée par Coates quand $i=2$. Elle repose sur les résultats d'Iwasawa sur les unités cyclotomiques [12], la preuve de la conjecture principale des corps cyclotomiques par Mazur et Wiles [17], et un résultat concernant les modules d'Iwasawa (Théorème 2) obtenu, à l'aide des résultats de Borel, par comparaison de la K-théorie algébrique de F avec des groupes de cohomologie du groupe de Galois Φ de l'extension de F non ramifiée en dehors de p maximale ([23],[9]). Le plus frappant dans ce Théorème 2 est qu'il ne suppose pas que F soit abélien sur $\mathbb{Q}$, ni qu'il soit totalement réel. La conclusion de cette étude est que la construction p-adique d'éléments cyclotomiques fournit, quand $p \neq 2$ et $i \geq 2$, un sous-groupe d'indice fini dans $K_{2i-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ et dans $H^1(\Phi, \mathbb{Z}_p(i))$.

On a montré dans [24] qu'une généralisation aux groupes de K-théorie du régulateur p-adique, évaluée sur les éléments cyclotomiques de $K_{2i-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, donne la valeur en $s = i$ d'une fonction

L p-adique. Si cette valeur est non nulle il en résulte que le noyau de l'application

$$K_{2i-1}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \varprojlim_N K_{2i-1}(\mathcal{O}_F/p^N\mathcal{O}_F)$$

est fini. Ce résultat est généralisé dans le Théorème 4. Soient p un nombre premier impair, $i \geq 2$ un entier, F un corps de nombres totalement réel (disjoint de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$), χ un caractère de Dirichlet primitif de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et E l'extension de F associée à χ. Si χ vérifie la conjecture principale les énoncés suivants sont équivalents :

a) La χ-composante de l'application $K_{2i-1}(\mathcal{O}_E) \to \varprojlim_N K_{2i-1}(\mathcal{O}_E/p^N\mathcal{O}_E)$ est un isomorphisme modulo torsion

b) La valeur en $s=i$ de la fonction L p-adique de $\chi^{-1}\omega^{1-i}$ (où ω est le caractère de Teichmüller) est non nulle.

On a essayé de rendre ce texte accessible à un lecteur non spécialisé en K-théorie algébrique. Pour ce faire, le premier paragraphe décrit brièvement la K-théorie d'un anneau et les propriétés utilisées par la suite, et le second paragraphe rappelle les travaux de Borel sur la K-théorie des corps de nombres. Dans le paragraphe 3, on explique la construction de Bloch et on montre qu'elle fournit un exemple de distribution au sens de Kubert et Lang (Proposition 1) ; ce résultat a été obtenu en collaboration avec D. Ramakrishnan. Le Théorème 1 et son Corollaire sont démontrés dans le paragraphe 4. Dans le paragraphe 5, on démontre les Théorèmes 2 et 3 (c'est-à-dire des résultats sur les modules d'Iwasawa dont la preuve utilise la K-théorie algébrique). Au paragraphe 6, on définit les régulateurs p-adiques et on démontre le Théorème 4.

Je tiens à remercier J. Coates, P. Deligne, D. Ramakrishnan et A. Wiles pour d'utiles discussions.

CONVENTIONS. Si A est un groupe abélien et $n > 1$ un entier, on note A_n le noyau la multiplication par n dans A et A/n son conoyau. Quand un groupe G opère sur un R-module M on note M^G l'ensemble des éléments de M invariants par G et M_G le groupe

des coinvariants. Si de plus $\chi : G \to R^*$ est un caractère de G, la χ-composante M^χ du module M est l'ensemble des $x \in M$ tels que, pour tout élément g de G, on ait $g(x) = \chi(g)x$. Le terme "espace topologique" désignera les CW-complexes pointés ([26]). Enfin p est un nombre premier, qui est impair dans les paragraphes 6 et 7.

1. K-THEORIE.

1.1. Soit A un anneau unitaire (non nécessairement commutatif). Le groupe $K_o(A)$ est le groupe de Grothendick des A-modules projectifs de type fini. Les groupes $K_m(A)$, $m \geq 1$, sont définis comme suit.

Désignons par $GL_N(A)$ le groupe linéaire des matrices $N \times N$ à coefficient dans A inversibles, et par $GL(A)$ la limite inductive des groupes $GL_N(A)$, $N \geq 1$, pour la famille d'inclusions associant à $g \in GL_N(A)$, $N \geq 1$, la matrice

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & g & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \quad \text{de} \quad GL_{N+1}(A) .$$

Si G est un groupe, on appelle classifiant de G le quotient BG par le groupe G d'un espace topologique contractile où G opère librement (l'espace BG est unique à homotopie près). Les groupes d'homotopie de BG sont $\pi_1(BG) = G$ et $\pi_m(BG) = 0$ si $m \geq 2$. L'homologie de BG à coefficients constants est égale à celle du groupe G.

Quillen [19] [16] définit une application $\varphi : BGL(A) \to BGL(A)^+$ (obtenue en ajoutant à $BGL(A)$ des cellules en dimension 2 et 3) qui induit un isomorphisme en homologie à coefficients (localement) constants et telle que $BGL(A)^+$ soit un H-espace connexe (c'est-à-dire un espace topologique connexe muni d'une loi de composition $BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$ qui satisfait aux axiomes de groupe modulo homotopie; [26], I, 5). Il pose

$$K_m(A) = \pi_m(BGL(A)^+) \quad \text{si} \quad m \geq 1 .$$

1.2. EXEMPLE. Le morphisme d'Hurewicz

$$h : \pi_m(BGL(A)^+) \to H_m(BGL(A)^+, \mathbb{Z})$$

i.e. $h : K_m(A) \to H_m(GL(A),\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $m=1$ (parce que $BGL(A)^+$ est un H-espace connexe) . Donc

$$K_1(A) \simeq H_1(GL(A),\mathbb{Z}) \simeq GL(A)/[GL(A),GL(A)]$$

est le quotient de $GL(A)$ par son sous-groupe des commutateurs. Si A est commutatif le déterminant induit un morphisme

$$dét : K_1(A) \to A^*$$

qui est surjectif et admet pour section l'application

$$A^* = \pi_1(BGL_1(A) \to \pi_1(BGL(A)^+) = K_1(A) .$$

On démontre [18] que si F est un corps le déterminant est un isomorphisme : $K_1(F) = F^*$. On a aussi $K_o(F) = \mathbb{Z}$.

1.3. La loi de H-espace de $BGL(A)^+$ (et donc la loi de groupe de $K_m(A)$) est induite par la somme directe :

$$(g,g') \longrightarrow \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}$$

Le produit tensoriel de matrices permet par ailleurs de définir, pour un anneau commutatif A , un produit

$$K_m(A) \times K_n(A) \longrightarrow K_{m+n}(A) \quad , \quad m,n \in \mathbb{N} \quad ,$$

bilinéaire et antisymétrique [16] .

1.4. Tout morphisme d'anneaux unitaires $f : A \to B$ induit des morphismes de groupes $f^* : K_m(A) \to K_m(B)$.

Supposons que B soit un A-module libre de rang d . Les isomorphismes $GL_N(B) \simeq GL_{Nd}(A)$ induisent des applications $BGL(B)^+ \longrightarrow BGL(A)^+$ et des morphismes de norme

$$N : K_m(B) \longrightarrow K_m(A) \quad , \quad m \geq 1 .$$

Si $m=1$ et si A et B sont des corps, on retrouve la norme usuelle $B^* \to A^*$. Cette construction s'étend au cas où $m=0$ et au cas où B est un A-module projectif de type fini.

Le morphisme f^* est multiplicatif : $f^*(xy) = f^*(x)f^*(y)$ si $x \in K_m(A)$ et $y \in K_n(A)$. La norme vérifie la formule de projection $N(xf^*(y)) = N(x)y$ si $x \in K_m(B)$ et $y \in K_m(A)$. Il en résulte que si B est libre de rang d sur A le composé $N \circ f^*$ est la multiplication par d dans $K_m(A)$, $m \geq 0$. Si l'extension B/A est galoisienne de groupe G on a $f^* \circ N = \sum_{g \in G} g^*$.

1.5. Les deux propriétés suivantes des groupes $K_m(A)$ nous seront utiles (Quillen les démontre à l'aide d'une autre définition de la K-théorie [20]).

INVARIANCE PAR HOMOTOPIE. Si A est un anneau noethérien et régulier, et si $A[T]$ désigne l'anneau des polynômes sur A, le morphisme $A \simeq A[T]$ induit des isomorphismes $K_m(A) \to K_m(A[T])$, $m \geq 0$.

LOCALISATION. Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. Supposons (pour simplifier) que A et A/I sont noethériens et réguliers et que l'image de l'immersion fermée $\mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ (associée à projection $A \to A/I$) a un supplémentaire affine, dont on note AI^{-1} l'anneau de fonctions. Il existe alors une longue suite exacte.

$$\ldots K_m(A) \to K_m(AI^{-1}) \to K_{m-1}(A/I) \to K_{m-1}(A) \to \ldots \to K_0(AI^{-1}) .$$

1.6. Soit $f : E \to B$ une application continue pointée entre deux espaces topologiques. La fibre homotopique de f est l'ensemble F des couples (e,ω) où $e \in E$ et $\omega : [0,1] \to B$ est un chemin d'origine $f(e)$ et d'extrémité le point base $b_0 \in B$. On munit les chemins de la topologie compacte ouverte et F de la topologie qui s'en déduit. Il existe alors une longue suite exacte

$$\ldots \to \pi_m(F) \to \pi_m(E) \xrightarrow{f_*} \pi_m(B) \to \pi_{m-1}(F) \to \ldots$$

([26] II 8, Théorème 9 et VII 2, Théorème 10). Le théorème de localisation de Quillen (1.5.) affirme plus précisément (pour $m \geq 1$) que la fibre homotopique de l'application $BGL(A)^+ \to BGL(AI^{-1})^+$ a le même type d'homotopie que $BGL(A/I)^+$.

2. K-THÉORIE DES ANNEAUX D'ENTIERS DE CORPS DE NOMBRES.

2.1. Soit F un corps de nombres et $A = \mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. On montre alors [18] que $K_0(A) \simeq \mathbb{Z} \oplus Cl(A)$, où $Cl(A)$ est le groupe des classes d'idéaux de A, et que le déterminant induit un isomorphisme $K_1(A) \simeq A^*$. On peut dire grossièrement que les groupes de K-théorie de A d'indice pair (resp. impair) sont des généralisations du groupe de classe $Cl(A)$ (resp. du groupe des unités A^*).

Les groupes $K_m(A)$ sont de type fini pour tout entier $m \geq 0$ [21]. Quand $m > 0$ est pair le groupe $K_m(A)$ est fini [4]. Notons r_1 (resp. r_2) le nombre de places réelles (resp. complexes) de F. Si $i \geq 2$ le groupe $K_{2i-1}(A)$ est de rang r_2 (resp. r_1+r_2) si i est pair (resp. impair) [4] ($K_1(A) \simeq A^*$ est de rang r_1+r_2-1 d'après le théorème de Dirichlet). On notera aussi que pour tout sous-anneau B de F contenant A on a $K_{2i-1}(A) \simeq K_{2i-1}(B)$ si $i \geq 2$ ([25], Théorème 1).

2.2. Soit $N \geq 1$ un entier. Désignons par $H^*_{cont}(Gl_N(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ la cohomologie continue à coefficients réels du groupe de Lie $GL_N(\mathbb{C})$. Si U_N désigne le groupe unitaire de rang N il existe un isomorphisme canonique entre $H^*_{cont}(GL_N(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ et l'algèbre de cohomologie $H^*(U_N, \mathbb{R})$ de l'espace topologique U_N [5]. Ceci permet de montrer que $H^*_{cont}(GL_N(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ est l'algèbre extérieure $\Lambda^*_{\mathbb{R}}(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_N)$ engendrée par des éléments e_i de degré $2i-1$ (les éléments e_i sont choisis comme dans [5] et [10]; ce choix est en particulier compatible aux inclusions $GL_N(\mathbb{C}) \to GL_{N+1}(\mathbb{C})$).

Tout plongement complexe $\sigma : F \to \mathbb{C}$ du corps de nombres F induit des morphismes de corestriction

$$H^m_{cont}(GL_N(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \to H^m(GL_N(A), \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(H_m(GL_N(A), \mathbb{Z}), \mathbb{R}) .$$

Il en résulte que les classes $\sigma^*(e_i)$ des différents groupes $GL_N(\mathbb{C})$ définissent un morphisme

$$H_{2i-1}(GL(A), \mathbb{Z}) = \varinjlim_N H_{2i-1}(GL_N(A), \mathbb{Z}) \to \mathbb{R} .$$

On note $\rho_i^\sigma : K_{2i-1}(A) \to \mathbb{R}$ Le composé de ce morphisme avec celui

d'Hurewicz $h : K_{2i-1}(A) \to H_{2i-1}(GL(A),\mathbb{Z})$.

Le groupe $Y = \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}$ est muni d'une action de $\mathrm{Aut}(F)$ et d'une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Le sous-espace $(Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^{(i-1)}$ de $Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ où la conjugaison complexe opère par $(-1)^{i-1}$ est de dimension r_2 si i est pair, et r_1+r_2 si i est impair. La famille des plongements complexes de F permet de définir des morphismes

$$\rho_i : K_{2i-1}(A) \longrightarrow (Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^{(i-1)}$$

appelés régulateurs. Ils sont équivariants pour l'action de $\mathrm{Aut}(F)$. Borel [4][5] montre (quand $i \geq 2$) que le noyau de ρ_i est fini, que l'image de ρ_i est un réseau, et que le volume de ce réseau est le produit par un élément de $\mathbb{Q}^*$ du premier coefficient non nul dans le développement de Taylor en $s = 1-i$ de la fonction zêta $\zeta_F(s)$.

2.3. Soient F un corps de nombres, E une extension galoisienne finie de F et $\rho : \mathrm{Gal}(E/F) \to V$ une représentation complexe de dimension finie du groupe de Galois de E sur F . Des résultats du paragraphe précédent, on déduit [10] que , si $i \geq 2$, le sous-espace de $K_{2i-1}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} V$ fixe par l'action diagonale de $\mathrm{Gal}(E/F)$ est de dimension égale à l'ordre en $s = 1-i$ de la fonction L d'Artin $L(V,s)$.

Si χ est un caractère de Dirichlet primitif de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}^*$ on désigne aussi par $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \overline{\mathbb{Q}}^*$ le caractère associé (par la théorie du corps de classes) et par F_χ l'extension galoisienne de F fixée par le noyau de χ . Pour tout entier $m \geq 0$ on note $K_m(\chi,\overline{\mathbb{Q}})$ la χ-composante de $K_m(F_\chi) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$. Si E est n'importe quelle extension galoisienne de F contenant F_χ la norme de E à F_χ induit un isomorphisme entre la χ-composante de $K_m(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{Q}}$ et $K_m(\chi,\overline{\mathbb{Q}})$.

Supposons que F est totalement réel de degré absolu $d = [F:\mathbb{Q}]$. On dira que χ a la parité de $i-1$ si, pour tout plongement complexe σ de F, la conjugaison complexe $c_\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ vérifie $\chi(c_\sigma) = (-1)^{i-1}$. Il résulte de ce qui précède que $K_{2i-1}(\chi,\overline{\mathbb{Q}})$ est isomorphe à $\overline{\mathbb{Q}}^d$ quand χ a la parité de $i-1$, et qu'il est nul sinon.

3. ÉLÉMENTS CYCLOTOMIQUES, PREMIÈRE CONSTRUCTION.

3.1. K-THÉORIE RELATIVE.

Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. Soit $F(A,I)$ la fibre homotopique (1.6.) de l'application $BGL(A)^+ \to BGL(A/I)^+$. Si $m \geq 1$ on appelle K-théorie relative de A par rapport à I les groupes $K_m(A,I) = \pi_m(F(A,I))$. On a donc une suite exacte

$$\ldots \to K_m(A,I) \to K_m(A) \to K_m(A/I) \to K_{m-1}(A,I) \to \ldots .$$

Supposons par exemple que B soit un anneau noethérien régulier, et notons $A = B[T]$ l'anneau des polynômes sur B et I l'idéal $T(T-1)\,B[T]$. On a $A/I = B \times B$ et l'invariance par homotopie (1.5.) montre que $K_m(A) \simeq K_m(B)$. Le morphisme $K_m(A) \to K_m(A/I)$ est donc l'application diagonale. $K_m(B) \to K_m(B) \oplus K_m(B)$. Par conséquent, si $m \geq 1$, il existe un isomorphisme $K_{m+1}(B) \simeq K_m(B[T], T(T-1)B[T])$.

3.2. Soient A un anneau commutatif, intègre, noethérien et régulier, et I et J deux idéaux de A tels que $I+J = A$. On suppose que A/J est régulier que A/J est régulier et que $\mathrm{Spec}(A)-\mathrm{Spec}(A/J)$ est affine. On a alors une longue suite exacte de localisation relative ([3] [15])

$$\ldots \to K_m(A,I) \to K_m(AJ^{-1}, IJ^{-1}) \to K_m(A/J) \to K_{m-1}(A,I) \to \ldots$$

(généralisant celle de 1.5.).

Soient par exemple F un corps, $A = F[T]$ et $I = T(T-1)F[T]$. Notons R l'anneau (semi-local) $\varinjlim_{I+J=A} AJ^{-1}$, c'est-à-dire l'anneau des fractions rationnelles de $F(T)$ qui n'ont de pôle ni en 0 ni en 1, et IR l'idéal de R engendré par I. La limite inductive sur J des suites exactes ci-dessus s'écrit

$$\ldots \to K_m(A,I) \to K_m(R,IR) \to \bigoplus_P K_{m-1}(F(P)) \to K_{m-1}(A,I) \to \ldots ,$$

où P parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $F[T]$ premiers à $T(T-1)$, et où $F(P) = F[T]/(P)$. Si $m=2$, sachant que $K_2(A,I) = K_3(F)$, on obtient ainsi une suite exacte

$$K_3(F) \xrightarrow{\alpha} K_2(R,IR) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_P F(P)^* \quad .$$

Bloch [3] (cf. aussi [15], Proposition 1.8. b)) montre que le noyau de α est le sous-groupe des éléments décomposables $K_3(F)^{déc}$, engendré par les produits de trois éléments de $K_1(F)$. Le noyau de ∂ est donc isomorphe (via α) au quotient indécomposable $K_3(F)^{ind} = K_3(F)/K_3(F)^{déc}$. Bass et Tate ont montré ([1], Théorème 2 1, 3) que si F est un corps de nombres le groupe $K_3(F)^{déc}$ est un quotient de $(\mathbb{Z}/2)^{r_1}$.

3.3. Pour construire des éléments de $K_2(A,I)$ on peut procéder comme suit. Soient $A = \mathbb{Z}[X_o,X_1]$ l'anneau de polynômes à deux variables sur $\mathbb{Z}$, $I = (X_o)$ l'idéal engendré par X_o et $J = (1-X_oX_1)$. On a $A/I = \mathbb{Z}[X_1]$ et l'invariance par homotopie montre que $K_m(A) = K_m(A/I)$ $(=K_m(\mathbb{Z}))$, donc $K_m(A,I) = 0$ si $m \geq 1$. De la suite exacte de localisation relative (3.2.) on déduit donc que $K_m(AJ^{-1},IJ^{-1}) = K_m(\mathbb{Z}[X_o,X_1,(1-X_oX_1)^{-1}], (X_o))$ est isomorphe à $K_{m-1}(A/J) = K_{m-1}(\mathbb{Z}[X_o,X_1]/(1-X_oX_1)) = K_{m-1}(\mathbb{Z}[X_1,X_1^{-1}])$. En particulier l'unité $X_1 \in \mathbb{Z}[X_1,X_1^{-1}]^* \subset K_1(\mathbb{Z}[X_1,X_1^{-1}])$ définit un élément de $K_2(\mathbb{Z}[X_o,X_1,(1-X_oX_1)^{-1}], (X_o))$, qu'on note $\{1-X_oX_1,X_1\}$.

Soient A un anneau commutatif quelconque, I un idéal de A, et f et α deux éléments de A tels que : $f \in A^*$, α ne divise pas zéro, et l'élément $(1-f)\alpha^{-1}$ existe et appartient à I. On obtient alors un morphisme $\varphi : \mathbb{Z}[X_o,X_1,(1-X_oX_1)^{-1}] \to A$ en envoyant X_o sur $(1-f)\alpha^{-1}$ et X_1 sur α. Par hypothèse $\varphi((X_o)) \subset I$. On pose

$$\{f,\alpha\} = \varphi^*(\{1-X_oX_1,X_1\}) \in K_2(A,I) \ .$$

On dira que $\{f,\alpha\}$ est un symbole relatif.

On vérifie que si β ne divise pas zéro et

$(1-f)\beta^{-1} \in I$ (resp. si $g \in A^*$ et $(1-g)\alpha^{-1} \in I$) on a

$$\{f,\alpha\beta\} = \{f,\alpha\} + \{f,\beta\} \quad (\text{resp. } \{fg,\alpha\} = \{f,\alpha\} + \{g,\alpha\}).$$

3.4. Appliquons la construction précédente à la situation de 3.2., i.e. $R \subset F(T)$ est l'anneau des fonctions définies en 0 et 1, et IR est l'idéal engendré par $T(T-1)$. Si $x \in F-\{0,1\}$ on pose $f_x = (1-xT^2)^3/(1-xT^3)^2$. Comme $f_x \in R^*$ et $(1-f_x)T^{-1} \in IR$ on peut définir un symbole relatif

$$S(x) = \{\frac{(1-xT^2)^3}{(1-xT^3)^2}, T\} \in K_2(R,IR) .$$

On notera que si g est un automorphisme de F on a $g^*(S(x)) = S(g(x))$. Quand $x = \omega$ $(\neq 1)$ est une racine n-ièmes de l'unité, Bloch démontre que $\partial(nS(\omega)) = 0[3]$. On désigne par $B(\omega) \in K_3(F)^{ind}$ l'élément tel que $\alpha(B(\omega)) = S(\omega)$.

3.5. Si K est un corps et $n \geq 1$ un entier on note $K(\mu_n)$ l'extension de K engendrée par le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité (dans une clôture algébrique de K). Soient $F = \mathbb{Q}(\mu_n)$ et $\omega \in \mu_n$ un générateur. Pour tout plongement complexe $\sigma : F \to \mathbb{C}$ Bloch montre que l'image de $B(\omega)$ par le régulateur $\rho_2^\sigma : K_3(F) \to \mathbb{R}$ (cf. 2.2.) est

$$(5n/12\pi\sqrt{-1})\left(\sum_{k\geq 1} \sigma(\omega)^k k^{-2}\right)$$

([3], cf. aussi [2], § 7). Gross en déduit ([10], 6.2.) que pour tout caractère $\chi : \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \to \overline{\mathbb{Q}}^*$ impair la projection de $B(\omega)$ dans $K_3(\chi,\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}}$ est non nulle et que les conjugués de $B(\omega)$ par $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ engendrent $K_3(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

3.6. Soient F un corps, A une F-algèbre commutative, I un idéal de A, F' une extension finie de F, $A' = A \otimes_F F'$ et $I' = I \otimes_F F'$. Si M désigne la norme associée à l'extension F'/F le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} BGL(A')^+ & \xrightarrow{N} & BGL(A)^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL(A'/I')^+ & \xrightarrow{N} & BGL(A/I)^+ \end{array}$$

permet de définir une norme $N : K_m(A',I') \to K_m(A,I)$, $m \geq 1$. Le

résultat suivant a été obtenu en collaboration avec D. Ramakrishnan :

PROPOSITION 1. i) Soient n et $m \geq 1$ deux entiers tels que $n = dm$, $F = \mathbb{Q}(\mu_n)$ et $\omega \in \mu_n$ un élément tel que $\omega^d \neq 1$. On a, dans $K_2(R,IR)$,

$$\sum_{\xi^d=1} nS(\omega\xi) = m\, S(\omega^d) .$$

ii) Soient p un nombre premier, $n \geq 1$ un entier (vérifiant $n \geq 2$ si $p = 2$), et $q > 0$ un entier premier à p. Soient $F = \mathbb{Q}(\mu_{qp^n})$, $F' = \mathbb{Q}(\mu_{qp^{n+s}})$ et $\omega \in \mu_{qp^{n+1}}$ un générateur. Si N est la norme associée à l'extension F'/F on a, dans $K_2(R,IR)$,

$$N(qp^{n+1}S(\omega)) = qp^n S(\omega^p) .$$

PREUVE. (i) On a

$$\sum_{\xi^d=1} S(\omega\xi) = \sum_{\xi} \{\frac{(1-\omega\xi T^2)^3}{(1-\omega\xi T^3)^2}, T\} = \{\prod_{\xi} \frac{(1-\omega\xi T^2)^3}{(1-\omega\xi T^3)^2}, T\}$$

$$= \{\frac{(1-\omega^d T^{2d})^3}{(1-\omega^d T^{3d})^2}, T\} .$$

Par ailleurs, soient $A = F[T]$, $I = T(T-1)F[T]$, et $\varphi : A \to A$ un endomorphisme de F-algèbre tel que $\varphi(I) \subset I$. Il induit un endomorphisme φ^* de la suite exacte

$$\ldots \to K_m(A) \to K_m(A(I) \to K_{m-1}(A,I) \to \ldots .$$

Les isomorphismes $K_m(A) \simeq K_m(F)$ et $K_m(A/I) \simeq K_m(F) \oplus K_m(F)$ montrent que φ^* agit trivialement sur ces groupes, donc aussi sur $K_m(A,I)$. Comme φ^* commute au morphisme $\alpha : K_2(A,I) \to K_2(R,IR)$, il agit donc trivialement sur l'image de α.

Appliquons ce résultat à l'élément $mS(\omega^d)$ de l'image de α et à l'endomorphisme φ de A défini par $\varphi(T) = T^d$. On obtient

$$mS(\omega^d) = \varphi^*(mS(\omega^d)) = m\,\{\frac{(1-\omega^d T^{2d})^3}{(1-\omega^d T^{3d})^2}, T^d\}$$

$$= dm\ \{\frac{(1-\omega^{d_T 2d})^3}{(1-\omega^{d_T 3d})^2}\ ,\ T\}\ .\quad \text{Q.E.D.}$$

ii) Soient j l'inclusion $F \to F'$ et $G = Gal(F'/F)$. On a, comme en 1.4., $N \circ j^* = p$ et $j^* \circ N = \sum_{g\in G} g^*$. Donc

$N(qp^{n+1}S(\omega)) = qp^n\ N \circ j^* \circ N(S(\omega)) = qp^n\ N(\sum_{g\in G} g^*(S(\omega)))$. Puisque $g^*(\omega)) = S(g(\omega))$ on trouve

$$N(qp^{n+1}S(\omega)) = qp^n \sum_{\xi^p=1} N(S(\omega\xi))\ .$$

D'après la preuve de i) on sait que

$$p \sum_{\xi^p=1} S(\omega\xi) = j^*(S(\omega^p))\ .$$

Par ailleurs, φ^* et N commutent ([20], Prop. 2.11.), donc $N(qp^{n+1}S(\omega)) = qp^{n-1}N \circ \varphi^* \circ j^*(S(\omega^p)) = \varphi^*(qp^{n-1}\ N \circ j^*(S(\omega^p))) = \varphi^*(qp^nS(\omega^p))$. Comme $qp^nS(\omega^p)$ est dans l'image de α (3.4.), il est fixe par φ^* (cf. i)), d'où le résultat.

REMARQUE. D'après i), l'application qui à $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associe $B(\exp(2\pi ia)) \in K_3^{ind}(\mathbb{C})$ est une distribution au sens de [14] chap. 2, § 9.

3.7. Soient $i \geq 2$ un entier, F un corps, $A_F^{i-1} = \mathrm{Spec}(F\ T_1,\ldots,T_{i-1})$ l'espace affine de dimension $i-1$ sur F, et S un schéma simplicial obtenu en résolvant les singularités du cube d'équation $\prod_{j=1}^{i-1} T_j(1-T_j) = 0$. Beilinson montre dans [2], §7, que le groupe de K-théorie relative $K_i(A_F^{i-1},S)$ est isomorphe à $K_{2i-1}(F)$. Si $F = \mathbb{Q}(\mu_n)$ et $\omega \in \mu_n - \{1\}$ il définit des fractions rationnelles de la forme $f_\omega = \prod_\beta (1-\omega \prod_\alpha T^{m_{\alpha\beta}})^{\pm 1}$ et un symbole $\{f_\omega,T_1,\ldots,T_{i-1}\} \in K_i(U,U \otimes_{A_F^{i-1}} S)$, où U est le complémentaire dans A_F^{i-1} du diviseur de f_ω. Il montre que, si on néglige la torsion, ce symbole se relève dans $K_{2i-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et que son image par le régulateur ρ_i^σ associé au plongement $\sigma : F \to \mathbb{C}$ est égal à

$$C(2\pi\sqrt{-1})^{1-i}(\sum_{k\geq 1} \sigma(\omega)^k k^{-i})\ ,$$

où $C \in \mathbb{Q}^*$ est une fonction simple des entiers $m_{\alpha\beta}$.

On vérifie comme dans la Proposition 1, i) que l'élément $n^{i-1}\{f_\omega, T_1, \ldots, T_{i-1}\}$ est l'image d'un élément $B^i(\omega)$ de $K_{2i-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $\sum_{\xi^d=1} B^i(\omega\xi) = B^i(\omega^d)$. On peut penser que $B^i(\omega)$ provient de $K_{2i-1}(F)$.

4. ÉLÉMENTS CYCLOTOMIQUES, SECONDE CONSTRUCTION.

4.1. K-THÉORIE A COEFFICIENTS.

Si X est un H-espace connexe et $q > 1$ un entier, on désigne par X/q la fibre homotopique (1.6.) de la multiplication par q dans X et l'on pose, si $m > 2$,

$$\pi_m(X, \mathbb{Z}/q) = \pi_{m-1}(X/q) \quad .$$

On a donc une suite exacte

$$\ldots \to \pi_m(X) \xrightarrow{xq} \pi_m(X) \to \pi_m(X, \mathbb{Z}/q) \to \pi_{m-1}(X) \xrightarrow{xq} \ldots \quad .$$

Quand A est un anneau unitaire et $m \geq 2$, on pose

$$K_m(A, \mathbb{Z}/q) = \pi_m(BGL(A)^+; \mathbb{Z}/q) \ ,$$

d'où des suites exactes naturelles

$$0 \to K_m(A)/q \to K_m(A; \mathbb{Z}/q) \to K_{m-1}(A)_q \to 0 \ .$$

La plupart des propriétés de la K-théorie algébrique ordinaire s'étendent à la K-théorie à coefficients. On dispose de produits

$$K_m(A) \times K_n(A; \mathbb{Z}/q) \to K_{m+n}(A, \mathbb{Z}/q) \ , \ m,n \geq 2 \ ,$$

et aussi (du moins si q est impair)

$$K_m(A; \mathbb{Z}/q) \times K_n(A; \mathbb{Z}/q) \to K_{m+n}(A; \mathbb{Z}/q) \ , \ m,n \geq 2 \qquad [6] \ .$$

Si q divise q' on dispose d'un morphisme de réduction des

coefficients $K_m(A;\mathbb{Z}/q') \to K_m(A;\mathbb{Z}/q)$. Si p est un nombre premier on pose

$$K_m(A;\mathbb{Z}_p) = \varprojlim_n K_m(A;\mathbb{Z}/p^n) \ , \ m \geq 2 \ .$$

Si $K_{m-1}(A)$ est de type fini on a $K_m(A;\mathbb{Z}_p) = K_m(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$.

4.2. Supposons que A est commutatif et soit $\mu_q(A) = A_q^*$ le groupe des racines q-ièmes de l'unité dans A . Si q est pair on suppose que $\sqrt{-1}$ est dans A . Le morphisme composé

$$K_2(A;\mathbb{Z}/q) \to K_1(A)_q \xrightarrow{\text{dét}} \mu_q(A)$$

admet pour section naturelle le composé de l'isomorphisme

$$\pi_2(BA^*;\mathbb{Z}/q) \simeq \mu_q(A) \qquad \text{(rappelons que } \pi_2(BA^*) = 0\text{)}$$

avec $\pi_2(BA^*;\mathbb{Z}/q) = \pi_2(BGL_1(A)\mathbb{Z}/q) \to \pi_2(BGL(A)^+;\mathbb{Z}/q)$ (cf. aussi [9], 5.4, Remark). On notera $\beta : \mu_q(A) \to K_2(A;\mathbb{Z}/q)$ cette application. Si q' divise q et $\omega \in \mu_{q'}(A)$ l'image de $\beta(\omega)$ par réduction modulo q est $\beta(\omega^{q'/q})$.

4.3. Soient F un corps de nombres et p un nombre premier impair. On note $F_n = F(\mu_{p^n})$, $\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n\geq 1} \mu_{p^n}$ et $F_\infty = F(\mu_{p^\infty}) = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ (dans une clôture algébrique $\overline{F}$ fixée de F) . Soient $A = \mathcal{O}_F[1/p]$ le localisé de A en dehors de p , A_n la clôture intégrale de A dans F_n , et N_n (resp. $N_{n+1,n}$) la norme associée à l'extension F_n/F (resp. F_{n+1}/F_n) .

Etant données $(u_n) \in \varprojlim_n A_n^*$ une famille d'unités vérifiant $N_{n+1,n}(u_{n+1}) = u_n$ et $(\omega_n) \in \varprojlim_n \mu_{p^n}$ des racines de l'unité telles que $\omega_{n+1}^p = \omega_n$, on peut définir comme suit un élément de $K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}_p)$, pour tout entier $i \geq 2$ [24] . On a $u_n \in A_n^* = K_1(A_n)$ et $\beta(\omega_n) \in K_2(A_n;\mathbb{Z}/p^n)$. Le produit $u_n \beta(\omega_n)^{i-1}$ est donc dans $K_{2i-1}(A_n;\mathbb{Z}/p^n)$ et $N_n(u_n \beta(\omega_n)^{i-1})$ est un élément de $K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}/p^n)$.

LEMME 1. *La famille* $(N_n(u_n\beta(\omega_n)^{i-1}))$ *est un élément de* $K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}_p)$.

PREUVE ([24], Lemme 1). Comme $N_{n+1} = N_n \circ N_{n+1,n}$, il suffit de voir que $\rho_n(N_{n+1,n}(u_{n+1}\beta(\omega_{n+1})^{i-1})) = u_n\beta(\omega_n)^{i-1}$, où ρ_n désigne la réduction des coefficients de $\mathbb{Z}/p^{n+1}$ à $\mathbb{Z}/p^n$. Si f_n est l'inclusion de A_n dans A_{n+1}, on déduit de $\omega_{n+1}^p = \omega_n$ que $\rho_n(\beta(\omega_{n+1})) = f_n^*(\beta(\omega_n))$ (cf. 4.2.). On a donc, grâce à la formule de projection (1.4.),

$$\rho_n(N_{n+1,n}(u_{n+1}\beta(\omega_{n+1})^{i-1})) = N_{n+1,n}(u_{n+1}f^*(\beta(\omega_n)^{i-1}) =$$

$$= N_{n+1,n}(u_{n+1})\beta(\omega_n)^{i-1} = u_n\beta(\omega_n)^{i-1} .$$

Si on désigne par $\overline{E} = \varprojlim_n A_n^*/p^n$ la limite projective des groupes A^*/p^n, où le morphisme de transition est le composé de la norme $N_{n+1,n}$ avec la réduction modulo p^n, le lemme précédent définit un morphisme

$$\varphi : \overline{E}(i-1) \to K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}_p) , \quad i \geq 2 ,$$

où $\overline{E}(i-1)$ est le $(i-1)$-ième tordu à la Tate de $\overline{E}$. Si $g \in G_\infty = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ on a $\varphi(g(x)) = \varphi(x)$ [24], donc φ se factorise par le groupe des coinvariants $\overline{E}(i-1)_{G_\infty}$. On démontre ([24], Thm 1) que le noyau et le conoyau du morphisme

$$\varphi : \overline{E}(i-1)_G \to K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}_p) , \quad i \geq 2 ,$$

sont des groupes finis.

4.4. Soit $F = \mathbb{Q}(\mu_{qp^{n_o}})$, où p est un nombre premier impair, q un entier premier à p et $n_o \geq 0$. Si $(\omega_n) \in \varprojlim_n \mu_{qp^n}$ (i.e. $\omega_{n+1}^p = \omega_n$) on pose $u_n = 1-\omega_n$ quand $n \geq \mathrm{Sup}(n_o,2)$. On a $u_n = N_{n+1,n}(u_{n+1})$. Si $i \geq 2$ on désigne par $C^i(\omega_n) \in K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}_p) = K_{2i-1}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ (cf. 2.1. et 4.1.) l'élément $(N_n((1-\omega_n).\beta(\omega_n^q)^{i-1}))$.

On notera $\overline{C}$ le sous-groupe de $\overline{E}$ engendrée par les familles $(1-\omega_n)$ comme ci-dessus. On a donc des morphismes

$$\overline{C}(i-1)_{G_\infty} \to \overline{E}(i-1)_G \longrightarrow K_{2i-1}(A;\mathbb{Z}_p) = K_{2i-1}(F) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_p$$

5. COMPARAISON.

5.1. Démontrons d'abord un lemme de topologie algébrique. Soit

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 \end{array}$$

un diagramme commutatif d'applications continues (pointées) entre espaces topologiques dont les lignes et les colonnes sont des fibrations de Serre ("weak fibrations" [26], VII 2) . Les suites exactes associées à ces fibrations (loc-cit) forment un diagramme commutatif plan périodique dont on peut extraire la partie suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_m(B_1) & \longrightarrow & \pi_m(B_2) \ni \tilde{x} \\ & & \downarrow & & \\ & \pi_m(F_3) & \longrightarrow & \pi_{m-1}(F_1) & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \pi_m(E_2) & \longrightarrow & \pi_m(E_3) & \longrightarrow & \pi_{m-1}(E_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ x \in \pi_m(B_2) & \longrightarrow & \pi_m(B_3) & & \\ \downarrow & & & & \\ \pi_{m-1}(F_2) & & & & \end{array}$$

Soit $x \in \pi_m(B_2)$, $m \geq 1$, un élément dont les images dans $\pi_{m-1}(F_2)$ et $\pi_m(B_3)$ sont nulles. On peut donc choisir un relèvement de x dans $\pi_m(E_2)$. L'image dans $\pi_m(E_3)$ de ce relèvement s'envoie sur zéro dans $\pi_m(B_3)$ et $\pi_{m-1}(E_1)$. En répétant deux fois cette opération on obtient à partir de $x \in \pi_m(B_2)$ un autre élément $\tilde{x} \in \pi_m(B_2)$.

PROPOSITION 2. Pour des choix convenables des relevés successifs on

a $x = \tilde{x}$.

PREUVE. Soient $I = [0,1]$ le segment unité, $S^0 = \dot{I} = \{0,1\}$ sa frontière, S^m la sphère de dimension m (pointée) , $f_1, f_2, \ldots$ le point base de $F_1, F_2, \ldots$. Désignons par $\alpha : S^{m-1} \times (I,\dot{I}) \to (E_2,e_2)$ une application entre paires d'espaces topologiques dont la classe $[\alpha] \in \pi_m(E_2)$ ([26], loc. cit.) a pour image x dans $\pi_m(B_2)$. Soit $\beta : S^{m-1} \times (I,\dot{I}) \to (F_2,F_1)$ une application (pointée) dont la classe dans le groupe d'homotopie relatif $\pi_m(F_2,F_1) \simeq \pi_m(F_3)$ (loc.cit.) a la même image que $[\alpha]$ dans $\pi_m(E_2,E_1) = \pi_m(E_3)$. Désignons par

$$H : S^{m-1} \times (I,\dot{I}) \times I \to (E_2,E_1)$$

une homotopie (pointée) entre les applications définies par α et β . Autrement dit $(s,t) \to H(s,t,0)$ est l'application composée

$$S^{m-1} \times (I,\dot{I}) \xrightarrow{\alpha} (F_2,F_1) \longrightarrow (E_2,E_1)$$

et $(s,t) \to H(s,t,1)$ est l'application composée

$$S^{m-1} \times (I,\dot{I}) \xrightarrow{\beta} (F_2,F_1) \longrightarrow (E_2,E_1) .$$

De plus, $H(s,0,u) = e_1$ quelque soit $(s,u) \in S^{m-1} \times I$.

Par définition de la suite exacte associée à une fibration (loc.cit.) l'image de $[\beta]$ dans $\pi_{m-1}(F_2)$ est la classe de l'application (pointée) $S^{m-1} \to F_1$ qui à s associe $\beta(s,1)$. Un relevé de cet élément de $\pi_{m-1}(F_1)$ dans le groupe $\pi_m(B_1) = \pi_m(E_1,F_1)$ est donné par la classe de l'application $S^{m-1} \times (I,\dot{I}) \to (E_1,F_1)$ qui à (s,u) associe $H(s,1,u)$. Son image x dans $\pi_m(B_2)$ est la classe de l'application $(s,u) \to p(H(s,1,u))$, où p désigne l'application $E_2 \to B_2$.

Par ailleurs $x \in \pi_m(B_2)$ est l'image de $[\alpha]$, c'est-à-dire la classe de l'application $(s,t) \to p(H(s,t,0))$ de $S^{m-1} \times (I,\dot{I})$ dans (B_2,b_2) . Mais on vérifie que $p(H(s,t,u)) = b_2$ si $ut = 0$ ou bien $u = t = 1$. L'application $p \circ H : S^{m-1} \times I \times I \to B_2$ fournit donc une homotopie entre $(s,u) \to p(H(s,1,u))$ et $(s,t) \to p(H(s,t,0))$. Donc $x = \tilde{x}$. Q.E.D.

REMARQUE. La Proposition 2 peut aussi être formulée comme suit. Soient $x \in \pi_m(B_2)$ et $y \in \pi_m(E_3)$ deux éléments tels qu'il existe un relevé de x dans $\pi_m(B_1)$ et un relevé de y dans $\pi_m(F_3)$ ayant une même image dans $\pi_{m-1}(F_1)$:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_m(B_1) \longrightarrow \pi_m(B_2) \ni x \\ & & \downarrow \\ & \pi_m(F_3) \longrightarrow \pi_{m-1}(F_1) & \\ & \downarrow & \\ y \in & \pi_m(E_3) & \end{array}$$

Alors x et y ont un relevé commun dans $\pi_m(E_2)$

5.2. Soient $n > 1$ un entier, F un corps et $\omega \in \mu_n(F) - \{1\}$ une racine n-ième de l'unité. On a considéré en 3.4. un élément $S(\omega) \in K_2(R,I)$ et en 4.4. un élément $(1-\omega)\beta(\omega) \in K_3(F;\mathbb{Z}/n)$. Si n est pair on suppose que 4 divise n.

PROPOSITION 3. *Les éléments* $nS(\omega)$ *et* $(1-\omega)\beta(\omega)$ *sont les images d'un même élément de* $K_3(F)$.

PREUVE. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \vee_P BGL(F(P))^+/n & \longrightarrow & \vee_P BGL(F(P))^+ & \xrightarrow{xn} & \vee_P BGL(F(P))^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(A,I)/n & \longrightarrow & F(A,I) & \xrightarrow{xn} & F(A,I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(R,IR)/n & \longrightarrow & F(R,IR) & \xrightarrow{xn} & F(R,IR) \end{array}$$

où $A = F[T]$, $I = T(T-1)F[T]$, R est l'anneau des fonctions rationnelles définies en 0 et 1, P parcourt l'ensemble des polynômes moniques irréductibles de $F[T]$ premiers à $T(T-1)$ et $\vee$ désigne la somme des espaces pointés ([26], p. 39). D'après 1.6. et 4.1. les colonnes et les lignes de ce diagramme sont homotopes à des fibrations. Il en résulte que ce diagramme est homotope à un diagramme du type de celui considéré en 5.1. Pour voir que les éléments $x = nS(\omega) \in K_2(R,IR)$ et $y = (1-\omega)\beta(\omega) \in K_3(F;\mathbb{Z}/n)$ ont un relevé commun dans $K_3(F) = K_2(A,I)$ il suffit donc (d'après la remarque qui suit la

la Proposition 2) de vérifier que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & K_2(R,I\!R) \xrightarrow{\times n} K_2(R,I\!R) \ni x \\ & & \downarrow T \\ \prod_P K_2(F(P),\mathbb{Z}/n) & \xrightarrow{\sigma} & \bigoplus_P K_1(F(P)) \\ \downarrow \partial & & \\ y \in K_3(F;\mathbb{Z}/n) & & \end{array}$$

x et y sont l'image par ∂ et xn d'éléments ayant même projection (par σ et T) dans $\bigoplus_P K_1(F(P))$. D'après Bloch ([3], preuve de 7.2.3), le diviseur $\mathrm{div}(f_\omega) \in \bigoplus_P \mathbb{Z} = \bigoplus_P K_0(F(P))$ a pour image dans $K_1(F)$ l'élément

$$\partial(\mathrm{div}(f_\omega)) = f_\omega(1)/f_\omega(0) = 1-\omega \ .$$

On a donc (cf. 1.5.)

$$\partial(\mathrm{div}(f_\omega).\beta(\omega)) = (1-\omega).\beta(\omega)$$

dans $K_3(F;\mathbb{Z}/n)$. Mais $\sigma(\mathrm{div}(f_\omega).\beta(\omega)) = \mathrm{div}(f_\omega).\omega$. De plus, si $\zeta \in \overline{F}$ est une racine cubique primitive de l'unité, le symbole modéré $T(S(\omega))$ ([18], 11.5.) se calcule comme suit (d'après [3], (7.2.6.))

$$T(S(\omega)) = (\omega^2|_{T=\omega} - 1/3) + (\omega^2|_{T=\zeta\omega} - 1/3) +$$
$$+ (\omega^2|_{T=\zeta^2\omega} - 1/3) - (\omega^3|_{T=\omega} 1/2) - (\omega^3|_{T=-\omega} 1/2) \ .$$

Puisque

$$\mathrm{div}(f_\omega) = 2(\omega^{-1/3}) + 2(\zeta\omega^{-1/3}) + 2(\zeta^2\omega^{-1/3}) - 3(\omega^{-1/2}) - 3(-\omega^{-1/2})$$

on voit que $T(S(\omega)) = \mathrm{div}(f_\omega).\omega$. D'où le résultat.

5.3. On reprend les notations de 4.4., en particulier $F = \mathbb{Q}(\mu_{qp^{n_o}})$. A la famille (ω_n) de racines de l'unité est associée $C(\omega_n) = C^2(\omega_n) \in K_3(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. Posons $m_o = \mathrm{Sup}(n_o,2)$ et

$$B = N_{m_o,n_o}(B(\omega_{m_o})) \in K_3(F)^{\mathrm{ind}} \ .$$

THEORÈME 1. L'image de $B \in K_3(F)^{ind}$ dans $K_3(F)^{ind} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ est égale à celle de $C(\omega_n)$.

PREUVE. Pour tout entier $n \geq m_o$, la Proposition 3 montre que l'élément $B(\omega_n)$ a la même image que $(1-\omega_n).\beta(\omega_n)$ dans $K_3^{ind}(F_n;\mathbb{Z}/qp^n)$. L'image de $\beta(\omega_n)$ dans $K_3(F_n;\mathbb{Z}/p^n)$ est égale à $\beta(\omega_n^q)$ (4.2.) , donc (4.2.) l'image de $\beta(\omega_n)$ dans $K_3(F_n;\mathbb{Z}/p^n)$ est égale à $(1-\omega_n).\beta(\omega_n^q)$. L'élément $N_n((1-\omega_n)\beta(\omega_n^q)$ de $K_3(F;\mathbb{Z}/p^n)$ a donc la même image que $N_n(B(\omega_n)) \in K_3(F^{ind})$ dans $K_3(F;\mathbb{Z}/p^n)/K_3(F)^{déc}$. Mais d'après la Proposition 1, i), on a $M_n(B(\omega_n)) = B$. D'où le résultat.

5.4. Soient $F = \mathbb{Q}(\mu_{qp^{n_o}})$, $\overline{E} = \varprojlim_n A_n^*/p^n$ et $\overline{C} \subset \overline{E}$ le sous-groupe des unités cyclotomiques (4.4).

COROLLAIRE 1. *Le groupe* $(\overline{E}/\overline{C})(1)_{G_\infty}$ *est fini.*

PREUVE. On sait (3.5.) que B et ses conjugués par $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ engendrent $K_3(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Par conséquent, d'après le Théorème 1, l'élément $C(\omega_n)$ engendre $K_3(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$ comme $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$-module. Le conoyau de l'application composée

$$\overline{C}(1)_{G_\infty} \longrightarrow \overline{E}(1)_{G_\infty} \xrightarrow{\varphi} K_3(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$$

est donc fini, et, comme φ est un isomorphisme modulo les groupes finis (4.3.), on en déduit que $\overline{E}(1)_{G_\infty}/\overline{C}(1)_{G_\infty} = (\overline{E}/\overline{C})(1)_{G_\infty}$ est un groupe fini.

Ce résultat sera généralisé dans le paragraphe suivant en utilisant notamment la conjecture principale des corps cyclotomiques (Théorème de Mazur-Wiles).

6. THÉORIE D'IWASAWA.

6.1. On désigne désormais par p un nombre premier impair. Soient F un corps de nombres, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, et $i \geq 2$ un entier. Désignons par Φ le groupe de Galois de l'extension de F non ramifiée en dehors de p maximale. On peut démontrer qu'il existe des morphismes surjectifs

$$ch_{i,1} : K_{2i-1}(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow H^1(\Phi, \mathbb{Z}_p(i))$$

et

$$ch_{i,2} : K_{2i-2}(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow H^2(\Phi, \mathbb{Z}_p(i))$$

([23] si $i \leq p$ et [9] en général). De plus, le noyau de $ch_{i,1}$ est fini ([24], Théorème 1).

Ces résultats, joints à ceux de Borel (2.1.), montrent que les groupes $H^k(\Phi,\mathbb{Z}_p(i))$ sont des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini (ils sont nuls si $k \neq 1,2$), que $H^2(\Phi,\mathbb{Z}_p(i))$ est fini, et que $H^1(\Phi,\mathbb{Z}_p(i))$ est de rang r_2 (resp. r_1+r_2) si i est pair (resp. impair)[24]. Si on pose $H^k(\Phi,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = \varinjlim_n H^k(\Phi,\mu_{p^n}^{i})$, cela signifie aussi que $H^k(\Phi,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est de cotype fini, nul si $k > 2$, fini si $k = 0$, et de corang r_2 (resp. r_1+r_2) quand $k = 1$ et i est pair (resp. impair). On a en effet des suites exactes

$$0 \to H^k(\Phi,\mathbb{Z}_p(i)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to H^k(\Phi,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \to H^{k+1}(\Phi,\mathbb{Z}_p(i))_{tors} \to 0.$$

6.2. Si A est un groupe abélien discret de torsion ou un groupe abélien profini, on désigne par $A^\wedge = \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ son dual de Pontryagin. Dans [22] Schneider étudie les groupes $H^k(\Phi,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$, $i \in \mathbb{Z}$. Si p est un idéal premier de $\mathcal{O}_F$ désignons par F_p le complété de F en p. On pose

$$R_i(F) = \mathrm{Ker}\left(H^1(\Phi,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \to \prod_{p|p} H^1(F_p,\mathbb{Q}_p(i))\right).$$

Par ailleurs, soient $F_\infty = F(\mu_{p^\infty})$, $G_\infty = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, et L_∞ la p-extension abélienne non ramifiée maximale de F_∞. Le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty)$ est un G_∞-module. On a les résultats suivants, pour tout $i \in \mathbb{Z}-\{0\}$:

i) Il existe un isomorphisme naturel entre $\mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty)^\wedge(i)^G$ et $R_i(F)$ ([22], §6, Lemme 1).

ii) Le groupe $R_i(F)$ est fini si et seulement si $H^2(\Phi,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) = 0$ ([22], §5, Cor. 4).

Compte-tenu des résultats de 6.1, on a donc (pour tout corps de nombres F)

THÉORÈME 2. *Pour tout entier $i \geq 2$ et $p \neq 2$ le groupe de coinvariants $\mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty)_{(i-1)G_\infty}$ est fini*

Quand $i = 2$, ce résultat m'a été signalé par Coates et demeure vrai si $p = 2$ (voir aussi [28]).

6.3. Soient $n_o > 0$ un entier et $F = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n_o}})$. On reprend les notations de 4.4., avec $q = 1$.

THÉORÈME 3. *Si $i \geq 2$ (et $p \neq 2$) le groupe $(\overline{E}/\overline{C})(i-1)_G$ est fini.*

PREUVE. Si $F_n = F(\mu_{p^n})$ on note $F_{n,p}$ le complété de F_n à la place divisant p et $U = \varprojlim_n (F^*_{n,p}/p^n)$ la limite projective des groupes $F^*_{n,p}/p^n$ pour le composé de la norme $F^*_{n+1,p} \to F^*_{n,p}$ avec la réduction modulo p^n, $n \geq 0$. Remarquons qu'on désigne d'habitude par U la limite projective U_o des groupes d'unités de $F^*_{n,p}$ qui sont congrues à un modulo l'idéal maximal. Mais on vérifie ([12], §2.1 et 2.3.) que si $\overline{E}_o = \overline{E} \cap U_o$ et $\overline{C} = \overline{C} \cap U_o$ on a $U/\overline{E} = U_o/\overline{E}_o$ et $U/\overline{C} = U_o/\overline{C}_o$. Le groupe $E/\overline{C}$ coïncide avec le groupe noté Y/Z dans [12], §2.3 et §2.4., et $U/\overline{C}$ avec le groupe X/Z de loc.cit. Désignons par M la p-extension abélienne non ramifiée en dehors de p maximale de F_∞. Iwasawa démontre dans [12], Proposition 12, qu'il existe un isomorphisme de G_∞-module entre X/Y et $\mathrm{Gal}(M_\infty/L_\infty)$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \overline{E}/\overline{C} \to U/\overline{C} \to \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty) \to \mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty) \to 0 .$$

Les groupes intervenant dans cette suite exacte sont munis d'une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$. Désignons par $(.)^+$ la partie paire de ces modules (i.e. la partie fixe par l'action de la conjugaison complexe). D'après [12], §2.4., on a $\overline{E}/\overline{C} = (\overline{E}/\overline{C})^+$. Soit Λ l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, où $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F(\mu_p))$. Le choix d'un générateur topologique de Λ (qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$) établit un isomorphisme entre Λ et l'anneau de séries formelles $\mathbb{Z}_p[[T]]$. D'après [12], §3.2., le groupe $(U/\overline{C})^+$ est un quotient de Λ et d'après [13] le groupe $\mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)^+$ est Λ-module compact de torsion. Les Propositions 3 et 4 de [12] jointes à la preuve par Mazur-Wiles de la conjecture principale [17] (cf. 7.3.) montrent que les Λ-modules $(U/\overline{C})^+$ et $\mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)^+$ ont la même série caractéristique. Puisque $\mathrm{Gal}(L_\infty/F_\infty)(i-1)_{G_\infty}$ est fini (Théorème 2) il en est de même de $(\overline{E}/\overline{C})(i-1)_{G_\infty}$.

6.4. REMARQUES. La preuve du Théorème 3 ci-dessus m'a été fournie par Coates quand $i=2$. Utilisant les résultats de Sinnott Gillard et Villemot sur les unités cyclotomiques, l'extension de la Proposition 12 de [12], et le théorème de Mazur-Wiles [17], on peut obtenir

l'analogue du Théorème 3 pour n'importe quel corps F totalement réel abélien sur $\mathbb{Q}$.

D'après 4.3. et 6.1., si $i \geq 2$, les groupes $\overline{E}(i-1)^{G_\infty}$, $K_{2i-1}(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ et $H^1(\Phi,\mathbb{Z}_p(i))$ sont isomorphes modulo la catégorie des groupes finis. Le Théorème 3 affirme qu'ils sont engendrés, modulo torsion, par l'image de $\overline{C}(i-1)^{G_\infty}$, i.e. par des "éléments cyclotomiques".

Comme ch_{i,k_1} commute au produit et au transfert [9] l'image de $\overline{C}(i-1)^{G_\infty}$ dans $H^1(\Phi,\mathbb{Z}_p(i))$ admet une description directe (ou n'intervient pas la K-théorie) analogue à celle de 4.3. ([24],§1). Ces "éléments cyclotomiques en cohomologie galoisienne" ont été considérés indépendamment par Deligne [8] dans son étude de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\pi_1(\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\})$ (cf. aussi [11]) .

7. RÉGULATEURS p-ADIQUES.

7.1. Soit L une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Si $\mathcal{O}_L$ désigne l'anneau des entiers du corps local L , m l'idéal maximal de $\mathcal{O}_L$, on définit pour tout entier $m > 1$, la K-théorie topologique de $\mathcal{O}_L$ par formule

$$K_m^{top}(\mathcal{O}_L) = \varprojlim_N K_m(\mathcal{O}_L/m^N) \quad ,$$

où les morphismes de transition sont induits par les projections $\mathcal{O}_L/m^{N+1} \to \mathcal{O}_L/m^N$. On a $K_1^{top}(\mathcal{O}_L) = \mathcal{O}_L^*$. Wagoner a montré [29] que $K_m^{top}(\mathcal{O}_L)$ est un groupe fini quand m est pair et que, si $i \geq 2$, le groupe $K_{2i-1}^{top}(\mathcal{O}_L)$ est somme directe d'un groupe fini et de $\mathbb{Z}_p^d$, où $d = [L:\mathbb{Q}_p]$. Ce calcul est obtenu en montrant que $K_m^{top}(\mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est le dual du quotient indécomposable du groupe de cohomologie continue $H^m_{cont}(GL_N(\mathcal{O}_L),\mathbb{Q}_p)$ quand N est assez grand par rapport à m ; la cohomologie continue de $GL_N(\mathcal{O}_L)$ a été calculée par Lazard et Milgram.

Dans [30] Wagoner exhibe un isomorphisme de $\mathrm{Aut}(L)$-modules entre $K_{2i-1}(\mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et L $(i \geq 2)$. Par ailleurs, il déduit d'un résultat de Suslin [27] que

$$K_m^{cont}(\mathcal{O}_L) \simeq \varprojlim_q K_m(\mathcal{O}_L;\mathbb{Z}/q) \quad ,$$

où les morphismes de transition sont donnés par réduction des coefficients de $\mathbb{Z}/q'$ à $\mathbb{Z}/q$ si q divisé q' (ce résultat a été démontré indépendamment par Panin).

Notons enfin que si $i \geq 2$ et si ℓ est un nombre premier impair, il existe un morphisme

$$ch_{i,1} : K_{2i-1}(\mathcal{O}_L;\mathbb{Z}_\ell) \to H^1(L,\mathbb{Z}_\ell(i))$$

surjectif et de noyau fini ([24], Thm. 2 et 9) .

7.2. Soient F un corps de nombres totalement réel, $d = [F:\mathbb{Q}]$, et $E = F_\chi$ l'extension de F associée à χ . Si p est un idéal premier de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ de E on désigne par $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers du complété E_p de E en p . Si $m \geq 2$ on note $K_m^{top}(\chi;\bar{\mathbb{Q}}_p)$ la χ-composante du $Gal(E/F)$-module $\prod_{p|p}(K_m^{top}(\mathcal{O}_p)/torsion) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}_p$. D'après 7.1. le groupe $K_m^{top}(\chi;\bar{\mathbb{Q}}_p)$ est nul si m est pair et égal à $\bar{\mathbb{Q}}_p^d$ si m est impair. L'inclusion $\mathcal{O}_E \to \prod_{p|p} \mathcal{O}_p$ induit des morphismes

$$\rho_{i,p} : K_{2i}(\chi;\bar{\mathbb{Q}}_p) \to K_{2i-1}^{top}(\chi;\bar{\mathbb{Q}}_p) \quad , \; i \geq 2 \; ,$$

appelés <u>régulateurs p-adiques</u> de χ (où $K_m(\chi;\bar{\mathbb{Q}}_p) = K_m(\chi;\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \bar{\mathbb{Q}}_p$, cf. 2.3.).

7.3. Rappelons l'énoncé de la conjecture principale de la théorie d'Iwasawa (cf. par exemple [31], Introduction). Nous prendrons dorénavant des notations légèrement différentes de celles utilisées jusqu'à présent. Si K est un corps de nombres, on désigne par K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K et par K' l'extension $K(\mu_p)$. On a donc $K(\mu_{p^\infty}) = K'_\infty$.

Soit F un corps de nombres totalement réel tel que $F \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$. Le groupe $\Gamma = Gal(F_\infty/F)$ est isomorphe à $Gal(F'_\infty/F')$. On note $\kappa : \Gamma \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère de Γ tel que $g(\xi) = \xi^{\kappa(g)}$ si $g \in \Gamma$ et

et $\xi \in \mu_{p^\infty}$. Choisissons un générateur γ_o du groupe topologique Γ ($\simeq \mathbb{Z}_p$) et posons $u = \kappa(\gamma_o)$. Notons aussi $\omega : \mathrm{Gal}(F'/F) \to \mu_{p-1} \subset \mathbb{Z}_p^*$ le caractère tel que $g(\xi) = \xi^{\omega(g)}$ si $g \in \mathrm{Gal}(F'/F)$ et $\xi \in \mu_p$.

Si ψ est un caractère de Dirichlet primitif de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ on désigne par $L_p(s,\psi)$ la fonction L p-adique de Deligne et Ribet associée à ψ (i.e. celle de Kubota et Leopoldt si F est abélien sur $\mathbb{Q}$). Soit F_ψ l'extension de F associée à ψ. Si ψ est de seconde espèce, c'est-à-dire si F_ψ est contenu dans F_∞, on pose $H_\psi(T) = \psi(\gamma_o)(1+T)-1$. Si ψ n'est pas de seconde espèce on pose $H_\psi(T) = 1$. Soient $\mathbb{Z}_p[\psi]$ l'anneau engendré par $\mathbb{Z}_p$ et par les valeurs de ψ, et π une uniformisante de $\mathbb{Z}_p[\psi]$. On sait qu'il existe une unique série formelle $G_\psi(T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$ telle que, si $s \in \mathbb{Z}_p - \{1\}$,

$$L_p(1-s,\psi) = G_\psi(u^s-1)/H_\psi(u^s-1) .$$

Si ρ est un caractère de seconde espèce on a

$$G_{\psi\rho}(T) = G_\psi(\rho(\gamma_o)(1+T)-1) .$$

On désigne par $g_\psi(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$ l'unique polynôme distingué tel que $G_\psi(T)$ s'écrive sous la forme $G_\psi(T) = \pi^a g_\psi(T)h(T)$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $h(T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][[T]]^*$

Supposons par ailleurs que ψ soit de première espèce, c'est-à-dire que $F_\psi \cap F_\infty = F$. Si L_∞ est la p-extension abélienne non ramifiée maximale de $F_\psi(\mu_{p^\infty})$ on pose

$$X = \mathrm{Gal}(L_\infty/F_\psi(\mu_{p^\infty})) \quad \text{et} \quad V = X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p .$$

Le module X est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(F_\psi(\mu_{p^\infty})/F) \simeq \Delta\times\Gamma$, où $\Delta = \mathrm{Gal}(F_\psi(\mu_p)/F)$. Notons V^ψ le sous-groupe de V où Δ agit par le caractère (associé à) ψ, et $f_\psi(T)$ le polynôme caractéristique de l'action de $\gamma-1$ sur cet espace vectoriel de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. La <u>conjecture principale</u> affirme que si ψ est impair et de première espèce on a

$$f_\psi(T) = g_{\psi^{-1}\omega}(u(1+T)^{-1}-1) .$$

Elle est démontrée quand F est abélien sur $\mathbb{Q}$ [17] et pour la plupart des caractères ψ quand F est de degré impair sur $\mathbb{Q}$ [31].

7.4. Soient F un corps de nombres totalement réel tel que $F \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$ et χ un caractère de Dirichlet primitif de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}^*$. Le composé de χ avec le plongement $\overline{\mathbb{Q}}^* \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ (qu'on notera aussi χ) admet une décomposition $\chi = \psi\rho$ en produit d'un caractère de première espèce ψ et d'un caractère de seconde espèce ρ.

THÉORÈME 4. *Soient $i \geq 2$ un entier et $p \neq 2$. Supposons que χ a la parité de $i-1$ (2.3.) et que $\psi\omega^i$ vérifie la conjecture principale. Alors les énoncés suivants sont équivalents*

a) *Le régulateur p-adique*

$$\rho_{i,p} : K_{2i-1}(\chi, \overline{\mathbb{Q}}_p) \to K_{2i-1}^{top}(\chi, \overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est un isomorphisme.

b) *Le nombre $L_p(i, \chi^{-1}\omega^{1-i})$ est non nul.*

PREUVE. Soit $E = F_\chi$ l'extension de F associée à χ. D'après 6.1. les groupes $K_{2i-1}(\mathcal{O}_E) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}_p$ et $H^1(\Phi, \mathbb{Z}_p(i)) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}_p$ sont isomorphes (où Φ est le groupe de Galois de l'extension non ramifiée en dehors de p maximale de E) et, d'après 7.1., les groupes

$$\prod_{p|p} (K_{2i-1}^{top}(\mathcal{O}_p)/\text{torsion}) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}_p \quad \text{et} \quad \prod_{p|p} H^1(E_p, \mathbb{Z}_p(i)) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}_p$$

Sont isomorphes. Comme $ch_{i,1}$ commute aux morphismes $\mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_p$ l'énoncé a) est donc équivalent à ce que la χ-composante de l'application

$$H^1(\Phi, \overline{\mathbb{Q}}_p(i)) \to \prod_{p|p} H^1(E_p, \overline{\mathbb{Q}}_p(i))$$

soit un isomorphisme. De façon, équivalente, si $\overline{\mathbb{Z}}_p$ désigne l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, la χ-composante de l'application

$$H^1(\Phi, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \overline{\mathbb{Z}}_p \to \prod_{p|p} H^1(E_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \overline{\mathbb{Z}}_p$$

a un noyau et un conoyau fini. Comme ces groupes ont le même corang, l'énoncé a) équivaut à ce que la χ-composante de $R_i(E) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{\mathbb{Z}}_p$ soit finie (6.2.). Comme $E'_\infty = E(\mu_{p^\infty}) = F_\psi(\mu_{p^\infty})$ cela équivaut également, d'après 6.2. i), à la nullité du groupe $(V(-i)_{G_\infty})^\chi$, où $V = X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p$ (7.3.) et $G_\infty = \mathrm{Gal}(E'_\infty/F_\psi)$ (on notera que χ est un $\mathbb{Z}_p[[G]]$-module noethérien de torsion [13]) . Par ailleurs, le groupe $\mathrm{Gal}(E'_\infty/F)$ est le produit direct de $\Gamma = \mathrm{Gal}(E'_\infty/F'_\psi) \simeq \mathrm{Gal}(F_\infty/F) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ et de $\Delta = \mathrm{Gal}(E'_\infty/F_\infty) \simeq \mathrm{Gal}(F'/F)$. Donc $\psi\omega^i$ est un caractère de Δ . De plus, ρ est un caractère de $\mathrm{Gal}(F_\rho/F) \simeq \mathrm{Gal}(E'/F'_\psi)$ et, si $\Gamma' = \mathrm{Gal}(E'_\infty/E')$ on a $(V(-i)_{G_\infty})^\chi = (V^{\psi\omega^i}(-i)_{\Gamma'})^\rho$.

Si $\xi = \rho(\gamma_o)$ ce groupe est nul si et seulement si ξ n'est pas valeur propre de l'action de γ_o sur $V^{\psi\omega^i}(-i)$, c'est à dire $f_{\psi\omega^i}(\xi u^i - 1) \neq 0$.

D'après la conjecture principale on a

$$f_{\psi\omega^i}(\xi u^i - 1) = g_{\psi^{-1}\omega^{1-i}}(\xi^{-1}u^{1-i} - 1) \quad .$$

Donc, a) est équivalent à

$$G_{\psi^{-1}\omega^{1-i}}(\xi^{-1}u^{1-i} - 1) = G_{\chi^{-1}\omega^{1-i}}(u^{1-i} - 1) \neq 0 \ ,$$

c'est-à-dire à $L_p(i, \chi^{-1}\omega^{1-i}) \neq 0$, car

$$H_{\chi^{-1}\omega^{1-i}}(u^{1-i} - 1) \neq 0 \quad \text{si} \quad i \neq 1 \ . \qquad \text{Q.E.D.}$$

7.5. REMARQUES. Quand F est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ on montre dans [24] que l'indice de l'image de $\bar{C}(i-1)_{G_\infty}$ dans $\prod_{p|p} H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/\text{torsion} = \mathbb{Z}_p^d$ est le produit d'un facteur eulérien non nul et de $L_p(i, \omega^{1-i})$. Cela prouve aussi que b) ⇒ a) quand χ est le caractère trivial.

- Les résultats de Coleman [7] et Wagoner [30] impliquent aussi certains cas du Théorème 4.

- Dans [7] Coleman définit un régulateur de $K_3(\mathbb{C}_p)$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ tel que l'image de la χ-composante de $B(\omega)$ soit donnée par la valeur en deux de la fonction L p-adique de $\chi^{-1}\omega^{-1}$ (et non pas seulement le produit de cette valeur par une unité p-adique). En général, une théorie analytique p-adique des régulateurs, analogue à celle de Beilinson dans le cas complexe [2] , reste à faire.

RÉFÉRENCES

[1] H. Bass et J. Tate : The Milnor ring of a global field, Springer lecture Notes 342 (1973) pp. 349-446.

[2] A.A. Beilinson : Régulateurs supérieurs et de valeurs de fonction L, Sovremennye Problemy Matematiki 24, Moscou, VINITI (1984), pp. 181-238 (en russe).

[3] S. Bloch : Higher regulators, Algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves, Lecture Notes, U.C. Irvine (1977) (non publié).

[4] A. Borel : Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 7 (1974), pp. 235-272.

[5] A. Borel : Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta, Ann. Scuola Normale Superiore, Ser. 4, 7 (1974), pp. 613-636.

[6] W. Browder : Algebraic K-Theory with coefficients $\mathbb{Z}/p$, Springer Lecture Notes n° 657 (1978), pp. 40-84.

[7] R. Coleman : Dilogarithms, Regulators and p-adic L-functions, Inv. Math. 69 (1982), pp. 171-208.

[8] P. Deligne : Lettre à S. Bloch, 2/2/1984.

[9] W. Dwyer, et E. Friedlander : Algebraic and étale K-Theory, preprint (1984).

[10] B. Gross : On the values of Artin L-functions, (1979) (non-publié).

[11] Y. Ihara : Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, preprint (1984).

[12] K. Iwasawa : Some modules in the theory of cyclotomic fields, Journal Math. Soc. of Japan 16 (1964), pp. 42-82.

[13] K. Iwasawa : On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Maths. 98 (1973), pp. 246-326.

[14] S. Lang : Cyclotomic fields I, Graduate Texts in Maths. 59 (1978), Springer-Verlag.

[15] S. Lichtenbaum : The construction of weight-two arithmetic cohomology, preprint (1985).

[16] J.-L. Loday : K-Théorie algébrique et représentations de groupes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4ème série, 9 (1979), pp. 309-377.

[17] B. Mazur et A. Wiles : Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, Invent. Math. 76 (1984), pp. 179-330.

[18] J. Milnor : Introduction to Algebraic K-Theory, Annals of Maths. Studies 72 (1971).

[19] D. Quillen : Cohomology of groups, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, t. 2 (1970), pp. 47-51.

[20] D. Quillen : Algebraic K-theory I, Springer Lecture Notes N° 341 (1973), pp. 85-147.

[21] D. Quillen : Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers, Springer Lecture Notes, N° 341 (1973), pp. 179-210.

[22] P. Schneider : Über gewisse Galoiscohomologiegruppen, Math. Zeitschrift 168 (1979), pp. 181-205.

[23] C. Soulé : K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, Inv. Math. 55 (1979), pp. 251-295.

[24] C. Soulé : On higher p-adic regulators, Springer Lecture Notes, N° 854 (1981), pp. 372-401.

[25] C. Soulé : Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini, Math. Annalen 268 (1984), pp. 317-345.

[26] E.H. Spanier : Algebraic Topology, Mac Graw-Hill Series in Higher Mathematics (1966).

[27] A.A. Suslin : On the K-theory of local fields, Journal of Pure and Applied Applied Algebra Vol. 34, N° 2-3 (1984), pp. 301-318.

[28] J. Tate : K_2 and Galois cohomology, lettre a K.Iwasawa, Springer Lecture Notes N° 342 (1973), pp. 524-527.

[29] J. Wagoner : Continuous cohomology and p-adic K-theory, Springer Lecture Notes, N° 551 (1976), pp. 241-248.

[30] J. Wagoner : Analytic and étale p-adic regulators, preprint (1983).

[31] A. Wiles : On p-adic representations for totally real fields, preprint (1985).

Christophe SOULÉ
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, Place Jussieu
75251 PARIS Cédex