

Astérisque

JEAN-JACQUES SANSUC

**Principe de Hasse, surfaces cubiques et intersections
de deux quadriques**

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 183-207

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__183_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Principe de Hasse, surfaces cubiques
et intersections de deux quadriques

Jean-Jacques Sansuc

Soient k un corps de nombres - $\mathbb{Q}$ par exemple - et X une variété algébrique définie sur k , par exemple une variété $X^{n_1, \dots, n_h}$ définie dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$ de dimension n sur k par h formes à coefficients dans k :

$$(1) \quad \phi_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad d^o \phi_i = n_i.$$

On s'intéresse essentiellement ici au problème de l'existence d'un point rationnel pour certaines variétés X de dimension ≥ 2 . Autrement dit, si l'on note $X(k)$ l'ensemble des points de X à valeurs dans k , on se pose la question suivante:

$$(2) \quad \text{a-t-on } X(k) \neq \emptyset ?$$

Ou, en d'autres termes, si X est définie par un système tel que (1):

$$\text{le système (1) a-t-il une solution non triviale dans } k^m ? \quad (m=n+1).$$

On imposera souvent aux variétés X définies par un système (1) la condition suivante:

(*) X intersection complète, géométriquement intègre et $\neq$ cône.

Les variétés X auxquelles on va s'intéresser seront principalement de l'un des trois types suivants:

$X^{2,2} :=$ intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}_k^n$ pour $n \geq 4$, vérifiant (*),

$X^3 :=$ (hyper)surface cubique dans $\mathbb{P}_k^n$ pour $n \geq 3$, vérifiant (*),

$Z :=$ surface, propre et lisse, d'équation affine

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

où $a \in k^*$ et où P est un polynôme séparable à coefficients dans k .

Ces surfaces fibrées en coniques Z sont appelées surfaces de Châtelet [6,7] lorsque $d^o P = 3$ ou 4 . Il s'agit alors de surfaces cubiques ou d'intersections de deux quadriques bien particulières. Leur étude présente néanmoins des intérêts multiples: on peut les considérer d'abord pour elles-mêmes, car, après les quadriques, ce sont les surfaces les plus simples à considérer d'un point de vue diophantien, sans être aucunement triviales à cet égard ni réductibles au cas des quadriques; ensuite, comme l'ont montré Coray et Tsfasman [17], l'arithmétique des surfaces singulières du type $X^{2,2}$ ou X^3 se ramène à celle des surfaces de Châtelet; enfin, celles-ci interviennent de façon essentielle comme intermédiaires dans l'étude des $X^{2,2}$ en plus grande dimension, cf. §1.

§0. Principe de Hasse et obstruction de Manin

On reprend les notations initiales: k est un corps de nombres et X une variété définie sur k .

(a) Pour décider si $X(k) \neq \emptyset$, on commence par vérifier les conditions locales:

$$(3) \quad X(k_v) \neq \emptyset \quad \text{pour chaque complété } k_v \text{ de } k.$$

Il est évident que si l'une d'elles n'est pas satisfaite, i.e. s'il existe une place v_0 de k telle que $X(k_{v_0}) = \emptyset$, alors $X(k) = \emptyset$. Pour X de dimension ≥ 2 et géométriquement intègre, des arguments de bonne réduction et l'application des estimations de Lang-Weil-Nisnevich et du lemme de Hensel montrent que les conditions locales ci-dessus équivalent à un nombre fini de congruences:

$$(4) \quad X \text{ a des points mod } p^j \text{ pour un certain nombre fini de } p^j,$$

où p désigne un idéal premier de l'anneau des entiers de k . Les conditions locales constituent une première obstruction à l'existence d'un point rationnel qu'on peut ainsi souvent considérer comme relativement facile à calculer.

(b) Si les conditions locales sont vérifiées, on est ensuite confronté au problème de la validité du principe de Hasse:

$$(5) \quad \text{les conditions locales } \prod_v X(k_v) \neq \emptyset \text{ impliquent-elles } X(k) \neq \emptyset ?$$

Si dans une classe donnée de variétés V , par exemple les quadriques, les cubiques, les surfaces de Châtelet, ..., la réponse est oui, on dit que la classe V vérifie le principe de Hasse ordinaire. C'est précisément le cas, d'après Hasse, pour les quadriques. Mais il est vraiment rare que, pour une classe V assez large, le principe de Hasse ordinaire soit vérifié, si l'on ne fait pas au moins quelques restrictions de nature géométrique, par exemple sur les singularités, sur les variétés de V . C'est ainsi que, dans la classe $\chi^{2,2}$ des intersections de deux quadriques, des contre-exemples du type ($k = \mathbb{Q}$):

$$(6) \quad \begin{aligned} x_2^2 - 3x_3^2 &= 23x_0^2 + x_1^2 \\ x_4^2 - 3x_5^2 &= -23x_0^2 - x_1^2 \end{aligned} \quad n = 5$$

ou encore:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_0^2 - 2x_1^2 &= x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ x_0^2 - 2x_1^2 &= -y_2^2 - \dots - y_n^2 \end{aligned} \quad n \geq 5$$

semblent interdire tout résultat général positif même en grande dimension! Mais, il s'agit là de variétés singulières, et, surtout, pour la première, due à W. Ellison, il n'y a pas de point non singulier dans $\mathbb{Q}_2$, ni d'ailleurs dans $\mathbb{Q}_3$, et pour la seconde, il n'y a pas de point non singulier dans $\mathbb{R}$. Ainsi, dans chacun de ces deux cas, un modèle lisse V de X ne vérifiera plus les conditions locales ordinaires (3). On peut, en un

certain sens, considérer de tels contre-exemples comme "parasites" - ou "accidentels". On est ainsi conduit à modifier légèrement la notion de principe de Hasse en introduisant des conditions locales plus fortes:

$$(8) \quad X_{\text{lisse}}(k_v) \neq \emptyset \quad \text{pour chaque complété } k_v \text{ de } k,$$

où X_{lisse} désigne l'ouvert des points non-singuliers de X . On dira qu'une classe $\mathcal{V}$ de k -variétés algébriques, géométriquement intègres, vérifie le principe de Hasse fin, cf. [9], si, pour X dans $\mathcal{V}$,

(9) les conditions locales (8) entraînent que tout modèle propre de X a un point dans k .

Pour vérifier la conclusion de (9), il suffit de trouver un modèle lisse de X qui ait un point dans k . La validité de ce principe de Hasse fin - qu'on notera HP dans toute la suite - est un invariant k -birationnel: c'est une propriété du corps des fonctions rationnelles des variétés de $\mathcal{V}$. Pour des variétés complètes et lisses, le principe de Hasse fin se réduit évidemment au principe de Hasse ordinaire. Les exemples (6) et (7) ne sont pas des contre-exemples au principe de Hasse fin, puisque les conditions locales fortes (8) ne sont pas vérifiées.

Lorsqu'une classe $\mathcal{V}$ de variétés vérifie le principe de Hasse ordinaire, ou le principe de Hasse fin, on peut considérer la question initiale (2) résolue - de façon qualitative - dans $\mathcal{V}$: c'est le cas de la classe $\mathcal{X}^2$ des quadriques.

(c) Pour une classe donnée $\mathcal{V}$ de variétés définies par un système (1) de h formes de degrés $n_1, \dots, n_h$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$ et vérifiant la condition (*), le principe de Hasse fin n'est lui-même en général pas vérifié, comme on le verra sur plusieurs contre-exemples ci-après. Il est néanmoins probable qu'au moins pour les variétés lisses d'un type $(n_1, \dots, n_h)$ donné, le principe de Hasse fin vaille pour n suffisamment grand. La méthode du cercle donne en tout cas le résultat remarquable suivant, pour $k = \mathbb{Q}$:

Théorème (Birch [2]). Soit $h\chi_n^d$ la classe des sous-variétés de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ définies par un système (1) de h formes, chacune de degré d et vérifiant la condition (*). Si

$$(10) \quad n-1-\dim(X_{\text{sing}}) > h(h+1)(d-1) \cdot 2^{d-1},$$

où X appartient à la classe ci-dessus et X_{sing} désigne le lieu singulier de X , alors X vérifie le principe de Hasse fin.

Si X est lisse, l'inégalité (10) s'écrit:

$$(11) \quad n > h(h+1)(d-1) \cdot 2^{d-1}.$$

Le théorème ci-dessus donne donc le principe de Hasse pour les $\mathbb{Q}$ -variétés lisses du type:

$$\begin{array}{ll} X^2 & \text{si } m \geq 5 \\ X^{2,2} & \text{si } m \geq 13 \\ X^3 & \text{si } m \geq 17 \end{array}$$

où $m = n+1$ est le nombre de variables. Un autre théorème de Birch [1] affirme qu'un système de formes (1) d'un type donné $(n_1, \dots, n_h)$ où les n_i sont impairs a un zéro dans k pour n assez grand.

Remarque 1. Il est bon de noter que, pour $k_v \neq \mathbf{R}$, les conditions locales ordinaires $X(k_v) \neq \emptyset$ sont automatiquement vérifiées

$$\begin{array}{lll} \text{pour } X^2 & \text{si } m \geq 5 & \\ \text{pour } X^{2,2} & \text{si } m \geq 9 & \text{(Demyanov)} \\ \text{pour } X^3 & \text{si } m \geq 10 & \text{(Demyanov et Lewis)} \end{array}$$

Remarque 2. Les méthodes analytiques, particulièrement la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, ont l'avantage de fournir - en principe - des résultats quantitatifs sur les zéros de (1). Cependant, si elles fonctionnent très bien pour m assez grand - et souvent $k = \mathbf{Q}$ - elles s'appliquent avec une difficulté croissante aux petites valeurs de m qui peuvent rester hors d'atteinte. Ainsi, pour une forme quadratique, la formule de Siegel est établie naturellement [37] pour $m \geq 5$, avec pour corollaire le théorème de Meyer, alors que la méthode de Hasse, qualitative, consiste à traiter successivement les cas $m = 2$, puis 3 (corps de classes), 4 (corps de classes, théorème de la progression arithmétique et approximation forte), avant d'aboutir au cas $m \geq 5$ (par sections linéaires et approximation faible).

(d) Nous allons voir qu'en petite dimension - même sans considérer les courbes - les contre-exemples au principe de Hasse fin sont effectivement nombreux dans les classes $X^{2,2}$, X^3 et Z qui nous intéressent, même si on se limite à des variétés lisses. Les diverses variétés ci-dessous, définies sur $k = \mathbf{Q}$, sont toutes des contre-exemples au principe de Hasse fin (dans le premier exemple θ parcourt les racines de $\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 7 = 0$):

$X^3 \subset \mathbf{P}^3$	lisse	$\prod (x + \theta y + \theta^2 z) = t(t+x)(2t+x)$	Sw.-Dyer 1962 [33]
$X^3 \subset \mathbf{P}^3$	lisse	$5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0$	Cassels-Guy 1966 [5]
$X^{2,2} \subset \mathbf{P}^4$	lisse	$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = uv \\ x^2 - 5z^2 = (u+v)(u+2v) \end{cases}$	Birch-Sw.-Dyer 1975 [3]
$X^{2,2} \subset \mathbf{P}^4$	2 points singuliers	$\begin{cases} y^2 + z^2 = (u-2v)(3v-u) \\ x^2 = uv \end{cases}$	Iskovskih 1971 [22]
$X^{2,2} \subset \mathbf{P}^5$	4 points singuliers	$\begin{cases} u_1^2 - 5v_1^2 = 2xy \\ u_2^2 - 5v_2^2 = 2(x+20y)(x+25y) \end{cases}$	CT-C-S 1980 [9]
$X^{2,2} \subset \mathbf{P}^5$	6 points singuliers	$\begin{cases} u_1^2 - 17v_1^2 + 2(u_2^2 - 17v_2^2) = 3(x^2 - 2y^2) \\ u_1 u_2 - 17 v_1 v_2 = 0 \end{cases}$	Hürlimann 1982 [21]
Z	de Châtelet	$y^2 + z^2 = (3-x^2)(x^2-2)$	Iskovskih 1971 [22]

De plus, elles vérifient toutes la condition (*). Au contraire, si l'on omet la condition (*), on trouve, en toute dimension, des contre-exemples au principe de Hasse fin, parmi les $X^{2,2}$, comme le montrent les équations

$$X^{2,2} \subset \mathbb{P}^n \quad \begin{cases} xy = z^2 \\ x^2 - 17y^2 = 2w^2 \end{cases}$$

qui définissent, pour $n \geq 3$, une variété $\mathbb{Q}$ -birationnelle au produit d'un espace projectif par la courbe de Reichardt et Lind, mais cette variété est un cône pour $n \geq 4$.

(e) En 1970, Manin [24] a introduit une obstruction au principe de Hasse qui semble rendre compte de la plupart des contre-exemples connus, en tout cas de ceux pour lesquels on a su calculer cette obstruction. Celle-ci s'appuie sur le groupe de Brauer-Grothendieck $\text{Br}(X)$ de la variété. Supposons X propre et géométriquement intègre. Toute classe d'algèbres d'Azumaya $A \in \text{Br}(X)$ définit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} X(k) & \xrightarrow{\quad} & \prod_v X(k_v) & & \\ \downarrow A & & \downarrow A & & \\ \text{Br}(k) & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_v \text{Br}(k_v) & \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

et on définit $i_A: \prod_v X(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par composition. La loi de réciprocité affirme que la suite du bas est un complexe - en fait exact - et i_A vaut donc 0 sur $X(k)$. Ainsi:

$$X(k) \subset \bigcap_A \ker(i_A) \quad \text{où } A \text{ parcourt } \text{Br}(X).$$

On notera que i_A ne dépend que de la classe de A dans $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$. L'obstruction de Manin - ou de Brauer-Manin - est la condition suivante:

$$(12) \quad \bigcap_A \ker(i_A) = \emptyset \quad \text{où } A \text{ parcourt } \text{Br}(X)/\text{Br}(k).$$

Le groupe de Brauer-Grothendieck étant un invariant k -birationnel des variétés propres et lisses sur k , il en est de même de cette condition. Pour les modèles propres et lisses des types de variétés qui nous intéressent ici, $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ est un groupe abélien fini, et dans la condition (12), il revient au même de prendre A dans un système fini d'algèbres $\{A_1, \dots, A_r\}$ dont les classes engendrent $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$. L'obstruction de Manin est une obstruction au principe de Hasse, donc finalement à l'existence d'un point dans k pour X . Elle est souvent théoriquement calculable, mais, en pratique, son calcul n'est déjà pas évident pour les surfaces cubiques diagonales, cf. [10]. On dira que l'obstruction de Manin est "vide" - ou "nulle" - si la condition (12) n'est pas vérifiée, autrement dit s'il existe $(x_v) \in \prod_v X(k_v)$ tel que $i_A(x_v) = 0$ pour tout $A \in \text{Br}(X)$, i.e. si l'application $(i_A)_{A \in \text{Br}(X)}$ atteint la valeur 0. Dans les cas où la condition (12) est vérifiée on dira au contraire que l'obstruction de Manin est "non-vidée" - ou "non-nulle": l'application $(i_A)_{A \in \text{Br}(X)}$ n'atteint jamais la valeur 0. Dans la mesure où cette obstruction semble expliquer la plupart des contre-exemples au principe de Hasse que l'on connait, au

moins pour les types de variétés que nous considérons plus particulièrement ici, on est amené à énoncer l'hypothèse suivante:

Hypothèse BM: L'obstruction de Manin est la seule obstruction au principe de Hasse fin.

De façon plus explicite, on dira d'une classe donnée $\mathcal{V}$ de k -variétés qu'elle vérifie l'hypothèse BM si, pour tout modèle V propre et lisse d'une variété X de $\mathcal{V}$,

- (13) les conditions locales $\prod_{\mathcal{V}} V(k_{\mathcal{V}}) \neq \emptyset$ et la "nullité" de l'obstruction de Manin pour V impliquent $V(k) \neq \emptyset$.

Il est fort possible que cette hypothèse soit fausse pour de multiples classes de variétés. Néanmoins, on n'en connaît aucun exemple. On connaît au contraire quelques exemples non triviaux où elle est vraie, et, pour les variétés qui nous intéressent ici, on peut même conjecturer qu'elle est vraie. On notera une évidence: si une classe $\mathcal{V}$ vérifie le principe de Hasse fin, elle vérifie a fortiori l'hypothèse BM. Lorsque celle-ci est vérifiée par une classe $\mathcal{V}$ de variétés, on peut considérer, même si le principe de Hasse fin est en défaut, que la question - qualitative - de l'existence d'un point rationnel pour une variété de $\mathcal{V}$ est théoriquement résolue. Il reste néanmoins en pratique à savoir "calculer" l'obstruction de Manin dans $\mathcal{V}$, i.e. à savoir décider si l'application

$$(14) \quad \prod_{\mathcal{V}} (V(k_{\mathcal{V}})/\text{Br}) \xrightarrow{i} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^R$$

où R désigne une partie de $\text{Br}(V)$ qui engendre $\text{Br}(V)/\text{Br}(k)$ et $i = (i_A)_{A \in R}$, atteint la valeur $0 = (0, \dots, 0)$ ou non. La notation $V(k_{\mathcal{V}})/\text{Br}$ désigne le quotient de $V(k_{\mathcal{V}})$ par l'équivalence de Brauer, définie par l'accouplement naturel avec le groupe de Brauer de V : autrement dit, c'est l'image naturelle de $V(k_{\mathcal{V}})$ dans $\text{Hom}(\text{Br}(V), \text{Br}(k_{\mathcal{V}}))$.

Scholie. Si $\mathcal{V}$ est une variété propre et lisse qui vérifie l'hypothèse BM et si $\text{Br}(V) = \text{Br}(k)$, alors elle vérifie le principe de Hasse.

Cet énoncé - immédiat - tient au fait que, si $\text{Br}(V) = \text{Br}(k)$, l'obstruction de Manin est assurément "vide" pour V . En pratique, on s'intéresse à des variétés qui ne sont pas toutes propres et lisses et on utilise plutôt la variante suivante: si $\mathcal{V}$ est une classe de variétés qui vérifie l'hypothèse BM, le principe de Hasse fin vaut pour toute variété X de $\mathcal{V}$ dont un modèle propre et lisse V vérifie $\text{Br}(V) = \text{Br}(k)$.

L'hypothèse BM va nous servir de guide dans l'étude du problème (1) dans les classes $X^{2,2}$, X^3 et Z que nous regardons plus particulièrement ici. En particulier, elle peut nous permettre de discerner des domaines où le principe de Hasse fin a des chances d'être vrai et des domaines où il risque d'apparaître des contre-exemples. A cet effet, il est intéressant - au vu du corollaire ci-dessus - de calculer $\text{Br}(V)/\text{Br}(k)$, pour V modèle propre et lisse d'une variété du type $X^{2,2}$ ou X^3 ou Z . Voici un tableau des résultats d'un tel calcul, en fonction de n et de la lissité ou non-lissité de

X et de la nature de P pour Z . Ce tableau donne la valeur de $\text{Br}(V)/\text{Br}(k)$ pour V un modèle propre et lisse de X ou Z - ce qui ne dépend pas du choix du modèle en raison de l'invariance k -birationnelle du groupe de Brauer pour les variétés propres et lisses:

pour X^2	on trouve	0			
pour $X^{2,2}$	on trouve	0	si	$n \geq 6$	
	on trouve	0	si	$n = 5$	et X lisse
	on peut trouver	$\neq 0$	si	$n = 5$	et X singulière
	on peut trouver	$\neq 0$	si	$n = 4$	et X lisse
pour X^3	on trouve	0	si	$n \geq 4$	et X lisse
	on peut trouver	$\neq 0$	si	$n = 3$	et X lisse
pour Z	on trouve	0	si	P est irréductible	
	on peut trouver	$\neq 0$	si	P est réductible.	

Pour les surfaces fibrées en coniques Z on trouve d'ailleurs le résultat plus précis suivant: on suppose que a n'est pas un carré dans k et que $P = P_1 \dots P_s$ où les facteurs $P_i \in k[x]$ sont irréductibles dans $k(\sqrt{a})$; on pose $d = d^\circ P$ et $d_i = d^\circ P_i$; on trouve alors, comme valeur de $\text{Br}(V)/\text{Br}(k)$, soit $(\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ si d est impair, ou bien si tous les d_i sont pairs, soit $(\mathbb{Z}/2)^{s-2}$ si d est pair et l'un des d_i impair, cf. [30] .

On voit donc que l'hypothèse BM se réduit au principe de Hasse fin dans les cas suivants:

X^2		
$X^{2,2}$	$n \geq 6$	$X^{2,2} \subset \mathbb{P}_k^n$
	$n = 5$ et X lisse	
X^3	$n \geq 4$ et X lisse	$X^3 \subset \mathbb{P}_k^n$
Z	P irréductible ou $P = P_1 P_2$ avec P_1, P_2 irréductibles de d° impair	$d := d^\circ P$.

Voici un tableau rassemblant les conjectures qui semblent raisonnables et en regard les meilleurs résultats connus à propos des classes X^2 , $X^{2,2}$, X^3 et Z . On note HP les cas de validité du principe de Hasse fin, et BM les cas de validité de l'hypothèse BM:

	conjectures	résultats
$X^2 \rightarrow$		HP Hasse [19] 1924
$X^{2,2} \rightarrow$	HP si $n \geq 6$	HP si $n \geq 8$ CTSSwD 1985 [15]
	HP si $n = 5$ et X lisse	
	BM si $n \geq 4$	
$X^3 \rightarrow$	HP si $n \geq 4$ et X lisse	HP si $n \geq 9$ et $k = \mathbb{Q}$ Heath-Brown 1983 [20]
	BM si $n = 3$ et X lisse	
$Z \rightarrow$	HP si P irréductible	HP si $d \leq 4$ et P irréductible [15] 1985
	BM	BM si $d \leq 4$ { CTCS [9] 1980 + [15] 1985

Pour les trois premiers types de variétés, le nombre de variables est $m = n+1$. Pour X^3 lisse et $n \geq 9$, HP équivaut simplement à $X(k) \neq \emptyset$. On devrait ajouter au tableau que, pour k corps de nombres quelconque, ce résultat est connu si $n \geq 15$ (Pleasants 1975 [29]). D'autre part, on connaît HP, ou BM, pour des $X^{2,2}$ particulières en basse dimension, d'après [9], [15] et [17], cf. §1. On trouve encore, dans [10], une forte évidence numérique pour l'hypothèse BM dans le cas des surfaces cubiques diagonales pour $k = \mathbb{Q}$. On trouve enfin dans [14] que l'hypothèse BM pour les surfaces fibrées en coniques Z est une conséquence, pour $k = \mathbb{Q}$, de l'hypothèse H de Schinzel et des calculs numériques ont conforté l'hypothèse BM dans des cas où $P = P_1 P_2$ avec $d^0 P_1 = 3$ et $P = P_1 P_2 P_3$ avec $d^0 P_1 = 2$.

§1. Les intersections de deux quadriques

Ce paragraphe est consacré à la classe $X^{2,2}$ des intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}_k^n$ pour $n \geq 4$. Voici d'abord un résultat général pour $m \geq 9$ variables, résultat dû à Colliot-Thélène, Swinnerton-Dyer et l'auteur (1985 [15]). Pour $k = \mathbb{Q}$, le même énoncé avait été établi d'abord par Mordell (1959 [26]) pour $m \geq 13$, puis par Swinnerton-Dyer (1964 [34]) pour $m \geq 11$. D.R. Heath-Brown nous a même informés qu'il savait obtenir, toujours pour $k = \mathbb{Q}$, et au moins pour X lisse, le cas $m \geq 10$ grâce à la méthode du cercle.

Théorème ([15]). Soit $X^{2,2} \subset \mathbb{P}_k^n$ une intersection de deux quadriques,
 (*) qui soit pure, géométriquement intègre, et qui ne soit pas un cône.

Alors, si $n \geq 8$, la variété X_{lisse} vérifie le principe de Hasse.

Autrement dit, si une telle variété X vérifie $\prod_v X_{\text{lisse}}(k_v) \neq \emptyset$, alors $X_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$. En fait, le résultat est établi pour tout modèle lisse de X , en particulier pour tout modèle propre et lisse V .

Grâce en particulier aux résultats locaux de Demyanov signalés dans la remarque 1, on déduit du théorème ci-dessus l'énoncé très simple suivant (l'énoncé général analogue - pour k corps de nombres quelconque - est compliqué par la présence des places réelles, voir [15]):

Corollaire ([15]). Soient k un corps de nombres totalement imaginaire et ϕ_1 et ϕ_2 deux formes quadratiques à coefficients dans k en $m \geq 9$ variables. Le système

$$\phi_1(x_1, \dots, x_m) = 0$$

$$\phi_2(x_1, \dots, x_m) = 0$$

a un zéro non trivial dans k .

Rappelons à ce sujet la question posée par Pfister (1966 [28]): est-il vrai que sur un corps de nombres totalement imaginaire un système de r formes quadratiques en m

variables a un zéro non trivial si $m > 4r$? Pour $r = 1$ l'inégalité s'écrit $m \geq 5$ et la réponse est oui par le théorème de Meyer-Hasse. Pour $r = 2$ l'inégalité s'écrit $m \geq 9$ et la réponse est oui par le corollaire ci-dessus.

Plan de la démonstration du théorème. Nous indiquons simplement les grandes étapes de la démonstration en précisant les ingrédients principaux à chaque étape. La démonstration suit un cheminement qui peut paraître étrange et tortueux: elle établit le principe de Hasse pour $X^{2,2} \subset \mathbf{P}_k^n$ pour $n \geq 8$ en passant par le même résultat pour des variétés intermédiaires plus particulières - certaines $X^{2,2}$ mais aussi certaines variétés fibrées en quadriques - en dimension généralement plus basse, pour aboutir finalement à une $X^{2,2} \subset \mathbf{P}_k^4$ particulière pour laquelle le principe de Hasse est essentiellement déjà connu (Manin, cf. [25]). Au lieu de traiter directement le cas $n \geq 8$, on procède donc globalement par réduction à des cas de plus basse dimension où cependant - contrairement au cas des quadriques - le principe de Hasse n'est plus vrai en général, du moins pour $n = 4$ et $n = 5$! Mais, dans ces dimensions critiques, on parvient à éviter les contre-exemples au principe de Hasse et à choisir des variétés particulières, du même type ou non, pour lesquelles le principe de Hasse est encore vrai.

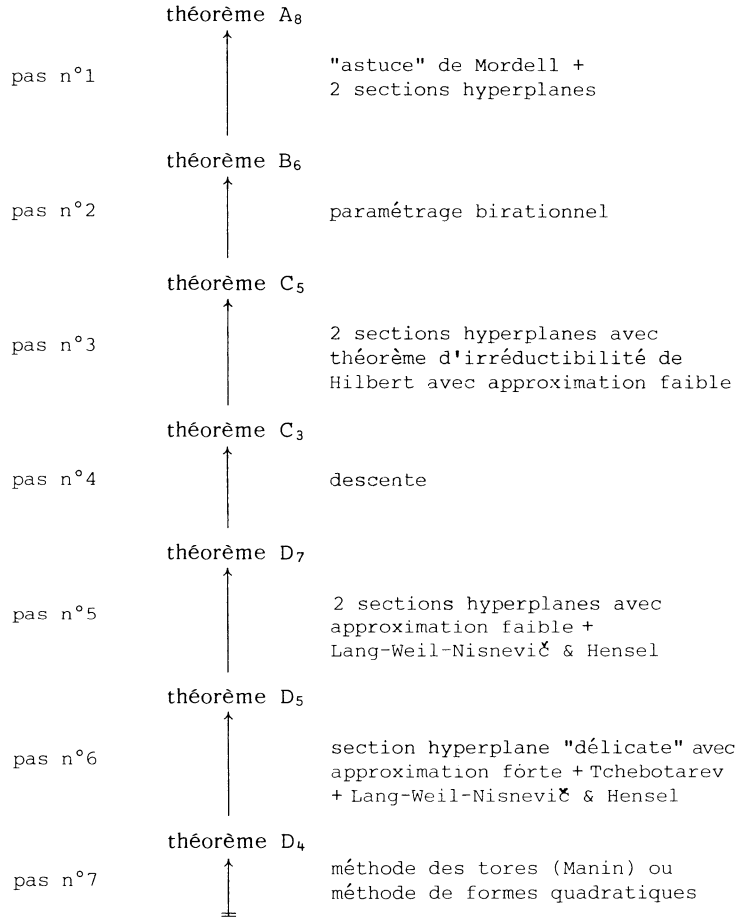
Pour mieux visualiser le plan de la démonstration, nous fixons d'abord quelques conventions de notation. On notera

- $X_1^{2,2} :=$ intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ - $n \geq 4$ - qui vérifie (*) et possède deux points singuliers conjugués,
- $X_{II}^{2,2} :=$ intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ - $n \geq 4$ - qui vérifie (*) et contienne 2 droites gauches conjuguées telles que le $\mathbf{P}_k^3$ qu'elles engendrent coupe X suivant un quadrilatère dont les sommets soient non singuliers sur X
- $Z' :=$ fibré en quadriques, ou coniques, d'équation $y^2 - az^2 = P(x_1, \dots, x_{n-2})$ dans $\mathbf{A}_k^n$ où $a \in k^*$ et où P est un polynôme irréductible de degré 4 à coefficients dans k .

La démonstration passe par des résultats intermédiaires que nous allons énoncer et désigner par une notation particulière, en commençant par le résultat principal:

- théorème $A_n :=$ HP pour $X^{2,2} \subset \mathbf{P}_k^n$ avec $n \geq 8$;
- théorème $B_n :=$ HP pour $X_1^{2,2} \subset \mathbf{P}_k^n$ avec $n \geq 6$;
- théorème $D_n :=$ HP pour $X_{II}^{2,2} \subset \mathbf{P}_k^n$ avec $n \geq 4$ et, si $n = 5$, $X_{II}^{2,2} \neq (E_5)$, où (E_5) désigne le cas exceptionnel où le pinceau de formes quadratiques que définit la variété contient deux formes de rang 4 globalement k -rationnelles (:= conjuguées ou définies sur k);
- théorème $C_n :=$ HP pour $Z' \subset \mathbf{A}_k^n$ avec $n \geq 3$.

Voici donc, avec ces notations, le schéma de la démonstration du théorème, où l'on se borne, pour simplifier l'écriture, au cas-limite $X^{2,2} \subset \mathbb{P}_k^8$, a priori le plus délicat et significatif:



On procède donc par réductions successives de l'énoncé A_8 au théorème D_4 déjà connu au moins dans le cas lisse. Les opérations de réduction consistent en sections hyperplanes successives - qu'il vaut mieux voir comme des fibrations - en un paramétrage birationnel et une descente. Globalement, la dimension de la variété considérée passe de 6 à 2 par l'effet des sections, mais il faut noter que la descente a l'effet inverse et augmente en l'occurrence la dimension de 2 à 5 au pas n°4. Pour $n \geq 8$ la démonstration donnée dans [15] procède suivant le schéma:

$$\text{thm } A_n \longleftarrow \text{thm } B_{n-2} \longleftarrow \text{thm } C_{n-1} \longleftarrow \text{thm } C_3 \longleftarrow \text{thm } D_7 \longleftarrow \text{thm } D_5 \longleftarrow \text{thm } D_4$$

exactement de la même manière que pour $n = 8$. On pourrait d'ailleurs aussi bien se ramener à ce cas-là par sections hyperplanes successives. Il faut cependant souligner qu'un tel schéma de démonstration n'a vraiment pas d'utilité pour $n \geq 12$ - ni sans doute pour $n \geq 10$ - car en ces cas des arguments plus brefs suffisent (cf. Mordell [26] et Swinnerton-Dyer [34]). Voici quelques commentaires sur les méthodes et ingrédients principaux:

(a) Les sections hyperplanes "faciles": c'est le cas de toutes sauf de la dernière au pas n°6. La situation générale est la suivante: on considère une famille à 1 paramètre de sections hyperplanes H_λ passant toutes par une même sous-variété Y de X , qui est géométriquement intègre - c'est souvent une conique. On veut trouver $\lambda_0 \in k$ tel que:

(i) les conditions locales soient encore vérifiées pour $X \cap H_{\lambda_0}$, à savoir:

$$(X \cap H_{\lambda_0})_{\text{lisse}}(k_v) \neq \emptyset \quad \text{quel que soit } v;$$

(ii) certaines conditions annexes soient assurées, par exemple P irréductible au pas n°3 et $X \neq (E_5)$ dans le passage, au pas n°5, de D_6 à D_5 .

La sous-variété Y joue alors un rôle de "sécurité". Etant géométriquement intègre, elle assure, par les estimations de Lang-Weil-Nisnevich et le lemme de Hensel, l'existence d'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de places de k tel que, pour toute place $v \notin \mathcal{S}$, on ait $Y(k_v)_{\text{lisse}} \neq \emptyset$ et en pratique aussi $(X \cap H_\lambda)_{\text{lisse}}(k_v) \neq \emptyset$ pour tout λ sauf un nombre fini de valeurs. D'autre part, la famille des H_λ est telle qu'aux places $v \in \mathcal{S}$ il existe des points lisse: $x_v \in X(k_v)$ et des $\lambda_v \in k_v$ tels que H_{λ_v} soit transverse à X en x_v . Il s'agit là, localement, d'une condition ouverte d'après le théorème des fonctions implicites sur un corps local. Par approximation faible dans l'espace des paramètres, on trouve alors $\lambda_0 \in k$ tel que $X \cap H_{\lambda_0}$ contienne un point lisse à valeurs dans k_v pour chaque $v \in \mathcal{S}$, et donc finalement pour tous les v . On peut même imposer une condition d'irréductibilité grâce au théorème d'irréductibilité de Hilbert avec approximation faible.

(b) La section hyperplane "délicate": c'est celle qui intervient au pas n°6, à l'endroit crucial de la démonstration. Dans ce cas, le pinceau d'hyperplans considéré ne contient pas en son coeur une variété géométriquement intègre. La sous-variété Y est alors un quadrilatère gauche dans $\mathbf{P}_k^5$, dont les côtés opposés sont deux à deux conjugués: les 2 composantes irréductibles de Y ne sont donc pas géométriquement intègres. La famille d'hyperplans considérée est le pinceau d'hyperplans de $\mathbf{P}_k^5$ passant par le $\mathbf{P}_k^3$ engendré par Y , et recoupant X suivant Y . Cette sous-variété Y ne peut plus assurer l'existence d'un ensemble fini $\mathcal{S}$ de places en dehors duquel on ait les propriétés d'uniformité en λ indiquées en (a). Nous allons esquisser la démonstration du pas n°6 sur l'exemple typique suivant, où l'on suppose

(15) les formes linéaires L_{ij} non proportionnelles deux à deux :

$$(16) \quad \begin{aligned} u_1^2 - av_1^2 &= u_2 L_{11}(x, y) + v_2 L_{12}(x, y) + P_1(x, y) \\ u_2^2 - av_2^2 &= u_1 L_{21}(x, y) + v_1 L_{22}(x, y) + P_2(x, y) \end{aligned}$$

Le quadrilatère gauche Y est la sous-variété de $X \subset \mathbb{P}_k^5$ définie par $x = y = 0$. On coupe donc X par le pinceau d'hyperplans H_λ d'équations $x = \lambda y$. Soit X_λ la section de X par H_λ . Plaçons-nous en coordonnées affines en posant $y = 1$ et fixons une structure entière pour X en prenant les équations initiales supposées à coefficients entiers par exemple. L'objectif est de trouver $\lambda_0 \in k$ tel que la variété affine définie par

$$\begin{aligned} u_1^2 - av_1^2 &= L_{11}(\lambda_0, 1)u_2 + L_{12}(\lambda_0, 1)v_2 + P_1(\lambda_0, 1) \\ u_2^2 - av_2^2 &= L_{21}(\lambda_0, 1)u_1 + L_{22}(\lambda_0, 1)v_1 + P_2(\lambda_0, 1) \end{aligned}$$

ait des points lisses dans chaque complété k_v . Supposons qu'il existe un ensemble fini S_0 de places de k , tel que, pour tout $v \notin S_0$, la réduction en v de X_λ soit géométriquement intègre pour tout λ . Soit alors S un ensemble fini de places de k qui contienne les places à l'infini, S_0 et les v trop "petits" en vue de l'application des estimations de Lang-Weil-Nisnevich. Soit enfin v_0 une place hors de S en laquelle a soit un carré. Pour $v \in S$, fixons des $\lambda_v \in k_v$ ayant les mêmes propriétés qu'en (a). Considérons alors, par approximation forte, pour $S' := S \cup \{v_0\}$, un S' -entier $\lambda_0 \in k$ suffisamment proche de λ_v pour chaque $v \in S$. On obtient ainsi que les conditions locales sont vérifiées pour X_{λ_0} , par proximité de λ_v si $v \in S$, pour une raison triviale si $v = v_0$ et, par bonne réduction, estimations de Lang-Weil-Nisnevich et lemme de Hensel si $v \notin S'$. Il reste à vérifier l'hypothèse faite plus haut lorsqu'on n'est pas dans le cas exceptionnel (E_5), ce qu'on fait dans ce cas en s'appuyant sur la condition (15). Nous allons voir qu'au contraire l'hypothèse n'est pas vérifiée pour l'exemple suivant, du type (16):

$$(17) \quad \begin{aligned} L_{11} = L_{12} = L_{21} = L_{22} &= 0 & P_1(\lambda, 1) &= 2\lambda & a &= 5 & k &= \mathbb{Q} \\ P_2(\lambda, 1) &= 2(\lambda+20)(\lambda+25). \end{aligned}$$

Si $v(\lambda) > 0$, la réduction de X_λ en v n'est pas géométriquement intègre: elle a deux composantes irréductibles géométriques qui se coupent suivant la conique affine C d'équation $u_2^2 - 5v_2^2 = 1000$, et si 5 n'est pas un carré en réduction, les seuls points de X_λ en réduction dans $\kappa(v)$ sont ceux de C , qui sont tous singuliers. Or, quels que soient l'ensemble fini S et v_0 hors de S , il existe toujours des S' -entiers λ dans k et des places v hors de S' tels que 5 ne soit pas un carré en réduction dans $\kappa(v)$ et que $v(\lambda) > 0$. De fait, (17) n'est autre que le contre-exemple CT-C-S signalé au §0.

(c) La descente: elle est décrite au §2 pour les surfaces de Châtelet en général.

(d) Le pas n°7: la méthode de Manin traite le cas lisse par réduction au principe de Hasse pour les (torseurs sous les) tores de dimension 2 (Ono et Voskresenskiĭ); la méthode de formes quadratiques repose sur le théorème de Amer-Brumer pour les paires de

formes quadratiques et sur l'injection $W(k(t)) \hookrightarrow \prod_v W(k_v(t))$ qui dérive ([9]) de la suite exacte de Milnor pour le groupe de Witt $W(k(t))$ et du principe de Hasse faible usuel.

(e) Le corollaire pour $m \geq 13$: une démonstration directe est alors très simple (Mordell); elle consiste à se ramener au théorème de Meyer-Hasse pour une forme quadratique en au moins 5 variables en prouvant l'existence d'un $\mathbf{P}_k^4$ sur la première quadrique; ceci revient à extraire 5 plans hyperboliques dans Φ_1 ce qui est possible dans chaque complété k_v , donc dans k par le théorème de Hasse.

(f) L'astuce de Mordell: elle complète l'argument ci-dessus lorsqu'il existe des complétés k_v réels; il s'agit, pour chaque place réelle v , d'établir l'existence de valeurs $(\lambda_v, \mu_v) \in k_v \times k_v$ telles que la forme quadratique $\lambda_v \phi_1 + \mu_v \phi_2$ contienne suffisamment de plans hyperboliques, ce qui se repère sur sa signature et s'obtient en analysant la variation de $\text{sgn}_v(\lambda \phi_1 + \mu \phi_2)$ lorsque (λ, μ) parcourt $S^1 \subset k_v \times k_v$.

Comme on l'a vu, la démonstration qu'on vient de décrire établit d'autres théorèmes que le théorème A_8 énoncé au début de ce paragraphe. De fait, l'article [15] poursuit l'étude de $X^{2,2}$ particulières en basse dimension au-delà de la démonstration du théorème A_8 et on peut résumer les résultats obtenus dans l'énoncé complémentaire suivant:

Théorème ([15]). Soit $X^{2,2} \subset \mathbf{P}_k^n$ une intersection de deux quadriques,

(*) qui soit intersection complète, géométriquement intègre et ne soit pas un cône.

On suppose que X vérifie l'une des hypothèses suivantes:

- (i) $n \geq 4$, X contient une paire de droites gauches conjuguées et, si $n = 5$, X n'est pas de type (E_5) ;
- (ii) $n \geq 4$, X contient deux points singuliers conjugués et, si $n = 4$ ou 5 , X n'est pas de type (E_4) ou (E_5) ;
- (iii) $n \geq 5$, X contient une quadrique de dimension 2 définie sur k , et si $n = 5$, X n'est pas de type (E_5) .

Alors, la variété X_{lisse} vérifie le principe de Hasse.

En fait, le résultat est établi, dans chacun des cas, pour tout modèle lisse de X , en particulier pour tout modèle propre et lisse V . L'énoncé ci-dessus contient le théorème B_n pour $n \geq 4$ à condition de ne pas être dans les cas exceptionnels (E_4) et (E_5) pour $n = 4$ et $n = 5$. Il contient aussi le théorème D_n pour $n \geq 4$ à condition de ne pas être dans le cas exceptionnel (E_5) si $n = 5$, et il l'étend même aux cas où certains des sommets du quadrilatère gauche figurant dans la définition de $X_n^{2,2}$ sont singuliers. Les cas exceptionnels (E_4) et (E_5) sont définis, pour $n = 4$ et $n = 5$ par l'existence de deux

formes quadratiques de rang 4 globalement k -rationnelles dans le pinceau de formes engendré sur $\bar{k}$ par ϕ_1 et ϕ_2 . Les quatre contre-exemples indiqués au §0 sont tous du type exceptionnel, deux du type (E_4) et deux du type (E_5) .

Remarque 3. Pour tous les cas cités dans les deux théorèmes précédents où le principe de Hasse est établi pour X_{lisse} , l'article [15] établit même la densité de $X_{\text{lisse}}(k)$ dans le produit $\prod X_{\text{lisse}}(k_v)$. Autrement dit, si dans ces cas-là $X_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$, alors X_{lisse} vérifie l'approximation faible, ce qu'on notera WA. De fait, on a même le résultat général suivant [15]: si $X^{2,2} \subset \mathbb{P}_k^n$ vérifie (*), si $X_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$ et si $n \geq 6$, ou bien si $n = 5$ et $X \neq (E_5)$ et (F_5) , alors X_{lisse} vérifie WA. Le cas (F_5) est défini par la présence dans le pinceau engendré sur $\bar{k}$ par ϕ_1 et ϕ_2 de 3 formes quadratiques conjuguées par le groupe de Galois et chacune de rang 4.

Les cas exceptionnels requièrent une analyse plus fine. Ainsi, dans le cas de (E_5) , le principe de Hasse vaut encore pour certains types de variétés:

Théorème. Soit $X^{2,2} \subset \mathbb{P}_k^5$ une intersection de deux quadriques définie par un système:

$$u_1^2 - av_1^2 = q_1(x, y)$$

$$u_2^2 - bv_2^2 = q_2(x, y)$$

où $ab \in k^*$ et où q_1 et q_2 ne sont pas proportionnels, l'un d'eux au moins étant irréductible. Alors, X vérifie le principe de Hasse fin.

Le cas $a = b$ est traité dans [9], et l'extension ci-dessus dans [15]. Il s'agit là d'une $X^{2,2}$ contenant un quadrilatère gauche dont les côtés opposés sont deux à deux globalement k -rationnels et dont les 4 sommets sont singuliers sur X . Le contre-exemple CT-C-S indiqué au §0 est un contre-exemple dans le cas où q_1 et q_2 sont réductibles.

L'analyse systématique par Coray et Tsfasman [17] des intersections singulières de deux quadriques dans $\mathbb{P}_k^4$ montre que si une telle intersection X n'a que des singularités isolées et vérifie (*), alors, en dehors de cas qu'on peut qualifier de "triviaux" et se ramenant à des variétés comme celles de Severi-Brauer, X possède exactement 2 points singuliers conjugués et la droite qui les joint n'est pas tracée sur X : une telle surface est appelée surface d'Iskovskih dans [17]. Si une surface d'Iskovskih a des points lisses dans chaque complété k_v , elle est k -birationnelle à une surface de Châtelet. Les résultats de Coray et Tsfasman et ceux de [15] sur les surfaces de Châtelet cf. §2 ont donc pour corollaire l'énoncé suivant:

Théorème. Soit $X^{2,2} \subset \mathbb{P}_k^4$ une intersection singulière de deux quadriques qui vérifie la condition (*). Alors, la variété X_{lisse} vérifie l'hypothèse BM.

L'exemple d'Iskovskih rappelé au §0 montre que le principe de Hasse fin peut être en défaut pour les intersections singulières de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$. D'après Coray et Tsfasman, les surfaces d'Iskovskih sont les seules parmi les intersections singulières de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ pour lesquelles le principe de Hasse fin puisse être en défaut. Le théorème ci-dessus permet donc de traiter, même pour ces surfaces-là, le problème de l'existence d'un point rationnel: V désignant un modèle propre et lisse de X , si $\prod_v V(k_v) \neq \emptyset$ et si l'obstruction de Manin pour V est vide, alors $V(k) \neq \emptyset$; et sinon, $V(k) = \emptyset$.

Pour finir sur le thème des intersections de deux quadriques, mentionnons le résultat suivant dont la démonstration est très proche de celle de Hasse pour une forme quadratique:

Proposition ([14]). Soit

$$(¶) \quad q_i(x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}) = P_i(t_1, \dots, t_n) \neq 0 \quad i = 1, \dots, r$$

un système de r équations dans $\mathbf{A}_k^d$ où $d = n + n_1 + \dots + n_r$. Les q_i sont des formes quadratiques et les P_i des polynômes, tous à coefficients dans k . Sous chacune des hypothèses:

- (i) les formes q_i sont toutes de rang ≥ 3 ,
- (ii) les P_i sont tous égaux au même polynôme P de degré 1 et les formes q_i sont toutes de rang ≥ 2 ,

le principe de Hasse vaut pour le système (¶).

Il ne s'agit là évidemment d'intersections de deux quadriques que si les degrés des P_i sont ≤ 2 et $r = 2$, sauf cas particuliers comme le cas (ii) pour $r = 3$.

En toute généralité, le principe de Hasse ne vaut pas pour un système (¶), comme le montrent les contre-exemples d'Iskovskih et de Birch et Swinnerton-Dyer rappelés au §0. Néanmoins, on peut conjecturer que l'hypothèse BM vaut pour un tel système.

Signalons à ce propos le résultat suivant établi dans [14] sous l'hypothèse H de Schinzel et conduisant à l'hypothèse BM pour certaines surfaces Z , cf. §2:

si $k = \mathbb{Q}$ et si

- (iii) $n = 1$, les q_i sont toutes de rang ≥ 2 et, pour chaque q_i de rang 2, le polynôme P_i est irréductible,

l'hypothèse H implique le principe de Hasse pour le système (¶).

Dans la démonstration, l'hypothèse H intervient comme un substitut, très largement amélioré, du théorème de la progression arithmétique généralisé. Rappelons son énoncé: si $R_1, \dots, R_r \in \mathbb{Z}[t]$ sont des polynômes irréductibles, à coefficient dominant > 0 , alors il existe une infinité d'entiers n tels que $R_1(n), \dots, R_r(n)$ soient tous premiers (à moins qu'il n'existe un premier p qui divise le produit $R_1(n) \cdot \dots \cdot R_r(n)$ quel que soit n).

§2. Les surfaces de Châtelet

Il s'agit des surfaces Z propres et lisses d'équation affine:

$$(18) \quad y^2 - az^2 = P(x) \quad d^o P = 3 \text{ ou } 4$$

où $a \in k^*$ et où $P \in k[x]$ est sans facteur multiple.

Ces surfaces viennent juste après les quadriques dans la hiérarchie des surfaces, mais en diffèrent nettement à plusieurs titres. D'abord, elles ne vérifient pas le principe de Hasse fin. Ensuite, contrairement encore aux quadriques, l'existence d'un point dans k n'implique pas que Z soit k -rationnelle, i.e. k -birationnelle au plan projectif. Du reste, même si $Z(k) \neq \emptyset$, on peut avoir $\text{Br}(Z)/\text{Br}(k) \neq 0$ et $Z(k)$ peut ne pas être dense dans le produit $\prod_v Z(k_v)$. Enfin, si R désigne l'équivalence sur $Z(k)$ qui identifie entre eux les points rationnels d'une courbe unicursale $\mathbb{P}_k^1 \dashrightarrow Z$, on peut avoir $Z(k)/R \neq \{O\}$. Ainsi, les surfaces de Châtelet ne sont triviales à aucun des points de vue énumérés ci-dessus, et à ce titre c'est l'exemple le plus simple parmi les surfaces.

F. Châtelet a inauguré l'étude de ces surfaces ([6], [7]) vers 1960. Il a considéré le cas cubique $d^o P = 3$ par analogie avec l'étude du groupe des points rationnels d'une courbe elliptique et a exposé ses résultats dans le cas déployé:

$$(19) \quad y^2 - az^2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

en se limitant en fait à $k = \mathbb{Q}$. Pour une telle équation, $Z(k) \neq \emptyset$ et F. Châtelet ne s'est évidemment pas intéressé au problème (2) mais au problème suivant:

(20) trouver un nombre fini de k -morphisms $W_i \xrightarrow{\pi_i} Z$, où les W_i soient des variétés k -rationnelles, tels qu'on ait une partition:

$$Z(k) = \bigcup_i \pi_i(W_i(k)).$$

S'inspirant de la méthode de descente sur les courbes elliptiques, et plus particulièrement de la démonstration du théorème de Mordell-Weil faible, F. Châtelet considère l'application rationnelle, sur k :

$$R_{K/k} Z \xrightarrow{\omega} Z$$

- où $K := k(\sqrt{a})$ et où $R_{K/k}$ désigne la descente à la Weil - définie, au moins sur un ouvert, en associant à un point de $Z(K)$ le point d'intersection résiduel avec Z de la droite joignant ce point et son conjugué. Les points de $Z(k)$ ainsi obtenus jouent le rôle des doubles de points rationnels dans le cas des courbes elliptiques. F. Châtelet considère plus généralement les applications déduites de ω par "composition" avec un point de $Z(k)$ et identifie par un calcul l'image des points rationnels par ces applications avec celles par les k -morphisms

$$W_c \xrightarrow{\pi_c} Z$$

où $c := (c_1, c_2, c_3) \in C := \ker((k^*/NK^*)^3 \xrightarrow{\text{produit}} k^*/NK^*)$, où W_C est définie par le système d'équations, où l'on a relevé les c_i dans k^* :

$$(21) \quad \begin{aligned} x-a_1 &= c_1(u_1^2 - av_1^2) \\ x-a_2 &= c_2(u_2^2 - av_2^2) \\ x-a_3 &= c_3(u_3^2 - av_3^2) \end{aligned}$$

et où π_C est défini de la manière "évidente" par $y+z\sqrt{a} = (u_1+v_1\sqrt{a})(u_2+v_2\sqrt{a})(u_3+v_3\sqrt{a})$. Si l'on considère l'application

$$(22) \quad \begin{array}{ccc} Z(k) & \xrightarrow{\phi} & C \hookrightarrow (k^*/NK^*)^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-a_1, x-a_2, x-a_3) \end{array}$$

l'image de $W_C(k)$ par π_C coïncide avec la fibre $\phi^{-1}(c)$. En résumé, F. Châtelet obtient le résultat suivant: il existe une partie finie C_1 de C telle que la famille

$$(23) \quad \{ \pi_C(W_C(k)) \}_{c \in C_1}$$

soit une partition finie de $Z(k)$ en classes qui admettent chacune un paramétrage "rationnel" par les points à coordonnées dans k d'une variété k -rationnelle (:= k -birationnelle à l'espace projectif). On notera que les variétés W_C qui paramètrent les diverses classes sont de dimension 4 et définissent donc un paramétrage multivoque.

La description de $Z(k)$ par les $W_C(k)$ correspond typiquement à une méthode de descente et les équations (21) montrent que les variétés de descente W_C ont été obtenues par le moyen de factorisations. En bref, F. Châtelet a établi la k -rationalité de W_1 et la finitude de $C_0 := \text{im}(\phi)$. Pour parfaire la description de $Z(k)$ donnée par (23), il reste, comme l'indique F. Châtelet [6], à résoudre le problème suivant:

(24) déterminer l'image C_0 de ϕ , autrement dit les c tels que $W_C(k) \neq \emptyset$.

De fait, eu égard au problème (20) initial, la question de savoir si le paramétrage (23) est optimal - pour le nombre de classes et pour la dimension des W_i - est laissée en suspens par F. Châtelet.

En 1970, Manin reprend l'étude des surfaces de Châtelet du type (19) sur un corps de nombres quelconque, comme illustration de ses méthodes fondées sur l'utilisation du groupe de Brauer-Grothendieck ([25] chap. VI 5.16 à 6.3 ou (éd. angl.) 45.8 à 46.2). Il établit essentiellement le caractère optimal du paramétrage (23) à la fois pour le nombre de paramètres qui ne peut être abaissé à 2 (loc. cit. 6.3 ou 46.2) et pour le nombre de classes, ou "rang" de $Z(k)$, qui se trouve égal à $\# C_0 = \# Z(k)/R$. Manin pose alors la question du rang de $Z(k)$, autrement dit la question (24), sous la forme suivante:

(25) les variétés W_C vérifient-elles le principe de Hasse ?

Une réponse positive permet de déterminer effectivement C_0 car la question (24) se traduit par une question purement locale: déterminer les c tels que $\prod_v W_c(k_v) \neq \emptyset$, ce qui se ramène en fait à un nombre fini de vérifications mod p^j .

Par élimination de x , le système (21) s'écrit encore:

$$(25) \quad \begin{aligned} (a_2 - a_1)t^2 &= c_1(u_1^2 - av_1^2) - c_2(u_2^2 - av_2^2) \\ (a_3 - a_1)t^2 &= c_1(u_1^2 - av_1^2) - c_3(u_3^2 - av_3^2) \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître W_c comme une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}_k^6$ du type $X_{II}^{2,2}$: elle contient même deux $\mathbb{P}^2$ gauches définis sur K et conjugués, à savoir le plan défini par $t = u_1 + v_1\sqrt{a} = u_2 + v_2\sqrt{a} = u_3 + v_3\sqrt{a} = 0$ et son conjugué.

En résumé, l'étude du rang de $Z(k)$ pour le paramétrage de Châtelet d'une surface du type (19) revient à l'étude du principe de Hasse pour certaines variétés du type $X^{2,2}$ dans $\mathbb{P}_k^6$, question résolue par l'affirmative dans [15], comme on l'a déjà indiqué au §1.

En fait, l'article [15] traite le cas des surfaces de Châtelet générales et non seulement les cubiques "déployées". Il résout à leur sujet les divers problèmes diophantiens déjà évoqués, depuis le problème de l'existence d'un point rationnel - si $d^oP = 4$ - jusqu'au calcul de la R -équivalence sur $Z(k)$ y compris la conjecture A énoncée dans [12] à propos du "rang" de $Z(k)$. Le principe des démonstrations est le même que celui décrit pour le cas cubique déployé. Le cas général requiert néanmoins une formulation plus systématique et plus large de la méthode de descente qui ne se laisse plus décrire de façon aussi élémentaire que dans le cas cubique déployé. Une telle théorie générale est développée dans ([12], [11]). On peut en résumer comme suit les résultats principaux pour une k -variété propre et lisse V qu'on supposera birationnelle à l'espace projectif sur une extension de k :

(a) on associe à V une famille de k -variétés $\{\mathcal{T}_c\}$ indexée par $C := H^1(k, S)$ - où S est le tore de Néron-Severi de V - et de k -morphismes $\pi_c: \mathcal{T}_c \longrightarrow V$ tels que:

$$V(k) = \bigcup_C \pi_c(\mathcal{T}_c(k))$$

soit une partition finie de $V(k)$, le paramètre parcourant une partie finie de C ;

(b) si $\prod_v V(k_v) \neq \emptyset$ l'obstruction de Manin à l'existence d'un point de V à valeurs dans k équivaut à celle-ci: pour chaque $\mathcal{T}_c$ il existe une place v de k telle que $\mathcal{T}_c(k_v)$ soit vide; en particulier, si l'obstruction de Manin est vide pour V , il existe c_0 tel que $\prod_v \mathcal{T}_{c_0}(k_v) \neq \emptyset$;

(c) si les variétés $\mathcal{T}_c$ qui ont un point dans k sont k -rationnelles, on peut partager $V(k)$ en un nombre fini de classes, chacune d'elles étant paramétrée par les points rationnels d'une variété k -rationnelle; le nombre de ces classes, ou "rang" de $V(k)$ est donné par le nombre de c tels que $\prod_v \mathcal{T}_c(k_v) \neq \emptyset$; c'est aussi le cardinal de l'image

C_0 d'une certaine application caractéristique $\phi: V(k) \longrightarrow C$, dont les fibres sont précisément les classes $\pi_C(\mathcal{T}_C(k))$;

(d) on sait en principe écrire des équations pour les "variétés de descente" $\mathcal{T}_C$ dans le cas des surfaces fibrées en coniques.

L'application de cette méthode au cas des surfaces de Châtelet générales consiste à établir les résultats-clefs suivants:

(i) les variétés de descente $\mathcal{T}_C$ sont k -birationnellement du type $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1 \times \Gamma \times W_C$ où Γ est une conique lisse et où W_C est une intersection de 2 quadriques dans $\mathbf{P}_k^7$ du type du type $X_n^{2,2}$;

(ii) les W_C qui ont un point lisse dans k sont k -rationnelles;

(iii) les variétés W_C vérifient le principe de Hasse fin.

Ces divers résultats sont établis dans [15]: pour (iii) on l'a déjà vu au §1 - théorème D7- et pour (ii) on utilise l'existence de deux $\mathbf{P}^2$ gauches conjugués. On en déduit alors par les résultats généraux de la méthode de descente ([11], [12], [13]) l'énoncé suivant qui rassemble pour les surfaces de Châtelet toutes les assertions diophantiennes qu'on pouvait espérer:

Théorème ([15]). Soit Z une surface propre et lisse sur le corps de nombres k , d'équation affine

$$y^2 - az^2 = P(x) \qquad d^{\circ}P = 3 \text{ ou } 4$$

où $a \in k^*$ et $P \in k[x]$.

- (i) Principe de Hasse. L'hypothèse BM vaut pour Z . Il existe une méthode effective pour décider si $Z(k) \neq \emptyset$.
- (ii) Approximation faible. Si $Z(k) \neq \emptyset$, il existe une méthode effective, étant donné un point de $\prod_{v \in \sigma} Z(k_v)$, où σ est un ensemble fini de places, pour décider s'il appartient ou non à l'adhérence de $Z(k)$.
- (iii) Si $d^{\circ}P = 3$, $Z(k) \neq \emptyset$ et, si P est irréductible, l'approximation faible vaut pour Z .
- (iv) Si P est irréductible de $d^{\circ}4$, alors Z vérifie HP, et si $Z(k) \neq \emptyset$, elle vérifie WA.
- (v) Paramétrage et R-équivalence. L'ensemble $Z(k)/R$ des classes pour la R-équivalence est fini. Chaque classe est paramétrée par les points rationnels d'une variété k -rationnelle dominant Z . Le nombre de classes, $\text{rg}(Z(k)) := \#Z(k)/R$ est effectivement calculable, et on a l'estimation:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\#Z(k)/R}{\prod_v \#Z(k_v)/R} \leq 2.$$

De façon plus précise, la conjecture A de [13] est vérifiée pour les surfaces de Châtelet, ce qui se traduit ici par une suite exacte de groupes abéliens du type $(\mathbb{Z}/2)^f$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{W}^2(k, \hat{S})^\sim \longrightarrow Z(k)/R \longrightarrow \prod_v Z(k_v)/R \longrightarrow H^1(k, \hat{S})^\sim$$

dont le terme de gauche vaut 0 ou $\mathbb{Z}/2$ et celui de droite 0 ou $\mathbb{Z}/2$ ou $(\mathbb{Z}/2)^2$. Le seul cas où le terme de gauche puisse valoir $\mathbb{Z}/2$ est le cas $P = P_1 P_2$ avec $d^\circ P_i = 2$ et où le corps de rupture de P contient K . On trouve effectivement $\mathbb{Z}/2$ pour l'exemple de Tsfasman $y^2 - 221z^2 = (x^2 - 13)(x^2 - 17)$, cf. [30]. Dans le cas cubique déployé (19) le terme de gauche vaut 0 et celui de droite $(\mathbb{Z}/2)^2$, ce qui donne alors l'estimation

$$\frac{1}{4} \prod_v \# Z(k_v)/R \leq \# Z(k)/R \leq \prod_v \# Z(k_v)/R.$$

$$y^2 + z^2 = x(x-1)(x-p_1 \dots p_r)$$

où les p_i sont des nombres premiers distincts $\equiv 3 \pmod{4}$, donne alors $\# Z(k)/R \geq 2^r$ et montre que le "rang" d'une surface de Châtelet sur $\mathbb{Q}$ peut être arbitrairement grand ([30], voir aussi [13] pour des exemples numériques).

Voici enfin une illustration du résultat (i) dans le cas de la situation (iv):

Corollaire ([15]). Soit $n = 2^{4r+i} m$ un entier naturel, avec m, i, r entiers, m impair et $0 \leq i \leq 3$. Alors:

$$n = a^2 + b^2 + c^4 \qquad a, b, c \in \mathbb{Q},$$

sauf dans les cas suivants:

$$(i) \quad i = 0 \text{ et } m \equiv 7 \pmod{8}$$

$$(ii) \quad i = 2 \text{ et } m \equiv 3 \pmod{4}.$$

C'est une conséquence du principe de Hasse pour la surface d'équation $y^2 + z^2 = n - x^4$. On doit noter qu'un entier peut s'écrire $a^2 + b^2 + c^4$ avec a, b, c rationnels, sans qu'il puisse s'écrire ainsi avec a, b, c entiers. Le premier exemple est $22 = (1/3)^4 + (10/9)^2 + (41/9)^2$. A ma connaissance, les méthodes analytiques ne donnent pas le résultat ci-dessus.

On trouve d'autres illustrations du résultat (i) dans [9] - où l'hypothèse BM a été démontrée pour les surfaces de Châtelet telles que $P = P_1 P_2$, chacun des P_i étant supposé irréductible de degré 2 - et dans [14] où l'hypothèse BM est vue comme une conséquence de l'hypothèse H de Schinzel pour les surfaces de Châtelet sur $\mathbb{Q}$ telles que P soit de degré impair ou ait ses facteurs irréductibles de degré pair. On traite ainsi complètement dans [9] la famille $\{Z_d\}$ de surfaces de Châtelet $y^2 + z^2 = (d - x^2)(x^2 - d + 1)$ où d est entier, famille qui contient le contre-exemple d'Iskovskih cité plus haut: $Z_d(\mathbb{Q}) = \emptyset$ pour les valeurs suivantes de d et uniquement pour celles-là, $d < 0$ ou $d \equiv 3 \pmod{4}$ ou $d = 4^n(8m+7)$. Citons enfin l'exemple des surfaces $y^2 + z^2 = (d - x^3)(x^3 - d + 1)$ qui, conjecturalement, d'après [14] - voir [9] - doivent avoir un point dans $\mathbb{Q}$ quel que soit l'entier d (les conditions locales sont toujours vérifiées et, comme $\text{Br}(Z)/\text{Br}(\mathbb{Q}) = 0$, l'obstruction de Manin est toujours "vide"), ce qui a effectivement été constaté par le calcul sur ordinateur pour $|d| \leq 12000$.

§3. Les surfaces cubiques

Pour les (hyper)surfaces cubiques, les résultats sont très rares en basse dimension, spécialement lorsque les conditions locales ne sont plus automatiques, i.e. $n \leq 8$. Au contraire, pour $n \geq 9$, les conditions (3) sont toujours vérifiées et il est naturel de conjecturer que pour $X^3 \subset \mathbb{P}_k^n$ lisse, on a toujours $X(k) \neq \emptyset$, et ce résultat a effectivement été prouvé d'abord pour $k = \mathbb{Q}$ et $n = 31$ par Davenport en 1959, puis pour $k = \mathbb{Q}$ et $n = 28$ et ensuite $n = 15$ en 1963 (Davenport [18]) - et c'est ce résultat que redonne le théorème général de Birch énoncé au §0 - enfin pour k corps de nombres quelconque et $n = 15$ par Pleasants (1975 [29]). Tout récemment D.R. Heath-Brown a obtenu le meilleur résultat possible pour $k = \mathbb{Q}$:

Théorème (Heath-Brown 1984 [23]). Si X est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ et si $n \geq 9$, alors $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

Comme les précédentes, la démonstration d'Heath-Brown utilise la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, mais dans le détail les ingrédients et arguments diffèrent assez nettement: formule de Poisson, estimations de Deligne, variante de la méthode due à Kloosterman,...

Pour les surfaces cubiques, on a tout de même des résultats positifs pour certaines classes particulières. On a d'abord le résultat suivant (cf. Swinnerton-Dyer 1971 [35], voir aussi F. Châtelet 1964 [7]):

Théorème. Les surfaces cubiques lisses sur un corps de nombres k et contenant un S_2 , un S_3 ou un S_6 , vérifient le principe de Hasse. Une telle surface X est k -rationnelle dès que $X(k) \neq \emptyset$.

Un S_2 est une paire de droites gauches conjuguées sur k . Un S_3 est un triplet de droites gauches conjuguées sur k et un S_6 est un sextuplet de droites gauches conjuguées sur k . Le théorème ci-dessus affirme que les surfaces cubiques lisses contenant un S_2 , un S_3 ou un S_6 sont en quelque sorte "triviales" pour les questions arithmétiques qui nous intéressent ici, tout comme les quadriques et les variétés de Severi-Brauer.

Une autre classe pour laquelle on a des résultats substantiels est celle des surfaces cubiques singulières.

Théorème (Skolem 1955 [32]). Les surfaces cubiques singulières définies sur un corps de nombres vérifient le principe de Hasse.

Il s'agit là du principe de Hasse ordinaire. On trouvera dans [16] un argument de D. Coray ramenant le cas crucial où la surface X possède exactement 3 points singuliers conjugués au cas où X possède un S_3 défini sur le corps de base.

D'autre part, une surface cubique qui possède exactement 2 points singuliers conjugués sur le corps de base k est k -birationnelle à une surface de Châtelet Z telle que $Z(k) \neq \emptyset$ ([15], voir aussi [17]). Les résultats sur les points rationnels d'une surface de Châtelet qui ont été énumérés dans le théorème du §2 se transposent donc intégralement au cas des surfaces cubiques possédant exactement 2 points singuliers conjugués sur k .

Pour conclure sur les surfaces cubiques, venons-en aux surfaces cubiques diagonales pour lesquelles les résultats actuels sont surtout "négatifs" ou "conjecturaux". Au vu de l'étude numérique des surfaces cubiques diagonales X définies sur $\mathbb{Q}$ par une équation du type:

$$(27) \quad ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0 \quad \begin{array}{l} abcd \neq 0 \\ a, b, c, d \in \mathbb{N} \end{array}$$

avec $abcd \leq 500$, Selmer a conjecturé en 1953 [31] que les surfaces cubiques diagonales devaient vérifier le principe de Hasse, et l'a établi si ab/cd est un cube. Mais il n'en est rien en général, comme le montre l'exemple suivant, dû à Cassels et Guy [5]:

$$(28) \quad 5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0.$$

Pour étudier la question de Selmer, Cassels et Guy ont commencé par dresser une liste d'équations du type (27) susceptibles d'être des contre-exemples au principe de Hasse, car possédant des solutions dans chaque complété de $\mathbb{Q}$ sans en posséder dans $\mathbb{Q}$ de hauteur < 200 . Le fait que l'équation (28) - la deuxième de la liste - n'ait pas de solution dans $\mathbb{Q}$ est établi dans [5] à l'aide de calculs de nombres de classes et d'unités dans certains corps cubiques et bicubique. Le second exemple, en fait le premier de la liste de Cassels et Guy, fut traité par Bremner [4] en 1978:

$$(29) \quad x^3 + 4y^3 + 10z^3 + 25t^3 = 0,$$

par des méthodes proches de celles de Cassels et Guy, et a priori mal commodes au traitement systématique de séries d'exemples. Dans son livre sur les "formes cubiques", Manin [25] considère le cas de la surface de Cassels et Guy en vue d'illustrer sur cet exemple sa théorie d'obstruction à l'existence d'un point rationnel - décrite au §0. Il entreprend donc le calcul de son obstruction dans ce cas-là, mais le traitement qu'il expose s'appuie sur les résultats techniques de Cassels et Guy et n'est pas manifestement plus simple ni plus aisément reproductible - ce qui rend cette illustration peu probante contrairement à plusieurs autres cas.

Dans un travail tout récent [10], Colliot-Thélène, Kanevsky et l'auteur développent une méthode systématique et effective de calcul de l'obstruction de Manin pour les surfaces cubiques diagonales X sur $\mathbb{Q}$. Celle-ci ne passe pas par la connaissance de groupes de classes, ni par celle d'unités, de certains corps de nombres. Elle s'appuie sur l'écriture convenable d'un générateur du groupe $\text{Br}(X_k)/\text{Br}(k)$ ($\approx \mathbb{Z}/3$ dans les cas non

triviaux), où $k = \mathbb{Q}(\theta)$, écriture fondée sur le calcul de la cohomologie d'un groupe bi-cyclique, et sur des calculs locaux préalables permettant de traiter a priori tous les cas où la procédure algorithmique semblerait rencontrer des difficultés supplémentaires vis-à-vis du cas "ordinaire" qu'on peut estimer simple à traiter par cette procédure. On obtient finalement un algorithme parfaitement explicite et effectif (voir [8] pour un exposé direct de l'algorithme) qui a été programmé et appliqué sur ordinateur par M. Vallino, le temps de calcul étant de l'ordre de 1s sur IBM 4341.

Toutes les équations du type (27) à coefficients

$$a, b, c, d < 100$$

ont été ainsi traitées, et le calcul de l'obstruction de Manin a fourni parmi ces équations - à équivalence près - 245 contre-exemples au principe de Hasse, parmi lesquels l'exemple de Bremner est celui qui minimise $abcd$. Quant aux autres équations, l'ordinateur a toujours trouvé une solution dans $\mathbb{Q}$, lorsqu'elles en avaient dans chaque complété de $\mathbb{Q}$. Autrement dit, les calculs numériques ont confirmé - dans le domaine $a, b, c, d < 100$ - l'hypothèse BM pour les surfaces cubiques diagonales.

Mentionnons, pour finir, les résultats suivants de [10]:

Proposition. Soient $p \equiv 2$ et $q \equiv 5 \pmod{9}$ deux nombres premiers. La surface cubique diagonale d'équation

$$(30) \quad x^3 + p^2 y^3 + q^2 z^3 + pqt^3 = 0$$

a des points dans chaque complété $\mathbb{Q}_\ell$, mais n'a pas de point dans $\mathbb{Q}$.

On a ainsi une famille infinie de contre-exemples au principe de Hasse parmi les surfaces cubiques diagonales sur $\mathbb{Q}$. Ceux-ci généralisent l'exemple de Bremner (29).

Proposition. Si X est une surface cubique diagonale sur $\mathbb{Q}$ et s'il existe un nombre premier p qui divise un, et un seul des coefficients, supposés entiers sans facteur cubique, alors l'obstruction de Manin pour X est vide.

Conjecturalement, une telle surface doit donc avoir un point dans $\mathbb{Q}$, ce qui a effectivement toujours été le cas lors de l'expérimentation numérique.

Proposition. Si l'hypothèse BM vaut pour les surfaces cubiques diagonales $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$, alors le principe de Hasse vaut pour les hypersurfaces cubiques diagonales $V \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ pour $n \geq 4$.

La démonstration consiste à trouver une section linéaire de V qui ait des points dans chaque complété de $\mathbb{Q}$ et qui soit une surface cubique diagonale du type indiqué à la proposition précédente. On peut naturellement penser que le principe de Hasse vaut en général pour les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}_k^n$ pour tout $n \geq 4$.

On trouvera dans l'exposé de Kanevsky [23] d'autres conséquences de l'hypothèse BM lorsqu'on la suppose vraie pour les surfaces cubiques diagonales.

Bibliographie

- [1] B.J. Birch, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* 4 (1957), 102-105.
- [2] B.J. Birch, Forms in many variables, *Proc. Royal Soc. London, Ser. A*, 265 (1961/62), 245-263.
- [3] B.J. Birch, H.P.F. Swinnerton-Dyer, The Hasse problem for rational surfaces, *J. reine angew. Math.* 274 (1975), 164-174.
- [4] A. Bremner, Some cubic surfaces with no rational points, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 84 (1978), 219-223.
- [5] J.W.S. Cassels, M.J.T. Guy, On the Hasse principle for cubic surfaces, *Mathematika* 13 (1966), 111-120.
- [6] F. Châtelet, Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques, *Enseign. Math.* 5 (1959), 153-170.
- [7] F. Châtelet, Points rationnels sur certaines surfaces cubiques, in *Colloque intern. CNRS, Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, Clermont-Ferrand (1964), 67-75, CNRS, Paris 1966.
- [8] J.-L. Colliot-Thélène, Surfaces cubiques diagonales, exposé au *Séminaire de théorie des nombres de Paris*, le 13 mai 1985.
- [9] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, *J. reine angew. Math.* 320 (1980), 150-191.
- [10] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, J.-J. Sansuc, Arithmétique des surfaces cubiques diagonales, preprint 1985.
- [11] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, 284 (1977), 1215-1218.
- [12] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, in *Journées de géométrie algébrique d'Angers* (1979), 223-237, éd. A. Beauville, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980.
- [13] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, On the Chow group of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Math. J.* 48 (1981), 421-447.
- [14] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel, *Acta Arith.* 41 (1982), 33-53.
- [15] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, preprint 1985, voir *Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet*, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 298 (1984), 377-380.
- [16] D.F. Coray, Arithmetic on singular cubic surfaces, *Comp. Math.* 33 (1976), 55-67.
- [17] D.F. Coray, M.A. Tsfasman, Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces, preprint 1985.
- [18] H. Davenport, Cubic forms in sixteen variables, *Proc. Royal Soc. London, Ser. A*, 272 (1963), 285-303.

- [19] H. Hasse, Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. reine angew. Math.* 153 (1924), 113-130.
- [20] D.R. Heath-Brown, Cubic forms in ten variables, *Proc. London Math. Soc.* 47 (1983), 225-257, voir Cubic forms in 10 variables, in *Number theory*, Noordwijkerhout (1983), 104-108, ed. H. Jager, *Lecture Notes in Math.* 1068, Springer, Berlin Heidelberg 1984.
- [21] W. Hürlimann, Brauer group and diophantine geometry: a cohomological approach, in *Ring theory and algebraic geometry*, Antwerp (1981), 43-65, ed. van Oystaeyen & A. Verschoren, *Lecture Notes in Math.* 917, Springer, Berlin 1982.
- [22] V.A. Iskovskih, A counterexample to the Hasse principle for a system of two quadratic forms in five variables, *Mat. Zametki* 10 (1971), 253-257 (en russe)(trad. anglaise: *Math. Notes* 10 (1971), 575-577).
- [23] D. Kanevsky, Application of the conjecture on the Manin obstruction to various diophantine problems, exposé au *Congrès de théorie des nombres de Besançon*, le 24 juin 1985.
- [24] Yu.I. Manin, Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, *Actes du congrès intern. Math. Nice*, 1 (1970), 401-411.
- [25] Yu.I. Manin, *Formes cubiques*, Nauka, Moscou 1972 (en russe)(trad. anglaise: *Cubic forms*, North Holland, Amsterdam 1974).
- [26] L.J. Mordell, Integer solutions of simultaneous quadratic equations, *Hamb. Abh.* 23 (1959), 126-143.
- [27] L.J. Mordell, On the conjectures for rational points on a cubic surface, *J. London Math. Soc.* 40 (1965), 149-158.
- [28] A. Pfister, Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.* 4 (1967), 229-237.
- [29] P.A.B. Pleasants, Cubic polynomials over algebraic number fields, *J. Number Theory* 7 (1975), 310-344.
- [30] J.-J. Sansuc, A propos d'une conjecture arithmétique sur le groupe de Chow d'une surface rationnelle, avec un paragraphe par J.-L. Colliot-Thélène, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* (1981-82), 33-01 - 33-38.
- [31] E.S. Selmer, Sufficient congruence conditions for rational points on a cubic surface, *Math. Scand.* 1 (1953), 113-119.
- [32] Th. Skolem, Einige Bemerkungen über die Auffindung der rationalen Punkte auf gewissen algebraischen Gebilden, *Math. Z.* 63 (1955), 295-312.
- [33] H.P.F. Swinnerton-Dyer, Two special cubic surfaces, *Mathematika* 9 (1962), 54-56.
- [34] H.P.F. Swinnerton-Dyer, Rational zeros of two quadratic forms, *Acta Arith.* 9 (1964), 261-270.
- [35] H.P.F. Swinnerton-Dyer, Applications of algebraic geometry to number theory, *Proc. Symp. Pure Math. AMS* XX (1971), 1-52.
- [36] M.A. Tsfasman, Arithmetic of singular Del Pezzo surfaces, *Uspekhi Mat. Nauk* 38:6 (1983), 131-132 (en russe)(trad. anglaise: *Russian Math. Surveys* 38:6 (1983), 137-138).
- [37] A. Weil, Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *Acta Math.* 113 (1965), 1-87.

J.J.SANSUC

UFR de Mathématiques Pures et Appliquées
 Université Pierre et Marie Curie
 4 place Jussieu
 75230 PARIS CEDEX 05