

Astérisque

MICHAEL R. HERMAN

**Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes
de l'anneau**

Astérisque, tome 144 (1986)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__144__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__144__1_0)

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PLAN

RÉSUMÉ	3
INTRODUCTION AUX CHAPITRES V et VI	5
CHAPITRE V	7
Théorème des courbes invariantes en classe C^3 .	
CHAPITRE VI	91
Théorème de la courbe translatée en classe Besov.	
CHAPITRE VII	129
Calcul des constantes intervenant dans le théorème de la courbe translatée pour un nombre de rotation de type constant.	
CHAPITRE VIII	213
Courbes invariantes pour une classe d'homéomorphismes du plan préservant les aires.	
CORRECTIONS DU VOLUME I	245
ENGLISH SUMMARY	247

RÉSUMÉ

Ce volume 2 est consacré à des théorèmes d'existence de courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau qui sont des perturbations de difféomorphismes complètement intégrables déviant la verticale. Les nombres de rotations de ces courbes seront toujours de type constant. Classiquement depuis J. Moser, on considère (voir chapitre IV) des perturbations en topologie $C^{3+\beta}$, $\beta > 0$. Ce volume cherche à cerner l'étude en topologie C^3 ou dans des espaces de Besov. Ceci nécessite l'introduction systématique des espaces Sobolev associés aux espaces L^p , $p \geq 1$, et pour le chapitre V on aura malheureusement besoin de $p < 2$.

Nous montrons au chapitre V la persistance des courbes invariantes par les difféomorphismes de classe C^3 préservant les aires, globalement canoniques, proches en topologie C^3 d'un difféomorphisme complètement intégrable et au chapitre VI le théorème de la courbe translatée est généralisé aux perturbations dans des espaces de Besov. Le chapitre VII contient une démonstration élémentaire du théorème de la courbe translatée pour les perturbations en topologie C^4 . Elle n'utilise que les espaces de Sobolev associés à l'espace L^2 et toutes les constantes sont calculées explicitement. En utilisant les espaces de Besov du chapitre VI, au chapitre VIII nous montrons un théorème de conjugaison différentiable à des rotations des difféomorphismes du cercle dont la dérivée seconde est à variation bornée et dont le nombre de rotation est de type constant. Ceci permet d'expliquer mathématiquement l'existence de courbes invariantes pour certains homéomorphismes linéaires par morceaux du plan, préservant les aires, ce qui avait été constaté numériquement par l'astronome C. Froeschlé en 1968.

INTRODUCTION AUX CHAPITRES V ET VI.

Le chapitre V généralise le théorème de Jürgen Moser des courbes invariantes et prouve l'existence de courbes invariantes en classe C^3 , voire $C^{2+\text{Lip}}$, lorsque le nombre de rotation est de type constant et que le difféomorphisme préserve les aires et a la propriété d'intersection. Sur le même théorème en classe $C^{3+\beta}$, $\beta > 0$, mais variable pour un ensemble de mesure de Lebesgue pleine de nombres de rotation, on peut consulter J. Pöschel [P] et R. Douady [D] pour les difféomorphismes préservant la mesure de Lebesgue, et H. Rüssmann [R_2] lorsqu'on suppose seulement la propriété d'intersection. Le résultat de H. Rüssmann [R_1] (i.e. le théorème de la courbe translatée), valable en classe $C^{4+\beta}$, $0 < \beta < 1$, pour presque tout nombre de rotation, est étendu à la classe $C^{3+\beta}$, $0 < \beta < 1$, pour les nombres de rotation de type constant dans le chapitre IV ; on y trouve une démonstration simple du théorème de la courbe translatée sous ces hypothèses.

Dans le chapitre VI, on généralisera les résultats du chapitre IV en remplaçant la classe $C^{3+\beta}$, $0 < \beta < 1$, par les espaces de Besov $B^{3+\beta+1/p, p}$, avec $0 < \beta < 1$, $1 < p \leq +\infty$. Ceci démontrera le théorème de la courbe translatée pour des difféomorphismes qui ne sont pas nécessairement de classe C^3 ou $C^{2+\text{Lip}}$, mais n'implique pas le théorème en classe C^3 .

Je remercie Michèle Lavallette pour la frappe de ces deux chapitres.

CHAPITRE V

THÉORÈME DES COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3 .

1. INTRODUCTION.

Le résultat principal est énoncé précisément en 7.10 : pour les difféomorphismes de classe C^r , $r \geq 3$, C^3 -proches d'un difféomorphisme complètement intégrable T_1 , qui dévient la verticale et préservent la mesure de Lebesgue, nous démontrons l'existence de courbes invariantes dont le nombre de rotation est de type constant ; on peut remplacer "difféomorphisme" par "plongement globalement canonique", voir 4.7 à ce propos.

Pour un difféomorphisme f vérifiant les hypothèses ci-dessus, la courbe invariante de nombre de rotation α (α nombre de type constant) qu'on obtient ainsi est le graphe d'une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$; lorsque f est de classe C^∞ , $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ et on obtient une estimation $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \leq c_s$ avec $0 < s < 1/2$; par un argument de densité, lorsque f est de classe C^3 et C^3 -assez voisin du difféomorphisme complètement intégrable T_1 , la dérivée seconde de ψ au sens des distributions appartient à $L^{2-s}(\mathbb{T}^1)$.

La démonstration qui va suivre est essentiellement en classe C^∞ ; elle est basée sur des inégalités a priori conditionnelles plus ou moins tarabiscotées. Si la démonstration est compliquée, c'est que l'auteur a dû contourner un certain nombre de difficultés ; celles-ci proviennent probablement de ce qu'on est proche des hypothèses minimales.

Pourquoi se limiter aux nombres de rotation de type constant ?

Soit $B = \{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \mid \text{l'équation } |q\alpha - p| < (q \log q (\log \log q))^{-1}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \geq 3, \text{ a un infinité de solutions}\}$. Par le théorème de Borel-Bernstein, B est de mesure de Lebesgue pleine. Nous avons montré en [II.4.13] qu'il existe une suite de difféomorphismes de classe C^∞ de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, notée $(f_i)_{i \geq 1}$, ayant les propriétés suivantes :

- i) $f_i(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_i(\theta + r))$, $\int_0^1 \varphi_i(\theta) d\theta = 0$;
- ii) soit $T(\theta, r) = (\theta + r, r)$; la suite (f_i) converge vers T dans la C^3 -topologie ;
- iii) chaque f_i a la propriété d'intersection et préserve la mesure de Haar de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$.

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

iv) pour tout $\alpha \in B$, il existe une infinité de f_i qui n'ont pas de courbe invariante dont le nombre de rotation est α .

Plan :

2. Rappels sur les espaces L^p et BMO.
3. Inégalités pour les difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation est de type constant ; inégalités pour les équations aux différences.
4. Généralités sur les courbes invariantes et les plongements globalement canoniques.
5. Théorèmes de régularité.
6. Inégalités a priori conditionnelles.
7. Existence en classe C^3 des courbes invariantes dont le nombre de rotation est de type constant.
8. Cas particulier de $\frac{1}{2}(f + f^{-1})$.

Description de la démonstration.

Nous conseillons au lecteur de lire d'abord le § 8 ; c'est un cas particulier du théorème qui en contient toutes les idées mais est plus simple.

On fixe un nombre α de type constant et un plongement de classe C^∞ globalement canonique complètement intégrable T_1 de $\mathbb{A}_\delta = \mathbb{T}^1 \times [-\delta, +\delta]$ dans $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ qui dévie la verticale et admet les cercles $r = \text{cte}$ comme courbes invariantes. On veut alors montrer qu'il existe des réels $0 < s < \frac{1}{2}$, $c_s > 0$ et un voisinage V de T_1 dans l'espace des plongements globalement canoniques de classe C^∞ de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$, muni de la C^3 -topologie, ayant la propriété suivante : soit Z l'ensemble des $F \in V$ qui admettent une courbe invariante de nombre de rotation α , graphe d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ qui vérifie $\|\psi\|_{C^0} < \frac{\delta}{2}$, $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} < c_s$; alors Z est ouvert et fermé dans V .

Pour conclure, il faut montrer l'existence d'un sous-voisinage connexe V_1 de V . Ceci fait l'objet de la propriété LC (cf. 4.11 et 4.12) ; bien que compliqué à formuler à cause des domaines de définition (cf. 4.9), ce point est relative-

ment simple en utilisant le formalisme des fonctions génératrices (voir aussi [Z]). C'est d'ailleurs le seul point où nous ne savons conclure pour les plongements ayant seulement la propriété d'intersection.

Le théorème des courbes invariantes démontré en VIII ou [R₁] (pour une topologie plus fine que la C^3 -topologie !) est utilisé pour montrer que Z est ouvert dans V ; on se sert de la forme normale de Birkhoff [B] , ou, dans le cas de la seule propriété d'intersection, de son analogue qu'on trouve dans le travail de R. Douady [D].

Le coeur de la démonstration est la preuve que Z est fermé dans V . On part du théorème de conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation est de type constant ([H, ch. IX]) ; comme la seule information que nous savons obtenir est une majoration de $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}}$, il est absolument indispensable d'étudier les équations aux différences en basse différentiabilité.

Pour ceci, on utilise le résultat suivant d'Yves Meyer [M] : soit α un nombre de type constant, $p > 1$, et $\eta \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$ d'intégrale nulle ; alors il existe un unique $\psi \in BMO(\mathbb{T}^1)$ d'intégrale nulle tel que $\psi - \psi \circ R_\alpha = \eta$. Ce qui est fondamental pour la suite, c'est qu'on peut prendre p voisin de 1 (mais différent de 1) et que, pour tout $q \geq 1$, $\exp|\psi| \in L^q(\mathbb{T}^1)$ si $\|D\eta\|_{L^p}$ est assez petit.

A partir de ce résultat d'Yves Meyer, on obtient des estimations sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations (cf. [HZ], 3.4), et surtout sur les solutions des équations aux différences (cf. 3.17).

Ces estimations conduisent à des inégalités a priori conditionnelles sur les courbes invariantes : c'est l'objet du § 6. En 6.7, on prouve que les hypothèses $\|D^2\psi\|_{L^{3/2}} < C_1$, $\|F-T\|_{C^2} \leq C_1$, impliquent l'estimation fondamentale :

$$\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \leq C_2 \|F-T\|_{C^3}$$

après qu'on se soit ramené, par changement de variables (cf. 4.1 et 4.2), au cas

où $F(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta, r))$ et $T(\theta, r) = (\theta + r, r)$. Cette inégalité a priori conditionnelle est valable pour les plongements ayant la propriété d'intersection ; il n'y a pas d'inégalité non conditionnelle, comme le montre la remarque 3 de 6.8.

En contre partie, nous ne sommes pas parvenus à estimer $\|D^2\psi\|_{L^{2+\varepsilon}}$ ou $\|D^3\psi\|_{L^p}$. Mais, en 6.9, on obtient une estimation a priori conditionnelle de $\|D^4\psi\|_{L^q}$, où q ne dépend que de $0 < s < 1/2$; c'est le point le plus difficile de toute la démonstration ; on évite les termes en $\|D^2\psi\|_{L^{2+\varepsilon}}$ et $\|D^3\psi\|_{L^{2+\varepsilon}}$ grâce aux inégalités de 2.11. Il est alors assez aisé d'obtenir, en 6.11, des inégalités a priori conditionnelles sur $\|D^k\psi\|_{L^q}$, $k \geq 5$.

Pour n'utiliser simultanément qu'un nombre fini de ces inégalités conditionnelles, on invoque le théorème de régularité de 5.6 : pour tout nombre α_1 vérifiant une condition diophantienne, il existe un entier ℓ_1 ayant la propriété suivante. Soit F un difféomorphisme de classe C^∞ de l'anneau qui dévie la verticale et a la propriété d'intersection ; si le graphe d'une fonction $\psi \in C^{\ell_1}(\mathbb{T}^1)$ est une courbe invariante par F dont le nombre de rotation est α_1 , alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$. Ce résultat s'appuie sur la généralisation par J. C. Yoccoz du théorème fondamental de [H.IX] (voir $[Y_1]$ et $[Y_2]$; lorsque α_1 satisfait une condition A plus stricte, on peut appliquer [H.IX]).

Le théorème de régularité montre que pour les difféomorphismes de classes C^∞ qui ont la propriété d'intersection et dévient la verticale, la courbe invariante dont le nombre de rotation est α_1 ne peut disparaître qu'en devenant de classe C^k , $k < \ell_1$.

Toute la démonstration est en classe C^∞ , ce qui permet de contourner le problème fondamental de la perte de différentiabilité.

L'hypothèse de classe C^3 intervient seulement comme suit : soit $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$ et φ_1 une dérivée partielle d'ordre 3 de φ ; on majorera alors trivialement $\|\varphi_1 \circ G\|_{L^p}$ par $\|\varphi\|_{C^3}$; il y a à ce sujet un problème de trace (voir la remarque 6 de 6.8 et le chapitre VI, 4.2).

Pour convaincre le lecteur que des hypothèses de trace ad hoc permettent d'améliorer un peu le résultat, on montre au § 8 l'existence de courbes invariantes pour des difféomorphismes F de la forme $F(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$, où $\varphi \in W^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ est d'intégrale nulle, $p > 1$, et $\|D^3\varphi\|_{L^p}$ est assez petit. On a en fait un peu mieux : il suffit de supposer que φ est d'intégrale nulle, que $D^2\varphi$ a une variation totale finie et que $(D^3\varphi)^+ \in L^p$, avec $\|(D^3\varphi)^+\|_{L^p}$ assez petit (ici, $(D^3\varphi)^+$ désigne la partie positive de $D^3\varphi$, qui est une mesure) ; on obtient ainsi des courbes invariantes pour des difféomorphismes qui ne sont pas nécessairement de classe C^2 (voir 8.9).

En 6.14 et 8.8., on voit qu'une courbe, invariante par un difféomorphisme F , qui est graphe d'une fonction ψ de classe C^∞ ne disparaît que si $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \geq C_1$ ou $\|F - T_1\|_{C^2} \geq C_2$ (la constante C_1 dépendant de $0 < s < 1/2$).

Commentaires : La démonstration n'est pas effective et il ne semble pas simple d'estimer numériquement la taille des voisinages dans la C^3 -topologie. Le théorème 8.11 a un caractère semi-global : il ne peut être obtenu aisément par des techniques de perturbation ; à ce propos, voir la remarque 8.12.

Remerciements : Je remercie Alain Chenciner de Jean-Paul Thouvenot pour de nombreuses et fructueuses discussions. Je remercie infiniment Yves Meyer d'avoir démontré le résultat de [M] et de m'avoir appris de nombreuses choses sur les espaces L^p et les espaces de Sobolev. Finalement je remercie infiniment Jean-Christophe Yoccoz d'avoir considérablement amélioré la rédaction du manuscrit.

Notations et conventions : (voir aussi l'index à la fin du chapitre VI).

On note $\mathbb{T}^1$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{A}$ le cylindre $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{A}_\delta$ l'anneau $\mathbb{T}^1 \times [-\delta, +\delta]$ ($\delta > 0$).

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et M, M' deux variétés de classe C^∞ , $C^k(M, M')$ (resp. $C^k(M)$) est l'espace des applications de classe C^k de M dans M' (resp. $\mathbb{R}$)

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

Si $\varphi \in C^k(\mathbb{A}_\delta)$ ou $C^k(\mathbb{A})$, les dérivées partielles sont notées
 $\varphi_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, $\varphi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\varphi_{\theta\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \varphi$, etc...

Normes : Soit X un espace compact, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note :

$$\|\varphi\|_{C^0(X)} = \|\varphi\|_{C^0} = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

Pour $\varphi \in C^k(\mathbb{A}_\delta)$, $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\|\varphi\|_{C^k(\mathbb{A}_\delta)} = \|\varphi\|_{C^k} = \sup_{0 \leq k_2 \leq k_1 \leq k} \left\| \frac{\partial^{k_1} \varphi}{(\partial \theta)^{k_2} (\partial r)^{k_1 - k_2}} \right\|_{C^0}.$$

Au chapitre VI, p.5, $C^k(\mathbb{T}^n)$ sera muni d'une norme différente de celle choisie pour $C^k(\mathbb{A}_\delta)$ (mais équivalente).

Convention de parenthèses : Pour alléger l'écriture, on écrira :

- Si $\varphi \in C^1(\mathbb{A}_\delta)$, $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$, $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$:

$$\varphi_\theta \circ G = (\varphi_\theta) \circ G \quad (\text{et non } \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi \circ G)) ;$$

- Si $f \in D^2(\mathbb{T}^1)$, $h \in D^0(\mathbb{T}^1)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$:

$$\text{Log } Df \circ h = (\text{Log}(Df)) \circ h ;$$

$$D \text{Log } Df = D(\text{Log } Df) ;$$

$$D^k \psi \circ f (Df)^p = [(D^k \psi) \circ f] (Df)^p ;$$

f^{-1} , Df^{-1} pour respectivement le difféomorphisme inverse de f et sa dérivée, $D(f^{-1})$;

$(Df)^p$, $(Df^{-1})^p$ pour les puissances p -ièmes respectives de Df et Df^{-1} .

2. RAPPELS SUR LES ESPACES L^p et BMO.

2.1 On note $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, et $m = d\theta$ la mesure de Haar normalisée sur $\mathbb{T}^n$.

Pour $\alpha \in \mathbb{T}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$), R_α désigne la translation $R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha$ de $\mathbb{T}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

2.2 Pour $p \geq 1$, ou $p = \infty$, on pose $L^p = L^p(\mathbb{T}^n, d\theta)$ et on munit L^p de sa norme usuelle :

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left[\int_{\mathbb{T}^n} |\varphi(\theta)|^p d\theta \right]^{1/p}, \quad \|\varphi\|_{L^\infty} = \sup_{\theta} |\varphi(\theta)|.$$

$$\text{Pour } 1 \leq p_1 \leq p_2, \text{ on a } L^{p_2} \subset L^{p_1}, \quad \|\cdot\|_{L^{p_1}} \leq \|\cdot\|_{L^{p_2}}.$$

2.3 Inégalités de Hölder : pour $p, p' \geq 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et $\varphi \in L^p$, $\psi \in L^{p'}$, on a $\varphi\psi \in L^1$ et :

$$\left| \int_0^1 \varphi\psi d\theta \right| \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^{p'}}.$$

2.4 Corollaire : pour $p, q, r \geq 1$ vérifiant $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, si $\varphi \in L^p$ et $\psi \in L^q$, alors $\varphi\psi \in L^r$ et on a :

$$\|\varphi\psi\|_{L^r} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q}.$$

2.5 Pour $r \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, $W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ est par définition l'espace de Sobolev des fonctions $\varphi \in L^p$ telles que les dérivées au sens des distributions de φ jusqu'à l'ordre r appartiennent à L^p .

2.6 Pour $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^r(\mathbb{T}^n)$ est l'espace des fonctions de classe C^r de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{R}$; pour $0 < \beta < 1$, $C^{r+\beta}(\mathbb{T}^n)$ désigne l'ensemble des $\varphi \in C^r(\mathbb{T}^n)$ dont les dérivées partielles d'ordre r sont höldériennes d'exposant β .

2.7 Pour $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$, $D\varphi$ désigne la dérivée de φ . On munit $W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$ de la norme $\varphi \longrightarrow \sup(\|\varphi\|_{L^p}, \|D\varphi\|_{L^p})$ qui en fait un espace de Banach. Pour $1 \leq p < +\infty$, $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$.

2.8 Soient p, p' tels que $p > 1$, $p' > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$, $|x-y| < 1$, on a par l'inégalité de Hölder :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \int_x^y D\varphi(t) dt \right| \leq \|D\varphi\|_{L^p} |x-y|^{1/p'}$$

donc $W^{1,p}(\mathbb{T}^1) \subset C^{1/p'}(\mathbb{T}^1)$.

2.9 Soit $p \geq 1$ ou $p = \infty$; on a $W^{1,p}(\mathbb{T}^1) \subset C^0(\mathbb{T}^1)$; si $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$ s'annule, on a :

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq \|D\varphi\|_{L^1}.$$

Donc $\varphi \rightarrow \left| \int_0^1 \varphi(t) dt \right| + \|D\varphi\|_{L^p}$ est une norme définissant la topologie de $W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$.

2.10 Soit $1 \leq p \leq +\infty$; pour $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^1)$, $A > 0$, considérons les propriétés suivantes :

- i) $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$, $\|D\varphi\|_{L^p} \leq A$;
- ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^p} \leq A|t|$.

Par [S, p.139], la propriété i) implique ii), et ces propriétés sont équivalentes lorsque $p > 1$.

Il résulte de 2.8, que pour $p > 1$ et $C > 1$, la boule $B_C = \{ \varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1) \mid \|D\varphi\|_{L^p} + \left| \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \right| \leq C \}$ est compacte pour la C^0 topologie : de toute suite (φ_n) dans B_C , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément vers une limite $\varphi \in B_C$.

Pour $p > 1$, il suit de 2.9 que l'ensemble convexe $\{ \varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1) \mid \|D\varphi\|_{L^p} \leq C, \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0 \}$ est compact pour la C^0 -topologie.

Cette topologie y est équivalente à la topologie faible sur $D\varphi$ induite par la dualité entre L^p et $L^{p'}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

2.11 Inégalités .

Proposition 1 : Soient $p \geq 2$, $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2}$; pour tout $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$\|D\varphi\|_{L^p} \leq \sqrt{p-1} \|\varphi\|_{L^{p_1}}^{1/2} \|D^2\varphi\|_{L^{p_2}}^{1/2} .$$

Remarque : Quitte à remplacer $\sqrt{p-1}$ par une constante dépendant de p , cette proposition reste valable lorsque $p > 1$, $1 < p_1, p_2 < +\infty$: voir [BL, en utilisant 6.4.5 (5)] .

Démonstration ♦ : On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{sgn } x = -1, 0, +1$ suivant que $x < 0$, $= 0$, > 0 . La fonction :

$$\chi(t) = \text{sgn}(D\varphi) |D\varphi|^{p-1} \varphi$$

est alors de classe C^1 . On a donc :

$$\int_0^1 |D\varphi|^p d\theta + (p-1) \int_0^1 |D\varphi|^{p-2} \varphi D^2\varphi d\theta = \int_0^1 D\chi(t) dt = 0 .$$

Définissons $r = \frac{p}{p-2} > 1$; comme $\frac{2}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, on a $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$. Par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |D\varphi|^p d\theta &\leq (p-1) \|\varphi\|_{L^{p_1}} \|D^2\varphi\|_{L^{p_2}} \| |D\varphi|^{p-2} \|_{L^r} \\ &= (p-1) \|\varphi\|_{L^{p_1}} \|D^2\varphi\|_{L^{p_2}} \left(\int_0^1 |D\varphi|^p d\theta \right)^{1 - \frac{2}{p}} , \end{aligned}$$

♦ Je remercie Tartar de m'avoir communiqué cette démonstration.

d'où suit l'inégalité de la proposition. ■

Soit $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; on suppose dans l'inégalité ci-dessous que $\varphi \in W^{1,p'}(\mathbb{T}^1)$ a un zéro sur $\mathbb{T}^1$, ce qui est le cas par exemple lorsque $\varphi = D\psi$, $\psi \in C^2(\mathbb{T}^1)$.

Proposition 2 : On a : $\|\varphi\|_{C^0}^2 \leq 2 \|\varphi\|_{L^p} \|D\varphi\|_{L^p}$,

Démonstration : Supposons que $\varphi(\theta_0) = 0$. Pour $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 1$, on a alors :

$$(\varphi(\theta))^2 = \int_{\theta_0}^{\theta} D(\varphi^2)(t) dt \leq 2 \|\varphi\|_{L^p} \|D\varphi\|_{L^p} . \quad \blacksquare$$

2.12 Pour $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^1)$ et J un intervalle de $\mathbb{T}^1$, on note $|J|$ la longueur de J et $\varphi_J = \frac{1}{|J|} \int_J \varphi(\theta) d\theta$.

On désigne par BMO ou $BMO(\mathbb{T}^1)$ l'espace des $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^1)$ tels que :

$$\sup_J \frac{1}{|J|} \int_J |\varphi - \varphi_J| d\theta = \|\varphi\|_{BMO} < +\infty ,$$

la borne supérieure étant prise sur tous les intervalles J de $\mathbb{T}^1$.

Muni de la norme $\|\varphi\|_* = \|\varphi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{BMO}$, BMO est un espace de Banach, et $\|\cdot\|_{BMO}$ est une semi-norme qu'annulent les constantes.

2.13 Soit $\varphi \in BMO$; pour $\lambda \geq 0$ et J un intervalle de $\mathbb{T}^1$, posons :

$$g_J(\lambda) = m(\{x \in J \mid |\varphi(x) - \varphi_J| > \lambda\}) .$$

Dans le théorème suivant, dû à John et Nirenberg [JN], $[t]$ désigne la partie entière d'un réel t .

Téorème : On a :

$$g_J(\lambda) \leq 2 |J| \exp \left(- \left[\frac{\lambda}{4 \|\varphi\|_{BMO}} \right] \text{Log } 2 \right) .$$

On renvoie au livre de Koosis [K] pour la démonstration avec les constantes.

2.14 Soit φ une fonction mesurable à valeurs positives sur $\mathbb{T}^1$, h une application de classe C^1 définie sur $[0, +\infty)$, croissante, et vérifiant $h(0) = 0$. Définissons, pour $\lambda \geq 0$:

$$g_{\varphi}(\lambda) = m(\{x \in \mathbb{T}^1 \mid |\varphi(x)| > \lambda\}) \quad .$$

alors g_{φ} est décroissante et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^1} h(\varphi(x)) dx &= - \int_0^{+\infty} h(\lambda) dg_{\varphi}(\lambda) \\ &= \int_0^{+\infty} Dh(\lambda) g_{\varphi}(\lambda) d\lambda \quad . \end{aligned}$$

2.15 Il en résulte, pour $q \geq 1$, $\varphi \in BMO$:

$$\|\varphi - \varphi_I\|_{L^q} \leq Cq \|\varphi\|_{BMO} \quad ,$$

où $\varphi_I = \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta$ et $C > 0$ est une constante indépendante de q .

2.16 Il existe des constantes universelles $b, B > 0$ telles que pour $\varphi \in BMO$, $q < b\|\varphi\|_{BMO}^{-1}$, on ait :

$$\int_0^1 e^{q|\varphi - \varphi_I|} d\theta \leq 1 + \frac{Bq\|\varphi\|_{BMO}}{b - q\|\varphi\|_{BMO}} \quad .$$

3. INÉGALITÉS POUR LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE DONT LE NOMBRE DE ROTATION EST DE TYPE CONSTANT ; INÉGALITÉS POUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES.

3.1 Dans ce paragraphe, α est un nombre réel de type constant : il existe $\gamma > 0$ tel que $|\alpha - (p/q)| \geq \gamma q^{-2}$ pour tout rationnel p/q . Le nombre $\gamma = \inf_{q \geq 1} q^2 |\alpha - (p/q)|$ est appelé constante de Markov de α . Par Dirichlet, on a $\gamma < 1$. On renvoie à [IV.3] pour des exemples.

3.2 Le lemme suivant est dû à Yves Meyer [M], auquel on renvoie pour la démonstration.

Lemme : Soit $p > 1$, $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$ telle que $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = \varphi_I = 0$; l'équation $\psi - \psi \circ R_\alpha = \varphi$ admet une unique solution $\psi \in BMO$ telle que $\psi_I = 0$. De plus, il existe une constante B_p dépendant seulement de p telle que :

$$\|\psi\|_{BMO} \leq \frac{1}{\gamma} B_p \|\varphi\|_{L^p}.$$

Dans la suite, on n'utilise l'espace BMO que pour estimer $\|\psi\|_{L^q}$ et $\|\exp q|\psi|\|_{L^1}$ grâce au théorème de John et Nirenberg (2.13 à 2.16).

Remarques : 1. La constante B_p est $O((p-1)^{-2})$ au voisinage de $p = 1$. Ceci résulte de [M] en utilisant d'une part que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$$

et d'autre part, si $\varphi \in L^p$ et si $\Delta \varphi_i$ sont les blocs obtenus par lissage (chap. VI, 2.8 et 2.10), on a :

$$\left(\sum_i \|\Delta \varphi_i\|_{L^p}^2 \right)^{1/2} \leq A_p \|\varphi\|_{L^p}, \quad A_p = O\left(\frac{1}{p-1}\right).$$

Voir [5] à ce propos.

2. La fonction ψ donnée par le lemme est limite dans BMO de polynômes trigonométriques ; elle appartient donc à VMO.

3.3 Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; on pose :

$$D^k(\mathbb{T}^1) = \{f = \text{Id} + \psi \in \text{Diff}_+^k(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^k(\mathbb{T}^1)\}.$$

Alors $D^k(\mathbb{T}^1)$ est un groupe topologique, revêtement universel du groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^k qui préservent l'orientation.

L'application "nombre de rotation" ρ à valeurs réelles est définie et continue sur $D^0(\mathbb{T}^1)$ (voir [H.II]). Par [H.II], pour $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ la fonction $f - R_{\rho(f)}$ s'annule en au moins un point.

Soit $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$, tel que $\rho(f)$ soit de type constant ; par le théorème fondamental de [H.IX], on a $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, avec $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$; comme le centralisateur d'une rotation irrationnelle dans $D^0(\mathbb{T}^1)$ est réduit au groupe des rotations, la conjugaison h est unique si on impose $h(0) = 0$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$;

$$D^k(\mathbb{T}^1, 0) = \{h \in D^k(\mathbb{T}^1) \mid h(0) = 0\}.$$

3.4 Le théorème suivant résulte de [HZ].

Théorème : Soit $p > 1$. Il existe des constantes $C, C' > 0$ dépendant seulement de p telles que si $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifie $\rho(f) = \alpha$ et

$$\|D \log Df\|_{L^p} < C\gamma,$$

alors $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ et on a :

$$\|\log Dh\|_{\text{BMO}} \leq \frac{C'}{\gamma} \|D \log Df\|_{L^p}.$$

Pour la commodité du lecteur, nous incluons une démonstration, différente de celle de [HZ].

Démonstration : Soit $F_\alpha^\infty = \{f \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$, et pour $C > 0$,

$$V_C = \{f \in F_\alpha^\infty \mid \|D \log Df\|_{L^p} < C\gamma\} .$$

Alors $R_\alpha \in V_C$; montrons que V_C est connexe.

Par [H.III.4] , l'application $f \rightarrow R_{-f(0)} \circ f$ est un homéomorphisme de V_C sur :

$$V_C^1 = \{f \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0) \mid \|D \log Df\|_{L^p} < C\gamma\} .$$

Soit $g \in V_C^1$; pour $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$, soit :

$$\begin{aligned} a_t &= \int_0^1 [Dg(\theta)]^t d\theta , \\ g_t(\theta) &= a_t^{-1} \int_0^\theta [Dg(\theta)]^t d\theta . \end{aligned}$$

Alors, $t \rightarrow g_t$ est un chemin dans $D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ continu pour la C^∞ -topologie tel que

$$g_0 = \text{Id}_{\mathbb{T}^1} , g_1 = g . \text{ Comme } D \log Dg_t = t D \log Dg , g_t \in V_C^1 \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 ;$$

donc V_C^1 est connexe et V_C aussi.

Pour $a > 0$, soit :

$$U_a = \{f \in F_\alpha^\infty \mid f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} , h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0) , \| \log Dh \|_{BMO} < a\} .$$

Par le théorème fondamental de [H.IX], l'application $f \rightarrow h$ de F_α^∞ dans $D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ est continue pour la C^∞ -topologie ; donc U_a est ouvert dans F_α^∞ , et non vide car $R_\alpha \in U_a$.

Soit $p_1 = \frac{1+p}{2}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1}$; par 2.16, il existe $a_0 > 0$ tel que, pour $f \in U_{a_0}$, on ait (voir aussi 3.5) :

$$\| (Dh)^{1 - \frac{1}{p}} \|_{L^{q_1}} < 2 .$$

D'autre part, on a :

$$\log Df \circ h = \log Dh \circ R_\alpha - \log Dh ,$$

donc, lorsque $f \in U_{a_0}$, ceci implique par 3.2 :

$$\begin{aligned}
 \|\text{Log Dh}\|_{\text{BMO}} &\leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|D(\text{Log Df} \circ h)\|_{p_1} \\
 &\leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|(D \text{Log Df} \circ h) (Dh)^{1/p}\|_{L^p} \|(Dh)^{1-\frac{1}{p}}\|_{L^{q_1}} \\
 &\leq 2 B_{p_1} \gamma^{-1} \|D \text{Log Df}\|_{L^p} .
 \end{aligned}$$

On peut donc choisir C assez petit de sorte que pour $f \in V_C \cap U_{a_0}$:

$$\|\text{Log Dh}\|_{\text{BMO}} \leq a_0/2 .$$

Alors $V_C \cap U_{a_0}$ est ouvert, fermé et non vide dans l'ensemble connexe V_C , donc égal à V_C . Le théorème en résulte avec $C' = 2 B_{p_1}$. ■

3.5 Corollaire : Soient $p > 1, q > 1$. Il existe une constante C_q dépendant seulement de p et q telle que si $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifie les hypothèses de 3.4 et de plus :

$$\|D \text{Log Df}\|_{L^p} \leq C_q \gamma ,$$

alors on a, pour $|r| \leq q$:

$$\int_0^1 (Dh)^r d\theta < 2 , \quad \int_0^1 (Dh^{-1})^r < 2 .$$

Démonstration : Soient $\psi = \text{Log Dh} - \int_0^1 \text{Log Dh}(\theta) d\theta$, $a = \int_0^1 e^\psi d\theta$.

Fixons $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$. Par 3.4 et 2.16, on peut choisir C_q assez petit pour que, lorsque f vérifie les hypothèses du corollaire, on ait :

$$\int_0^1 e^{q|\psi|} d\theta \leq 1 + \varepsilon$$

Ceci implique $a \leq 1 + \varepsilon$, et $\int_0^1 e^{-\psi} d\theta \leq 1 + \varepsilon$. Comme $a \int_0^1 e^{-\psi} d\theta \geq 1$, on a donc

aussi $a \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$.

Or $Dh = a^{-1} e^\psi$, donc :

$$\int_0^1 (Dh)^r d\theta \leq (1+\varepsilon)^q \int_0^1 e^{\pm r\psi} d\theta \leq (1+\varepsilon)^{q+1}.$$

En choisissant ε assez petit, ceci donne la première inégalité du corollaire ;
la seconde en résulte puisque :

$$\int_0^1 (Dh^{-1})^r d\theta = \int_0^1 (Dh)^{1-r} d\theta \quad \text{pour } r \in \mathbb{R} . \quad \blacksquare$$

3.6 Remarque : On ne sait pas obtenir de majoration L^∞ de Dh et $(Dh)^{-1}$ (cf [H.XIII.4.6]). Mais lorsque q est grand, c'est à dire C_q petit, on pourra grâce au corollaire appliquer 2.4, et Dh se comporte donc presque comme si on avait des majorations L^∞ .

3.7 Soient $p > 1$, $p_1 = \frac{p+1}{2}$, $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^1)$.

Lorsque f vérifie les hypothèses de 3.5, on a :

$$\|\varphi \circ h\|_{L^{p_1}} \leq 2\|\varphi\|_{L^p} ,$$

$$\|\varphi \circ h^{-1}\|_{L^{p_1}} \leq 2\|\varphi\|_{L^p} .$$

3.8 Les hypothèses sur f sont les mêmes qu'en 3.4.

Proposition : Il existe des constantes C_1, C_2 dépendant seulement de $1 < p \leq 2$ telles que si f vérifie :

$$\|D \log Df\|_{L^p} \leq C_1 \gamma ,$$

alors on a :

$$\|D \log Dh\|_{BMO} \leq C_2 \gamma^{-1} \|D^3 f\|_{L^p} .$$

Démonstration : De $\text{Log Df} \circ h = \text{Log Dh} \circ R_\alpha - \text{Log Dh}$, on tire par 3.2 :

$$(1) \quad \|D \text{Log Dh}\|_{\text{BMO}} \leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|D(D \text{Log Df} \circ h \text{ Dh})\|_{L^{p_1}},$$

Avec $p_1 = \frac{1+p}{2}$. Or on a :

$$D(D \text{Log Df} \circ h \text{ Dh}) = D^2 \text{Log Df} \circ h (\text{Dh})^2 + D \text{Log Df} \circ h \text{ Dh} \frac{D^2 h}{Dh}.$$

Par 2.4, on a :

$$\begin{aligned} \|D^2 \text{Log Df} \circ h (\text{Dh})^2\|_{L^{p_1}} &\leq \|D^2 \text{Log Df}\|_{L^p} \|(\text{Dh})^{2-\frac{1}{p}}\|_{L^q}, \\ \|D \text{Log Df} \circ h \text{ Dh} \frac{D^2 h}{Dh}\|_{L^{p_1}} &\leq \|D \text{Log Df}\|_{L^p} \|(\text{Dh})^{1-\frac{1}{p}}\|_{L^{2q}} \left\| \frac{D^2 h}{Dh} \right\|_{L^{2q}}, \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Soit C_{2q} la constante donnée par 3.5 associée à p et $2q$. En choisissant $C_1 < C_{2q}$ assez petit, on aura par 2.15 et 3.5 :

$$B_{p_1} \gamma^{-1} \|D \text{Log Df}\|_{L^p} \|(\text{Dh})^{1-\frac{1}{p}}\|_{L^{2q}} \left\| \frac{D^2 h}{Dh} \right\|_{L^{2q}} \leq \frac{1}{2} \|D \text{Log Dh}\|_{\text{BMO}}.$$

De (1) , on tire alors :

$$\begin{aligned} (1') \quad \|D \text{Log Dh}\|_{\text{BMO}} &\leq 2B_{p_1} \gamma^{-1} \|D^2 \text{Log Df}\|_{L^p} \|(\text{Dh})^{2-\frac{1}{p}}\|_{L^q}, \\ &\leq C' \gamma^{-1} \|D^2 \text{Log Df}\|_{L^p}, \end{aligned}$$

où C' dépend seulement de p .

Si C_1 est assez petit, on a $3/2 \geq Df(t) \geq 1/2$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Comme $D^2 \text{Log Df} = \frac{D^3 f}{Df} - \left(\frac{D^2 f}{Df}\right)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|D^2 \text{Log Df}\|_{L^p} &\leq 2 \|D^3 f\|_{L^p} + 2 \|D^2 f\|_{C^0} \|D \text{Log Df}\|_{L^p} \\ &\leq \|D^3 f\|_{L^p} (2 + 2C_1), \end{aligned}$$

car $\|D^2 f\|_{C^0} \leq \|D^3 f\|_{L^p}$. En portant cette estimation dans l'inégalité (1') , on

obtient la proposition. ■

3.9 Soit $q > 1$. On désigne par C_{2q} la constante associée à p et $2q$ vérifiant la conclusion du corollaire 3.5.

Corollaire : Soit f vérifiant les hypothèses de 3.8 et :

$$\|D \operatorname{Log} Df\|_{L^p} \leq C_{2q} \gamma ;$$

alors on a :

$$\|D^2 h\|_{L^q} \leq C_3 \gamma^{-1} \|D^3 f\|_{L^p} ,$$

où C_3 est une constante dépendant seulement de p et q .

Démonstration : Par 2.15, on a :

$$\|D^2 h\|_{L^q} \leq \left\| \frac{D^2 h}{Dh} \right\|_{L^{2q}} \|Dh\|_{L^{2q}} \leq 2qC \left\| \frac{D^2 h}{Dh} \right\|_{BMO} \|Dh\|_{L^{2q}}$$

et le corollaire résulte alors de 3.5 et 3.8 . ■

3.10 On se donne dans la suite un difféomorphisme $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$, dont le nombre de rotation α est de type constant.

On écrit $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$. On note μ l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^1$ invariante par le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1$ induit par f .

Soit $a \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, $a > 0$; on suppose que $\int_{\mathbb{T}^1} \operatorname{Log} a \, d\mu = 0$.

En appliquant 3.2 à l'équation :

$$\operatorname{Log} a \circ h = \operatorname{Log} b_o \circ h \circ R_\alpha - \operatorname{Log} b_o \circ h ,$$

on voit que a s'écrit de façon unique :

$$a = \frac{b_o \circ f}{b_o} ,$$

avec $b_o \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ et $\int_0^1 \operatorname{Log} b_o \circ h \, d\theta = 0$.

3.11 Majorations .

Puisque $\int_{\mathbb{T}^1} \text{Log } a \, d\mu = 0$, $a - 1$ s'annule en au moins un point de $\mathbb{T}^1$.
Soit $p > 1$; supposons que $\|a - 1\|_{C^0} \leq \|Da\|_{L^p} < \frac{1}{2}$.

On a alors :

$$\|D \text{Log } a\|_{L^p} = \left\| \frac{Da}{a} \right\|_{L^p} \leq 2 \|Da\|_{L^p} ;$$

$$\|D^2 \text{Log } a\|_{L^p} = \left\| \frac{D^2 a}{a} - \left(\frac{Da}{a} \right)^2 \right\|_{L^p} ;$$

$$\left\| \frac{D^2 a}{a} \right\|_{L^p} \leq 2 \|D^2 a\|_{L^p} ;$$

$$\left\| \left(\frac{Da}{a} \right)^2 \right\|_{L^p} \leq 4 \|Da\|_{L^{2p}}^2 \leq 4(2p-1) \|a - 1\|_{C^0} \|D^2 a\|_{L^p} ,$$

par 2.11.

Ceci donne :

$$\|D^2 \text{Log } a\|_{L^p} \leq 4p \|D^2 a\|_{L^p} .$$

On pose $b = b_o \circ h$, b_o étant la fonction définie en 3.10. Définissons $p_1 = \frac{1+p}{2}$ et q_1 par la relation $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1}$. Par 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \|\text{Log } b\|_{BMO} &\leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|D \text{Log } a \circ h \, Dh\|_{L^{p_1}} \\ &\leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|D \text{Log } a\|_{L^p} \| (Dh)^{1-1/p} \|_{L^{q_1}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D \text{Log } b\|_{BMO} &\leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|(D^2 \text{Log } a) \circ h (Dh)^2 + (D \text{Log } a) \circ h \, D^2 h\|_{L^{p_1}} \\ &\leq B_{p_1} \gamma^{-1} [\|D^2 \text{Log } a\|_{L^p} \|Dh\|_{L^{q_1}}^{2-1/p} + \|D \text{Log } a\|_{L^p} \|D^2 h (Dh)^{-1/p}\|_{L^{q_1}}] . \end{aligned}$$

Soit $q > 1$. On se sert de 2.16, 3.5 et de l'estimation de $\|\text{Log } b\|_{BMO}$ pour majorer

$\|b\|_{L^q}$, $\|b^{-1}\|_{L^q}$; de 3.7 pour majorer $\|b_o\|_{L^q}$, $\|b_o^{-1}\|_{L^q}$; de 2.4, 2.15, 3.5, 3.7, 3.9 pour majorer $\|Db\|_{L^q} = \|b \, D \text{Log } b\|_{L^q}$ puis $\|Db_o\|_{L^q} = \|Db_o \circ h^{-1} \cdot Dh^{-1}\|_{L^q}$.

On obtient ainsi la proposition suivante :

3.12 Proposition : Soient $p > 1$, $q > 1$. Il existe des constantes C'_1, C'_2, C'_3 dépendant seulement de p et q telle que, si f et a comme ci-dessus vérifient :

$$\begin{aligned} \|D \log Df\|_{L^p} &\leq C'_1 \gamma, \\ \|Da\|_{L^p} &\leq C'_2 \gamma \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \sup(\|b_o\|_{L^q}, \|b_o^{-1}\|_{L^q}, \|b\|_{L^q}, \|b^{-1}\|_{L^q}) &\leq 2; \\ \sup(\|Db_o\|_{L^q}, \|Db\|_{L^q}) &\leq C'_3 \gamma^{-1} (\|D^2 a\|_{L^p} + \|D^3 f\|_{L^p}). \end{aligned}$$

3.13 On se donne f et a comme en 3.10 .

Soient $k \in \mathbb{Z}$, $\psi, \eta \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ des fonctions vérifiant :

$$(2) \quad \int_0^1 \psi(\theta) d\theta = 0$$

$$(3) \quad \psi \circ f (Df)^k - a\psi = \eta.$$

On a $(Df)^{-1} = \frac{Dh^{-1} \circ f}{Dh^{-1}}$; par 3.10, a peut s'écrire $a = \frac{b_2}{b_2 \circ f}$, $b_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$.

En remplaçant dans (3) les fonctions Df et a par ces expressions, et en multipliant les deux membres par $(Dh^{-1})^{-k} b_2 \circ f$, on obtient l'équation équivalente :

$$(4) \quad (b_1 \psi) \circ f - b_1 \psi = b_3 \eta, \text{ avec}$$

$$(5) \quad b_1 = (Dh^{-1})^{-k} b_2,$$

$$(6) \quad b_3 = (Dh^{-1})^{-k} b_2 \circ f.$$

Comme $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, en composant (4) à droite par h , on obtient :

$$(7) \quad \psi_1 \circ R_\alpha - \psi_1 = (b_3 \eta) \circ h, \text{ avec}$$

$$(8) \quad \psi_1 = (b_1 \psi) \circ h = b \cdot (\psi \circ h).$$

3.14 On voit donc que si (3) est satisfaite, on doit avoir :

$$\int_0^1 (b_3 \eta) \circ h \, d\theta = 0 .$$

3.15 Réciproquement, si l'intégrale précédente est nulle, l'équation (7) a une unique solution $\tilde{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ d'intégrale nulle ; de plus pour tout $p_1 > 1$, on a :

$$(9) \quad \|\tilde{\psi}_1\|_{BMO} \leq B_{p_1} \gamma^{-1} \|D((b_3 \eta) \circ h)\|_{L^{p_1}} .$$

La solution générale de (3) est alors :

$$(10) \quad \tilde{\psi} = \frac{1}{b_1} \tilde{\psi}_1 \circ h^{-1} + \frac{\mu}{b_1} , \quad \mu \in \mathbb{R} ,$$

et pour vérifier (2) , on doit avoir :

$$(11) \quad \mu = \mu_1 = - \left[\int_0^1 b_1^{-1} \tilde{\psi}_1 \circ h^{-1} \, d\theta \right] \left[\int_0^1 b_1^{-1} \, d\theta \right]^{-1} .$$

3.16 Par [IV, 3.12] , la solution donnée par (10) , (11) est l'unique solution du système (2) , (3) .

3.17 Majorations .

Proposition : Soient $p > 1$, $q > 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Il existe des constantes C_1, C_2, C_3 strictement positives dépendant seulement de p, q, k telles que si f, a, ψ, η comme en 3.13 vérifient (2) , (3) et :

$$\|D \operatorname{Log} Df\|_{L^p} \leq C_1 \gamma \leq \operatorname{Log} 2 ,$$

$$\|Da\|_{L^p} \leq C_2 \gamma \leq \frac{1}{2} ,$$

alors on a :

$$\|\psi\|_{L^q} \leq C_3 \gamma^{-1} [\|\mathrm{D}\eta\|_{L^p} + \|\eta\|_{L^p} (\|\mathrm{D}^2\mathrm{all}\|_{L^p} + \|\mathrm{D}^3\mathrm{all}\|_{L^p})] .$$

Démonstration : Soit $p_1 = \frac{p+1}{2}$, $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1}$.

La fonction ψ est donnée par les formules (10) et (11) , on a donc :

$$(12) \quad \|\psi\|_{L^q} \leq \left\| \frac{1}{b_1} \right\|_{L^q} |\mu_1| + \left\| \frac{1}{b_1} \right\|_{L^{2q}} \|\tilde{\psi}_1 \circ h^{-1}\|_{L^{2q}} .$$

Or on a, avec les notations de 3.10, par la relation (5) :

$$b_1 = (\mathrm{D}h)^{-1})^{-k} b_o^{-1} ,$$

$$\left\| \frac{1}{b_1} \right\|_{L^{4q}} \leq \|(\mathrm{D}h^{-1})^k\|_{L^{8q}} \|b_o\|_{L^{8q}} ;$$

$$\|b_1\|_{L^1} \leq \|(\mathrm{D}h^{-1})^{-k}\|_{L^2} \|b_o^{-1}\|_{L^2} .$$

Si C_1, C_2 sont assez petits, on a donc par 3.5 et 3.12 :

$$\|b_1^{-1}\|_{L^{4q}} \leq 4 , \quad \|b_1\|_{L^1} \leq 4 .$$

Cette dernière relation entraîne que :

$$\int_0^1 b_1^{-1} d\theta \geq \|b_1\|_{L^1}^{-1} \geq \frac{1}{4} .$$

De (11) , on tire alors :

$$\begin{aligned} |\mu_1| &\leq 4 \int_0^1 b_1^{-1} (\mathrm{D}h \circ h^{-1} | \tilde{\psi}_1 \circ h^{-1} | \mathrm{D}h^{-1}) d\theta \\ &= 4 \int_0^1 b_1^{-1} \circ h \cdot \mathrm{D}h |\tilde{\psi}_1| d\theta \\ &\leq 4 \|\tilde{\psi}_1\|_{L^2} \|b_1^{-1} \circ h \cdot \mathrm{D}h\|_{L^2} . \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \|b_1^{-1} \circ h \cdot Dh\|_{L^2} &\leq \|b_1^{-1}\|_{L^4} \|Dh^{3/4}\|_{L^4} , \\ \|\tilde{\psi}_1\|_{L^2} &\leq 2C \|\tilde{\psi}_1\|_{BMO} \quad \text{par 2.15} , \\ \|\tilde{\psi}_1 \circ h^{-1}\|_{L^{2q}} &\leq \|\tilde{\psi}_1\|_{L^{4q}} \| (Dh^{-1})^{-1/4q} \|_{L^{4q}} \\ &\leq 4qC \|\tilde{\psi}_1\|_{BMO} \| (Dh^{-1})^{-1/4q} \|_{L^{4q}} . \end{aligned}$$

On voit donc que, si C_1 et C_2 sont assez petits, la formule (12) donne :

$$(13) \quad \|\psi\|_{L^q} \leq C_4 \|\tilde{\psi}_1\|_{BMO} .$$

Mais on tire de la formule (9) :

$$(14) \quad \|\tilde{\psi}_1\|_{BMO} \leq B_p \gamma^{-1} (\|\eta\|_{L^p} \|Db_3 \circ h (Dh)^{1-1/p}\|_{L^{q_1}} + \|D\eta\|_{L^p} \|b_3 \circ h (Dh)^{1-\frac{1}{p}}\|_{L^{q_1}}) ;$$

d'autre part :

$$b_3 = (Dh^{-1})^{-k} b_o^{-1} \circ f , \quad b_3 \circ h = (Dh)^k b^{-1} \circ R_\alpha ,$$

donc :

$$\begin{aligned} \|b_3 \circ h (Dh)^{1-\frac{1}{p}}\|_{L^{q_1}} &\leq \|b^{-1}\|_{L^{2q_1}} \| (Dh)^{k+1-\frac{1}{p}} \|_{L^{2q_1}} , \\ (15) \quad \|b_3 \circ h (Dh)^{1-\frac{1}{p}}\|_{L^{q_1}} &\leq C_5 \end{aligned}$$

si C_1, C_2 sont assez petits. On a aussi :

$$\begin{aligned} \|(Db_3 \circ h)(Dh)^{1-1/p}\|_{L^{q_1}} &= \|(Dh)^{k-\frac{1}{q}} (k D \operatorname{Log} Dh \ b^{-1} \circ R_\alpha + D(b^{-1}) \circ R_\alpha)\|_{L^{q_1}} \\ &\leq \|(Dh)^{k-\frac{1}{p}}\|_{L^{4q_1}} [k \|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^{8q_1}} \|b^{-1}\|_{L^{8q_1}} + \|Db\|_{L^{8q_1}} \|b^{-2}\|_{L^{8q_1}}] \end{aligned}$$

d'où on conclut, si C_1 et C_2 sont assez petits, par 3.8 et 3.12 :

$$(16) \quad \|(Db_3 \circ h)(Dh)^{1-1/p}\|_{L^{q_1}} \leq C_6 [\|D^2_{\text{all}}\|_{L^p} + \|D^3_{\text{fl}}\|_{L^p}] .$$

En joignant (13), (14), (15), (16) on obtient le résultat cherché . ■

§ 4. GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES INVARIANTES ET LES PLONGEMENTS GLOBALEMENT CANONIQUES .

4.1 On désigne par $\mathbb{A}$ le cylindre $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et par $\mathbb{A}_\delta$ l'anneau $\mathbb{T}^1 \times [-\delta, +\delta]$ ($\delta > 0$).

Soit t une fonction numérique de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $t(0) = 0$ et $B^{-1} < |\frac{dt}{dr}(r)| < B$ pour un certain $B > 1$ et tout $r \in \mathbb{R}$.

Pour tout $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, on associe alors à α_1 et t le difféomorphisme T_1 de $\mathbb{A}$ défini par :

$$T_1(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + t(r), r) \quad , \quad \theta \in \mathbb{T}^1, r \in \mathbb{R} .$$

Le difféomorphisme T_1 est complètement intégrable, de classe C^∞ .

Soient alors $\delta_1 > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et F_1 un plongement de classe C^k de $\mathbb{A}_{\delta_1}$ dans $\mathbb{A}$ qui soit C^1 -voisin de la restriction à $\mathbb{A}_{\delta_1}$ de T_1 . On peut écrire F_1 sous la forme :

$$F_1(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + t(r) + \varphi_1(\theta, r), r + \varphi_2(\theta, r)) ;$$

on suppose dans la suite que pour tout $(\theta, r) \in \mathbb{A}_{\delta_1}$,

$$B^{-1} < \left| \frac{\partial}{\partial r} (t(r) + \varphi_1(\theta, r)) \right| < B .$$

Posons :

$$g(\theta, r) = t(r) + \varphi_1(\theta, r) ,$$

$$G(\theta, r) = (\theta, g(\theta, r)) ,$$

$$F(\theta, r) = G \circ F_1 \circ G^{-1}(\theta, r) ,$$

$$\Psi(F_1) = (F, g) .$$

Alors $g \in C^k(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{R})$; F est un plongement de classe C^k de $G(\mathbb{A}_{\delta_1} \cap F_1^{-1}(\mathbb{A}_{\delta_1}))$ dans $\mathbb{A}$.

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0, \delta > 0$ tels que

si $\|\varphi_1\|_{C^1(\mathbb{A}_{\delta_1})} + \|\varphi_2\|_{C^1(\mathbb{A}_{\delta_1})} < c$, alors $\mathbb{A}_\delta \subset G(\mathbb{A}_{\delta_1} \cap F_1^{-1}(\mathbb{A}_{\delta_1}))$, F est un

plongement de classe C^k de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$, et on a :

$$\|F - T\|_{C^1(\mathbb{A}_\delta)} < \varepsilon,$$

où on a posé : $T(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r)$.

De plus, F s'écrit sous la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + \varphi(\theta, r)), \quad \varphi \in C^k(\mathbb{A}_\delta).$$

L'application $\Psi : F_1 \rightarrow (F, g)$, définie sur

$$\{F_1 \in C^k(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A}) \mid \|F_1 - T_1\|_{C^1(\mathbb{A}_{\delta_1})} < c\}$$

et à valeurs dans $C^k(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{A}) \times C^k(\mathbb{A}_\delta)$ est alors continue pour la C^k -topologie.

Inversement, on peut reconstituer F_1 à partir de F et g : si

$\|F - T\|_{C^1(\mathbb{A}_\delta)}$ et $\|g - t - \alpha_1\|_{C^1(\mathbb{A}_\delta)}$ sont assez petits, il existe $0 < \delta'_1 < \delta_1$ tel que $F_1 = \Psi^{-1}(F, g) = G^{-1} \circ F \circ G$ soit un plongement de classe C^k de $\mathbb{A}_{\delta'_1}$ dans $\mathbb{A}$; l'application Ψ^{-1} ainsi définie, à valeurs dans $C^k(\mathbb{A}_{\delta'_1}, \mathbb{A})$, est continue pour la C^k -topologie.

Remarque : On utilise implicitement les deux résultats suivants :

a) On peut prolonger F_1 en un difféomorphisme $\bar{F}_1$ de $\mathbb{A}$ de façon continue pour la C^k -topologie.

b) Si K est un compact de $\mathbb{A}$, U est un ouvert de $\mathbb{A}$ l'ensemble

$\{\bar{F}_1 \mid \bar{F}_1^{-1}(K) \subset U\} = \{\bar{F}_1 \mid \bar{F}_1(U) \supset K\}$ est un ouvert pour la C^0 -topologie compacte ouverte.

4.2 Soit F_1 un plongement de classe C^k de $\mathbb{A}_{\delta_1}$ dans $\mathbb{A}_{\delta}$ comme précédemment.

On dit que F_1 laisse invariant un cercle C de classe C^{k_1} homotope à $r = Cte$ si $F_1(C) = C$ et C est l'image d'un plongement φ de classe C^{k_1} de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{A}$ homotope au plongement $\mathbb{T}^1 \hookrightarrow \mathbb{T}^1 \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$.

Le cercle C sera aussi appelé courbe (sous-entendu simple fermée).

On choisit une fois pour toutes un relèvement $\tilde{T}_1$ de T_1 au revêtement universel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, et on ne considère alors que le relèvement $\tilde{F}_1$ de F_1 qui est C^1 -proche de $\tilde{T}_1$. Soit C une courbe invariante par F_1 , homotope à $r = Cte$; son relèvement $\tilde{C}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est alors invariant par $\tilde{F}$; on dit que $\beta \in \mathbb{R}$ est le nombre de rotation de $\tilde{C}$ si β est le nombre de rotation de la restriction de $\tilde{F}_1$ à $\tilde{C}$.

On dit que C est le graphe de $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ si on a :

$$C = \{(\theta, \psi(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{T}^1\}.$$

On écrit $C = \text{graphe}(\psi)$.

4.3 Sous les hypothèses de 4.1, F dévie la verticale. Par la théorie de Birkhoff, il existe $a > 0$ ne dépendant que de B tel que toute fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ dont le graphe est une courbe invariante par F est lipschitzienne et vérifie $\text{Lip}(\psi) < a$ (voir [I.2.2]).

Considérons une suite $(F_i)_{i \geq 0}$ telle que chaque F_i laisse invariant le graphe C_i d'une fonction $\psi_i \in C^0(\mathbb{T}^1)$ et que le nombre de rotation de C_i soit un nombre réel irrationnel β . Si la suite $(F_i)_{i \geq 0}$ converge vers F dans la C^1 -topologie et la suite $(\psi_i)_{i \geq 0}$ a une limite ψ dans la C^0 -topologie, alors le graphe C de ψ est un cercle invariant par F et son nombre de rotation est β . De plus ψ est lipschitzienne. Nous renvoyons le lecteur à [I.5] pour les démonstrations.

4.4 On conserve les notations de 4.1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq k_1 \leq k$. Alors, le plongement F_1 de classe C^k de $\mathbb{A}_{\delta_1}$ dans $\mathbb{A}$ laisse invariant un cercle C contenu dans $\mathbb{A}_{\delta_1} \cap F_1^{-1}(\mathbb{A}_{\delta_1})$ de classe C^{k_1} si et seulement si $F = G \circ F_1 \circ G^{-1}$ laisse invariant le cercle $G(C)$ de classe C^{k_1} . De plus, les nombres de rotations de C et $G(C)$ sont égaux, et C est le graphe de $\psi_1 \in C^0(\mathbb{T}^1)$ si et seulement si $G(C)$ est le graphe de la fonction $\psi(\theta) = g(\theta, \psi_1(\theta))$. En effet, la conjugaison par G préserve pour une sous-variété la propriété d'être un graphe.

Par continuité de la conjugaison, lorsque C est contenu dans $\mathbb{A}_{\delta_1} \cap F_1^{-1}(\mathbb{A}_{\delta_1})$, les nombres $\|\psi\|_{C^{k_1}}$ et $\|F - T\|_{C^{k_1}}$ sont petits si et seulement si les nombres $\|\psi_1\|_{C^{k_1}}$ et $\|F_1 - T_1\|_{C^{k_1}}$ le sont aussi.

4.5 Soit F un plongement de classe C^k de $\mathbb{A}_{\delta}$ dans $\mathbb{A}$ de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + \varphi(\theta, r)) ;$$

on suppose que φ est petit dans la C^1 -topologie.

Dans le revêtement universel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, on considère le relèvement $\tilde{F}$ de F défini par

$$\tilde{F}(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + \varphi(\theta, r)) , \quad (\theta, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ,$$

et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la translation :

$$\tilde{L}_{\lambda}(\theta, r) = (\theta, r + \lambda).$$

On dit que F translate un cercle C , homotope à $r = \text{Cte}$, de λ si le relèvement $\tilde{C}$ de C est invariant par $\tilde{L}_{-\lambda} \circ \tilde{F}$; le nombre de rotation de C est alors celui de la restriction de $\tilde{L}_{-\lambda} \circ \tilde{F}$ à $\tilde{C}$.

On note $C^{1+vb}(\mathbb{T}^1)$ l'espace des fonctions $\psi \in C^1(\mathbb{T}^1)$ dont la dérivée première est à variation bornée.

Si le graphe C d'une fonction $\psi \in C^{1+vb}(\mathbb{T}^1)$ est une courbe translatée dont le nombre de rotation β est irrationnel, C est l'unique courbe

translatée dont le nombre de rotation est β . Ceci résulte du théorème de Denjoy [H, VI] (voir [IV, 5.10]).

4.6 On se donne F comme en 4.5.

Pour qu'une courbe C graphe d'une fonction $\psi \in C^{k,1}(\mathbb{T}^1)$ soit translatée par F de λ , il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} f(\theta) = \theta + \psi(\theta) + \alpha_1, & f \in D^{k,1}(\mathbb{T}^1) \\ \lambda + \psi \circ f(\theta) = \psi(\theta) + \varphi(\theta, \psi(\theta)) \end{cases}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$. Le nombre de rotation de C est alors celui de f . En effet la projection sur la première coordonnée de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ conjugue f à la restriction de $\tilde{F}$ à $\tilde{C}$.

4.7 On dit que le plongement F_1 de classe C^k de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ a la propriété d'intersection si tout cercle plongé C de classe C^0 , homotope à $r = \text{Cte}$, intersecte son image par F_1 .

Il suffit de le vérifier pour un ensemble dénombrable de cercles (C_i) , homotopes à $r = \text{Cte}$ et de classe C^∞ , qui soit dense pour la C^0 -topologie.

Il n'est pas difficile de voir que si une suite $(F_i)_{i \geq 0}$ de plongements de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ ayant la propriété d'intersection converge dans la C^0 -topologie vers un plongement F , alors F a la propriété d'intersection. Ainsi, la propriété d'intersection est fermée pour la C^0 -topologie.

Par conjugaison, si F_1 a la propriété d'intersection il en est de même pour $F = G \circ F_1 \circ G^{-1}$.

Si le plongement F a la propriété d'intersection et translate le graphe C d'une fonction ψ , C est en fait invariant par F .

On consultera [HB] pour divers exemples de transformations ayant la propriété d'intersection. Le seul que nous utilisons dans la suite est le suivant : un plongement F_1 de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ est dit globalement canonique si F_1 est homotope

au plongement canonique de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$, F_1 préserve la mesure de Lebesgue et $F_1^* v - v$ est exacte, v désignant la 1-forme $r \, d\theta$.

La formule de Stokes montre alors qu'une courbe C de classe C^∞ homotope à $r = \text{Cte}$ doit couper son image par F_1 .

4.8 Remarques : 1. Soit F_1 un plongement de classe C^k de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ homotope au plongement canonique. Si F_1 préserve la mesure de Lebesgue et laisse invariante une courbe C de classe C^1 homotope à $r = \text{Cte}$, alors F_1 est globalement canonique.

2. Soit F_1 un plongement globalement canonique de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ et C une courbe de classe C^1 , homotope à $r = \text{Cte}$ contenue dans $\mathbb{A}_\delta$. Pour $a > 0$ assez grand les anneaux bordés respectivement par C et $\{r = -a\}$ et par $F_1(C)$ et $\{r = -a\}$ ont même aire.

3. Si F_1 est globalement canonique, alors pour tout $\lambda \neq 0$, $L_\lambda \circ F_1$ est un plongement préservant la mesure de Lebesgue, mais n'est pas globalement canonique (L_λ désignant le difféomorphisme $L_\lambda(\theta, r) = (\theta, r + \lambda)$ de $\mathbb{A}$).

4.9 Opérateurs d'extensions.

On fixe jusqu'à la fin du paragraphe un difféomorphisme de classe C^∞ complètement intégrable T_1 de $\mathbb{A}$, vérifiant les conditions de 4.1.

Soient $\delta > 0$, $c > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\text{Pgc}^k(\delta, c)$ l'ensemble des plongements globalement canoniques F de classe C^k de $\mathbb{A}_{2\delta}$ dans $\mathbb{A}$ qui vérifient :

$$\|F - T_1\|_{C^1(\mathbb{A}_{2\delta})} < c.$$

On munit $\text{Pgc}^k(\delta, c)$ de la C^k -topologie.

Proposition : Soit $\delta > 0$. Il existe une constante strictement positive c , dépendant de δ et T_1 , et une application E de $\text{Pgc}^1(\delta, c)$ dans $\text{Diff}^1(\mathbb{A})$ ayant les propriétés suivantes :

- i) pour tout $F \in \text{Pgc}^1(\delta, c)$, $E(F)$ est un difféomorphisme globalement canonique de $\mathbb{A}$ qui coïncide avec F sur $\mathbb{A}_\delta$ et coïncide avec T_1 sur $\mathbb{A} - \mathbb{A}_{3\delta}$;
 ii) pour tout $k \geq 1$, la restriction de E à $\text{Pgc}^k(\delta, c)$ est une application continue de $\text{Pgc}^k(\delta, c)$ dans $\text{Diff}^k(\mathbb{A})$, muni de la C^k -topologie compacte ouverte.

Démonstration : On utilise le formalisme des fonctions génératrices. Ecrivons comme en 4.1 :

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + g(\theta, r), r + \varphi(\theta, r)) = (\theta, R).$$

On suppose $c > 0$ assez petit ; il existe alors des réels a, b , $a < 0 < b$, tels que pour tout $F \in \text{Pgc}^1(\delta, c)$ on ait :

- i) l'application $H(\theta, r) = (\theta, g(\theta, r))$ est un difféomorphisme de $\mathbb{A}_{2\delta}$ sur son image ;
 ii) le compact $K = \mathbb{T}^1 \times [a, b]$ contient $H(\mathbb{A}_\delta)$ en son intérieur, et est contenu dans l'intérieur de $H(\mathbb{A}_{2\delta})$.

Soit $v = \theta - \theta - \alpha_1 = g(\theta, r)$; sur K , on peut écrire :

$$r = h(\theta, v),$$

$$R = h(\theta, v) + \varphi(\theta, h(\theta, v)).$$

Soit w la 1-forme :

$$w = R d\theta - r d\theta = R dv + (R - r) d\theta.$$

Si F est de classe C^k , w est de classe C^k . La 1-forme w est exacte puisque F est globalement canonique ; elle s'écrit donc $w = dS$, S étant une fonction numérique de classe C^{k+1} sur K , qu'on normalise en exigeant $S(0, 0) = 0$.

Rappelons que T_1 est de la forme :

$$T_1(\theta, r) = (\theta + t(r) + \alpha_1, r),$$

On peut choisir $a_1 < a$, $b_1 > b$ tels que $|t(x)| < 3\delta$ pour tout $x \in [a_1, b_1]$.

Soient alors $K_1 = \mathbb{T}^1 \times [a_1, b_1]$, ℓ la primitive de t^{-1} qui s'annule en 0, et χ une fonction numérique positive de classe C^∞ sur $\mathbb{A}$ qui vérifie :

$$\begin{aligned}\chi(x) &= 0 && \text{pour } x \notin K_1 ; \\ \chi(x) &= 1 && \text{pour } x \in K_1 .\end{aligned}$$

Définissons la fonction numérique $\tilde{S}$ sur $\mathbb{A}$ par :

$$\tilde{S} - \ell = \chi(S - \ell).$$

L'application $S \rightarrow \tilde{S}$ de $C^{k+1}(K)$ dans $C^{k+1}(\mathbb{A})$ est alors continue pour la C^{k+1} -topologie, et on a :

$$(\tilde{S} - \ell)(x) = 0 \quad \text{si } x \notin K_1 .$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit :

$$Y_\varepsilon^{k+1} = \{ \tilde{S} \in C^{k+1}(\mathbb{A}) \mid (\tilde{S} - \ell)(x) = 0 \text{ pour } x \notin K_1 \text{ et } \|\tilde{S} - \ell\|_{C^2(\mathbb{A})} < \varepsilon \}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, si c est assez petit et $F \in \text{Pgc}^k(\delta, c)$, l'application $\tilde{S}$ construite ci-dessus appartient à Y_ε^{k+1} .

Considérons, pour $\tilde{S} \in Y_\varepsilon^{k+1}$, le système :

$$\left\{ \begin{aligned} v &= E(\theta) - \theta - \alpha_1 , \\ E(R)(\theta, v) &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v}(\theta, v) \\ (E(R) - r)(\theta, v) &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}(\theta, v) . \end{aligned} \right.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$), on peut résoudre ce système en exprimant $E(\theta)$, $E(R)$ en fonctions de (θ, r) .

Pour $c > 0$ assez petit, $F \in \text{Pgc}^k(\delta, c)$, la fonction $\tilde{S}$ appartient à $Y_{\varepsilon_0}^{k+1}$ et on définit $E(F)$ par :

$$E(F)(\theta, r) = (E(\theta)(\theta, r), E(R)(\theta, r)).$$

Il est facile de voir que l'application $E \rightarrow E(F)$ vérifie les propriétés de la propo-

sition .

4.10 Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on note E_1 l'application définie ci-dessus qui à $\tilde{S} \in Y_\varepsilon^{k+1}$ associe la restriction $E(f)|_{\mathbb{A}_{3\delta}} \in C^k(\mathbb{A}_{3\delta}, \mathbb{A})$. L'ensemble Y_ε^{k+1} étant muni de la C^{k+1} -topologie, E_1 est un homéomorphisme de Y_ε^{k+1} sur son image. Celle-ci est donc localement connexe pour la C^k -topologie.

Proposition : L'ensemble Y_ε^∞ est dense dans Y_ε^{k+1} pour la C^{k+1} -topologie.

Démonstration : Pour $k \geq 0$, on définit :

$$C_{K_1}^k(\mathbb{A}) = \{\varphi \in C^k(\mathbb{A}) \mid \text{Support}(\varphi) \subset K_1\}$$

Il suffit de montrer que $C_{K_1}^\infty(\mathbb{A})$ est dense dans $C_{K_1}^k(\mathbb{A})$, muni de la C^k -topologie.

Soit $\varphi \in C_{K_1}^k(\mathbb{A})$. Pour $1 > t > 0$, définissons :

$$\chi_t(r) = (\theta, (1-t)r + t \frac{a_1 + b_1}{2}) .$$

Comme $\varphi \circ \chi_t$ converge vers φ dans la C^k -topologie lorsque t tend vers 0, il suffit d'approcher $\varphi \circ \chi_t$, pour $t > 0$ fixé, par des fonctions $\psi \in C_{K_1}^\infty(\mathbb{A})$.

Fixons donc $0 < t < 1$. Le support de $\varphi_1 = \varphi \circ \chi_t$ est contenu dans

$$K'_1 = \mathbb{T}^1 \times [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon] , \text{ avec } \varepsilon = t \frac{b_1 - a_1}{2} > 0 .$$

Soit χ une fonction numérique de classe C^∞ sur $\mathbb{A}$ qui s'annule hors de K_1 et prend la valeur 1 sur K'_1 . Par le théorème d'approximation de Weierstrass $[N_1]$, il existe une suite $(\psi_i)_{i \geq 0}$ de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{A})$ qui converge vers φ_1 dans la C^k -topologie. La suite de fonctions $(\chi\psi_i)_{i \geq 0}$ converge aussi vers φ_1 dans la C^k -topologie (par la formule de Leibnitz), et ses éléments appartiennent à $C_{K_1}^\infty(\mathbb{A})$. ■

Corollaire : L'ensemble $E_1(Y_\varepsilon^\infty)$ est dense dans $E_1(Y_\varepsilon^{k+1})$ pour la C^k -topologie.

Remarques : 1. Si $c > 0$ est assez petit dans 4.9 et $F \in \text{Pgc}(\delta, c)$, $E(F)$ dévie la

verticale. Par la théorie de Birkhoff [I.3-et 4], toute courbe C de classe C^0 , homotope à $r = \text{Cte}$, contenue dans $\mathbb{A}_\delta$ et invariante par F est le graphe d'une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{T}^1$.

2. Soit $Y_\varepsilon^{3+\text{Lip}}$ la partie de Y_ε^3 constituée des $\varphi \in Y_\varepsilon^3$ telles que $D^3\varphi$ soit une application lipschitzienne. Soit $\varphi \in Y_\varepsilon^{3+\text{Lip}}$. En utilisant des partitions de l'unité et des opérateurs d'approximation, on peut montrer que φ est limite dans la C^3 -topologie d'une suite de fonctions $(\varphi_i)_{i \geq 0}$ de Y_ε^∞ qui vérifient :

$$\sup_i \|D^4\varphi_i\|_{C^0} \leq c_1 \|D^4\varphi\|_{L^\infty}.$$

De plus E_1 envoie $Y_\varepsilon^{3+\text{Lip}}$ dans $C^{2+\text{Lip}}(\mathbb{A}_{3\delta}, \mathbb{A})$, car la primitive d'une forme exacte de classe $C^{2+\text{Lip}}$ est de classe $C^{3+\text{Lip}}$, et le théorème des fonctions implicites est valable en classe $C^{2+\text{Lip}}$. Ainsi définie, E_1 est continue pour la C^2 -topologie dans $C^{2+\text{Lip}}(\mathbb{A}_{3\delta}, \mathbb{A})$ et envoie les parties bornées pour la topologie $C^{3+\text{Lip}}$ dans des parties bornées pour la topologie $C^{2+\text{Lip}}$.

On a même mieux : si $\tilde{S}$ tend vers ℓ dans la topologie $C^{3+\text{Lip}}$, $E(\tilde{S})$ tend vers T_1 dans la topologie $C^{2+\text{Lip}}$.

4.11 Soit $\delta > 0$. On dit qu'une partie P_δ de $C^3(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{A})$ possède la propriété LC au voisinage de T_1 si les conditions suivantes sont vérifiées :

- a) $T_1 \in P_\delta$.
- b) Tout $F \in P_\delta$ est plongement de classe C^3 de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ ayant la propriété d'intersection.
- c) $P_\delta \cap C^\infty(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{A})$ est dense dans P_δ pour la C^3 -topologie induite sur P_δ .
- d) Il existe un système fondamental de voisinages ouverts $(V_i)_{i \geq 0}$ de T_1 pour la C^3 -topologie, tel que les ensembles $V_i \cap P_\delta \cap C^\infty(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{A})$ soient connexes pour la C^∞ -topologie induite.

4.12 Exemple : Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, soit Y_ε^4 l'ensemble convexe défini dans la démonstration de 4.9. On a associé à $\tilde{S} \in Y_\varepsilon^4$ un difféomorphisme globalement canonique de classe C^3 de $\mathbb{A}$, noté $E(\tilde{S})$, qui vérifie :

$$E(\tilde{S})(\theta, r) = T_1(\theta, r) \quad \text{pour } |r| \geq 3\delta .$$

Proposition : L'ensemble $P_{3\delta} = E(Y_{\mathcal{C}}^4)$ a la propriété LC au voisinage de T_1 .

Démonstration : Il est clair que la condition a) est vérifiée. La condition b) résulte de 4.7. Comme $P_{3\delta} \cap C^{\infty}(\mathbb{A}_{3\delta}, \mathbb{A}) = E(Y_{\mathcal{C}}^{\infty})$, la condition c) résulte de 4.10. La condition d) résulte de ce que $Y_{\mathcal{C}}^{\infty}$, muni de la C^{∞} -topologie est localement connexe et que E est un homéomorphisme de $Y_{\mathcal{C}}^{\infty}$ sur $E(Y_{\mathcal{C}}^{\infty})$, les deux ensembles étant munis de la C^{∞} -topologie. ■

Le lecteur peut aussi se rapporter à l'article de Zehnder [Z] .

§ 5. THÉORÈMES DE RÉGULARITÉ.

5.1 Soit $\delta > 0$, et F une application de classe C^∞ de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r)).$$

On suppose que $\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{A}_\delta)}$ est assez petit (par exemple $< 1/8$) pour assurer que F soit un plongement.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; on suppose que F laisse invariant le graphe d'une fonction $\psi \in C^k(\mathbb{T}^1)$ telle que $\|\psi\|_{C^0} \leq \delta/2$. Posons alors

$H_1(\theta, r) = (\theta, r - \psi(\theta))$. On a :

$$H_1 \circ F \circ H_1^{-1}(\theta, r) = (\theta + \alpha + \psi(\theta) + r, r + \varphi_1(\theta, r)),$$

et $F_1 = H_1 \circ F \circ H_1^{-1}$ laisse invariant $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$; la restriction de F_1 à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ est l'image par la projection canonique de $f = \text{Id} + \alpha + \psi \in D^k(\mathbb{T}^1)$.

Le nombre de rotation de f est, par définition, celui de C .

Supposons de plus que $\rho(f) = \alpha_1 \in \mathbb{R}$ satisfait à une condition diophantienne : il existe $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ tels que, pour tout rationnel p/q ,
 $|\alpha_1 - (p/q)| \geq \gamma q^{-2-\beta}$.

Par un théorème de J. C. Yoccoz [Y_1] (voir aussi [Y_2]), qui généralise le théorème fondamental de [H, IX], il existe un entier k_0 ne dépendant que de β tel que si $f \in D^k(\mathbb{T}^1)$, $k \geq k_0$, et $\rho(f) = \alpha_1$, alors $f = h \circ R_{\alpha_1} \circ h^{-1}$ avec $h \in D^{k-1-\beta-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Dans les paragraphes suivants, nous utiliserons ce résultat dans le cas particulier où le nombre α_1 est de type constant : ce résultat résulte alors du théorème fondamental de [H, IX] (voir aussi [Y_2]). (Rappelons que tout nombre de type constant satisfait à la condition A et que tout nombre satisfaisant à la condition A vérifie une condition diophantienne).

$$\text{Soient } H_2(\theta, r) = (h^{-1}(\theta), (Dh^{-1}(\theta))^{-1}r) \text{ et } F_2 = H_2 \circ F_1 \circ H_2^{-1}.$$

On a :

$$F_2(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + b(\theta, r)r, r c(\theta) + O(r^2))$$

où b, c sont des fonctions numériques de classe $C^{k-2-\beta-\varepsilon}$, vérifiant $b(\theta, 0) > 0$,
 $c(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$.

5.2 Soit F comme dans 5.1 ; supposons de plus que F possède la propriété d'intersection. La proposition suivante est démontrée dans le travail de R. Douady [D] .

Proposition : Soit ℓ un entier ≥ 2 . Si l'ordre de différentiabilité k de F est au moins égal à un entier k_ℓ qui ne dépend que de β et ℓ , il existe un difféomorphisme G_ℓ de $\mathbb{A}$, un réel $\delta_\ell > 0$ possédant les propriétés suivantes.

i) $G_\ell \circ H_2^{-1}$ est de classe C^ℓ et laisse invariant $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$.

ii) $G_\ell \circ F \circ G_\ell^{-1}$ est de classe C^ℓ sur $\mathbb{A}_{\delta_\ell}$ et s'écrit :

$$G_\ell \circ F \circ G_\ell^{-1} = (\theta + \alpha_1 + r, r + r^\ell \varphi_\ell(\theta, r)) ,$$

φ_ℓ étant une fonction numérique de classe C^ℓ sur $\mathbb{A}_{2\delta_\ell}$.

iii) lorsque $k = +\infty$, G_ℓ et φ_ℓ sont de classe C^∞ .

Remarque : Lorsque F préserve la mesure de Lebesgue, à condition de remplacer $\theta + r + \alpha_1$ par $\theta + \alpha_1 + b_1 r + \dots + r^\ell \tilde{\varphi}_\ell(\theta, r)$, où $\tilde{\varphi}_\ell$ est de classe C^ℓ , Birkhoff([B]) montre qu'on peut imposer à G_ℓ de préserver la mesure de Lebesgue.

5.3 Rappelons le théorème de la courbe translatée, tel que nous l'avons démontré dans [BO] et [BH] ; on peut aussi utiliser [R₁] .

Théorème : Soit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ un nombre satisfaisant à une condition diophantienne (d'exposant β). Il existe un entier ℓ_0 , dépendant seulement de β , et deux constantes strictement positives c_1, c_2 qui possèdent la propriété suivante :
soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{A})$ vérifiant $\|\varphi\|_{\ell_0(\mathbb{A})} \leq c_1$; définissons

$F(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + \varphi(\theta, r))$, $(\theta, r) \in \mathbb{R}$; alors il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

- i) le graphe C de ψ est invariant par $L_{-\lambda} \circ F$, où $L_{-\lambda}(\theta, r) = (\theta, r + \lambda)$;
- ii) le difféomorphisme $f = \text{Id} + \psi + \alpha_1 \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ est C^∞ conjugué à R_{α_1} (en particulier le nombre de rotation de la courbe translatée C est α_1).

De plus, l'application $F \rightarrow (\psi, \lambda)$ est continue pour la C^∞ -topologie et on a :

$$\|\psi\|_{C^2} + |\lambda| \leq c_2 \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R})}.$$

5.4 Unicité des courbes translatées.

Soit F comme en 5.1. On suppose qu'il existe deux fonctions numériques $\psi_1, \psi_2 \in C^0(\mathbb{T}^1)$, de graphe C_1, C_2 , et deux réels λ_1, λ_2 qui vérifient :

- a) $\|\psi_i\|_{C^0} > \delta/2$, $|\lambda_i| < \delta/2$ pour $i = 1, 2$;
- b) $L_{-\lambda_i} \circ F(C_i) = C_i$ pour $i = 1, 2$;
- c) $\psi_1 \in C^1(\mathbb{T}^1)$ et $D\psi_1$ est à variation bornée ;
- d) $\rho(f_1) = \rho(f_2) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, où $f_i = \text{Id} + \alpha_1 + \psi_i \in D^0(\mathbb{T}^1)$.

Alors, on a $\psi_1 = \psi_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Remarquons que si $\psi_1 \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$, alors ψ_1 vérifie la condition c).

Rappelons rapidement la démonstration de [IV. 5.10] :

par [H, III, 4.1.5], $\psi_1 - \psi_2$ s'annule en au moins un point, donc $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$; on doit donc avoir $\lambda_1 = \lambda_2$; comme $f_1 \in D^{1+vb}(\mathbb{T}^1)$, le théorème de Denjoy [H, VI] implique que les orbites de $L_{-\lambda_1} \circ F$ sur C_1 sont denses dans C_1 ; mais alors $\lambda_1 = \lambda_2$ et $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ impliquent que $C_1 = C_2$.

5.5 On fixe $\delta > 0$ et un nombre réel α_1 satisfaisant à une condition diophantienne.

Soit W_δ l'ensemble des applications F de classe C^∞ de $\mathbb{R}_\delta$ dans

$\mathbb{A}$ qui ont la propriété d'intersection et sont de la forme

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha + r, r + \varphi(\theta, r)) \text{ , avec } \|\varphi\|_{C^1} < \frac{1}{8} .$$

On note V_{δ, α_1} l'ensemble des $F \in W_{\delta}$ pour lesquels il existe une fonction $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{T}^1)$, $\|\psi\|_{C^0} < \delta/2$ telle que le graphe C de ψ soit une courbe invariante par F de nombre de rotation α_1 .

On munit W_{δ} de la C^{∞} -topologie induite de $C^{\infty}(\mathbb{A}_{\delta}, \mathbb{A})$.

Proposition : L'ensemble V_{δ, α_1} est ouvert dans W_{δ} ; l'application $F \in V_{\delta, \alpha_1}$
 $F \in V_{\delta, \alpha_1} \rightarrow \psi \in C^{\infty}(\mathbb{T}^1)$ est bien définie (par 5.4) et continue, lorsqu'on
munit V_{δ, α_1} et $C^{\infty}(\mathbb{T}^1)$ de la C^{∞} -topologie.

Démonstration : Nous allons montrer que V_{δ, α_1} est un voisinage de chacun de ses points.

Soient ℓ_0 l'entier donné par 5.3, et ℓ un entier au moins égal à $\ell_0 + 2$; à tout $F \in V_{\delta, \alpha_1}$, on peut associer un difféomorphisme de classe C^{∞} de $\mathbb{A}$ qui vérifie les conclusions de la proposition 5.2 ; on a donc :

$$G_{\ell} \circ F \circ G_{\ell}^{-1}(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + r^{\ell} \varphi_{\ell}(\theta, r)) .$$

Soit χ une fonction numérique positive de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+$, qui vaut 1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et 0 sur $[1, +\infty)$.

Pour $0 < \varepsilon < \delta_{\ell}$ (δ_{ℓ} étant défini en 5.2), posons :

$$\overline{F}_{\varepsilon}(\theta, r) = (\theta + r + \alpha_1, r + \chi(\frac{|r|}{\varepsilon}) r^{\ell} \varphi_{\ell}(\theta, r))$$

Alors $\overline{F}_{\varepsilon}$ et F coïncident sur $\mathbb{A}_{\varepsilon/2} \subset \mathbb{A}_{\delta_{\ell}/2}$. De plus, en définissant φ_{ε} par

$$\varphi_{\varepsilon}(\theta, r) = \chi(\frac{|r|}{\varepsilon}) r^{\ell} \varphi_{\ell}(\theta, r) , \text{ il existe une constante } c > 0 \text{ ne dépendant que de}$$

φ_{ℓ} et χ telle que :

$$\|\varphi_{\varepsilon}\|_{C^0} \leq \varepsilon^2 c .$$

Soit alors $F_1 \in W_\delta$ assez voisin de F dans la C^∞ -topologie. Posons :

$$F_2(\theta, r) = G_\ell \circ F_1 \circ G_\ell^{-1}(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r + \varphi_1(\theta, r), r + \varphi_2(\theta, r)),$$

$$G(\theta, r) = (\theta, r + \varphi_1(\theta, r)),$$

$$F_3(\theta, r) = G \circ F_2 \circ G^{-1}(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + \varphi_3(\theta, r)).$$

Si F_1 est assez voisin de F , G définit un plongement de $\mathbb{A}_{(3/2)\delta_\ell}$ dans $\mathbb{A}$ dont l'image contient $\mathbb{A}_{\delta_\ell}$.

De plus on peut supposer que F_1 est défini sur $\mathbb{A}_{(3/2)\delta_\ell}$ et F_3 sur $\mathbb{A}_{\delta_\ell}$.

Définissons $T(\theta, r) = (\theta + r + \alpha_1, r)$ et, pour $0 < \varepsilon < \delta_\ell$:

$$(\bar{F}_1)_\varepsilon(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r + \chi\left(\frac{|r|}{\varepsilon}\right) \varphi_\varepsilon(\theta, r))$$

Si F_1 est assez proche de F dans la C^ℓ -topologie, on aura :

$$\begin{aligned} \|(\bar{F}_1)_\varepsilon - T\|_{C^{\ell_0}(\mathbb{A})} &\leq \|\bar{F}_\varepsilon - T\|_{C^{\ell_0}(\mathbb{A})} + \|(\bar{F}_1)_\varepsilon - \bar{F}_\varepsilon\|_{C^{\ell_0}(\mathbb{A})} \\ &\leq 2\varepsilon^2 c. \end{aligned}$$

Soient c_1, c_2 les constantes données par le théorème 5.3. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir $2\varepsilon^2 c < c_1$ et $\varepsilon c c_2 < 1/8$. Par le théorème 5.3, il existe alors $\bar{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, de graphe $\bar{C}_1$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tels que :

- i) $L_{-\lambda_1} \circ (\bar{F}_1)_\varepsilon(\bar{C}_1) = \bar{C}_1$
- ii) le nombre de rotation de $\bar{C}_1$ est α_1 .
- iii) $\|\bar{\psi}_1\|_{C^2} + |\lambda_1| \leq (2\varepsilon^2 c) c_2 \leq \varepsilon/4$.

Or $(\bar{F}_1)$ et F_3 coïncident sur $\mathbb{A}_{\varepsilon/2}$, et F_3 a la propriété d'intersection sur $\mathbb{A}_{(3/2)\delta_\ell}$; donc $\bar{C}_1$ est une courbe invariante de F_3 ; l'application qui associe $\bar{\psi}_1$ à F_1 est définie au voisinage de F et est continue pour la C^∞ -topologie.

Si ε est assez petit, le changement de variable inverse de celui qui a fait passer de F_1 à F_3 donne une courbe C_1 invariante par F_1 , de nombre de

rotation α_1 , qui est le graphe d'une fonction $\psi_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\|\psi_1\|_{C^0} < \delta/2$; de plus, lorsque F_1 tend vers F dans la C^∞ -topologie, ψ_1 converge dans la C^∞ -topologie vers la fonction ψ dont le graphe est la courbe invariante par F , de nombre de rotation α_1 . ■

5.6 Soit $F \in W_\delta$; on suppose qu'il existe un entier $k \geq 1$ et une fonction $\psi \in C^k(\mathbb{T}^1)$, $\|\psi\|_{C^0} < \delta/2$, tels que le graphe C de ψ soit une courbe invariante par F dont le nombre de rotation α_1 vérifie une condition diophantienne (d'exposant β).

Théorème : Il existe un entier $\ell_1 \geq 2$ ne dépendant que de β tel que si F , ψ, k sont comme ci-dessus et $k \geq \ell_1$, alors la fonction ψ est de classe C^∞ .

Démonstration : Soit ℓ_0 l'entier défini en 5.3, $\ell = \ell_0 + 2$, et $k_\ell = \ell_1$ l'entier associé à ℓ par la proposition 5.2.

On associe au plongement F , comme en 5.5, un changement de variables G_ℓ et une application $\overline{F}_\varepsilon$, pour $0 < \varepsilon < \delta_\ell$; celle-ci est de la forme :

$$\overline{F}_\varepsilon(\theta, r) = (\theta + r + \alpha_1, r + \varphi_\varepsilon(\theta, r)),$$

avec

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{C^{\ell_0}(\mathbb{R})} \leq \varepsilon^2 c,$$

c étant une constante ne dépendant que de F et de la fonction auxiliaire χ .

Soit $(H_i)_{i \geq 4}$ une suite de difféomorphismes de classe C^∞ de $\mathbb{A}$ qui converge vers G_ℓ dans la C^ℓ -topologie compacte ouverte. Pour tout $i \geq 4$, $0 < \varepsilon < \delta_\ell$, on peut construire à partir de $F_i = H_i \circ F \circ H_i^{-1}$ une application $(\overline{F}_i)_\varepsilon$ par le même procédé qui a servi en 5.5 à construire $(\overline{F}_1)_\varepsilon$ à partir de F_2 .

Pour ε fixé, et i assez grand, les propriétés suivantes ont lieu :

- i) F_i est défini sur $\mathbb{A}_{(3/2)\delta_\ell}$ et $(\overline{F}_i)_\varepsilon$ est définie sur $\mathbb{A}$;
- ii) $\|(\overline{F}_i)_\varepsilon - T\|_{C^{\ell_0}(\mathbb{R})} \leq 2\varepsilon^2 c$;

où $T(\theta, r) = (\theta + \alpha_1 + r, r)$;

iii) $(\overline{F}_i)_\varepsilon$ a la propriété d'intersection sur $\mathbb{P}_{\varepsilon/2}$.

Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, et i assez grand, le même raisonnement qu'en 5.5 montre que $(\overline{F}_i)_\varepsilon$ possède une courbe invariante $C_{i,\varepsilon}$ de nombre de rotation α_1 qui est le graphe d'une fonction $\psi_{i,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifiant

$$\|\psi_{i,\varepsilon}\|_{C^2} < \frac{\varepsilon}{4} .$$

(Le fait que $\psi_{i,\varepsilon}$ soit de classe C^∞ résulte de ce que $(\overline{F}_i)_\varepsilon$ l'est aussi).

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, puis i assez grand, on voit que $C_{i,\varepsilon}$ est aussi invariante par F_i . Comme $F = H_i^{-1} \circ F \circ H_i$, on en déduit que F laisse invariante une courbe $\overline{C}$ de classe C^∞ dont le nombre de rotation est α_1 ; de plus $\overline{C}$ est proche dans la C^2 -topologie de C si ε est petit, donc est un graphe ; le résultat d'unicité démontré en 5.4 permet de conclure que $C = \overline{C}$. ■

Remarque : La proposition ci-dessus est l'analogue des proposition de régularité sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes de $\mathbb{T}^n$ démontrées dans [H.XI 6.3] et [HD] .

§ 6. INÉGALITÉS A PRIORI CONDITIONNELLES.

6.1 Dans ce paragraphe, on se place dans la situation suivante : on se donne $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, α un nombre de type constant dont on notera γ la constante de Markoff, et F un plongement de classe C^∞ de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r)).$$

On suppose que $\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{A}_\delta)} \leq \varepsilon_1$ et que F possède la propriété d'intersection sur $\mathbb{A}_\delta$.

On suppose enfin que F laisse invariant le graphe C d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, vérifiant $\|\psi\|_{C^0} \leq \delta/2$, et que le nombre de rotation de C est α .

6.2 Posons $f = \text{Id} + \psi + \alpha \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$, et $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$.

Par 4.6, ψ est solution du système :

$$(+) \quad \begin{cases} \psi \circ f - \psi = \varphi \circ G \\ \rho(f) = \alpha \end{cases}$$

Par [H,II] la fonction ψ s'annule au moins en un point. Par le théorème fondamental de [H,IX], on peut écrire $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, avec $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$, $h(0) = 0$.

6.3 Il existe une fonction universelle croissante ℓ , définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs > 1 , telle que :

$$\sup(\|Df\|_{C^0}, \|Df^{-1}\|_{C^0}) \leq \ell(\|\varphi\|_{C^1}).$$

Ceci résulte de [I.2.3] car F dévie la verticale.

6.4 Proposition : Dans la situation de 6.1, posons :

$$a = 2\|\varphi\|_{C^1} \ell(\|\varphi\|_{C^1}).$$

On a alors :

$$\text{Sup} (\| \psi \|_{C^0} , \| D\psi \|_{C^0}) \leq \frac{a}{2} + (a + \frac{a^2}{4})^{1/2} .$$

Remarque : Lorsque a tend vers 0, on a :

$$\frac{a}{2} + (a + \frac{a^2}{4})^{1/2} = O(a^{1/2}) .$$

Démonstration : L'équation (+) donne :

$$\psi - \psi \circ f^{-1} = \varphi(f^{-1}, \psi \circ f^{-1}), \text{ soit encore :}$$

$$\frac{f + f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi(f^{-1}, \psi \circ f^{-1}) .$$

Par 6.3, on a :

$$\| D(\varphi(f^{-1}, \psi \circ f^{-1})) \|_{C^0} \leq 2 \| \varphi \|_{C^1} \wedge (\| \varphi \|_{C^1}) = a .$$

Posons $M = \text{Sup} (\| Df \|_{C^0} , \| Df^{-1} \|_{C^0})$. Le même raisonnement qu'en [II.2.4] montre que :

$$M + \frac{1}{M} \leq 1 + \frac{a}{2} ,$$

et l'inégalité de la proposition pour $\| D\psi \|_{C^0}$ en résulte comme en [II.2.4].

Comme la fonction ψ s'annule en au moins un point, on a

$$\| \psi \|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \| D\psi \|_{C^0} . \quad \blacksquare$$

6.5 On dérive plusieurs fois l'équation (+), en utilisant les conventions d'écriture indiquées à la fin du § 1.

On a donc :

- ① $D\psi \circ f \cdot Df - D\psi = \varphi_\theta \circ G + (\varphi_x \circ G) D\psi ;$
- ② $D^2\psi \circ f (Df)^2 - a_2 D^2\psi = B_2 ,$

où on a posé :

$$a_2 = 1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G ,$$

$$B_2 = \varphi_{\theta\theta}' \circ G + 2 \varphi_{\theta r} \circ G D\psi + \varphi_{rr} \circ G(D\psi)^2 .$$

$$(3) \quad D^3\psi \circ f (Df)^3 - a_2 D^3\psi + 3 D^2\psi \circ f D^2\psi Df = B ,$$

où on a posé :

$$B = \varphi_{\theta\theta\theta} \circ G + 3 \varphi_{\theta\theta r} \circ G D\psi + 3 \varphi_{\theta rr} \circ G(D\psi)^2 + \\ + \varphi_{rrr} \circ G(D\psi)^3 + 3 \varphi_{r\theta} \circ G D^2\psi + 3 \varphi_{rr} \circ G D\psi D^2\psi .$$

Pour $i, j \geq 0$, posons $X_i = D^i\psi$, $V = Df = 1 + X_1$, $Y_i = (D^i\psi) \circ f$,

$$Z_{i,j} = \left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial \theta^i \partial r^j} \varphi \right) \circ G . \text{ On a alors } DV = X_2 ,$$

$$DX_i = X_{i+1} , \quad DY_i = Y_{i+1} V , \quad DZ_{i,j} = Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} X_1 .$$

Posons aussi, pour $k \geq 2$:

$$A_k = (D^k\psi \circ f) (Df)^k - a_2 D^k\psi = Y_k V^k - X_k (1 - Y_1 + Z_{0,1})$$

On a donc :

$$DA_k = Y_{k+1} V^{k+1} + k Y_k V^{k-1} X_2 - X_{k+1} a_2 - X_k (Z_{1,1} + Z_{0,2} X_1 - Y_2 V) \\ = A_{k+1} + k Y_k X_2 V^{k-1} - X_k (Z_{1,1} + Z_{0,2} X_1 - Y_2 V) .$$

La formule (3) peut s'écrire :

$$A_3 = \left(\sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} Z_{3-i,i} X_1^i \right) + 3 Z_{1,1} X_2 + 3 Z_{0,2} X_1 X_2 - 3 V X_2 Y_2 ,$$

c'est à dire que A_3 est un polynôme en les variables $V, X_i, Y_j, Z_{\ell,m}$ pour $i = 1, 2$, $j = 2, 2 \leq \ell + m \leq 3$.

En utilisant les formules de dérivation ci-dessus, on voit que pour $k \geq 3$, A_k est un polynôme P_k en les variables $X_i, Y_j, Z_{\ell,m}$ pour $1 \leq i \leq k-1$, $2 \leq j \leq k-1$, $2 \leq \ell + m \leq k$, et on a la formule de récurrence :

$$P_{k+1} = x_k (z_{1,1} + z_{0,2} x_1 - y_2 v) - k y_k x_2 v^{k-1} + \sum \frac{\partial P_k}{\partial x_i} x_{i+1} + \\ + \sum \frac{\partial P_k}{\partial y_j} (y_{j+1} v) + \sum \frac{\partial P_k}{\partial z_{\ell,m}} (z_{\ell+1,m} + z_{\ell,m+1} x_1) .$$

Cette formule de récurrence et l'expression de A_3 permettent de voir que :

(a) $A_4 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = E$, avec

$$E_1 = 4 e x_3 - 6 y_3 v^2 x_2 , \quad \text{où } e = z_{1,1} + z_{0,2} x_1 - y_2 v ,$$

$$E_2 = - 3 y_2 x_2^2$$

$$E_3 = 3 z_{0,2} x_2^2$$

$$E_4 = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} z_{4-i,i} x_1^i$$

$$E_5 = 6 z_{2,1} x_2 + 12 z_{1,2} x_2 x_1 + 6 z_{0,3} x_2 x_1^2 ;$$

(b) Le polynôme A_k est de degré 1 par rapport à x_{k-1} , et est homogène de degré 1 par rapport à l'ensemble des variables $y_j, z_{\ell,m}$. Le polynôme formé par les monômes de A_k contenant x_{k-1} est :

$$k e x_{k-1} = k x_{k-1} (z_{1,1} + z_{0,2} v - y_2 v) .$$

Le seul monôme contenant y_{k-1} est :

$$- \frac{k(k-1)}{2} y_{k-1} x_2 v^{k-2} .$$

Les coefficients des monômes de A_k sont entiers positifs ou négatifs suivant que le monôme contient ou non une variable $z_{\ell,m}$.

Un monôme de A_k contenant la variable $z_{\ell,m}$ ($2 \leq \ell + m \leq k$) mais pas la variable x_{k-1} est de la forme :

$$n z_{\ell,m} x_1^{p_1} \dots x_{k-2}^{p_{k-2}}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $\sum p_i = m$, $\sum i p_i = k - \ell$; ceci implique que $p_{k-2} \leq 1$ pour $k \geq 5$.

Un monôme de A_k contenant la variable y_j ($2 \leq j \leq k-1$), est de la forme :

$$-n y_j v^{p'_1} x_2^{p'_2} \dots x_{k-1}^{p'_{k-1}},$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $p'_i \in \mathbb{N}$, $\sum p'_i = j$, $\sum i p'_i = k$.

(c) Le polynôme DA_{k-1} a les mêmes propriétés que A_k , à ceci près que les termes en x_{k-1} sont :

$$(k-1) e x_{k-1} = (k-1) x_{k-1} (z_{1,1} + z_{0,2} v - y_2 v),$$

et le terme en y_{k-1} est :

$$- \frac{(k-1)(k-2)}{2} y_{k-1} x_2 v^{k-2}.$$

6.6 Rappelons que dans la situation de 6.1, F a la propriété d'intersection et f s'écrit $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ avec $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$, $h(0) = 0$.

Lemme : On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{Log } Df \circ h \, d\theta &= 0; \\ \int_0^1 \text{Log}(1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G) \circ h \, d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration : Comme $\text{Log } Df \circ h = \text{Log } Dh \circ R_\alpha - \text{Log } Dh$, la première intégrale est nulle.

Posons $H(\theta, r) = (\theta, r + \psi(\theta))$; alors $F_1 = H^{-1} \circ F \circ H$ laisse un invariant $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$; la matrice de DF_1 en un point $\theta, 0$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} Df(\theta) & * \\ 0 & 1 - D\psi(f(\theta)) + \varphi_r \circ G(\theta) \end{pmatrix}$$

Si la seconde intégrale n'était pas nulle, le cercle invariant $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ serait normalement hyperbolique pour F_1 , contredisant la propriété d'intersection. ■

6.7 Inégalité a priori conditionnelle.

Théorème : Soient $p, p_1 \in]1, \frac{3}{2}[$, $s \in]0, \frac{1}{2}[$. Il existe une constante universelle c , et une constante c_s dépendant de façon croissante de s, p et p_1 telles que les inégalités :

$$\|D^2 f\|_{L^{p_1}} \leq c_s \gamma, \quad ,$$

$$\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} \leq c_s \gamma,$$

impliquent les estimations

$$\|D^2 f\|_{L^{2-s}} \leq c(\|D^3 \varphi \circ G\|_{L^p}^{1/2} + \|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)}) ,$$

$$\|D^2 f\|_{L^{2-s}} \leq \frac{c}{\gamma} \|\varphi\|_{C^3(\mathbb{A}_\delta)} ,$$

où on note

$$\|(D^3 \varphi) \circ G\|_{L^p} = \sup_{0 \leq i \leq 3} \|Z_{i,3-i}\|_{L^p} .$$

Démonstration : De (3) , on tire :

$$(3') \quad D^3 \psi \circ f - a D^3 \psi + 3 D^2 \psi \circ f D^2 \psi (Df)^{-2} = B(Df)^{-3} ,$$

avec $a = a_2 (Df)^{-3}$.

Par 6.6 et 3.10, on peut écrire $a = \frac{b}{b \circ f}$, b étant une fonction de classe C^∞ à valeurs strictement positives.

Pour $c_s < \frac{1}{2}$, on a, par 2.9 , $\|Df - 1\|_O \leq \frac{1}{2}$; de plus, lorsque c_s est petit $\|Da\|_{L^{p_1}}$ l'est aussi.

Soit $1 < p < 2-s$; définissons p', q, q', r par :

$$q = \frac{2}{2-s} \quad , \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{2-s} + \frac{1}{r} = 1 .$$

En appliquant 3.12, on obtient alors, lorsque c_s est assez petit :

$$(*) \quad \begin{cases} \| Dh^{-1} \cdot (b \circ f) \|_{L^{p'}} \leq 2 \quad (\Rightarrow \| Dh^{-1} (b \circ f) \|_{L^r} \leq 2) \\ \| (Dh^{-1} \cdot b)^{-1/q} \|_{L^{q'}} \leq 2^{1/q} . \end{cases}$$

On multiplie (3') par $b \circ f$, on compose alors à droite par h et on intègre sur $\mathbb{T}^1$, l'équation obtenue ; cela donne :

$$3 \int_0^1 (b \circ f \, D^2 \psi \circ f \, D^2 \psi (Df)^{-2}) \circ h \, d\theta = \int_0^1 (b \circ f \, B(Df)^{-3}) \circ h \, d\theta .$$

De l'équation (2), on tire :

$$D^2 \psi \circ f = a D^2 \psi \, Df + B_2(Df)^{-2} .$$

On a donc :

$$(**) \quad 3 \int_0^1 [b(D^2 \psi)^2 (Df)^{-1}] \circ h \, d\theta = \int_0^1 (b \circ f \, B(Df)^{-3}) \circ h \, d\theta - \\ - 3 \int_0^1 (b \circ f \, B_2(Df)^{-4} D^2 \psi) \circ h \, d\theta .$$

Montrons que le membre de gauche de l'égalité (**) est $\geq \| D^2 \psi \|_{L^{2-s}}^2$. En effet

$(Df)^{-1} \geq \frac{2}{3}$, donc ce membre est supérieur à :

$$2 \int_0^1 b(D^2 \psi)^2 \, Dh^{-1} \, d\theta ,$$

et l'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |D^2 \psi|^{2-s} \, d\theta &\leq \left(\int_0^1 (D^2 \psi)^2 b \cdot Dh^{-1} \, d\theta \right)^{1/q} \| (b \, Dh^{-1})^{-\frac{1}{q}} \|_{L^{q'}} \\ &\leq 2^{1/q} \left(\int_0^1 (D^2 \psi)^2 b \, Dh^{-1} \, d\theta \right)^{1/q} \quad \text{par } (*) \end{aligned}$$

d'où on tire l'estimation cherchée.

Estimons le membre de droite de (**). Par l'inégalité de Hölder, 6.4 et (*), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (b \circ f \circ B(Df)^{-3}) \circ h \, d\theta &\leq c_1 (\|D^3\varphi\|_{L^p} + \|\varphi\|_{C^2} \|D^2\psi\|_{L^{2-s}}) \\ \int_0^1 (b \circ f \circ B_2(Df)^{-4} D^2\psi) \circ h \, d\theta &\leq c_1 \|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} \|D^2\psi\|_{L^{2-s}}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|D^2\psi\|_{L^{2-s}}^2 \leq c_1 (2\|\varphi\|_{C^2} \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} + \|D^3\varphi\|_{L^p})$$

En résolvant en $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}}$, ceci donne la première inégalité du théorème.

Pour obtenir la seconde, on majore différemment le premier terme du membre de droite de l'égalité (**).

L'expression B est somme de 6 termes qui contiennent, sauf le premier, un facteur $D\psi$ ou $D^2\psi$. Comme $\|D\psi\|_{C^0} \leq \|D^2\psi\|_{L^1}$, les termes correspondants dans (**) sont majorés par $c_2 \|\varphi\|_{C^3(\mathbb{A}_\delta)} \|D^2\psi\|_{L^{2-s}}$, si c_s est assez petit.

$$\text{Il reste à estimer } \int_0^1 (b \circ f(Df)^{-3} Z_{3,0}) \circ h \, d\theta.$$

On a $D(Z_{2,0}) = Z_{3,0} + Z_{2,1} D\psi$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 (b \circ f \circ Z_{3,0}(Df)^{-3}) \circ h \, d\theta &= \int_0^1 Dh^{-1} b \circ f(Df)^{-3} Z_{3,0} \, d\theta = \\ &= \int_0^1 (Dh^{-1} b \circ f(Df)^{-3} - 1) Z_{3,0} \, d\theta - \int_0^1 Z_{2,1} D\psi \, d\theta. \end{aligned}$$

Nous affirmons que :

$$(***) \quad \int_0^1 |Dh^{-1} b \circ f(Df)^{-3} - 1| \, d\theta \leq c_3 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^2} + \|D^2\psi\|_{L^{2-s}}),$$

où c_3 est une constante ne dépendant pas de γ .

En admettant momentanément (***), on obtient alors :

$$\int_0^1 [b \circ f \circ z_{3,0} (Df)^{-3}] \circ h \leq c_4 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^3}^2 + \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \|\varphi\|_{C^3}) ,$$

le second membre de (**) est alors majoré par $c_5 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^3}^2 + \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \|\varphi\|_{C^3})$ et minoré par $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}}^2$. La seconde inégalité du théorème en résulte (car $\gamma < 1$).

Démontrons enfin (***). On a :

$$\int_0^1 |Dh^{-1} b \circ f (Df)^{-3} - 1| d\theta = \int_0^1 |(b \circ f) (Df)^{-3} \circ h - 1| d\theta ,$$

$$\int_0^1 \text{Log}[b \circ f (Df)^{-3}] \circ h d\theta = 0 ,$$

$$\text{Log } b \circ f - \text{Log } b = - \text{Log } a =$$

$$= 3\text{Log } Df - \text{Log}(1 - D\psi \circ f + \varphi_x \circ G) .$$

Par 3.2 , on voit donc que :

$$\|\text{Log } b \circ f \circ h\|_{\text{BMO}} \leq c_6 \gamma^{-1} (\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} + \|\varphi\|_{C^2}) .$$

et on a aussi

$$\|\text{Log } Df \circ h\|_{\text{BMO}} = \|\text{Log } Dh \circ R_\alpha - \text{Log } Dh\|_{\text{BMO}}$$

$$\leq 2\|\text{Log } Dh\|_{\text{BMO}} \leq c_7 \gamma^{-1} \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} ,$$

par 3.4. On utilise alors 2.16, et $|e^x - 1| \leq e^{|x|} - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, pour conclure :

$$\int_0^1 |(b \circ f) Df^{-3} \circ h - 1| d\theta \leq c_3 \gamma^{-1} (\|D^2f\|_{L^{2-s}} + \|\varphi\|_{C^2}) .$$

On en tire (***) et le théorème est démontré. ■

6.8 Remarques :

1. On n'utilise l'inégalité $\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} \leq c_s \gamma$ que pour majorer $\|Da\|_{L^{p_1}}$, qui

doit être assez petit si on veut appliquer 3.12. Pour ceci, on pourrait supposer seulement que $\|D^2\varphi \circ G\|_{L^1} \leq c_s \gamma$.

2. Soient s' le réel vérifiant $\frac{1}{2-s'} + \frac{1}{s'} = 1$ et $s'_1 > s'$. En étudiant la démonstration, on voit que, dans la première inégalité du théorème on peut remplacer $\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{R}_\delta)}$ par $\|D^2\varphi \circ G\|_{L^1}^{s'_1}$.

3. Il n'y a pas d'inégalité a priori non conditionnelle, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : Pour $a > 0$, on considère le hamiltonien $H(\theta, r) = \frac{r^2}{2} - a(\cos \pi \theta)^2$ sur $\mathbb{R}$, et F_a le difféomorphisme de temps 1 du champ de vecteurs associé à H , de coordonnées $(\frac{\partial H}{\partial r}(\theta, r), -\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta, r))$. Le difféomorphisme F_a dépend continument de a dans la C^∞ -topologie. Pour $a > 0$ fixé, et $\varepsilon \geq 0$, il laisse invariant le graphe C_ε de la fonction ψ_ε définie par :

$$\psi_\varepsilon(\theta) = (2a(\cos \pi \theta)^2 + \varepsilon)^{1/2}.$$

De plus le nombre de rotation de C_ε est nul pour $\varepsilon = 0$, positif pour $\varepsilon > 0$.

Soit α un nombre de type constant positif assez petit. Il existe alors une courbe C_{ε_α} de nombre de rotation α , et ε_α tend vers 0 lorsque α tend vers 0 parmi l'ensemble des nombres de type constant positifs. Pour $s > 1$ fixé,

$\|D^2\psi_{\varepsilon_\alpha}\|_{L^{1+s}}$ tend vers $+\infty$ lorsque α tend vers 0 (sous les mêmes conditions) ; donc une inégalité du type

$$\|D^2\psi_{\varepsilon_\alpha}\|_{L^{1+s}} \leq C \|F_a\|_C^{1/2} \quad \text{est impossible.}$$

De même on ne peut avoir (si on suppose que la constante de Markov de $\alpha > 0$ est $\geq \alpha$, lorsque $\alpha \rightarrow 0$) :

$$\|D^2\psi_{\varepsilon_\alpha}\|_{L^{1+s}} \leq C \gamma^{-1} \|F_a\|_C^3.$$

En effet, α et ε_α sont liés par la relation

$$\alpha^{-1} = \int_0^1 (2a(\cos \pi \theta)^2 + \varepsilon_\alpha)^{-1/2} d\theta ,$$

donc α^{-1} de l'ordre de $|\log \varepsilon_\alpha|$ si $\alpha \alpha^{-1/2}$ est assez petit, alors que $\|D^2 \psi_\alpha\|_{L^{1+s}}$ est au moins de l'ordre de $\varepsilon_\alpha^{-s/2(1+s)}$.

L'expression de H dans l'exemple précédent n'est pas essentielle ; l'important est que le champ de vecteurs associé possède un point fixe hyperbolique.

4. Lorsque $\|\varphi\|_{C^3(\mathbb{A}_\delta)} = e \gamma^2$, $e < 1$, la seconde inégalité du théorème donne $\|D^2 f\|_{L^{2-s}} \leq c e \gamma$. En considérant l'exemple précédent, avec $\gamma \rightarrow 0$ et $a = e \gamma^2$, on voit qu'on ne peut obtenir une majoration de $\|D^2 f\|_{L^{2-s}}$ par un terme de l'ordre de γ^2 .

5. La propriété d'intersection n'est pas nécessaire pour avoir 6.6 et 6.7 ; il suffit que le cercle invariant de nombre de rotation α ne soit pas normalement hyperbolique.

6. Dans la suite, on majorera trivialement $\|D^3 \varphi \circ G\|_{L^p}$ par $\|\varphi\|_{C^3(\mathbb{A}_\delta)}$.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $\chi \in L^p(\mathbb{T}^2)$; on définit le module de continuité L^p de χ :

$$\omega_p(\chi)(\delta) = \sup_{\|t\| \leq \delta} \|\chi \circ R_t - \chi\|_{L^p} ;$$

pour $0 < \beta < 1$, on définit l'espace de Besov $B_{p,1}^\beta(\mathbb{T}^2)$ comme l'ensemble des $\chi \in L^p(\mathbb{T}^2)$ qui vérifient :

$$\int_0^1 \omega_p(\chi)(t) \frac{dt}{t^{1+\beta}} < +\infty .$$

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

Supposons que φ dans 6.7 se prolonge en une fonction de période 1 en r et θ dont toutes les dérivées partielles d'ordre 3 appartiennent à $B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{T}^2)$. Comme le difféomorphisme $(\theta, r) \rightarrow (\theta, r + \psi(\theta))$ de $\mathbb{T}^2$ est de classe C^1 , un argument d'interpolation (cf [BL] et [VI, 2.19]) montre que $\varphi_{\theta\theta\theta} \circ H$, $\varphi_{\theta\theta r} \circ H$, $\varphi_{\theta rr} \circ H$, $\varphi_{rrr} \circ H$ appartiennent à $B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{T}^2)$, et le théorème de trace (sur $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$) [BL] implique :

$$\|D^3\varphi \circ G\|_{L^p(\mathbb{T}^1)} \leq C_p \|D^3\varphi\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{T}^2)},$$

$C_p > 0$ étant une constante qui ne dépend que de $p > 1$.

7. Soit α_1 un réel vérifiant, pour $\gamma > 0$, $\beta \geq 0$ convenables :

$$|\alpha_1 - (p/q)| \geq \gamma q^{-2-\beta} \text{ pour tout } p/q \in \mathbb{Q}, q \geq 1.$$

Remarquons que pour presque tout α_1 , tout $\beta > 0$ convient (avec $\gamma = \gamma(\beta, \alpha_1)$).

Soit t une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ -analytique, dont la dérivée ne s'annule pas ; considérons le difféomorphisme $T_1(\theta, r) = (\theta + t(r) + \alpha_1, r)$ de $\mathbb{A}$. On trouve alors dans [D], qui s'appuie sur [P], le résultat suivant :

Soient $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$, $\delta > 0$, $k = 2(1+\beta) + 1 + \varepsilon$ non entier $k_1 = 2(1+\beta) + 1 + \varepsilon_1$; si F_1 est un difféomorphisme globalement canonique de classe C^k de $\mathbb{A}$ tel que $\|F_1 - T_1\|_{C^{k_1}(\mathbb{A}_\delta)}$ soit assez petit, F_1 laisse invariant le graphe C d'une fonction $\psi \in C^{k-2(1+\beta)}(\mathbb{T}^1)$; la restriction de F_1 à C est conjuguée à R_{α_1} par un difféomorphisme h de classe $C^{k-2(1+\beta)}$, et ψ et $h - \text{Id}$ tendent vers 0 dans la $C^{1+\varepsilon_1}$ topologie lorsque $F_1 - T_1$ tend vers 0 dans la C^{k_1} -topologie.

On a en fait un peu mieux : lorsque $\varepsilon_1 > \beta$, $\psi \in W^{2,2}(\mathbb{T}^1)$. En effet, lorsque F_1 est de classe C^∞ , on écrit dans (3') la fonction $a \in C^{1+\varepsilon_1}(\mathbb{T}^1)$ sous la forme $\frac{b}{b \circ f}$, $b \in C^0(\mathbb{T}^1)$, et $\|b - 1\|_{C^0}$ est petit lorsque

$\|F_1 - T_1\|_{C^1(\mathbb{T}^1)}^{k_1}$ l'est. L'équation (**) donne ensuite une inégalité a priori :

$$\|D^2\psi\|_{L^2} \leq c \|\varphi\|_{C^3}.$$

Lorsque F_1 est de classe C^{k_1} , $\|F_1 - T_1\|_{C^{k_1}}^{k_1} < v$ et v est assez petit, on considère une suite de difféomorphismes G_i de classe C^∞ convergeant vers F_1 dans la C^0 -topologie, telle que $\|G_i - T_1\|_{C^{k_1}}^{k_1} < cv$; l'inégalité a priori permet alors de conclure par un argument de compacité (2.10, 4.3, voir aussi 6.12).

8. Posons $\varphi_{\theta\theta\theta}^+ = \sup(0, \varphi_{\theta\theta\theta})$, $\varphi_{\theta rr}^+ = \sup(0, \varphi_{\theta rr})$,

$K = \sup\|\varphi_{\theta\theta\theta}^+\|_{L^\infty}, \|\varphi_{\theta rr}^+\|_{L^\infty}, \|\varphi_{\theta\theta r}\|_{L^\infty}, \|\varphi_{rrr}\|_{L^\infty}$. Alors, dans le théorème de 6.7, on peut obtenir au lieu de la première inégalité :

$$\|D^2f\|_{L^{s-s}} \leq c(\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} + K^{1/2}).$$

Voir 8.5 à ce propos.

6.9 Pour $0 < s < \frac{1}{2}$, on choisit $0 < \ell < \frac{1}{2}$ en imposant que $2s + 3\ell < 1$ de sorte que $\frac{1}{1+\ell} > \frac{3}{2} \frac{1}{2-s}$. On définit $s_1 > 2$, $s' > 2$, $q(s, \ell) > 0$ par :

$$\frac{1}{1+\ell} = \frac{1}{2-s} + \frac{1}{s_1},$$

$$1 = \frac{1}{2-s} + \frac{1}{s'},$$

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-s} + \frac{1}{q(s, \ell)} \right),$$

donc $\frac{1}{q(s, \ell)} = 2 \left(\frac{1}{1+\ell} - \frac{3}{2} \frac{1}{2-s} \right)$, et $\frac{1}{q(s, \ell)} < 2 \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2}$.

On a les inégalités $s' < s_1$, $2-s > 1+\ell$, $2(1+\ell) < s_1 < q(s, \ell)$.

Si $s = \frac{1}{10}$, on choisit $\ell = \frac{1}{10}$, et on a $4 < q(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = \frac{209}{50} < 5$.

Théorème : Soient $0 < s < \frac{1}{2}$, $0 < \ell < \frac{1}{2}$, $q \geq q(s, \ell)$ comme ci-dessus. Il existe une constante $\varepsilon_4 \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que, si f et φ comme en 6.1 vérifient :

$$(4) \quad \|D^2 f\|_{L^{2-s}} \leq \gamma \varepsilon_4$$

$$(5) \quad \|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} \leq \gamma \varepsilon_4$$

alors on ait :

$$\|D^4 \psi\|_{L^q} \leq C' (\|\varphi\|_{C^4(\mathbb{A}_\delta)}^2 + \|\varphi\|_{C^5(\mathbb{A}_\delta)}) ,$$

où C' désigne une constante qui dépend de γ, s, ℓ, q .

Démonstration : Dans la suite la lettre C désigne diverses constantes dépendant de s, ℓ, q mais pas de γ ; la lettre C' désigne diverses constantes dépendant de s, ℓ, q, γ .

L'estimation :

$$(6) \quad 1/2 \leq Df \leq 3/2$$

résulte de (4) ; la formule de changement de variable donne alors, pour tout $\eta \in L^p(\mathbb{T}^1)$, $p \geq 1$:

$$\|\eta \circ f\|_{L^p} \leq 2 \|\eta\|_{L^p}, \quad \|\eta \circ f^{-1}\|_{L^p} \leq 2 \|\eta\|_{L^p},$$

inégalité qu'on utilisera implicitement dans la suite.

On applique les résultats de 3.17 à l'équation $A_4 = E$ obtenue en 6.5 (a). Les hypothèses (4) et (5) montrent que les hypothèses de 3.17 sont vérifiées ; on obtient donc, avec $0 < \ell < \frac{1}{2}$:

$$\|D^4\psi\|_{L^q} \leq C \gamma^{-1} [\|DE\|_{L^{1+\ell}} + \|E\|_{L^{1+\ell}} (\|D^3f\|_{L^{1+\ell}} + \|D^2a_2\|_{L^{1+\ell}})]$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \|D^2a_2\|_{L^{1+\ell}} &= \|D^2(\varphi_f \circ G) - D^2(D\psi \circ f)\|_{L^{1+\ell}} \leq \\ &\leq C \|\varphi\|_{C^3} + \|D^2\psi \circ f\|_{L^{1+\ell}} \|D^2\psi\|_{L^{1+\ell}} + \|D^3\psi \circ f(Df)^2\|_{L^{1+\ell}} , \\ \|D^2\psi \circ D^2\psi \circ f\|_{L^{1+\ell}} &\leq \|D^2\psi\|_{C^0} \|D^2\psi \circ f\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^3\psi\|_{L^1} \varepsilon_4 \gamma . \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\|D^2a_2\|_{L^{1+\ell}} \leq C (\|D^3f\|_{L^{1+\ell}} + \|\varphi\|_{C^3}) ,$$

$$(7) \quad \|D^4\psi\|_{L^q} \leq C \gamma^{-1} [\|E\|_{L^{1+\ell}} (\|D^3f\|_{L^{1+\ell}} + \|\varphi\|_{C^3}) + \|DE\|_{L^{1+\ell}}] .$$

On suppose que ℓ, s, q, s', s_1 vérifient les hypothèses du début de ce numéro. Il résulte alors de (4) et 2.11 que :

$$(8) \quad \|D^3\psi\|_{L^{s_1}} \leq C (\gamma \varepsilon_4)^{1/2} \|D^4\psi\|_{L^q}^{1/2} ;$$

$$\begin{aligned} (9) \quad \|D^2\psi\|_{C^0} &\leq C \|D^2\psi\|_{L^{2-s}}^{1/2} \|D^3\psi\|_{L^{s'}}^{1/2} \\ &\leq C (\gamma \varepsilon_4)^{1/2} \|D^3\psi\|_{L^{s'}}^{1/2} . \end{aligned}$$

On estime maintenant $\|E\|_{L^{1+\ell}}$ (voir 6.5 (a)).

$$1) \quad \|D^3 \psi e\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} \|e\|_{L^{2-s}} \quad \text{par l'inégalité de Hölder}$$

$$\leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} (\|\varphi\|_{C^2} + \|D^2 \psi\|_{L^{2-s}})$$

$$\leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} \quad \text{par (4) et (5) ;}$$

$$\|D^3 \psi \circ f(D^2 \psi(Df))^2\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} \|D^2 \psi\|_{L^{2-s}} \quad \text{par (6) et l'inégalité de Hölder .}$$

Donc
$$\|E_1\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} .$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \|E_2\|_{L^{1+\ell}} &= 3 \|D^2 \psi \circ f(D^2 \psi)^2\|_{L^{1+\ell}} \\ &\leq C \|D^2 \psi\|_{L^{1+\ell}} \|(D^2 \psi)^2\|_{C^0} \\ &\leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} \quad \text{par (4) et (9) .} \end{aligned}$$

$$3) \quad \|E_3\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^2} \|D^2 \psi\|_{C^0}^2 \leq C \|D^3 \psi\|_{s_1} \quad \text{par (9) .}$$

$$4) \quad \|E_4\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^4} ;$$

$$5) \quad \|E_5\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^4} \quad \text{par (4) .}$$

On obtient donc, grâce à (8) :

$$(10) \quad \|\varphi\|_{C^3} \|E\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^3}^{(\gamma \epsilon_4)^{1/2}} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2} + \|\varphi\|_{C^4} ;$$

$$\begin{aligned} (11) \quad \|D^3 f\|_{L^{1+\ell}} \|E\|_{L^{1+\ell}} &\leq C (\|D^3 \psi\|_{s_1}^2 + \|D^3 \psi\|_{s_1} \|\varphi\|_{C^4}) \\ &\leq C [\gamma \epsilon_4 \|D^4 \psi\|_{L^q} + (\gamma \epsilon_4 \|D^4 \psi\|_{L^q})^{1/2} \|\varphi\|_{C^4}] . \end{aligned}$$

Passons à l'estimation de $\|DE\|_{L^{1+\ell}}$. On prend $k = 5$ dans 6.5 (b), (c) qui donne les différents monomes à estimer :

$$1) \quad \|D^4 \psi \cdot e\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^4 \psi\|_{s_1} \|e\|_{L^{2-s}} \\ \leq C \varepsilon_4 \gamma \|D^4 \psi\|_{L^q} \quad \text{par } \textcircled{4} \textcircled{5} \text{ et } s_1 < q(s, \ell) :$$

$$2) \quad \|D^4 \psi \circ f \cdot D^2 \psi (Df)^3\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^4 \psi\|_{s_1} \|D^2 \psi\|_{L^{2-s}} \\ \leq C \varepsilon_4 \gamma \|D^4 \psi\|_{L^q} ;$$

3) Monômes ne contenant pas les variables $x_4, y_4, z_{\ell, m}$: ils sont multiples de $y_2 x_2 x_3, y_3 v^2 x_3$ ou $y_3 v x_2^2$, et on a :

$$\|D^2 \psi \circ f \cdot D^2 \psi D^3 \psi\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^2 \psi\|_{C^0}^2 \|D^3 \psi\|_{s_1} \\ \leq C \|D^3 \psi\|_{s_1}^2 \quad \text{par } \textcircled{9} \\ \leq C \varepsilon_4 \gamma \|D^4 \psi\|_{L^q} \quad \text{par } \textcircled{8} ; \\ \|D^3 \psi \circ f \cdot (D^2 \psi)^2 Df\|_{L^{1+\ell}} \leq C \varepsilon_4 \gamma \|D^4 \psi\|_{L^q} \quad \text{de la même façon ;} \\ \|D^3 \psi \circ f \cdot D^3 \psi (Df)^2\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|D^3 \psi\|_{L^{2(1+\ell)}}^2 \\ \leq C \|D^3 \psi\|_{s_1}^2 \\ \leq C \varepsilon_4 \gamma \|D^4 \psi\|_{L^q} .$$

4) Monômes contenant une variable $z_{\ell, m}$ avec $\ell + m \geq 4$: ils sont multiples entiers de $z_{\ell, m} x_1^m$ lorsque $\ell + m = 5$, de $z_{\ell, m} x_1^{m-1} x_2$ lorsque $\ell + m = 4$. Par $\textcircled{4}$, ils sont majorés dans tous les cas par $C \|\varphi\|_5$.

5) Monômes contenant une variable $z_{\ell, m}$, avec $2 \leq \ell + m \leq 3$; mais pas la variable x_4 : ils sont multiples entiers de $z_{0,2} x_2 x_3, z_{2,1} x_3, z_{1,2} x_1 x_3, z_{1,2} x_2^2, z_{0,3} x_1^2 x_3$, ou $z_{0,3} x_1 x_2^2$, et on a :

$$\begin{aligned} \|z_{0,2} D^2 \psi \ D^3 \psi\|_{L^{1+\ell}} &\leq C \|\varphi\|_{C^2} \|D^3 \psi\|_{L^1} \|D^2 \psi\|_{L^{2-s}} \\ &\leq C \|\varphi\|_{C^2} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2}, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, (4) et (8) ;

$$\|z_{2,1} D^3 \psi\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^3} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2}, \text{ par (8) ;}$$

$$\|z_{1,2} D \psi \ D^3 \psi\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^3} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2}, \text{ par (8) ;}$$

$$\|z_{0,3} (D \psi)^2 D^3 \psi\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^3} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2}, \text{ par (8) ;}$$

$$\begin{aligned} \|z_{1,2} (D^2 \psi)^2\|_{L^{1+\ell}} &\leq C \|\varphi\|_{C^3} \|D^2 \psi\|_{C^0}^2 \\ &\leq C \|\varphi\|_{C^3} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2} \quad \text{par (8) et (9) ;} \end{aligned}$$

$$\|z_{0,3} x_1 x_2^2\|_{L^{1+\ell}} \leq C \|\varphi\|_{C^3} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2} \text{ de la même façon.}$$

En rassemblant 1), 2), 3), 4), 5), on a donc :

$$(12) \quad \|DE\|_{L^{1+\ell}} \leq C(\varepsilon_4 \|\varphi\|_{C^4} \|D^4 \psi\|_{L^q} + \|\varphi\|_{C^5} + \|\varphi\|_{C^3} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2}) .$$

En reportant (10), (11), (12) dans (7), cela donne :

$$(13) \quad \|D^4 \psi\|_{L^q} \leq C\varepsilon_4 \|D^4 \psi\|_{L^q} + C'(\|\varphi\|_{C^4} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2} + \|\varphi\|_{C^4}^2 + \|\varphi\|_{C^5}) .$$

On choisit ε_4 de sorte que $C\varepsilon_4 < \frac{1}{2}$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \|D^4 \psi\|_{L^q} &\leq C'(\|\varphi\|_{C^4} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2} + \|\varphi\|_{C^4}^2 + \|\varphi\|_{C^5}) \\ &\leq 2C' \sup(\|\varphi\|_{C^4} \|D^4 \psi\|_{L^q}^{1/2}, \|\varphi\|_{C^4}^2 + \|\varphi\|_{C^5}) \end{aligned}$$

et chacune des alternatives pour le sup de l'inégalité précédente conduit à

l'inégalité du théorème. ■

6.10 Remarques

1. On utilise l'hypothèse (5) à deux moments : pour pouvoir appliquer 3.17 et pour majorer $\|D^4 \psi \cdot e\|_{L^{1+\ell}}$.
2. On a majoré $D^4 \psi$ et non $D^3 \psi$, ce qui aurait été a priori plus simple : la raison en est qu'il semble nécessaire pour estimer $D^3 \psi$ d'avoir une inégalité a priori conditionnelle pour $\|D^2 f\|_{L^{2+\theta}}$, $\theta > 0$, que nous ne savons pas obtenir. On contourne cette difficulté grâce aux inégalités (8) et (9), qui estiment les termes $\|D^3 \psi\|_{S_1}$ et $\|D^2 \psi\|_{C^0}$ sans qu'on sache en obtenir une majoration directe.

6.11 Soient $0 < s < \frac{1}{2}$, $0 < \ell < \frac{1}{2}$, $q = q(s, \ell)$ comme en 6.9, et k un entier au moins égal à 4.

Proposition : Il existe une constante ε_k , $0 < \varepsilon_k \leq \varepsilon_4$, telle que les majorations

$$\|D^2 f\|_{L^{2-s}} \leq \varepsilon_k \gamma,$$

$$\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{R}_\delta)} \leq \varepsilon_k \gamma,$$

impliquent :

$$\|D^k \psi\|_{L^q} \leq u_k(\|\varphi\|_{C^{k+1}}),$$

où u_k désigne une fonction continue croissante positive nulle en 0 dépendant de γ, s, ℓ et k .

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur k , le cas $k = 4$ résultant de 6.9.

Supposons donc la proposition valable à l'ordre $k-1 \geq 4$.

On obtient, comme en 6.9 pour l'inégalité (7) :

$$(14) \quad \|D^k \psi\|_{L^q} \leq C_0 \gamma^{-1} [\|DA_k\|_{L^{1+\ell}} + \|A_k\|_{L^{1+\ell}} (\|D^3 f\|_{L^{1+\ell}} + \|\varphi\|_{C^3})],$$

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

où A_k est défini en 6.5.

1) Majoration de $\|A_k\|_{L^{1+\ell}}$. On majore les monômes ne contenant pas x_{k-1} et y_{k-1} en norme C^0 , en utilisant que

$$\|y_i\|_{C^0} = \|x_i\|_{C^0} \leq \|x_{i+1}\|_{L^1} \leq u_{k-1}(\|\varphi\|_{C^k}) \text{ pour } i \leq k-2 ;$$

on a aussi :

$$\|e x_{k-1}\|_{L^{1+\ell}} \leq \|e\|_{C^0} \|x_{k-1}\|_{L^{1+\ell}} \leq \|e\|_{C^0} u_{k-1}(\|\varphi\|_{C^k}) ,$$

$$\|e\|_{C^0} \leq C(\|\varphi\|_{C^2}^2 + \|D^2\psi\|_{C^0}) ;$$

$$\|D^{k-1}\psi \circ f D^2\psi (Df)^{k-2}\|_{L^{1+\ell}} \leq C\|D^2\psi\|_{C^0} u_{k-1}(\|\varphi\|_{C^k}) ;$$

donc, on obtient :

$$\|A_k\|_{L^{1+\ell}} \leq u_k^1(\|\varphi\|_{C^k}) ,$$

pour une fonction u_k^1 continue croissante positive nulle à l'origine.

2) Comme $\|D^3f\|_{L^{1+\ell}} \leq \|D^3\psi\|_{L^q}$, on a aussi en utilisant 6.9 :

$$\|A_k\|_{L^{1+\ell}} (\|D^3f\|_{L^{1+\ell}} + \|\varphi\|_{C^3}) \leq u_k^2(\|\varphi\|_{C^k}) ,$$

la fonction u_k^2 ayant les mêmes propriétés .

3) Majoration de $C_0 \|DA_k\|_{L^{1+\ell}}$. On utilise 6.5 (b) et (c).

Les termes contenant x_k ou y_k sont majorés par :

$$(15) \quad C\|D^k\psi\|_{L^q} (\|\varphi\|_{C^2}^2 + \|D^2\psi\|_{L^{2-s}}^2) \leq C \varepsilon_k \gamma \|D^k\psi\|_{L^q} ,$$

par l'inégalité de Hölder, et $\frac{1}{2-s} + \frac{1}{q} = \frac{2}{s_1} < \frac{1}{1+l}$.

D'autre part, le polynôme DA_k est de degré 1 par rapport au couple de variables (X_{k-1}, Y_{k-1}) . On majore les $Z_{l,m}$, $l+m \leq k+1$, et X_i, Y_i , $i \leq k-2$ en norme C^0 .

Ceci permet de voir que l'ensemble des termes de DA_k ne contenant pas X_k et Y_k est majoré en norme L^{1+l} par $u_k^3(\|\varphi\|_{C^{k+1}})$, u_k^3 ayant les mêmes propriétés que u_k^1 .

On choisit enfin ε_k de sorte que dans l'inégalité (15),

$c\varepsilon_k$ soit inférieur à $1/2$. On obtient alors à partir de (14) :

$$\|D^k \psi\|_{L^q} \leq 2C_0 \gamma^{-1} [u_k^2(\|\varphi\|_{C^{k+1}}) + u_k^3(\|\varphi\|_{C^k})] . \quad \blacksquare$$

6.12 Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, $0 < s < \frac{1}{2}$, $0 < l < \frac{1}{2}$, $q = q(s, l)$ comme en 6.9 et ε_k le réel déterminé en 6.10.

Soit $(F_i)_{i \geq 0}$ une suite de difféomorphisme qui vérifient les hypothèses de 6.1 : pour $i \geq 0$, F_i laisse donc invariant le graphe d'une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, et le difféomorphisme $f_i = \text{Id} + \psi_i + \alpha$ et a pour nombre de rotation α .

On suppose que, pour tout entier i , on a :

$$\|D^2 \psi_i\|_{L^{2-s}} \leq \varepsilon \gamma ,$$

$$\|\varphi_i\|_{C^2(\mathbb{R}_\delta)} \leq \varepsilon \gamma , \text{ avec } 0 < \varepsilon < \inf(\frac{\delta}{4\gamma}, \varepsilon_k),$$

et $F_i(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi_i(\theta, r))$.

Comme $\varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$, on a par 2.9 $\|D\psi_i\|_{C^0} \leq \inf(\frac{\delta}{4}, \frac{1}{2})$, donc $\|\psi_i\|_{C^0} \leq \frac{\delta}{4}$ puisque

ψ_i s'annule en au moins un point de $\mathbb{T}^1$. On a aussi, pour tout i , $\frac{1}{2} \leq Df_i \leq \frac{3}{2}$.

On suppose que la suite (F_i) a une limite F dans la C^{k+1} -topologie.

Proposition : Sous ces hypothèses, la suite (ψ_i) converge vers une limite $\psi \in W^{k,q}(\mathbb{T}^1)$ pour la C^{k-1} -topologie, qui vérifie :

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{C^0} &\leq \delta/4, \\ \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} &\leq \varepsilon\gamma; \end{aligned}$$

de plus, le graphe de ψ est l'unique graphe invariant par F qui ait pour nombre de rotation α .

Voir aussi 4.3 à ce sujet.

Démonstration : Soit $A = \sup_i \|\varphi_i\|_{C^{k+1}}$, u_k la fonction définie en 6.11, et K la partie convexe de $W^{k,q}(\mathbb{T}^1)$ définie par :

$$K = \{\eta \in W^{k,q}(\mathbb{T}^1) \mid \|D^k\eta\|_{L^q} + \|\eta\|_{C^0} \leq u_k(A) + \frac{\delta}{4}\}.$$

Par 2.10, K est compact pour la topologie faible de $W^{k,q}(\mathbb{T}^1)$; par 6.11, la suite $(\psi_i)_{i \geq 0}$ est contenue dans K .

Soit ψ une valeur d'adhérence de (ψ_i) pour la C^{k-1} -topologie. Alors $\psi \in W^{k,q}(\mathbb{T}^1)$; posons $f = \text{Id} + \psi + \alpha$; on a $\frac{1}{2} \leq Df \leq \frac{3}{2}$.

On peut passer à la limite uniforme dans l'équation (+) de 6.2, ce qui montre que le graphe de ψ est une courbe invariante par F dont le nombre de rotation est α . De 5.4, on déduit l'unicité de la valeur d'adhérence ψ . Les inégalités sur ψ s'obtiennent de celles sur ψ_i par passage à la limite dans la C^2 -topologie. ■

6.13 Soit ℓ_1 l'entier déterminé en 5.6; on se place dans la situation de 6.12 en supposant de plus que $k \geq \ell_1 + 1$ et que F est de classe C^∞ .

Corollaire : Sous ces hypothèses, la fonction ψ est de classe C^∞ ; si (F_i) converge vers F dans la C^∞ -topologie, (ψ_i) converge vers ψ dans la C^∞ -topologie.

Démonstration : Par 4.7, F a la propriété d'intersection. Comme

$\psi \in W^{k,q}(\mathbb{T}^1) \subset C^{\ell_1}(\mathbb{T}^1)$, on déduit de 5.6 que ψ est de classe C^∞ . La continuité dans la C^∞ -topologie résulte de 5.5. ■

6.14 Remarque : Soit $(F_i)_i \leq 0$ une suite de plongements de classe C^∞ de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$; on suppose que :

- $F_i(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi_i(\theta, r))$, α étant un nombre de type constant fixé.
- chaque F_i a la propriété d'intersection ;
- chaque F_i laisse invariant le graphe C_i d'une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, et le nombre de rotation de C_i est α .
- pour tout i , $\|F_i - T\|_{C^1(\mathbb{A}_\delta)} < \eta$ avec η assez petit, où on a posé $T(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r)$;
- la suite (F_i) converge dans la C^∞ -topologie vers un plongement F de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$.

Supposons de plus qu'il existe au plus une courbe C homotope à $r = Cte$, invariante par F , qui ait pour nombre de rotation α ; c'est le cas lorsque η est assez petit et F préserve la mesure de Lebesgue (cf. 4.10, Remarque 1, 5.4, 6.4).

Le même raisonnement qu'en [I.5.4] montre que la suite $(\psi_i)_i \geq 0$ converge dans la C^0 -topologie vers une fonction lipschitzienne ψ dont le graphe est l'unique courbe invariante par F de nombre de rotation α .

Pour tout α de type constant, on peut construire une suite $(F_i)_i \geq 0$ avec les propriétés ci-dessus de sorte que ψ ne soit pas de classe C^∞ ; on peut même supposer que la suite $(F_i)_i \geq 0$ est contenue dans un voisinage arbitraire de T pour la $C^{3-\varepsilon}$ -topologie (avec $\varepsilon \in (0,1)$ arbitrairement choisi) ; voir [II, III] à ce sujet.

Soit $\varepsilon = \inf(\frac{\delta}{4Y}, \varepsilon_{\ell_1+1})$ comme en 6.13 ; alors par 6.13, on doit avoir :

- soit $\|\varphi_i\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} \geq \varepsilon Y$ pour i assez grand (mais ceci ne se produit pas si

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

F_i reste voisin de T dans la $C^{3-\varepsilon}$ -topologie) ;

- soit $\|D^2\psi_i\|_{L^{2-s}} \geq \varepsilon\gamma$ pour i assez grand ;

rappelons que ε dépend de $s \in (0, \frac{1}{2})$.

Notons bien qu'aucune hypothèse n'est faite sur la proximité de F_i à T dans la C^3 -topologie.

Cette remarque donne une information sur le mode de disparition des courbes invariantes de classe C^∞ , et soulève la question suivante :

Question : Dans la situation ci-dessus, si $\psi \notin C^\infty(\mathbb{T}^1)$ (ou ce qui revient au même, si $\psi \notin C^1(\mathbb{T}^1)$), a-t-on "en général" :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|D^2\psi_i\|_{L^{2-s}} = +\infty \quad ?$$

§ 7. THÉORÈME DES COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3 POUR LES NOMBRES DE ROTATION DE TYPE CONSTANT.

7.1 Soient $0 < s < \frac{1}{2}$, et α un nombre de type constant, on note γ la constante de Markov de α .

Pour $\varepsilon > 0$, on note B_ε l'ensemble des applications F de classe C^3 de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{A}$ de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r)) \text{ avec } \|\varphi\|_{C^3(\mathbb{A}_\delta)} < \varepsilon.$$

Les ensembles W_δ et $V_{\delta, \alpha}$ ont été définis en 5.5.

Soit c_s la constante définie en 6.7. L'ensemble des $F \in V_{\delta, \alpha}$ pour lesquels la fonction associée ψ vérifie $\|\psi\|_{C^0} < \frac{\delta}{2}$, $\|D^2\psi\|_{L^{3/2}} < c_s \gamma$ est noté $U_{\delta, \alpha}$.

7.2 Théorème : Il existe une constante $c_1 > 0$ dépendant seulement de s avec la propriété suivante :

pour $0 < \varepsilon \leq c_1 \gamma \inf(\gamma, \delta)$, l'ensemble $U_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon$ est ouvert et fermé dans $W_\delta \cap B_\varepsilon$ muni de la C^∞ -topologie.

Démonstration : Par 5.5, l'application qui à $F \in V_{\delta, \alpha}$ associe $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ est continue pour la C^∞ -topologie, donc $U_{\delta, \alpha}$ est ouvert dans W_δ .

Supposons ensuite que $\varepsilon < c_s \gamma$, donc $\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} < c_s \gamma$ pour $F \in W_\delta \cap B_\varepsilon$. Par 6.7, on a donc, pour $F \in U_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon$:

$$7.3 \quad \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \leq c \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^3(\mathbb{A}_\delta)} < c \gamma^{-1} \varepsilon \leq c_1 c \inf(\gamma, \delta);$$

donc pour c_1 assez petit, on aura :

$$\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \leq \frac{1}{2} c_s \gamma, \quad \|\psi\|_{C^0} \leq \frac{\delta}{4}.$$

Ceci montre que $U_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon$ est ouvert et fermé dans $V_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon$ muni de la C^∞ -topologie.

Soient ℓ_1 l'entier défini en 5.6, ε_{ℓ_1+1} le réel > 0 déterminé en

6.11. Si c_1 est assez petit, on a, pour $F \in U_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon$:

$$\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} < c_1^c \inf(\gamma, \delta) \leq \varepsilon_{\ell_1+1} \gamma ,$$

$$\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{A}_\delta)} < c_1 \gamma \inf(\gamma, \delta) \leq \varepsilon_{\ell_1+1} \gamma .$$

On applique alors 6.12 et 6.13, qui montrent que $U_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon$ est fermé dans $W_\delta \cap B_\varepsilon$ muni de la C^∞ -topologie. ■

7.4 Soient $0 < s < \frac{1}{2}$, $\delta_1 > 0$, et T_1 un difféomorphisme complètement intégrable de $\mathbb{A}$ de classe C^∞ de la forme :

$$T_1(\theta, x) = (\theta + t(x) + \alpha, x) ,$$

avec $t \in C^\infty(\mathbb{R})$, $t(0) = 0$, $B^{-1} < |\frac{dt}{dx}(x)| < B$ (cf. 4.1). Soit aussi P_{δ_1} une partie de $C^3(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A})$ qui a au voisinage de T_1 la propriété LC définie en 4.11.

7.5 Théorème : Il existe, pour la C^3 -topologie, un voisinage ouvert V de T_1 dans P_{δ_1} ayant la propriété suivante : pour tout $F \in V$, il existe une unique fonction $\psi \in W^{2,2-s}(\mathbb{T}^1)$ telle que $\|\psi\|_{C^0} < \delta_1$ et que le graphe de ψ soit une courbe invariante par F de nombre de rotation α ; de plus ψ est de classe C^∞ lorsque F l'est, et ψ est petite dans la $W^{2,2-s}$ -topologie si F est proche de T_1 dans la C^3 -topologie.

Démonstration : A tout F_1 C^1 -voisin de T_1 , on peut associer, comme en 4.1, une conjugaison G , et le conjugué $F = G \circ F_1 \circ G^{-1}$, qui est un plongement de $G(\mathbb{A}_{\delta_1} \cap F_1^{-1}(\mathbb{A}_{\delta_1}))$ dans $\mathbb{A}$. Donc on peut choisir $0 < \delta < \delta_1$ et un voisinage ouvert V_1 de T_1 pour la C^3 -topologie, tels que pour $F_1 \in V_1$, $G(\mathbb{A}_{\delta_1} \cap F_1^{-1}(\mathbb{A}_{\delta_1}))$ contienne

$\mathbb{A}_\delta$; la restriction de F à $\mathbb{A}_\delta$ est notée $\Psi_1(F_1)$; on a ainsi défini une application Ψ_1 de V_1 dans $C^3(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{A})$.

L'application Ψ_1 est continue pour la C^3 -topologie ; sa restriction à $V_1 \cap C^\infty(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A})$ est à valeurs dans $C^\infty(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{A})$ et est continue pour les C^∞ -topologies sur ces deux espaces. Enfin $\Psi_1(F_1) \in W_\delta$ si $F_1 \in P_{\delta_1} \cap V_1 \cap C^\infty(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A})$.

On choisit $0 < \varepsilon \leq c_1 \gamma \inf(\gamma, \delta)$ tel que les conclusions de 7.2 soient vérifiées. Par 4.11 c), il existe pour la C^3 -topologie un voisinage ouvert V_2 de T_1 dans P_{δ_1} qui vérifie :

- . $V_2 \subset V_1$;
- . $\Psi_1(V_2 \cap C^\infty(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A})) \subset W_\delta \cap B_\varepsilon$;
- . $V_2 \cap C^\infty(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A})$ est connexe pour la C^∞ -topologie.

Par le théorème 7.2, l'ensemble $B = (\Psi_1|_{V_2 \cap C^\infty})^{-1}(U_{\delta, \alpha} \cap B_\varepsilon)$ est ouvert et fermé dans $V_2 \cap C^\infty$ pour la C^∞ -topologie. Mais $V_2 \cap C^\infty$ est connexe, et $T_1 \in B$, donc $B = V_2 \cap C^\infty$. Pour tout $F_1 \in V_2 \cap C^\infty$, $\Psi_1(F_1)$ laisse invariant le graphe C d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ qui vérifie :

$$7.6 \quad \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \leq c\gamma^{-1}\varepsilon < \frac{1}{2} \quad (\text{cf. 7.3}),$$

$$7.7 \quad \|\psi\|_{C^0} \leq \delta/2 ;$$

de plus le nombre de rotation de C est α .

Or G préserve la propriété d'être un graphe ; écrivons

$G^{-1}(\theta, r) = (\theta, g_{-1}(\theta, r)) = (\theta, t^{-1}(r) + \varphi_{-1}(\theta, r))$, et $\tilde{\psi}(\theta) = g_{-1}(\theta, \psi(\theta))$; le graphe de $\tilde{\psi}$ est $G^{-1}(C)$, donc est une courbe invariante par F_1 dont le nombre de rotation est α . La fonction $\tilde{\psi}$ est de classe C^∞ , et on a :

$$7.8 \quad \|D^2\tilde{\psi}\|_{L^{2-s}} \leq c_2 (\|g_{-1}\|_{C^2} \|D^2\psi\|_{L^{2-s}} + \|\varphi_{-1}\|_{C^2}),$$

avec une constante $c_2 > 0$.

Supposons de plus que V_2 soit borné pour la C^2 -topologie. Soit $F_1 \in V_2 \cap P_{\delta_1}$, $(F_i)_{i \geq 2}$ une suite dans $V_2 \cap C^\infty(\mathbb{A}_{\delta_1}, \mathbb{A})$ qui converge vers F_1 dans la C^3 -topologie. Pour chaque F_i , il existe une unique fonction $\tilde{\psi}_i$ dont le graphe soit invariant par F_i et de nombre de rotation α ; on a $\tilde{\psi}_i = g_{-1}(\cdot, \psi_i)$ où $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ est l'unique fonction dont le graphe soit invariant par $\Psi_1(F_i)$ et de nombre de rotation α .

Par 7.6, 7.7, 7.8, et 2.10, il existe une suite d'entiers croissante $(i_n)_{n \geq 0}$ telle que les suites (ψ_{i_n}) , $(\tilde{\psi}_{i_n})$ convergent dans la C^1 -topologie vers des limites respectives ψ , $\tilde{\psi}$ qui appartiennent à $W^{2,2-s}(\mathbb{T}^1)$ et vérifient les estimations 7.6, 7.7, 7.8.

En passant à la limite dans 4.6 (pour la C^1 -topologie), on voit que le graphe de ψ est invariant par $\Psi_1(F_1)$ et que son nombre de rotation est α ; comme $D\psi$ est à variation bornée, son graphe est l'unique courbe invariante par $\Psi_1(F_1)$ qui ait pour nombre de rotation α et soit un graphe (cf. 5.4).

Comme G préserve la propriété d'être un graphe, le graphe de $\tilde{\psi} \in W^{2,2-s}(\mathbb{T}^1)$ est l'unique courbe invariante par F_1 qui ait pour nombre de rotation α et soit un graphe.

Lorsque F_1 est proche de T_1 dans la C^3 -topologie, $\Psi_1(F_1)$ est proche de T dans la C^3 -topologie (où on pose $T(\theta, r) = (\theta + \alpha + r, r)$), donc par 7.6 $\|D^2\psi\|_{L^{2-s}}$ est petit, et par 7.8 $\|D^2\tilde{\psi}\|_{L^{2-s}}$ est petit (car V_2 est C^2 -borné).

La dernière assertion du théorème en résulte. ■

7.9 Remarque : Le lecteur consultera aussi 4.3 et les références qui y sont citées.

7.10 On se donne comme en 7.4 un difféomorphisme de classe C^∞ complètement intégrable T_1 de $\mathbb{A}$ et $\delta > 0$.

Corollaire : Il existe $\eta > 0$, dépendant de γ, δ, T_1 , ayant les propriétés suivantes : soit F un plongement globalement canonique de $\mathbb{A}_{2\delta}$ dans $\mathbb{A}$ de classe C^3 vérifiant

$$\|T_1 - F\|_{C^3(\mathbb{A}_{2\delta})} < \eta;$$

alors il existe une unique courbe C homotope à $r = \text{Cte}$ qui soit invariante par F et ait pour nombre de rotation α ; de plus, C est le graphe d'une fonction $\tilde{\psi} \in W^{2,2-s}(\mathbb{T}^1)$, $\tilde{\psi}$ est de classe C^∞ si F l'est, et $\tilde{\psi}$ est petit dans la $W^{2,2-s}$ -topologie si $F - T_1$ est petit dans la C^3 -topologie.

Démonstration : On suppose que η , est assez petit pour que l'opérateur d'extension $F \rightarrow E(F)$ introduit en 4.9 soit défini pour $\|F - T_1\|_{C^3(\mathbb{A}_{2\delta})} < \eta$.

Soit $P_{3\delta} = E(Y_\varepsilon^4)$ l'exemple introduit en 4.12 ; l'application E , à valeurs dans $P_{3\delta}$, est continue pour la C^3 -topologie, et $E(F)$ coïncide avec F sur $\mathbb{A}_\delta$. Appliquons 7.5 à $P_{3\delta}$. Si η est assez petit et F vérifie les hypothèses du corollaire, il existe une fonction $\tilde{\psi} \in W^{2,2-s}(\mathbb{T}^1)$, $\|\tilde{\psi}\|_{C^0} < \delta$, dont le graphe C est invariant par $E(F)$ et a pour nombre de rotation α .

Comme $C \subset \mathbb{A}_\delta$, C est aussi une courbe invariante pour F . L'unicité résulte de 4.10, remarque 1, et les deux dernières assertions du corollaire résultent de 7.5. ■

7.11 On peut dans 7.10 supposer que F est de classe $C^{2+\text{Lip}}$ avec

$$\|F - T_1\|_{C^{2+\text{Lip}}(\mathbb{A}_{2\delta})} < \eta_1,$$

pour une constante η_1 ne dépendant que de γ, δ et T_1 .

En effet, on peut construire une suite $\tilde{S}_i$ dans Y_ε^∞ telle que $(E(\tilde{S}_i))$ converge vers $E(F)$ dans la C^2 -topologie et vérifie, pour tout i :

$$\|E(\tilde{S}_i) - T_1\|_{C^3} < \eta$$

Cette construction se fonde sur la remarque 2 de 4.10.

Le reste du raisonnement est alors analogue à la démonstration de 7.5.

§ 8. LE CAS PARTICULIER DE $\frac{f+f^{-1}}{2}$

8.1 Soit φ une fonction numérique de classe C^∞ et d'intégrale nulle sur $\mathbb{T}^1$.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux difféomorphismes F de $\mathbb{A}$ qui sont de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r)).$$

Notons que F préserve la mesure de Lebesgue et est globalement canonique ; F possède donc la propriété d'intersection.

Pour que le graphe d'une fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ soit une courbe invariante par F de nombre de rotation α , il faut et il suffit que ψ vérifie le système fonctionnel :

$$\begin{aligned} \psi \circ f &= \varphi \circ f + \psi, \\ f = \text{Id} + \psi &\in D^\infty(\mathbb{T}^1), \quad \rho(f) = \alpha. \end{aligned}$$

La première équation s'écrit encore :

$$\frac{f+f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi.$$

Pour $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, définissons :

$$\begin{aligned} F_\alpha^r &= \{f \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}, \\ H^r &= \{f \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 (f - \text{Id}) d\theta = 0\}, \end{aligned}$$

on est donc conduit à étudier l'application Φ de F_α^∞ dans H^∞ définie par

$$\Phi(f) = \frac{f+f^{-1}}{2}; \text{ pour voir tout ceci, on se rapportera à [II].}$$

On se propose de montrer comment les résultats et méthodes des paragraphes précédents se simplifient et se généralisent dans ce cas particulier.

8.2 On suppose que α satisfait à une condition diophantienne. En utilisant $[Y_1] [Y_2]$, on peut reformuler 5.5 de la façon suivante : l'image $\Phi(F_\alpha^\infty)$ est ouverte dans H^∞ , et Φ est un difféomorphisme de classe C^∞ au sens de Hamilton de F_α^∞ sur son image ; en particulier Φ est un homéomorphisme pour la C^∞ -topologie

(voir aussi [II.2.6]).

On peut traduire 5.6 de la façon suivante : il existe un entier $\ell_1 \geq 2$, dépendant de α , tel que $f \in F_\alpha^{\ell_1}$ et $\Phi(f) \in H^\infty$ impliquent $f \in F_\alpha^\infty$.

8.3 On dérive plusieurs fois l'équation fonctionnelle $\frac{f+f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi$, avec $f = \text{Id} + \psi$; on obtient

$$(1) \quad Df + \frac{1}{Df} \circ f^{-1} = 2 + D\varphi ;$$

$$(2) \quad D^2\psi - D^2\psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^3 = D^2\varphi ;$$

$$(3) \quad D^3\psi - D^3\psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^4 + 3(D^2\psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^5 = D^3\varphi ;$$

$$(4) \quad D^4\psi - D^4\psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^5 = N_4 , \text{ avec}$$

$$N_4 = D^4\varphi + 15(D^2\psi \circ f^{-1})^3 (Df^{-1})^7 - 10 D^3\psi \circ f^{-1} D^2\psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^6 ,$$

$$\begin{aligned} DN_4 = D^5\varphi - 10(D^3\psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^7 - 10 D^4\psi \circ f^{-1} D^2\psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^7 + \\ + 105 D^3\psi \circ f^{-1} (D^2\psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^8 - 105 (D^2\psi \circ f^{-1})^4 (Df^{-1})^9 . \end{aligned}$$

Posons $V = Df^{-1}$, $X_i = D^i\psi \circ f^{-1}$; on a $DV = -X_2 V^3$, $DX_i = X_{i+1} V$. On a, pour $k \geq 4$:

$$D^k\psi - D^k\psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^{k+1} = N_k = D^k\varphi + M_k ,$$

où M_k est un polynôme en V et X_i , $2 < i \leq k-1$, qui se déduit de M_{k-1} par la relation de récurrence :

$$M_k = -X_2 V^3 \frac{\partial M_{k-1}}{\partial V} + (V \sum X_{i+1} \frac{\partial M_{k-1}}{\partial X_i}) - k X_2 X_{k-1} V^{k+2} ,$$

$$M_3 = -3 X_2^2 V^5 .$$

Les coefficients de M_k sont entiers ; si on affecte V du poids 0 et chaque X_i du poids $i-1$, M_k est homogène de poids $k-1$. Pour $k \geq 4$, l'unique monôme de

M_k contenant la variable x_{k-1} est $-\frac{k(k+1)}{2} x_2 x_{k-1} v^{k+2}$. Pour $k > 5$, M_k est de degré 1 en x_{k-2} .

Enfin, DM_{k-1} est un polynôme en v et (x_i) , $2 \leq i \leq k-1$, qui a les mêmes propriétés que M_k à ceci près que le monôme en x_{k-1} est $-\frac{k(k-1)}{2} x_2 x_{k-1} v^{k+2}$.

8.4 On suppose dans la suite que α est un nombre de type constant ; on note γ sa constante de Markov.

Pour $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$, on pose $\varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$.

8.5 On suppose que $f \in F_\alpha^\infty$, $\frac{f+f^{-1}}{2} = \text{id} + \frac{1}{2}\varphi$. L'inégalité a priori conditionnelle qui suit est l'analogue de 6.7.

Proposition : Soient $1 < p_1 < \frac{3}{2}$, $1 < p < \frac{3}{2}$. Il existe une constante $c > 0$, et, pour tout $s \in]0, \frac{1}{2}[$, une constante $c_s > 0$ telles que l'inégalité :

$$\|D^2\psi\|_{L^{p_1}} \leq c_s \gamma < 1/2$$

implique :

$$\|D^2\psi\|_{L^{2-s}} \leq c \|(D^3\varphi)^+\|_{L^p}^{1/2}.$$

Démonstration : Ecrivons $f^{-1} = h \circ R_{-\alpha} \circ h^{-1}$, ce qui implique

$$Df^{-1} = \frac{Dh^{-1}}{Dh^{-1} \circ f^{-1}}.$$

On multiplie (3) par $(Dh^{-1})^{-4}$ et on compose à droite par h ; on obtient alors :

$$\frac{D^3\psi \circ h}{(Dh^{-1} \circ h)^4} - \frac{D^3\psi \circ h}{(Dh^{-1} \circ h)^4} \circ R_{-\alpha} + 3[(Df^{-1})^5 (Dh^{-1})^{-4} (D^2\psi \circ f^{-1})^2] \circ h = \frac{D^3\varphi \circ h}{(Dh^{-1} \circ h)^4} ;$$

En intégrant de 0 à 1, cela donne :

$$\begin{aligned}
 (*) \quad 3 \int_0^1 [(Dh^{-1})^{-4} (Df^{-1})^5 (D^2\psi \circ f^{-1})^2] \circ h \, d\theta &= \int_0^1 D^3\varphi \circ h (Dh)^4 \, d\theta \\
 &= \int_0^1 D^3\varphi (Dh^{-1})^{-3} \, d\theta .
 \end{aligned}$$

Définissons p' par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Le membre de droite de (*) est alors majoré par $\| (D^3\varphi)^+ \|_{L^p} \| (Dh^{-1})^{-3} \|_{L^{p'}}$.

Comme en 6.7, on peut, si c_s est assez petit, faire un changement de variable dans le premier membre de (*) et utiliser 3.5 pour voir que ce premier membre est minoré par $\| D^2\psi \|_{L^{2-s}}^2$; on a aussi, si c_s est assez petit, $\| (Dh^{-1})^{-3} \|_{L^{p'}} \leq 2$; la proposition en résulte. ■

Remarques : 1. On n'a pas dans la proposition fait d'hypothèse sur $\| D^2\varphi \|_{C^0}$.

2. On pourrait, comme en 6.7 et par une démonstration analogue obtenir aussi :

$$\| D^2\psi \|_{L^{2-s}} \leq c \gamma^{-1} \| D^3\varphi \|_{L^p}$$

3. Il n'y a pas ici de problème de trace comme en 6.8.6. En effet, $\| D^3\varphi \circ f \|_{L^p} \leq \| D^3\varphi \|_{L^p} \| Df^{-1} \|_{C^0}$, puisque f est de classe C^1 ; en écrivant l'équation sous la forme $\frac{f+f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi$, cela supprime complètement ce problème.

8.6 Les hypothèses sont les mêmes qu'en 8.5. On prend $s = \frac{1}{10}$, $\ell = \frac{1}{10}$, on définit s' , s_1 , $q(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ en 6.9 et on a alors $4 < q(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) < 5$.

Proposition : Pour $k \geq 4$, il existe $\varepsilon_k > 0$ telle que l'inégalité :

$$\| D^2\psi \|_{L^{2-s}} \leq \varepsilon_k \gamma, \quad s = 1/10,$$

implique l'estimation

$$\|D^k \psi\|_{L^5} \leq u_k (\|\varphi\|_{C^{k+1}}) ,$$

où u_k est une fonction positive croissante nulle à l'origine qui dépend de γ et k .

Démonstration : Pour $k = 4$, la même démonstration qu'en 6.9 fonctionne, en utilisant 6.9 (8) et (9) : l'hypothèse sur $\|D^2 \varphi\|_{C^0}$ n'est ici pas nécessaire : voir 6.10, Remarque 1 ; la seule différence est le terme $105 (D^2 \psi \circ f^{-1})^4 (Df^{-1})^9$ dans DN_4 , qu'on majore en norme L^{1+s} par $c \|D^2 \psi\|_{C^0}^4$; par 6.9 (8) et (9), on a :

$$\|D^2 \psi\|_{C^0}^4 \leq c \varepsilon_4^2 \gamma^2 \|D^3 \psi\|_{L^1}^2 \leq c_1 \varepsilon_4^3 \gamma^3 \|D^4 \psi\|_{L^q} ;$$

on obtient ainsi :

$$\|D^4 \psi\|_{L^5} \leq c \varepsilon_4 \|D^4 \psi\|_{L^5} + c_1 (\|D^4 \psi\|_{L^5}^{1/2} \|\varphi\|_{C^4} + \|\varphi\|_{C^5})$$

et on conclut comme en 6.9.

Pour $k \geq 5$, on procède comme en 6.11, en utilisant la forme des polynômes M_k et DM_k donnée en 8.3 . ■

Remarque : Il n'y a pas d'hypothèse faite sur $\|D^2 \varphi\|_{C^0}$.

8.7 Soit ℓ_1 l'entier défini en 5.6. On considère une suite (f_i) dans F_α^∞ et

on écrit $\frac{f_i + f_i^{-1}}{2} = Id + \frac{1}{2} \varphi_i$.

Corollaire : Soit $\varepsilon_{\ell_1+1} > 0$ le réel défini en 8.6 associé à $\ell_1 + 1$, (il ne dépend pas de γ). Supposons que, la suite (φ_i) converge dans la C^{ℓ_1+2} topologie vers une limite φ de classe C^∞ , et que pour tout i on ait :

$$\|D^2 f_i\|_{L^{2-\frac{1}{10}}} \leq \varepsilon_{\ell_1+1} \gamma ;$$

alors la suite f_i converge dans la C^{ℓ_1} -topologie vers un difféomorphisme f de classe C^∞ et de nombre de rotation α .

La démonstration, qui utilise 8.6, est la même que celle de 6.12 et 6.13. Notons l'absence d'hypothèse faite sur $\|\varphi\|_{C^2}$.

8.8. Remarque (cf. 6.14) : Par [II.2.6], pour tout nombre α de type constant on peut construire une suite $(f_i)_{i \geq 0}$ dans F_α^∞ , avec $\frac{1}{2}(f_i + f_i^{-1}) = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi_i$, telle que (φ_i) ait une limite φ dans la C^∞ -topologie, (f_i) ait une limite f dans la C^0 -topologie, mais f n'est pas de classe C^∞ . (Mais par [II], f et f^{-1} sont lipschitziens). On peut même supposer φ petit dans la $C^{3-\varepsilon}$ -topologie. Par 8.7, cette situation implique, pour i assez grand :

$$\|D^2 f_i\|_{L^{2-\frac{1}{10}}} \geq \varepsilon_{\ell_1+1} \gamma ;$$

il n'y a pas d'hypothèse faite sur $\|D^2 \varphi_i\|_{C^0}$.

8.9 On prend ici et dans la suite les dérivées au sens des distributions

On note $VB(\mathbb{T}^1)$ l'espace des fonctions à variations bornée sur $\mathbb{T}^1$:

$$VB(\mathbb{T}^1) = \{ \varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^1) \mid D\varphi = \mu \text{ est une mesure de Radon} \} ;$$

pour $\varphi \in VB(\mathbb{T}^1)$, $D\varphi = \mu$, on a $\int_{\mathbb{T}^1} d\mu = 0$, $\text{Var}(\varphi) = \|\mu\|$, où $\|\mu\|$ désigne la norme de μ .

Muni de la norme $\|\varphi\| = \left| \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \right| + \text{Var} \varphi$, $VB(\mathbb{T}^1)$ est un espace de Banach. La décomposition de Jordan qui à φ associe la partie positive μ^+ et la partie négative μ^- de $D\varphi = \mu$ est continue. On définit la valeur absolue $|\mu|$

de μ par $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$; si μ_1, μ_2 sont des mesures de Radon, on a

$$\| |\mu_1| - |\mu_2| \| \leq \| \mu_1 - \mu_2 \| .$$

L'inégalité a priori conditionnelle de 8.5 conduit à définir les espaces curieux ci-dessous ; pour $1 \leq p \leq +\infty$, soit

$V^{3,p}(\mathbb{T}^1) = \{ \varphi \in C^0(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0, D^3\varphi \text{ est une mesure de Radon } \mu, \text{ et } \mu^+ = \eta d\theta \text{ avec } \eta \in L^p(\mathbb{T}^1) \} .$

Si $\varphi \in V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$, $D^2\varphi$ appartient à $VB(\mathbb{T}^1)$ et $D\varphi$ est lipschitzienne, mais $V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ n'est pas contenu dans $C^2(\mathbb{T}^1)$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$, avec $D^3\varphi_i = \mu_i$, $\mu_i^+ = \eta_i d\theta$; on définit :

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{L^p} + \| \eta_1 - \eta_2 \|_{L^p} + \| \mu_1 - \mu_2 \| ,$$

et on munit $V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ de la topologie définie par la distance d .

L'ensemble $V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ est un cône positif complet : si

$\varphi_1, \varphi_2 \in V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \in V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$.

Il est facile de voir que l'hyperplan de $W^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ constitué par les fonctions d'intégrale nulle s'injecte continûment dans $V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$.

Exemple : Soit φ_2 la fonction $\mathbb{Z}$ -périodique qui coïncide avec l'identité sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, φ la fonction $\mathbb{Z}$ -périodique d'intégrale nulle sur $\mathbb{T}^1$ dont la dérivée seconde est φ_2 .

Alors $\varphi \in V^{3,\infty}(\mathbb{T}^1)$, mais φ n'appartient pas à $W^{3,1}(\mathbb{T}^1)$.

8.10 Pour $p \geq 1$ et $c > 0$, définissons :

$$N_c^p = \{ \varphi \in V^{3,p}(\mathbb{T}^1) \mid \| (D^3\varphi)^+ \|_{L^p} < c \} .$$

L'ensemble N_c^p est convexe donc connexe par arcs pour la topologie de $V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ définie en 8.9.

Proposition : L'ensemble $N_C^p \cap C^\infty(\mathbb{T}^1)$ est dense dans N_C^p pour la C^1 -topologie.

Démonstration : Soit $\varphi \in N_C^p$, $D^3\varphi = \mu = \mu^+ - \mu^-$.

Soient $(\eta_i^+)_{i \geq 0}$, $(\eta_i^-)_{i \geq 0}$ deux suites de fonctions positives de classes C^∞ sur $\mathbb{T}^1$ ayant les propriétés suivantes :

- i) la suite $(\eta_i^\pm d\theta)$ converge vaguement vers $\mu^\pm$;
- ii) $\|\eta_i\|_{L^p} < c$ pour tout $i \geq 0$;
- iii) $\int_0^1 \eta_i^+ d\theta = \int_0^1 \eta_i^- d\theta$ pour tout $i \geq 0$.

On peut par exemple choisir $\eta_i^\pm d\theta = \mu^\pm * (\ell_i d\theta)$, où (ℓ_i) est une suite de fonctions positives de classe C^∞ et d'intégrale 1 sur $\mathbb{T}^1$ telle que la suite $(\ell_i d\theta)$ converge vaguement vers la mesure de Dirac δ_0 en 0.

Soit alors, pour $i \geq 0$, φ_i la fonction d'intégrale nulle sur $\mathbb{T}^1$ dont la dérivée d'ordre 3 est $\eta_i^+ - \eta_i^-$. Il est alors facile de voir que φ_i converge vers φ dans la C^1 -topologie. ■

8.11 On suppose que $p > 1$, et que α et γ sont donnés comme précédemment.

Pour $1 \leq s \leq +\infty$, $D^{2,s}(\mathbb{T}^1)$ est l'ensemble $f = \text{Id} + \psi \in D^1(\mathbb{T}^1)$ tels que $\psi \in W^{2,s}(\mathbb{T}^1)$.

Théorème : Il existe un réel $\epsilon > 0$, dépendant seulement de p , ayant la propriété

suivante : pour tout $\varphi \in N_{\epsilon\gamma}^p$, il existe un unique $f \in D^{2,2-\frac{1}{10}}(\mathbb{T}^1)$ qui

vérifie :

$$\rho(f) = \alpha, \quad \frac{f+f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi,$$

$$\|D^2 f\|_{L^2 - \frac{1}{10}} \leq c \sqrt{\epsilon} \gamma,$$

où $c > 0$ est une constante.

De plus, si φ est de classe C^∞ , f est de classe C^∞ .

Démonstration : On note c_o le réel c_s déterminé en 8.5 pour $s = \frac{1}{10}$.

Considérons l'ensemble :

$$U_\alpha = \{f + f^{-1} - 2 \text{Id} \mid f \in F_\alpha^\infty, \|D^2 f\|_{L^{3/2}} < c_o \gamma\} .$$

Par 8.2, U_α est ouvert pour la C^∞ -topologie dans l'hyperplan de $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ formé par les fonctions d'intégrale nulle.

$$\text{Si } \varphi \in U_\alpha \cap N_{\varepsilon\gamma^2}^p, \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi = \frac{f + f^{-1}}{2}, \text{ on a par 8.5} :$$

$$(5) \quad \|D^2 f\|_{L^{2-\frac{1}{10}}} \leq c \sqrt{\varepsilon} \gamma ,$$

et si ε est assez petit, cela implique :

$$(6) \quad \|D^2 f\|_{L^{3/2}} \leq \frac{1}{2} c_o \gamma \leq \frac{1}{2}$$

$$(7) \quad \|D^2 f\|_{L^{2-\frac{1}{10}}} \leq \frac{1}{2} \varepsilon_{\ell_1+1} \gamma ,$$

où ε_{ℓ_1+1} est défini en 8.6, 8.7.

L'ensemble $V = N_{\varepsilon\gamma^2}^p \cap C^\infty(\mathbb{T}^1)$ est étoilé donc connexe pour la C^∞ -topologie. L'ensemble $U_\alpha \cap N_{\varepsilon\gamma^2}^p$ est ouvert dans V ; il est non vide car il contient 0 ; enfin, par 8.7, (6) et (7), il est fermé dans V . On a donc :

$$(8) \quad N_{\varepsilon\gamma^2}^p \cap C^\infty(\mathbb{T}^1) = U_\alpha \cap N_{\varepsilon\gamma^2}^p .$$

Soit $\varphi \in N_{\varepsilon\gamma^2}^p$; par 8.10, il existe une suite $(\varphi_i)_{i \geq 0}$ dans $N_{\varepsilon\gamma^2}^p \cap C^\infty(\mathbb{T}^1)$ qui converge vers φ dans la C^1 -topologie. Pour tout $i \geq 0$, la relation (8) montre qu'il existe un difféomorphisme $f_i \in F_\alpha^\infty$, vérifiant (5) (6) (7) et :

$$\frac{f_i + f_i^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_i .$$

COURBES INVARIANTES EN CLASSE C^3

La relation (6) implique que $\frac{1}{2} \leq Df_i \leq \frac{3}{2}$; et que les suites (f_i) , (f_i^{-1}) sont d'adhérence compacte pour la C^1 -topologie. Par conséquent une sous-suite (f_{i_n}) converge dans la C^1 -topologie vers une limite $f \in D^{2,2-\frac{1}{10}}(\mathbb{T}^1)$.

Par passage à la limite, on voit que :

$$\frac{f+f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi, \quad \rho(f) = \alpha,$$

et par 2.10, f vérifie aussi (5).

L'unicité de f résulte de 5.4 ou [II.2.5.4], et implique que f_i converge vers f dans la C^1 -topologie. ■

8.12 Remarques :

1. Soit α un nombre de type constant. Considérons l'application $h \rightarrow \frac{1}{2}(h \circ R_\alpha \circ h^{-1} + h \circ R_{-\alpha} \circ h^{-1})$ définie sur $\{h \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 (h - \text{Id}) = 0\}$ et sa différentielle $\mathcal{L}_\alpha$ en $h = \text{Id}$:

$$\mathcal{L}_\alpha(\Delta h) = \frac{1}{2}(\Delta h \circ R_\alpha + \Delta h \circ R_{-\alpha} - 2\Delta h).$$

L'opérateur $\mathcal{L}_\alpha$ est un automorphisme de $C_0^\infty(\mathbb{T}^1)$. Comme h doit être un homéomorphisme, on pourrait penser que $\mathcal{L}_\alpha^{-1}(\eta)$ est à variation bornée lorsque $\eta \in V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$. C'est le cas lorsque $\eta \in W^{3,p}(\mathbb{T}^1)$, $p > 1$, est d'intégrale nulle (cf. 3.2). Or en général, si $\eta_1 \in W^{3,1}(\mathbb{T}^1)$ est d'intégrale nulle, l'unique fonction ψ_1 d'intégrale nulle qui vérifie $\mathcal{L}_\alpha(\psi_1) = \eta_1$ au sens des distributions n'est pas à variation bornée.

En effet, si $D\psi_1$ appartient toujours à $L^1(\mathbb{T}^1)$, par le théorème du graphe fermé la distribution

$$T_\alpha = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2 (\cos 2\pi n \alpha - 1)} e^{2\pi i n \theta}$$

est un multiplicateur borné de $L^1(\mathbb{T}^1)$, car :

$$T_\alpha * D^3 \eta_1 = -(2\pi i)^2 D\psi_1, \quad \text{donc une mesure.}$$

Mais la même démonstration qu'en [H,XIII 4.6] montre que T_α n'est pas une mesure.

2. La remarque 1 explique pourquoi l'application $\varphi \in N_{\varepsilon\gamma^2}^p \rightarrow f \in D^{2,2-\frac{1}{10}}(\mathbb{T}^1)$ de 8.11 est seulement hôlderienne d'exposant 1/2 (et non lipschitzienne) au point $\varphi = 0$.

3. Il existe $\varepsilon_1 > 0$, $c > 0$ tel que, pour $\varphi \in N_{\varepsilon\gamma^2}^p \cap W^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\|D^3\varphi\|_{L^p} \leq \varepsilon_1 \gamma^2$, il existe $f \in D^{2,2-\frac{1}{10}}(\mathbb{T}^1)$ tel que $\frac{f+f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi$ et $\|D^2f\|_{L^2-\frac{1}{10}} \leq c \gamma^{-1} \|D^3\varphi\|_{L^p}$.

Ceci résulte de la remarque 2 de 8.5.

4. Les remarques 1 et 2 montrent le caractère semi-global du théorème 8.11. Il ne semble pas facile d'obtenir ce résultat par des techniques de perturbation, car ceci nécessiterait des techniques de prolongement de proche en proche qui ne sont pas simples, même en dimension finie.

*
*
*

CHAPITRE VI

THÉOREME DE LA COURBE TRANSLATÉE EN CLASSE BESOV.

1. INTRODUCTION .

Au § 4 nous démontrons le théorème de la courbe translatée de nombre de rotation un nombre de type constant, si on remplace la classe $C^{3+\beta}$ (i.e. $\varphi \in C^{3+\beta}(\mathbb{T}^2)$), par $\varphi \in W^{3,p}(\mathbb{T}^2)$ et le module de continuité L^p de $D^3\varphi$ satisfait à une condition de Hölder d'exposant $\frac{1}{p} + \beta$ avec $\beta > 0$ et $p > 1$. C'est ce que nous appellerons la classe $B^{3+\beta+1/p,p}$. Le théorème de la courbe translatée étant valable pour les nombres de type constant si $\|\varphi\|_{B^{3+\beta+1/p,p}}$ est assez petit.

Au § 2 nous exposons, pour la commodité du lecteur, ce dont nous avons besoin sur les espaces de Besov (avec les notations de [BL], l'espace $B_{p\infty}^a(\mathbb{T}^n)$ $a \in \mathbb{R}_+$, $p \geq 1$) ce que nous écrirons plus simplement $B^{a,p}(\mathbb{T}^n)$. Si $a \in \mathbb{N}$ on a $B^{a,\infty}(\mathbb{T}^n) \equiv C^a(\mathbb{T}^n)$.

Nous exposerons rapidement (avec des démonstrations) ce que nous utiliserons et nous espérons que notre présentation "self-contained" sera utile pour le lecteur non averti. Le lecteur peut aussi consulter [BL] et [N].

Nous utilisons la présentation, basée sur les opérateurs de lissages ou d'approximations, analogue à celle que nous avons adoptée pour les espaces $C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ [IV,2]. La raison en est que nous avons besoin de ces opérateurs d'approximations au § 3.

Le fait que l'on a besoin de supposer que $\varphi \in B^{3+\beta+1/p,p}(\mathbb{T}^2)$ (et non $\varphi \in B^{3+\beta,p}(\mathbb{T}^2)$) vient de ce que l'on doit considérer la trace sur $\{r=0\}$ de la fonction $(\theta, r) \longrightarrow \varphi_{\theta\theta}(\theta, r + \psi(\theta))$ où $\psi \in C^{2+\beta}(\mathbb{T}^1)$ et $\varphi_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$; on

perd par le théorème des traces un facteur $1/p$ (cf. 2.21).

Nous n'introduisons pas les espaces B_{pq}^a puisque pour $q \geq 1$, on a $B_{pq}^a \subset B_{p\infty}^a$ et pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $q \geq 1$, on a $B_{p\infty}^{a-\varepsilon} \subset B_{pq}^a$.

Au § 3.2 se produit la proposition qui fait tout marcher :

si $\eta \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$, $0 < \beta < 1$, $p > 1$, $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$ et si α est un nombre de type constant alors il existe un unique $\psi \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\int_0^1 \psi(\theta) d\theta = 0$ et $\psi - \psi \circ R_\alpha = \eta$.

Nous nous servons, pour démontrer 4.4, d'un certain nombre de lemmes sur les équations aux différences (i.e. § 3), comme les démonstrations sont les mêmes que celles de [IV,3] nous indiquons seulement les modifications qu'il faut apporter par rapport à [IV, 3 et 4].

Le théorème de la courbe translatée en classe Besov pour les courbes translatées de nombre de rotation de type constant est démontrée en 4.4 et est presque la même que celle de [IV, 5.6].

Au § 5, nous démontrons le théorème local de conjugaison des difféomorphismes du cercle $\mathbb{T}^1$ à des rotations de nombres de rotation un nombre de type constant en classe $B^{2+\beta,p}$ ($0 < \beta < 1$, $p > 1$) (l'analogue de [IV,4.2]).

Le fait que les démonstrations soient presque toujours les mêmes que celles de [IV] vient du fait que si on résout les équations aux différences finies (3.2, 3.6 et 3.8) si on part d'une donnée de classe $B^{1+\beta,p}$ sur $\mathbb{T}^1$, pour α un nombre de type constant, alors la solution est de classe C^β et de ce que nous avons utilisé dans [IV].

2. PRÉLIMINAIRES SUR LES ESPACES DE BESOV.

2.1 On pose $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ et on note les translations de $\mathbb{T}^n$ par $R_\alpha : \theta \rightarrow \theta + \alpha$ $\alpha \in \mathbb{T}^n$. Sur $\mathbb{T}^n$ on met la mesure de Haar normalisée, notée par $d\theta$. Dans la suite toutes les constantes dépendent de la dimension n de $\mathbb{T}^n$.

2.2 Si $1 \leq p < +\infty$, on désigne par L^p l'espace $L^p = L^p(\mathbb{T}^n, d\theta, \mathbb{R})$ avec la norme, si $\varphi \in L^p$,

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{T}^n} |\varphi(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p} \text{ et } \|\varphi\|_{L^\infty} = \sup_x \text{ess } |\varphi(x)|.$$

Soit μ une mesure de Radon sur un espace localement compact X ,
 $\varphi : t \in X \longrightarrow \varphi(t) \in B$ une application de X dans un espace de Banach B de norme notée $\|\cdot\|$.

Si $\int_X \|\varphi(t)\| d|\mu|(t) < +\infty$, alors φ est μ -intégrable et on a :

$$\left\| \int_X \varphi(t) d\mu(t) \right\| \leq \int_X \|\varphi(t)\| d|\mu|(t)$$

Nous l'appliquerons surtout ainsi : $\varphi \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$ et
 $t \in \mathbb{T}^n \longrightarrow \varphi \circ R_t \in L^p$.

2.3 Si $r \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ l'espace de Sobolev des classes de fonctions $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^n)$ telles que toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre r de φ (au sens des distributions) appartiennent à L^p .

$W^{0,p}(\mathbb{T}^n) = L^p$ et si $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ on peut identifier
 $W^{r,\infty}(\mathbb{T}^n) = \{\varphi \in C^{r-1}(\mathbb{T}^n), D^{r-1}\varphi \text{ est lipschitzienne}\}.$

On met sur $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, la norme : si $x = (x_1, \dots, x_k)$, $\|x\| = \sup_i |x_i|$.

Si $\varphi \in W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$, $0 \leq k \leq r$, on désigne par $D^k \varphi$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de φ (si $k \geq 1$, $D^k \varphi$ est une application k linéaire symétrique de $(\mathbb{R}^n)^k$ dans $\mathbb{R}$ à coefficients dans L^p) et pour $k = 0$, $D^0 \varphi = \varphi$. ($D^k \varphi$ est bien symétrique puisque les dérivées au sens des distributions vérifient le théorème de Schwarz).
On définit $\|D^k \varphi\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|D^k \varphi(x)\|^p dx \right)^{1/p}$ et $\|D^k \varphi\|_{L^\infty} = \sup_x \text{ess } \|D^k \varphi(x)\|$ où $\|D^k \varphi(a)\|$ désigne la norme au point x de la forme k -linéaire induite par la norme standard de $(\mathbb{R}^n)^k$.

Sur $W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ on met la norme

$$\|\varphi\|_{W^{r,p}} = \sup_{0 \leq i \leq k} \|D^i \varphi\|_{L^p},$$

l'espace $W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ est alors un espace de Banach. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ est dense dans $W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ pour sa topologie d'espace de Banach. (Cela suit en utilisant les opérateurs d'approximations définis en 2.8 et 2.9).

Si $r \geq 1$ et $\varphi \in W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$, alors on a la formule de Taylor

$$\varphi \circ R_t = \varphi + \dots + \frac{D^{r-1}\varphi}{(r-1)!}(t^{r-1}) + \int_0^1 \frac{(1-s)^{r-1}}{(r-1)!} D^r \varphi \circ R_{st}(t, \dots, t) ds$$

si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, c'est la formule de Taylor.

Si $\varphi \in W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$ par densité de C^∞ dans $W^{r,p}$, on interprète cette formule comme une égalité dans L^p et on interprète le dernier terme comme l'intégration de la fonction continue :

$$s \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{(1-s)^{r-1}}{(r-1)!} D^r \varphi \circ R_{st}(t, \dots, t) ds \in L^p$$

(en utilisant 2.2).

Si $p = +\infty$, c'est une égalité vraie pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}^n$ et pour la démontrer on utilise le fait que toute fonction lipschitzienne sur un $\mathbb{R}^k$ est presque partout dérivable et, si $k = 1$, elle est absolument continue.

2.4 Si $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^n)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^n$

$$* \quad \|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^p} \leq \|D\varphi\|_{L^p} \|t\|.$$

(Cela résulte immédiatement de 2.2 et 2.3 :

$$\begin{aligned} \|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^p} &= \left\| \int_0^1 D\varphi \circ R_{st}(t) ds \right\|_{L^p} \\ &\leq \int_0^1 \|D\varphi \circ R_{st}(t)\|_{L^p} ds \leq \|D\varphi\|_{L^p} \|t\| \end{aligned}$$

Si $1 < p \leq +\infty$, alors * implique que $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^n)$. (Voir [S, p.139]).

Lemme : Si $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^*$ alors on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \right\|_{L^p} &\leq \frac{1}{2} (\|\varphi \circ R_a - \varphi \circ R_{\tilde{a}}\|_{L^p} |a|^{-1} + \\ &\quad + \|\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \circ R_{ta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \circ R_{-ta} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}\|_{L^p}) \end{aligned}$$

où $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n$ et toutes les coordonnées de $\tilde{a}$ sont nulles sauf la i ème qui est égale à a .

Démonstration : On écrit

$$\varphi \circ R_a - \varphi + \varphi - \varphi \circ R_{-a} = 2a \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} + a \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \circ R_{sa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \circ R_{-sa} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \right) ds$$

et donc

$$2|a| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \right\|_{L^p} \leq \|\varphi \circ R_a - \varphi \circ R_{-a}\|_{L^p} + |a| \int_0^1 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \circ R_{sa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \circ R_{-sa} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} \right\|_{L^p} ds.$$

■

2.5 Si $1 \leq p < +\infty$ et $\varphi \in L^p$, alors l'application $t \in \mathbb{T}^n \rightarrow \varphi \circ R_t \in L^p$ est continue et a donc un module de continuité.

Si on choisit pour module de continuité $t \in \mathbb{R} \rightarrow |t|^\beta$, $0 < \beta < 1$, il est naturel de généraliser les espaces $C^\beta(\mathbb{T}^n)$, $0 < \beta < 1$, par

$$B^{\beta,p}(\mathbb{T}^n) = \{ \varphi \in L^p \mid \sup_{0 < \|t\|} \frac{\|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^p}}{\|t\|^\beta} = |\varphi|_{\beta,p} < +\infty \}.$$

Il revient au même de dire que la fonction suivante

$$t \in \mathbb{T}^n \rightarrow \varphi \circ R_t \in L^p$$

est höldérienne d'exposant β .

Pour $r \in \mathbb{N}$, on définit, si $0 < \beta < 1$,

$$B^{r+\beta}(\mathbb{T}^n) = \{ \varphi \in W^{r,p}(\mathbb{T}^n) \mid \text{chaque composante de } D^r \varphi \in B^{\beta,p}(\mathbb{T}^n) \}.$$

Avec la norme suivante $B^{r+\beta,p}$ est un espace de Banach :

$$\|\varphi\|_{B^{r+\beta,p}} = \|\varphi\|_{W^{r,p}} + |D^r \varphi|_{\beta,p}$$

$$\text{où } |D^r \varphi|_{\beta,p} = \sup_{0 < \|t\|} \frac{\|D^r \varphi \circ R_t - D^r \varphi\|_{L^p}}{\|t\|^\beta}.$$

On a, si $0 < \beta < 1$, $B^{r+\beta,\infty}(\mathbb{T}^n) = C^{r+\beta}(\mathbb{T}^n)$ et on écrit $\|\cdot\|_{B^{r+\beta,\infty}} = \|\cdot\|_{C^{r+\beta}}$

$$|\cdot|_{\beta,\infty} = |\cdot|_{\beta} = |\cdot|_{C^\beta}.$$

On convient que, si $r \in \mathbb{N}$, alors $B^{r,p}(\mathbb{T}^n) = W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$ et $\|\cdot\|_{W^{r,p}} = \|\cdot\|_{B^{r,p}}$.

Remarques : 1. En choisissant $a=1$ dans 2., il en résulte que, si $0 < \beta < 1$, alors $\varphi \rightarrow \|\varphi\|_{L^p} + |D\varphi|_{\beta,p}$ est une norme sur $B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{B^{1+\beta,p}}$.

Si $1 \leq p_1 \leq p_2$, alors on a

$$B^{\beta, p_2}(\mathbb{T}^n) \subset B^{\beta, p_1}(\mathbb{T}^n) \text{ et } \| \cdot \|_{\beta, p_1} \leq \| \cdot \|_{\beta, p_2}.$$

2. Si $\varphi \in B^{\beta, p}(\mathbb{T}^n)$, $0 < \beta < 1$, vérifie $\int \varphi(\theta) d\theta = 0$, alors on a

$$\| \varphi \|_{L^p} \leq | \varphi |_{\beta, p}.$$

En effet, comme

$$\varphi = \int (\varphi - \varphi \circ R_t) dt,$$

avec $t = (t_1, \dots, t_n)$ et $dt = dt_1 \otimes \dots \otimes dt_n$, on obtient

$$\| \varphi \|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{T}^n} \| \varphi \circ R_t - \varphi \|_{L^p} dt$$

et le résultat suit.

L'espace $B^{\beta, p}(\mathbb{T}^n)$ est l'espace de Besov, avec les notations de [BL], $B_{p, \infty}^{\beta}(\mathbb{T}^n)$ ou avec les notations de E. Stein $\Lambda_{\beta}^{p, \infty}$; [S]).

Pour $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, on définit $B^{r, p}(\mathbb{T}^n)$ par : l'espace des classes de fonctions $\varphi \in W^{r-1, p}$ telles que $D^{r-1}\varphi$ soit "smooth au sens de Zygmund"

(i.e. si $r = 1$, $\sup_{0 < |t|} (\| \varphi \circ R_t + \varphi \circ R_{-t} - 2\varphi \|_{L^p} / \| t \|) < +\infty$).

2.6 Par 2.4 * et [IV, 2.2.4], si $\varphi \in W^{1, p}(\mathbb{T}^n)$ et $0 < \beta < 1$, alors

$$| \varphi |_{\beta, p} \leq 2 \| \varphi \|_{L^p}^{1-\beta} \| D\varphi \|_{L^p}^{\beta};$$

et, si $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ et $\beta = (1 - \lambda) \beta_1 + \lambda \beta_2$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, alors on a :

$$| \varphi |_{\beta, p} \leq | \varphi |_{\beta_1, p}^{1-\lambda} | \varphi |_{\beta_2, p}^{\lambda}.$$

2.7 Proposition : Soient $0 < \beta < 1$ et $\varphi \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^n)$, alors on a

$$\| D\varphi \|_{L^p} \leq C | \varphi |_{\beta, p}^{\beta} | D\varphi |_{\beta, p}^{1-\beta}.$$

Démonstration : Pour $a > 0$, par 2.4, on a

$$\|D\varphi\|_{L^p} \leq \frac{1}{2} C \left(\frac{|\varphi|_{\beta,p}}{a^{1-\beta}} + 2a^\beta |D\varphi|_{\beta,p} \right)$$

où $C > 0$ est constante.

Si $|D\varphi|_{\beta,p} = 0$, l'inégalité est triviale puisque φ est constante.

Si $|D\varphi|_{\beta,p} \neq 0$, on pose $a = |\varphi|_{\beta,p} / |D\varphi|_{\beta,p}$, on remplace et on obtient l'inégalité cherchée. ■

2.8 Opérateurs d'approximations (voir IV, 2.5).

Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\text{supp}(\eta) \subset \{x \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$\eta(-x) = \eta(x)$$

$$\eta(1) = 1, \quad \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{2}$$

soit la transformée de Fourier de η :

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} \eta(\xi) d\xi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

où $\langle \xi, x \rangle = \sum \xi_i x_i$; et on pose, si $t \geq 1$, $\varphi_t(x) = t^n \varphi(tx)$.

On définit pour $\psi \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$

$$S_t \psi = \psi * \varphi_t = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y) \varphi_t(y) dy \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Par la formule d'inversion de Fourier, on a, si $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$S_t e^{2\pi i \langle k, \theta \rangle} = \eta\left(-\frac{k}{t}\right) e^{2\pi i \langle k, \theta \rangle};$$

$S_t \psi$ est donc un polynôme trigonométrique de degré $\leq n|t|$.

2.9 On rappelle que l'on convient que, si $r \in \mathbb{N}$, $B^{r,p}(\mathbb{T}^n) \equiv W^{r,p}(\mathbb{T}^n)$
et $\| \cdot \|_{B^{r,p}} \equiv \| \cdot \|_{W^{r,p}}$.

Proposition : Si a, b sont des nombres réels ≥ 0 , il existe des constantes C ne dépendant que de p et de $\sup([a], [b])$ (où $[a]$ est la partie entière de a)
telles que l'on ait, pour $t \geq 1$ et $\psi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^n)$:

- i) $\| S_t \psi \|_{B^{b,p}} \leq C \| \psi \|_{B^{a,p}}$, si $b \leq a$;
- ii) $\| S_t \psi \|_{B^{b,p}} \leq C t^{b-a} \| \psi \|_{B^{a,p}}$, si $a \leq b$;
- iii) $\| \psi - S_t \psi \|_{B^{b,p}} \leq C t^{b-a} \| \psi \|_{B^{a,p}}$, si $b \leq a$;
- iv) $\| S_t \psi \|_{C^0} \leq C_p t^{-\frac{n}{p}} \| \psi \|_{L^p}$

C_p étant une constante dépendant de p .

iv') $\| S_t \psi \|_{L^q} \leq C_{p,q} t^{n/\rho} \| \psi \|_{L^p}$ où $\frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}$ et $C_{p,q}$ est une constante
dépendant de p et q .

Démonstration : Par l'inégalité de Young (ou par 2.2) on a, si $b \leq a$,

$$\| \varphi_t * \psi \|_{B^{b,p}} \leq \| \varphi \|_{L^1} \| \psi \|_{B^{a,p}}$$

d'où i) .

Si b et $a \in \mathbb{N}$, ii) résulte par dérivation de i).

Si $b = a + k$, $k \in \mathbb{N}$, ii) résulte par dérivation du cas précédent et de i).

Si $a + k \leq b \leq a + k + 1$, en utilisant 2.7 on interpole la norme $B^{b,p}$ entre
 $B^{a+k,p}$ et $B^{a+k+1,p}$. Si $b = 0$ et $0 \leq a < 1$, iii) résulte de

$$S_t \psi - \psi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\psi \left(x - \frac{y}{t} \right) - \psi(x) \right) \varphi(y) dy$$

et on en conclut en utilisant 2.2

$$\|S_t \psi - \psi\|_{L^p} \leq C t^{-a} \|\psi\|_{a,B}.$$

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on raisonne comme ci-dessus en utilisant la formule de Taylor.

Si $b \in \mathbb{R}_+$, iii) suit par dérivation et par interpolation de $\|\psi - S_t \psi\|_{B^{b,p}}$ entre $B^{[b],p}$ et $B^{d,p}$ où $d = \inf([b] + 1, a)$, en utilisant 2.6.

iv) et iv') résultent de la formule de Young :

$$\|S_t \psi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_t\|_{L^p}, \|\psi\|_{L^p} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$$\|S_t \psi\|_{L^q} \leq \|\varphi_t\|_{L^{\rho}}, \|\psi\|_{L^p}, \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{p'} = 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}. \quad \blacksquare$$

2.10 Corollaire : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, $a < b$. Il existe une constante C ne dépendant que de $[b]$ et telle que, si $\psi \in B^{b,p}(\mathbb{T}^n)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, alors on ait

$$\|\psi\|_{B^{(1-\lambda)a+\lambda b,p}} \leq C \|\psi\|_{B^{a,p}}^{1-\lambda} \|\psi\|_{B^{b,p}}^{\lambda}.$$

Démonstration : On écrit

$$\psi = \psi - S_t \psi + S_t \psi$$

et donc par 2.9

$$\|\psi\|_{B^{(1-\lambda)a+\lambda b,p}} \leq C(t^{-\lambda(b-a)} \|\psi\|_{B^{a,p}} + t^{(1-\lambda)(b-a)} \|\psi\|_{B^{b,p}})$$

et on pose $t^{(b-a)} = \|\psi\|_{B^{a,p}} / \|\psi\|_{B^{b,p}}$ ($\|\psi\|_{B^{b,p}} \neq 0$, le cas contraire étant trivial). $\blacksquare$

2.11 Décomposition de $\psi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^n)$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

On définit, si $k \geq 0$, S_t étant les opérateurs définis en 2.8, la décomposition de ψ en blocs $(\Delta \psi_k)_{k \geq 0}$:

$$\Delta \psi_k = [S_{2^k} - S_{2^{k-1}}] \psi, \text{ si } k \geq 2,$$

$$\Delta \psi_1 = S_1 \psi - \Delta \psi_0$$

$$\Delta \psi_0 = \int_{\mathbb{T}^n} \psi(\theta) d\theta.$$

On a, si $k \geq 1$, par 2.8 :

$$\textcircled{1} \quad \text{supp}(\widehat{\Delta \psi_k}) \subset \{v \in \mathbb{Z}^n \mid 2^{k-2} \leq \|v\| \leq 2^k\}.$$

$$\textcircled{2} \quad \Delta \psi_k \text{ ne dépend que } \psi - \Delta \psi_0 \text{ (puisque } S_t C = C \text{ si } C \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{3} \quad D(\Delta \psi_k) = \Delta(D\psi)_k.$$

En appliquant 2.9 on a, en écrivant

$$\Delta \psi_k = S_{2^k} \psi - \psi + \psi - S_{2^{k-1}} \psi,$$

si $a = r + \beta$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta < 1$ et $0 \leq \beta' < \beta$:

$$\|\Delta \psi_k\|_{B^{\beta',p}} \leq 2C \|D^r \psi\|_{B^{\beta,p}} 2^{-(r+\beta-\beta')k}.$$

On a aussi (en utilisant 2.9 iii))

$$\|D(\Delta\psi_k)\|_{B^{\beta',p}} \leq 2C \|D^r\psi\|_{B^{\beta,p}} 2^{k(1-r-\beta+\beta')}.$$

2.12 En utilisant 2.4 * et 2.10 par la même démonstration que [IV, 2.6.3] en utilisant 2.5, on a :

Proposition : Soit $(\Delta f_k)_k \geq 0$ une suite de $w^{1,p}(\mathbb{T}^n)$ vérifiant pour un $\ell > 0$ et un $0 < \beta < 1$

- (i) $\|\Delta f_k\|_{L^p} \leq \ell 2^{-k\beta}$
- (ii) $\|D\Delta f_k\|_{L^p} \leq \ell 2^{(1-\beta)k}$;

alors on a $f = \sum_{k \geq 0} \Delta f_k \in B^{\beta,p}$

$$\|f\|_{B^{\beta,p}} \leq C_\beta \ell$$

où $C_\beta > 0$ est une constante ne dépendant que de $\beta > 0$.

2.13 Il en résulte par dérivation (en utilisant 2.9 ii) (i.e. l'inégalité de Bernstein) :

Corollaire : Soient $r \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$ et une suite $(\Delta\psi_k)_k \geq 1$ de polynômes trigonométriques vérifiant

$$\text{supp}(\widehat{\Delta\psi_k}) \subset \{v \in \mathbb{Z}^n : 2^{k-2} \leq \|v\| \leq 2^k\}$$

$$\|\Delta\psi_k\|_{L^p} \leq \ell 2^{-(r+\beta)k}$$

pour un $\ell > 0$, alors

$$\psi = \sum_{k \geq 1} \Delta \psi_k \in B^{r+\beta, p}$$

et on a

$$\|\psi\|_{B^{r+\beta, p}} \leq C_{r+\beta} \ell.$$

2.14 Corollaire : Soit $b > \frac{n}{p}$, $b - \frac{n}{p} \notin \mathbf{N}$, alors on a

$$B^{b, p}(\mathbb{T}^n) \subset C^{b - \frac{n}{p}}(\mathbb{T}^n).$$

Démonstration : Soit $\psi \in B^{b, p}(\mathbb{T}^n)$ et $(\Delta \psi_k)_k \geq 0$ la décomposition de 2.11, par 2.8 et 2.9 (iv) on a

$$\sum_{k=1}^s \Delta \psi_k = \Delta \psi_k$$

et donc

$$\|\Delta \psi_k\|_{L^\infty} \leq C 2^{\frac{kn}{p}} \|\Delta \psi_k\|_{L^p} \leq C 2^{-k(b - \frac{n}{p})} \|\psi\|_{B^{b, p}}$$

et on conclut par 2.13. ■

Remarque : Par la même démonstration (en utilisant 2.9 iv') on a, si $b > \frac{n}{\rho}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}$, $b - n/\rho \notin \mathbf{N}$, $B^{b, p}(\mathbb{T}^n) \subset B^{b - \frac{n}{\rho}, q}(\mathbb{T}^n)$.

2.15 Si ψ et $\varphi \in L^\infty \cap B^{\beta, p}(\mathbb{T}^n)$ ($0 < \beta < 1$) alors on a

$$|\psi \varphi|_{\beta, p} \leq \|\psi\|_{L^\infty} |\varphi|_{\beta, p} + \|\varphi\|_{L^\infty} |\psi|_{\beta, p}.$$

(Il suffit d'écrire $(\psi\varphi) \circ R_t - \psi\varphi = \psi \circ R_t (\varphi \circ R_t - \varphi) + \varphi (\psi \circ R_t - \psi)$).

2.16 Soient $0 < \beta < 1$, $\varphi \in C^\beta(\mathbb{T}^n)$ et $\psi \in B^{\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ alors on a :

$$|\psi.\varphi|_{\beta,p} \leq \|\varphi\|_{C^0} |\psi|_{\beta,p} + \|\psi\|_{L^p} |\varphi|_{\beta,\infty}$$

2.17 Soient $0 < \beta < 1$, $\varphi \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^n)$, $\psi \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ alors
 $\varphi\psi \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ et on a

$$\|\psi.\varphi\|_{B^{1+\beta,p}} \leq C(\|\varphi\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{L^p} + \|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{B^{1+\beta,p}})$$

où C est une constante.

Démonstration : On applique 2.16 à

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(\psi.\varphi) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta_i}$$

et donc

$$|D(\psi.\varphi)|_{\beta,p} \leq \|\varphi\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{L^p} + \|\psi\|_{B^{\beta,p}} \|\varphi\|_{C^1} + \|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{B^{1+\beta,p}} + \\ + \|\varphi\|_{C^\beta} \|D\psi\|_{L^p}$$

Si $\lambda = \beta / (1 + \beta)$, par 2.10, on a :

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{B^{\beta,p}} \|\varphi\|_{C^1} &\leq C_1 \|\psi\|_{L^p}^{1-\lambda} \|\psi\|_{B^{1+\beta,p}}^\lambda \|\varphi\|_{C^0}^\lambda \|\varphi\|_{C^{1+\beta}}^{1-\lambda} = \\ &= C_1 (\|\psi\|_{L^p} \|\varphi\|_{C^{1+\beta}})^{1-\lambda} (\|\psi\|_{B^{1+\beta,p}} \|\varphi\|_{C^0})^\lambda \\ \|\varphi\|_{C^\beta} \|\psi\|_{L^p} &\leq C_1 (\|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{B^{1+\beta,p}})^{1-\lambda} (\|\varphi\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{L^p})^\lambda \end{aligned}$$

où $C_1 > 0$ est une constante.

En remplaçant la moyenne géométrique par la moyenne arithmétique, on obtient en utilisant la remarque de 2.5

$$\|\psi\varphi\|_{B^{1+\beta,p}} \leq C_2 (\|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{L^p} + \|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{B^{1+\beta,p}} + \|\varphi\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{L^p})$$

C_2 étant une constante. Ceci démontre le résultat. ■

2.18 Si ψ et $\varphi \in B^{\beta,2p}(\mathbb{T}^n)$ ($0 < \beta < 1$) alors on a

$$\|\psi\varphi\|_{\beta,p} \leq \|\psi\|_{L^{2p}} \|\varphi\|_{\beta,2p} + \|\psi\|_{\beta,2p} \|\varphi\|_{L^{2p}} ;$$

si $\varphi \in B^{a,q_1}(\mathbb{T}^n)$ et $\psi \in B^{a,q_2}(\mathbb{T}^n)$ avec $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p}$ alors

$$\|\psi\varphi\|_{\beta,p} \leq \|\psi\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{\beta,p} + \|\psi\|_{\beta,q_2} \|\varphi\|_{L^{q_1}} .$$

(il suffit d'écrire $(\psi\varphi) \circ R_t - \psi\varphi = \psi \circ R_t (\varphi - \varphi \circ R_t) + \varphi (\psi \circ R_t - \psi)$ et d'appliquer l'inégalité de Hölder, chap. V, 2.3 et 2.4).

2.19 Proposition : Soient $0 < \beta < 1$, $p \geq 1$, il existe une constante C (dépendant de β et p) telle que pour tout difféomorphisme f de $\mathbb{T}^n$ de classe C^1 et $\varphi \in B^{\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ alors $\varphi \circ f \in B^{\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ et on a

$$\|\varphi \circ f\|_{B^{\beta,p}} \leq C \|\varphi\|_{B^{\beta,p}} \|\det Df^{-1}\|_{L^\infty} \|Df\|_{L^\infty}^\beta.$$

Démonstration : On décompose, comme en 2.11, φ en blocs $(\Delta\varphi_k)_{k \geq 0}$. On a

$$\begin{aligned} \|\Delta\varphi_k\|_{L^p} &\leq C 2^{-k\beta} \|\varphi\|_{B^{\beta,p}} \\ \text{et} \\ \|D\Delta\varphi_k\|_{L^p} &\leq C 2^{k(1-\beta)} \|\varphi\|_{B^{\beta,p}}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de changement de variable, il suffit d'appliquer 2.12 à $(\Delta\varphi_k \circ f)_{k \geq 0}$. Pour l'inégalité nous renvoyons à la démonstration [IV, 2.6.3]. (Cela résulte aussi de la théorie de l'interpolation, ce qui est la même chose que ce que nous venons de faire !) ■

2.20 Corollaire : Soient $0 < \beta \leq 1$ et $p \geq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout difféomorphisme de classe $C^{1+\beta}$, f , et $\varphi \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ alors $\varphi \circ f \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^n)$ et on a

$$\|\varphi \circ f\|_{B^{1+\beta,p}} \leq C \|\varphi\|_{B^{1+\beta,p}} \|\det Df^{-1}\|_{L^\infty} (\|Df\|_{C^\beta} + \|Df\|_{C^0}^{1+\beta}).$$

Démonstration : Par un argument de densité, on vérifie que la matrice dérivée de $D(\varphi \circ f) = D\varphi \circ f Df \in L^p$ et il suffit d'appliquer 2.16 et 2.19. ■

2.21 Traces : On se donne $0 < \beta < 1$, $p \geq 1$. On écrit $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^{n-1}$
 $\theta = (x, y) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^{n-1}$.

Nous allons définir l'opérateur trace

$$\text{Tr}_{\{0\} \times \mathbb{T}^{n-1}} : B^{1+\beta+\frac{1}{p}, p}(\mathbb{T}^n) \rightarrow B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^{n-1})$$

qui prolonge l'opérateur (on écrit aussi Tr pour $\text{Tr}_{\{0\} \times \mathbb{T}^{n-1}}$ pour alléger)

$$\text{Tr}(\varphi) = \varphi|_{x=0}, \text{ si } \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

(si $1 + \beta + \frac{1}{p} \in \mathbb{N}$ on convient que $B^{1+\beta+\frac{1}{p}, p}(\mathbb{T}^n) = W^{1+\beta+\frac{1}{p}, p}(\mathbb{T}^n)$).

Proposition : Il existe une constante C et un opérateur

$$\text{Tr}_{\{0\} \times \mathbb{T}^{n-1}} : B^{1+\beta+\frac{1}{p}, p}(\mathbb{T}^n) \longrightarrow B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^{n-1})$$

vérifiant

$$\|\text{Tr}_{\{0\} \times \mathbb{T}^{n-1}}(\varphi)\|_{B^{1+\beta, p}} \leq C \|\varphi\|_{B^{1+\beta+\frac{1}{p}, p}}.$$

Démonstration : Elle résulte de la théorie de l'interpolation [BL]. On peut
 (ce qui revient au même) procéder directement ainsi :

Par 2.11, on décompose $\varphi \in B^{1+\beta+\frac{1}{p}, p}(\mathbb{T}^n)$ en bloc $(\Delta \varphi_k)_{k \geq 0}$.

Par 2.9, iv) appliqué à la variable x

$$\|\Delta \varphi_k(\cdot, y)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^1)} \leq C_1 2^{\frac{k}{p}} \|\Delta \varphi_k(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{T}^1)},$$

d'où en intégrant

$$\begin{aligned} \|\Delta\varphi_k(O, y)\|_{L^p(\mathbb{T}^{n-1})} &\leq C_1 2^{\frac{k}{p}} \|\Delta\varphi_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \\ &\leq C_2 2^{\frac{k}{p}} 2^{-\left(1+\beta+\frac{1}{p}\right)k} \|\varphi\|_{B^{1+\beta+\frac{1}{p}}, p} \end{aligned}$$

(par 2.11)

C_1 et C_2 étant des constantes.

Par 2.8, $\Delta\varphi_k$ est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n2^k$ et donc en appliquant 2.9 ii) à $S_{2^{k+1}}(\Delta\varphi_k(O, y)) = \Delta\varphi_k(O, y)$, on a, si $r \in \mathbb{N}$,

$$\|\Delta\varphi_k(O, \cdot)\|_{W^{r,p}(\mathbb{T}^{n-1})} \leq C_3 2^{\left(r+\frac{1}{p}\right)k} 2^{-\left(1+\beta+\frac{1}{p}\right)k} \|\varphi\|_{B^{1+\beta+\frac{1}{p}}, p}$$

Pour conclure on définit

$$\text{Tr} \varphi = \sum_{k \geq 0} \Delta\varphi_k(O, \cdot)$$

et on a $\text{Tr} \varphi \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^{n-1})$ (ce qui résulte de 2.12). L'inégalité résulte aussi de 2.12. ■

2.22 Proposition : Soient $0 < \beta < 1$, $p \geq 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que si $\varphi \in B^{1+\beta+1/p, p}(\mathbb{T}^2)$ et $\psi \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ alors la fonction $\varphi(\cdot, \psi) \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^1)$ et on a

$$\|\varphi(\cdot, \psi)\|_{B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^1)} \leq C \|\varphi\|_{B^{1+\beta+1/p, p}(\mathbb{T}^2)} \cdot (\|D\psi\|_{C^0}^{1+\beta} + \|D\psi\|_{C^\beta}^\beta) .$$

Démonstration : Soit $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, $f(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + \psi(\theta_1))$. Comme $\varphi \in C^{1+\beta-\frac{1}{p}}(\mathbb{T}^2)$ on a :

$$\varphi(\cdot, \psi) = \varphi \circ f|_{\theta_2 = 0} = \text{Tr}_{\mathbb{T}^1 \times \{0\}} (\varphi \circ f)$$

Comme f est un difféomorphisme la proposition résulte de 2.20 et 2.21. ■

2.23 Proposition : Soit $a > 1/p$, $a \in \mathbb{R}$ alors $B^{a,p}(\mathbb{T}^1)$ est une algèbre topologique pour la multiplication des fonctions et on a si ψ et $\varphi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^1)$

$$\|\varphi\psi\|_{B^{a,p}} \leq C \|\varphi\|_{B^{a,p}} \|\psi\|_{B^{a,p}} \quad \text{où } C \text{ est une constante dépendant de } a.$$

Démonstration : Comme $B^{a,p}(\mathbb{T}^1) \subset C^0(\mathbb{T}^1)$ (cf. 2.14), pour $1/p < a < 1$, on utilise 2.15. Si $1 \leq a < 2$, on vérifie (par argument de densité si $1 \leq a < 2$, et directement, si $p = +\infty$) que si $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$

$$\textcircled{1} \quad D(\varphi\psi) = \psi D\varphi + \varphi D\psi.$$

Puis, on applique 2.16, en utilisant que $B^{a,p}(\mathbb{T}^1) \subset C^{a-1/p}(\mathbb{T}^1)$.

Si $a \geq 2$, on raisonne par récurrence sur $[a]$ en utilisant $\textcircled{1}$. ■

2.24 Proposition : Soit $a > 1/p$, si $\varphi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^1)$, $\varphi > 0$ alors $\frac{1}{\varphi} \in B^{a,p}(\mathbb{T}^1)$.

Démonstration : Si $\frac{1}{p} < a < 1$, on écrit

$$\frac{1}{\varphi} \circ R_t - \frac{1}{\varphi} = (\varphi - \varphi \circ R_t)(\varphi \varphi \circ R_t)^{-1}$$

et donc

$$|\varphi|_{a,p}^{-1} \leq |\varphi|_{a,p} \|\varphi^{-1}\|_{C^0}^2.$$

Si $1 \leq a < 2$, on vérifie que

$$(2) \quad D\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -D\varphi \varphi^{-2}$$

et on utilise 2.23.

Si $a \geq 2$, on raisonne par récurrence sur $[a]$ en utilisant (2). ■

2.25 Soit $a > 1 + \frac{1}{p}$ et

$$D^{a,p}(\mathbb{T}^1) = \{f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{R}) \mid f = \text{Id} + \varphi, \varphi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^1)\}.$$

On écrit $D^{a,\infty}(\mathbb{T}^1) = D^a(\mathbb{T}^1)$, si $a \notin \mathbb{N}^*$, notation introduite dans ([H], [IV],...)

On a

$$D^{a,p}(\mathbb{T}^1) \subset D^{a-\frac{1}{p}}(\mathbb{T}^1), \text{ si } a - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$$

et

$$D^{a,p}(\mathbb{T}^1) \subset D^1(\mathbb{T}^1)$$

où si $a \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,

$$D^a(\mathbb{T}^1) = \{f \in \text{Diff}_+^a(\mathbb{R}) \mid f = \text{Id} + \varphi, \varphi \in C^a(\mathbb{T}^1)\}.$$

2.26 Proposition : Soit $a > 1 + 1/p$. Si $\varphi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^1)$ et $f \in D^{a,p}(\mathbb{T}^1)$ alors
on a $\varphi \circ f \in B^{a,p}(\mathbb{T}^1)$.

Démonstration : Si $1 \leq a < 3$, on applique 2.19 et 2.20, si $a > 3$, on raisonne par récurrence sur $[a]$ en utilisant

$$D(\varphi \circ f) = D\varphi \circ f Df$$

et 2.23 . ■

2.27 Proposition : Soit $a > 1 + \frac{1}{p}$, alors $D^{a,p}(\mathbb{T}^1)$ est un groupe.

Démonstration : Si f et $g \in D^{a,p}(\mathbb{T}^1)$ on a

$$D(f \circ g) = Df \circ g Dg$$

et il suffit d'utiliser 2.26 et 2.23 pour conclure que $f \circ g \in D^{a,p}(\mathbb{T}^1)$.

Si $f \in D^{a,p}(\mathbb{T}^1) \subset D^1(\mathbb{T}^1)$ et on a $D(f^{-1}) = 1/Df \circ f^{-1}$ et il suffit d'utiliser 2.24 et 2.26 pour conclure que $f^{-1} \in D^{a,p}(\mathbb{T}^1)$. ■

2.28 Proposition : Soit $f \in D^{2+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ ($0 < \beta < 1$) alors $\text{Log } Df \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ et on a

$$|D \text{Log } Df|_{\beta,p} \leq |D^2 f|_{\beta,p} \|Df\|_{C^\beta} \|1/Df\|_{C^0}^2$$

$$\|Df\|_{C^\beta} \leq C(|D^2 f|_{\beta,p} + 1) .$$

où $C > 0$ est une constante.

Démonstration : On vérifie que $\text{Log } Df \in W^{1,p}(\mathbb{T}^1)$ avec

$$D \text{Log } Df = D^2 f / Df .$$

On applique 2.16, d'où

$$|D \text{Log } Df|_{\beta,p} \leq |D^2 f|_{\beta,p} \|1/Df\|_{C^\beta} .$$

On a

$$\|1/Df\|_{C^\beta} \leq \|Df\|_{C^\beta} \|1/Df\|_{C^0}^2$$

et par 2.14

$$\|Df - 1\|_{C^\beta} < C_1 \|D^2 f\|_{B^{\beta,p}} \quad . \quad \blacksquare$$

2.29 Proposition : Si $a > \frac{2}{p}$, alors $B^{a,p}(\mathbb{T}^2)$ est une algèbre topologique pour la multiplication des fonctions et on a si φ et $\psi \in B^{a,p}(\mathbb{T}^2)$

$$\|\varphi \psi\|_{B^{a,p}} \leq C \|\varphi\|_{B^{a,p}} \|\psi\|_{B^{a,p}}$$

où $C > 0$ est une constante dépendant de a .

Démonstration : Si $2/p < 1$, la même démonstration que 2.23 convient .

Si $2/p \geq 1$ on vérifie, en utilisant que $B^{a,p}(\mathbb{T}^2) \subset C^0(\mathbb{T}^2)$ que

$$(3) \quad D(\varphi\psi) = \varphi D\psi + \psi D\varphi \quad .$$

Si $1 < 2/p < a < 2$, par 2.18 on a

$$\|\varphi D\psi\|_{a-1,p} \leq \|\varphi\|_{\infty} \|D\psi\|_{a-1,p} + \|\varphi\|_{a-1,q_1} \|D\psi\|_{L,q_2}$$

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p} \quad . \quad \text{Soient } \frac{2}{\rho_1} = 1 \quad , \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{p} \quad , \quad \frac{2}{\rho_2} = \frac{2}{p} - 1 \quad , \quad \frac{1}{q_2} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{p} \quad .$$

Par la remarque de 2.14, on a $\varphi \in B^{a-1, q_1}(\mathbb{T}^2)$, $D\psi \in B^{a-1-(\frac{2}{p}-1), q_2} \subset L^{q_2}$

et il suit que $\varphi D\psi \in B^{a-1, p}$. On a de même $\psi D\varphi \in B^{a-1, p}$ et donc

$$\varphi\psi \in B^{a, p}(\mathbb{T}^2).$$

Si $2 \leq a < 3$, on considère $D^2(\varphi\psi)$ on a des termes $\psi D^2\varphi$ et $\varphi D^2\psi$ qu'on majore en utilisant 2.16 et 2.14. On a aussi le symétrisé de $D\varphi \cdot D\psi$ qu'on majore en utilisant 2.18 et la remarque de 2.14 :

$$D\varphi \in B^{q-1-\frac{1}{p}, 2p} \subset B^{a-2, 2p}$$

si $a > 3$, on raisonne par récurrence sur $[a]$ en utilisant (3).

2.30 Proposition : Soient $a > \frac{2}{p}$ et $x \in \mathbb{T}^2 \rightarrow A(x) \in GL(k, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, une matrice à coefficients dans $B^{a, p}(\mathbb{T}^1)$ alors la matrice A^{-1} a ses coefficients dans $B^{a, p}(\mathbb{T}^2)$.

La démonstration pour $k = 1$ est analogue à celle de 2.24 et 2.29 (en utilisant 2.29). Si $k \geq 2$ on se ramène au cas $k = 1$ en utilisant 2.29 en exprimant A^{-1} grâce aux cofacteurs ... ■

2.31 Soit $a > 1 + \frac{2}{p}$ (on a $1 < 1 + \frac{2}{p} < 3$). On pose $\text{Diff}^{a, p}(\mathbb{T}^2) = \{f \in \text{Diff}^1(\mathbb{T}^2) \mid Df \in B^{a-1, p}\}$ où $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^2)$ est le groupe des difféomorphismes de classe C^1 de $\mathbb{T}^2$.

En utilisant 2.29, 2.30, 2.19 et 2.20 par une démonstration analogue à celle de 2.26, 2.27 et 2.29 (si $\frac{2}{p} > 1$) on montre que $\text{Diff}^{a, p}(\mathbb{T}^2)$ est un groupe.

On définit si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert les espaces $B_{\text{loc}}^{a, p}(U)$ ainsi : $\varphi \in B_{\text{loc}}^{a, p}$, si pour toute fonction $\eta \in C^\infty$ dont le support est compact, contenu dans U et de diamètre $< 1/4$, alors la "fonction" obtenue par prolongement $\mathbb{Z}^n$ -périodique de $\eta \cdot \varphi$ est dans $B^{a, p}(\mathbb{T}^n)$ (φ étant une fonction mesurable Lebesgue).

Il suit du fait que $\text{Diff}^{a, p}(\mathbb{T}^2)$ est un groupe que le théorème des fonctions implicites est valable pour les espaces $B^{a, p}$:

Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $f \in B_{\text{loc}}^{a,p}$ ($a > 1 + \frac{2}{p}$) vérifiant $f(0) = 0$, $\det(Df(0)) \neq 0$, alors l'application réciproque, au voisinage de 0, vérifie $f^{-1} \in B_{\text{loc}}^{a,p}$.

3. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES EN CLASSE DE BESOV.

3.1 Dans la suite α est un nombre de type constant de constante de Markov γ :

$$\inf_{q \geq 1} q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \gamma > 0.$$

Par Dirichlet, on a $\gamma < 1$. Si $a \in \mathbb{R}_+$, on pose $C_0^a(\mathbb{T}^1) = \{ \varphi \in C^a(\mathbb{T}^1), \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0 \}$.

3.2 Proposition : Soient $p > 1$, $0 < \beta < 1$, il existe une constante $C \geq 0$ dépendant seulement de β et p telle que pour $\eta \in B^{r+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$, $r \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$ alors il existe un unique $\varphi \in C_0^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ vérifiant

$$\varphi - \varphi \circ R_\alpha = \eta$$

et de plus on a

$$|D^{r-1}\varphi|_\beta \equiv |D^{r-1}\varphi|_{\beta,\infty} \leq C \gamma^{-1} |D^r \eta|_{\beta,p}.$$

Démonstration : On décompose η en blocs comme 2.11, puis on utilise [IV,

3.8.3 remarque 1] et 2.5, remarque 2. ■

On a par la même démonstration que [IV, 3.9] :

3.3 Proposition : On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}_+$, pour tout $\eta \in B^{r+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $0 < \beta < 1$, $p > 1$, vérifiant $0 = \int_0^1 \eta(\theta) d\theta$ il existe un unique $L_{\alpha,\lambda}^{-1} \eta = \varphi_\lambda \in C_0^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ vérifiant

$$\varphi_\lambda - \lambda \varphi_\lambda \circ R_\alpha = \eta$$

et on a

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} |D^{r-1} \varphi_\lambda|_\beta \leq C' \gamma^{-1} |D^r \eta|_{\beta, p}$$

où C' est une constante dépendant de β et p mais indépendante de α et λ .

3.4 Proposition : On se donne $a \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$, $a > 0$, $0 < \beta < 1$, $p > 1$, il existe $\delta_0 > 0$ et une constante $C > 0$ telles que si $\eta \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^1)$, si σ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^1$ et si a vérifie $\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta_0 \gamma$ alors il existe d'uniques $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ et $v \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + v$$

$$\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0$$

et on a :

$$\|\psi\|_{C^\beta} + |v| \leq C \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} \|\eta\|_{L^p} + \|\eta\|_{B^{1+\beta, p}}).$$

La démonstration est la même que celle de [IV, 3.15] en utilisant 3.3, 2.17 et le fait que

$$\| \cdot \|_{B^{r+\beta, p}} \leq \| \cdot \|_{C^{r+\beta}}$$

Sous les mêmes hypothèses qu'en 3.4 et par la même démonstration que [IV, 3.16] en utilisant les remarque ci-dessus on a :

3.5 Proposition : Il existe $\delta > 0$ tel que si

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta \gamma$$

alors la fonction ψ de 3.4 vérifie :

$$\begin{aligned} \|D\psi\|_{C^\beta} &\leq C \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} (\|D\eta\|_{L^p} + \delta \gamma \|\psi\|_{C^0}) + \\ &+ \|Da\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{C^0} + \|\eta\|_{B^{2+\beta,p}}). \end{aligned}$$

3.6 Proposition : On se donne $0 < \beta < 1$, $p > 1$, alors il existe $\delta > 0$, $C_2 > 0$ telle que si $a \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ vérifie

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta.$$

si σ est une mesure de probabilité de $\mathbb{T}^1$ et si $\eta \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ alors il existe
d'uniques $\psi \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}^1} \psi d\sigma = 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + \nu$$

et de plus on a :

$$\|\psi\|_{C^\beta} + |\nu| \leq C_2 \gamma^{-1} \|\eta\|_{B^{1+\beta,p}}.$$

La démonstration est la même que celle de [IV, 3.17] en utilisant les mêmes remarques qu'en 3.4 et 3.5 à cette différence près qu'on décompose $\eta \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ en utilisant 2.10, en bloc $(\Delta \eta_k)_{k \geq 0}$, $\Delta \eta_0 = \int_0^1 \eta(\theta) d\theta$, $\eta_N = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \eta_k$, $\eta = \sum_{k \geq 0} \Delta \eta_k$ avec les inégalités si $k \geq 0$, $N \geq 1$ et $0 < \beta' < \beta$ (cf. 2.9 et 2.10) en supposant que $\|\eta\|_{B^{1+\beta,p}} = \gamma$:

$$\|\Delta \eta_k\|_{L^p} \leq c' 2^{-k(1+\beta)} \gamma$$

$$\|\Delta \eta_k\|_{B^{1+\beta'}, p} \leq c' 2^{-k(\beta - \beta')} \gamma$$

$$\|\Delta \eta_k\|_{B^{2+\beta'}, p} \leq c' 2^{k(1 - (\beta - \beta'))} \gamma$$

(1)

$$\|\eta_N\|_{B^{1+\beta'}, p} \leq c' \gamma$$

$$\|\eta_N\|_{B^{2+\beta'}, p} \leq c' 2^{N(1 - (\beta - \beta'))} \gamma$$

où c' est une constante dépendant seulement de β , β' et de p .

3.7 Par [IV, 4.2] il existe $\varepsilon_{2+\beta} > 0$ ($0 < \beta < 1$) et $C_{2+\beta} > 0$ telle que si $f \in D^{2+\beta}(\mathbb{T}^1)$ et vérifie :

(i)

$$\|f - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon_{2+\beta} \gamma$$

et $\rho(f) = \alpha$, alors

$$f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h \text{ avec un unique } h \in D^{1+\beta}(\mathbb{T}^1), \quad h(0) = 0$$

et on a

$$\|h - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\|h - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq C_{2+\beta} \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}}$$

On suppose que f vérifie (i). Par 2.19, si $\eta \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^1)$, alors on a

(ii)

$$\|\eta \circ h^{\pm 1}\|_{B^{1+\beta, p}} \leq c \|\eta\|_{B^{1+\beta, p}}$$

où C est une constante dépendante seulement de p et β .

On se donne $a \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ ($a > 0$) vérifiant

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta_{\beta,p} < 1/2$$

ce qui implique, si $\delta_{\beta,p} > 0$ est assez petit,

$$\|a \circ h - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta$$

où δ est le nombre de 3.6 (dépendant de $p > 1$ et $0 < \beta < 1$).

3.8 Proposition : Sous les hypothèses ci-dessus, si $\eta \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ ($p > 1$)

alors il existe un unique $\psi \in C_0^\beta(\mathbb{T}^1)$ et $v \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\psi - a \psi \circ f = \eta + v$$

et de plus on a

$$\|\psi\|_{C^\beta} + |v| \leq C \gamma^{-1} \|\eta\|_{B^{1+\beta,p}}$$

où $C > 0$ est une constante dépendant seulement de β et $p > 1$.

La démonstration est la même que celle [IV,4.10] en utilisant 3.6 et

(ii).

4. THÉORÈME DE LA COURBE TRANSLATÉE EN CLASSE BESOV

4.1 On se donne

$$F : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$$

$F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r))$ où α est un nombre de type constant de constante de Markov γ et $\varphi \in B^{3+\beta+1/p, p}(\mathbb{T}^2)$ où $p > 1$, $0 < \beta < 1 - \frac{1}{p}$.

4.2 Pour voir, que le théorème du § 4.4 implique le théorème des courbes invariantes pour les plongements de $\mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta]$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ qui ont la propriété d'intersection et qui sont dans $B_{loc}^{3+\beta+1/p, p}$ et assez voisin d'un difféomorphisme complètement intégrable T_1 , $T_1(\theta, r) = T_1(\theta, r) = (\theta + t(r) + \alpha, r)$, $t \in B_{loc}^{3+\beta+1/p, p}(\mathbb{R})$, $\frac{dt}{dr} \neq 0$ et $t(0) = 0$, nous renvoyons à la réduction de [IV.5.3]. Cette réduction n'utilise que le théorème des fonctions implicites, qui est, par 2.31 et 2.14, valable en classe $B_{loc}^{3+\beta+1/p, p}$ et on se ramène facilement au cas où $\varphi \in B^{3+\beta+1/p, p}(\mathbb{T}^2)$ et la continuité de courbe translatée (i.e. l'inégalité de 4.4).

4.3 Puisque, si $p > 1$, on a

$$C^{3+\beta+1/p}(\mathbb{T}^2) \subset B^{3+\beta+1/p, p}(\mathbb{T}^2) \subset C^{3-1/p+\beta}(\mathbb{T}^2)$$

(cf. 2.14) avec la notation pour $p = +\infty$,

$$B^{3+\beta, \infty} \equiv C^{3+\beta},$$

si $-1/p + \beta < 0$, alors $B^{3+\beta+1/p, p}(\mathbb{T}^2)$ ne contient pas et n'est pas contenu dans $C^3(\mathbb{T}^2)$.

On a $B^{3+\beta+1/p,p}(\mathbb{T}^2) \subset C^{2+\beta}(\mathbb{T}^2)$ puisque $3-1/p+\beta > 2+\beta$.

Le théorème suivant généralise [IV, 5.6] mais est différent du résultat du chapitre V.

En effet, si $-1/p+\beta < 0$, l'espace $B^{3+\beta+1/p,p}(\mathbb{T}^2)$ ne contient, ni n'est contenu dans $C^3(\mathbb{T}^2)$. Le résultat qui généraliserait le chapitre V, c'est que le corollaire [V.7.10] reste valable si on remplace la classe C^3 par $B^{3+1/p}_{p,1,loc}$ (avec les notations de [BL]). Cela résulte de la même démonstration qu'au chapitre V, en utilisant 6.8.1, remarque 6, et en montrant que 2.31 reste valable en classe $B^{3+1/p}_{p,1,loc}$ (en utilisant par exemple la théorie de l'interpolation).

4.4 On suppose que α est nombre de type constant de constante de Markov γ .

Théorème : Soient $0 < \beta < 1$, $p > 1$. Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de β et p telle que si $F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r))$ avec $\varphi \in B^{3+\beta+1/p,p}(\mathbb{T}^2)$ vérifie $\|\varphi\|_{B^{3+\beta+1/p,p}} \leq C_1 \gamma^2$ alors il existe une courbe C , graphe de $\psi \in C^{2+\beta}(\mathbb{T}^1)$ translatée par F de $\lambda \in \mathbb{R}$ (i.e. $L_{-\lambda} \circ F(C) = C$ où $L_{-\lambda}(\theta, r) = (\theta, r + \lambda)$) et telle que l'on ait

$$\|\psi\|_{C^{2+\beta}} + |\lambda| \leq C_2 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{B^{3+\beta+1/p,p}}$$

$$\rho(L_{-\lambda} \circ F|C) = \alpha.$$

Remarque : Je ne connais pas d'exemples montrant que le facteur $1/p$ dans $B^{3+\beta+1/p,p}$ est nécessaire bien que cela soit probablement le cas.

Démonstration : La démonstration est presque la même que celle [IV, 5.6], démonstration que nous allons reproduire. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $K_\varepsilon^{2+\beta} = \{f = \text{Id} + \alpha + \psi \in D^{2+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha, |D^2 \psi|_\beta \leq \varepsilon \gamma\}$. L'ensemble $K_\varepsilon^{2+\beta}$ est compact métrisable pour la C^2 -topologie car il est homéomorphe à l'ensemble

$\{\psi \in C^2_0(\mathbb{T}^1) \mid |D^2\psi|_\beta \leq \varepsilon\gamma\}$ compact convexe pour la C^2 -topologie (cf. [IV, 2.9]).
 L'ensemble $K^{2+\beta}_\varepsilon$ a la propriété du point fixe pour les applications continues :
 toute application continue $\Phi : K^{2+\beta}_\varepsilon \rightarrow K^{2+\beta}_\varepsilon$ a un point fixe par le théorème
 de Schauder-Tychonoff.

On suppose que $\varepsilon \leq \varepsilon_{2+\beta}$ et donc 3.7 s'applique. On suppose que
 $\|\varphi\|_{B^{3+\beta+1/p,p}} \leq \varepsilon' \gamma^2$, $\varepsilon' > 0$.

L'équation fonctionnelle qu'on doit résoudre est :

$$(1) \quad \psi \circ f - \psi = \varphi(\cdot, \psi) - \lambda$$

avec $f = \text{Id} + \psi + \alpha$, $\rho(f) = \alpha$, (i.e. pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$

$$\psi(f(\theta)) - \psi(\theta) = \varphi(\theta, \psi(\theta)) - \lambda)$$

et on cherche $f \in K^{2+\beta}_\varepsilon$.

On dérive (1), 2 fois par rapport à θ ($\varphi \in B^{3+\beta+1/p,p} \subset C^{2+\beta}$), d'où

$$D^2\psi \circ f (Df)^2 - D^2\psi A^{-1} = B_2$$

avec :

$$D^2\psi \circ f (Df)^2 \equiv (D^2\psi) \circ f (Df)^2$$

$A = (1 - D\psi \circ f + \varphi_x \circ G)^{-1}$ (qu'on suppose inversible)

$B_2 = \varphi_{\theta\theta} \circ G + 2 \varphi_{\theta r} \circ G D\psi + \varphi_{rr} \circ G (D\psi)^2$

$$\varphi_{\theta\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \varphi, \quad \varphi_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi, \dots, \quad G(0) = (\theta, \psi(\theta)) \quad .$$

On a donc

$$a D^2 \psi \circ f - D^2 \psi = H_2(\varphi, \psi)$$

avec $H_2(\varphi, \psi) = AB_2$, $a = A(Df)^2$.

Si ε et ε' sont assez petits, on peut supposer

$$(2) \quad \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta_{\beta, p} < \frac{1}{2}$$

où $\delta_{\beta, p}$ est défini en 3.8. La fonction A est donc inversible.

Par 2.20, $\varphi_{\theta\theta} \circ G, \varphi_{\theta r} \circ G, \varphi_{rr} \circ G \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^1)$.

Par 2.22, $H_2(\varphi, \psi) \in B^{1+\beta, p}(\mathbb{T}^1)$, et si (2) est vérifiée, on a par 2.17 et 2.22,

$$\|H_2(\varphi, \psi)\|_{B^{1+\beta, p}} \leq C \|\varphi\|_{B^{3+\beta+1/p, p}}$$

où $C > 0$ est une constante.

Par 3.8, il existe un unique $\psi \in C_o^{2+\beta}$ et $v \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$(3) \quad a D^{2\gamma} \psi \circ f - D^{2\gamma} \psi = H_2(\varphi, \psi) + v.$$

et

$$(4) \quad \|D^{2\gamma} \psi\|_{C^\beta} \leq C_2 \|\varphi\|_{B^{3+\beta+1/p, p}}$$

où C_2 est une constante.

Si ε et ε' sont assez petits (ε doit vérifier (1) et $\varepsilon \leq \varepsilon_{2+\beta}$) on définit $\Phi : K_{\varepsilon}^{2+\beta} \longrightarrow K_{\varepsilon}^{2+\beta}$ telle que si $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ alors

$$\Phi(f) = \text{Id} + \tilde{\psi} + \alpha + (\lambda_{\alpha}(\tilde{\psi}) - \alpha)$$

où $\lambda_{\alpha}(\tilde{\psi})$ est l'unique nombre tel $\rho(\Phi(f)) = \alpha$ et ψ vérifie (3) (cf. [IV, 2.9], en utilisant $|\lambda_{\alpha}(\tilde{\psi}) - \alpha| \leq \|\tilde{\psi}\|_{C^0}$, i.e. [IV, 2.9.6], et (4).

Par unicité, l'application $\Phi : K_{\varepsilon}^{2+\beta} \longrightarrow K_{\varepsilon}^{2+\beta}$ est continue pour la C^2 -topologie. L'application Φ a donc un point fixe f par le théorème de Schauder-Tychonoff d'où :

$$D^2(\psi \circ f - \varphi(\cdot, \psi)) = A^{-1}v.$$

En intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue, on a $v = 0$. D'où

$$\psi \circ f - \psi = \varphi(\cdot, \psi) - \lambda.$$

On intègre par rapport à l'unique mesure de probabilité invariante par $f \pmod{1}$ sur $\mathbb{T}^1$, d'où

$$\lambda = \int_{\mathbb{T}^1} \varphi(\theta, \psi(\theta)) d\mu(\theta),$$

et

$$|\lambda| \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{T}^2)}$$

l'autre inégalité résulte de (4). ■

5. COMPLÉMENT : THÉORÈME LOCAL DE CONJUGAISON DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE
EN CLASSE $B^{2+\beta,p}$, $0 < \beta$, ET $p > 1$.

5.1 On se donne $p > 1$ et $0 < \beta < 1$. Soit $D^{2+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ le sous-groupe de $D^1(\mathbb{T}^1)$ défini en 2.25. On suppose que α est un nombre de type constant ayant pour constante de Markov γ . On rappelle que l'on a

$$D^{2+\beta,\infty}(\mathbb{T}^1) \equiv D^{2+\beta}(\mathbb{T}^1) .$$

La proposition suivante généralise [IV, 4.2].

Proposition : Il existe $\varepsilon > 0$ dépendant de β et de $p > 1$, (mais pas de α ni γ)
tel que si $f \in D^{2+\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ vérifie $\|f - R_\alpha\|_{B^{2+\beta,p}} < \varepsilon\gamma$ et $\rho(f) = \alpha$ alors
 $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ avec $h \in D^{1+\beta,\infty}(\mathbb{T}^1)$, $h(0) = 0$.

On a de plus l'inégalité

$$\|h - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq C_2 \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{B^{2+\beta,p}}$$

où $C_2 > 0$ est une constante.

Esquisse de démonstration : Soit l'ensemble convexe

$$K^{1+\beta} = \{h \in D^{1+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid h(0) = 0, \|h - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq \frac{1}{2}\} .$$

Avec C^1 -topologie $K^{1+\beta}$ est compacte, convexe, métrisable et on construit comme dans [IV, 4.2] une application $\phi : K^{1+\beta} \rightarrow K^{1+\beta}$ continue pour la C^1 -topologie qui a donc, par la théorème de Schauder-Tychonoff, un point fixe et par la même démonstration que celle de [IV, 4.2] ce point fixe h donne le résultat.

Nous allons indiquer les petites différences avec [IV, 4.2] pour la construction de l'application Φ .

On utilise que (cf. 2.14) :

$$D^{2+\beta,p}(\mathbb{T}^1) \subset D^{2+\beta-1/p,\infty}(\mathbb{T}^1) \equiv D^{2+\beta-1/p}(\mathbb{T}^1).$$

Si $h \in K^{1+\beta}$, alors par 2.20 et 2.28 ,

$$(\text{Log } Df) \circ h \in B^{1+\beta,p}(\mathbb{T}^1),$$

et si $\varepsilon < 1/2$ alors $\|Df - 1\|_{C^0} < 1/2$ et on a l'inégalité

$$\|D((\text{Log } Df) \circ h)\|_{B^{\beta,p}} \leq C_1 \|f - R_\alpha\|_{B^{2+\beta,p}}$$

où $C_1 > 0$ est une constante.

Si $\lambda(f,h) = \int_0^1 (\text{Log } Df) \circ h \, d\theta$, alors par 3.2 il existe un unique $\varphi \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$ vérifiant

$$\int_0^1 \varphi(\theta) \, d\theta = 0,$$

$$(+ \quad (\text{Log } Df) \circ h + \lambda(f,h) = \varphi \circ R_\alpha - \varphi$$

et on a de plus, par 3.2 ,

$$\|\varphi\|_{C^\beta} \leq C \gamma^{-1} \|D(\text{Log } Df \circ h)\|_{B^{\beta,p}} \leq C_1 C_2 \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{B^{2+\beta,p}}$$

Le reste de la construction de Φ et de la démonstration est identique à celle [IV , 4.2]. ■

Remarque : On peut aussi montrer ce résultat par un argument de densité analogue à [IV, 4.9] (i.e. densité de $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ dans $D^{2+\beta,p}$ pour la $W^{2,p}$ topologie).

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

- [I], [II], ..., [IV] désignent les chapitres I, ..., IV du volume I, "Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, et [VI], ..., [VIII] les chapitres VI, ..., VIII de ce volume.
- [BL] J. BERGH et J. LÖFSTRÖM, Interpolation spaces, Springer Verlag, Berlin (1976).
- [B] G.D. BIRKHOFF, Note sur la stabilité, J. Math. 15 (1936), 339-344, et Collected Mathematical Papers, vol. II, 662-667, Dover, New York (1976).
- [BO] J.B. BOST, Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens, séminaire Bourbaki, Février 1985.
- [D] R. DOUADY, Applications du théorème des tores invariants, Thèse de 3ème cycle, Paris VII (1982).
- [H] M.R. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. math. I.H.E.S. 49 (1979), 5-233.
- [HB] M.R. HERMAN, Démonstration du théorème des courbes invariantes pour les difféomorphismes de l'anneau (manuscrit 1980), qui sera inclus dans "Théorèmes des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet et quelques applications aux systèmes dynamiques, cours à l'E.N.S. rédigé par J.B. Bost, en préparation.
- [HZ] M.R. HERMAN, Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant, Proc. Conf. in Chicago (1981), Conference on Harmonic Analysis

- in honour of Antoni Zygmund, ed. by W. Beckner et al., Wadsworth, Belmont (1983), vol. II, 708-725.
- [HD] M.R. HERMAN, Sur le groupe des difféomorphismes $\mathbb{R}$ -analytiques du tore, Lect. Notes in Math. n° 484, Springer Verlag, Berlin (1975), 36-42.
- [JN] F. JOHN et L. NIRENBERG, On functions of bounded mea- oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.
- [K] P. KOOSIS, Introduction to H_p spaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980), p. 328.
- [M] Y. MEYER, Sur un problème de Michael Herman, idem [HZ], p. 726-731.
- [N] S.M. NIKOL'SKII, Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer Verlag, Berlin (1975).
- [N₁] R. NARASIMHAN, Analysis on real and complex manifolds, Masson, Paris (1973).
- [P] J. PÖSCHEL, Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Systemen, Bonner Math. Schriften, 120 (1980).
- [R₁] H. RÜSSMANN, Über invariante Kurven differenzierbarer abbildungen eines Kreisinges, Nachr. Aka. Wiss. Göttingen, Math. Phys. II (1970), 67-105.
- [R₂] H. RÜSSMANN, On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus, Proc. Symposium on Dynamical Systems, Rio de Janeiro (1981), Lect. Notes in Math. n° 1007, Springer Verlag, Berlin (1983), 677-718.
- [S] E. STEIN, Singular integrals and differentiability properties, Princeton Univ. Press, Princeton (1970).
- [Y₁] J.C. YOCCOZ, Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, Preprint I.M.P.A., Rio de Janeiro, (1982), Ann. E.N.S. 17 (1984), 333-359.
- [Y₂] J.C. YOCCOZ, C^1 -conjugaison des difféomorphismes du cercle, Proc. Symposium on Dynamical Systems, Rio de Janeiro (1981), Lect. Notes in Math. n° 1007, Springer Verlag, Berlin (1983), 814-827.
- [Z] E. ZEHNDER, Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphisms, Lect. Notes in Math. n° 597, Springer Verlag (1977), 828-854.

*
*
*

CHAPITRE VII

CALCUL DES CONSTANTES INTERVENANT DANS LE THÉORÈME DE
LA COURBE TRANSLATÉE POUR UN NOMBRE DE ROTATION DE TYPE CONSTANT.

CHAPITRE VII

CALCUL DES CONSTANTES INTERVENANT DANS LE THÉORÈME DE
LA COURBE TRANSLATÉE POUR UN NOMBRE DE ROTATION DE TYPE CONSTANT ♦

Plan

1. Introduction.
2. Notations.
3. Rappels sur les espaces de Sobolev.
4. Les difféomorphismes du cercle et la fonction nombre de rotation.
5. Espaces de Sobolev et composition.
6. Espaces de Sobolev et compacité.
7. Inégalités.
8. Nombres de type constant et équations aux différences à coefficients constants.
9. Equations aux différences à coefficients variables.
10. Théorème local de conjugaison.
11. Constantes explicites pour le théorème de la courbe translatée.
12. Constantes explicites pour $(f + f^{-1})/2$.
13. Cas où la torsion est différente de 1 et généralisations.

♦ La démonstration du théorème des courbes translatées que nous donnons ici est celle que nous avons exposée en séminaire aux Houches ainsi qu'à l'IMPA en 1981. Dans ce chapitre, nous calculons toutes les constantes.

1. INTRODUCTION.

Nous nous proposons de calculer explicitement les constantes intervenant dans le théorème des courbes translatées (théorème 11.3) dans le cas d'un nombre de rotation α de type constant ayant une constante de Markov $\gamma = \inf_{p/q \in \mathbb{Q}} |q\alpha - p|$.

Soit $F: \mathbb{A}_\delta \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, où $\delta > 0$, $\mathbb{A}_\delta =]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}$, un plongement de classe C^4 de la forme :

$$(1) \quad F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r)) \quad .$$

Si $\|\varphi\|_{C^4(\mathbb{A}_\delta)} \leq c \gamma^2$ alors F translate une courbe C qui est le graphe d'une fonction ψ de $W^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ telle que le nombre de rotation de $\text{Id} + \psi + \alpha$ est α . Nous donnons en 11.11 des valeurs explicites de c qui dépendent de γ (et d'autres variables α, δ, φ). Une valeur qui convient dans tous les cas où $\delta \geq \gamma$ est $c = 5,04$ (voir 11.11, 4).

Nos résultats améliorent considérablement ceux obtenus par H. Rüssmann [R] dans le cas où α est de type constant.

Pour des difféomorphismes de la forme particulière :

$$(2) \quad F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta + r))$$

où $\varphi \in W^{4,2}(\mathbb{T}^1)$ vérifie $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ et où α est le nombre d'or : $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient en 12.5 le résultat suivant :

$$(3) \quad \text{si} \quad \|D^4 \varphi\|_{L^2} \leq 5,09$$

alors F laisse invariante une courbe C qui est le graphe d'une fonction ψ de $W^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ et pour laquelle $\rho(F|_C) = \alpha$.

Lorsque $\varphi(\theta) = \frac{a}{2\pi} \sin 2\pi\theta$, $a \in \mathbb{R}$, l'inégalité (3) est vérifiée pour $|a| \leq 1/34,5$.

La méthode utilisée pour démontrer ces théorèmes est presque identique à celle de [IV, 5.4 et 5.5] que nous avons donnée en classe $C^{4+\beta}$, $0 < \beta < 1$, à cette

différence près que l'on prend φ de classe C^4 et qu'on remplace la conclusion $\psi \in C^{3+\beta}(\mathbb{T}^1)$ par $\psi \in W^{3,2}(\mathbb{T}^1)$. La raison principale de cette modification est la suivante : si α est un nombre de type constant, r un entier ≥ 1 et $\eta \in W^{r,2}(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$, alors il existe une fonction $\psi \in W^{r-1,2}(\mathbb{T}^1)$ telle que

$$\textcircled{4} \quad \psi - \psi \circ R_\alpha = \eta$$

et

$$\|\psi\|_{W^{r-1,2}} \leq \text{cte.} \cdot \|\eta\|_{W^{r,2}}.$$

Un résultat analogue est valable lorsque $\eta \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ et $\psi \in C^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$. La constante est plus agréable à calculer et meilleure dans le cas des espaces de Sobolev que dans l'autre cas (cf. [IV, 3.8]).

Pour les difféomorphismes de la forme $\textcircled{1}$, nous prenons φ de classe C^4 et non $W^{4,2}$ pour éviter le problème de trace que nous avons rencontré au chapitre VI (si $\varphi \in W^{4,2}(\mathbb{A}_\delta)$, sa restriction à une courbe n'est plus nécessairement de classe $W^{4,2}$).

Les paragraphes 2 à 6 sont des rappels de résultats bien connus sur les espaces de Sobolev (nous en donnons les démonstrations pour la commodité du lecteur). Il est à noter que les inégalités du § 3 sont toutes optimales ; nous les utiliserons sans cesse par la suite.

Le § 7 contient des inégalités permettant d'améliorer en 10.5 les constantes de 10.3.

Au § 8, nous rappelons comment calculer la constante de Markov γ (sa plus grande valeur possible est $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, atteinte pour le nombre d'or) ; nous étudions ensuite l'équation aux différences $\textcircled{4}$ et donnons des valeurs explicites des constantes.

Au § 9, nous étudions l'équation

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + v$$

lorsque $\eta \in W^{1,2}$, $a \in W^{2,2}$, $a > 0$ et $(v, \psi) \in \mathbb{R} \times L^2$ (théorème 9.3), puis lorsque $\eta \in W^{2,2}$, $a \in W^{2,2}$, $a > 0$ et $(v, \psi) \in \mathbb{R} \times W^{1,2}$ (théorème 9.6).

Le théorème 9.3 est l'analogue de [IV, 3.11] avec, en plus, le calcul explicite de la constante. L'expression de celle-ci n'est pas la même suivant que le nombre $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta$ est nul ou non. Dans les estimations qui suivent, on retranchera chaque fois qu'on le pourra des intégrales qui sont nulles. Ces modifications peu intuitives améliorent les résultats numériques (cf. 11.3 et 12.5).

En 10.3, on montre que si f est un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1$ de classe $W^{3,2}$ et de nombre de rotation α tel que :

$$\|D^2 \log Df\|_{L^2} \leq c_1 \gamma, \quad ,$$

alors $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, où h est de classe $W^{2,2}$.

La valeur de la constante c_1 est donnée en 10.2. On pourrait utiliser le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff, mais nous préférons la méthode de [V, 3.4] qui fournit une meilleure constante c_1 .

Pour majorer $\text{Log } h_0 = \| \text{Log } Dh \|_{C^0}$, on est amené à résoudre en 10.4 une équation transcendante. Puis 10.5 affine cette majoration.

La démonstration du théorème des courbes translatées se trouve en 11.3. La constante c dépend de plusieurs paramètres $x, v, \gamma, r, \vec{k}$. Les nombres γ et r dépendent uniquement de α ; $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ est un vecteur dont les coordonnées vérifient $0 < k_3 \leq k_2 \leq k_1 \leq 1$ et des inégalités faisant intervenir les dérivées de φ (dans le cas général, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ et si φ est $\mathbb{Z}$ -périodique en θ et r , alors $k_1 = \frac{1}{4}$, $k_2 = \frac{1}{32}$ et $k_3 = \frac{1}{192}$).

Il est important de calculer chaque constante en fonction de $x, v, \gamma, r, \vec{k}$. On cherche ensuite à maximiser la fonction $c(x, v, \gamma, r, \vec{k})$ par rapport aux variables x et v . L'expression de c se trouve en 11.9. Nous donnons en 11.11 des résultats numériques obtenus grâce à une machine à calculer. Le choix de certains procédés de calcul (par exemple 10.5 et 10.6) est motivé par le fait que la fonction c prend numériquement son maximum pour des valeurs relativement petites de x et v .

Au § 12, nous étudions les difféomorphismes de la forme (2). On obtient pour le nombre d'or une constante environ trois fois plus grande. Le lecteur pourra consulter le graphique de 12.6.

Le § 13 est consacré au cas où la torsion e est différente de 1 et à diverses généralisations.

Les constantes obtenues sont, à mon avis, très raisonnables. Cependant leur rapport aux constantes optimales demeure un mystère. Je pense qu'il est de l'ordre de quelques unités (voir à ce propos les problèmes soulevés en 11.12, 4) et 12.6, 3)).

Ainsi que le montre [III, 8], ce travail ne donne qu'une idée de la taille d'une boule de $C^4(\mathbb{A}_\delta)$ dans laquelle on peut appliquer le théorème des courbes translitées de nombre de rotation donné. D'après [V], il serait plus naturel de considérer une boule en norme C^3 . Le calcul des constantes est beaucoup plus délicat dans ce cas.

Nous nous sommes efforcés de rendre ce chapitre aussi indépendant des autres que possible pour éviter un travail superflu au lecteur uniquement intéressé par les valeurs explicites des constantes.

REMERCIEMENTS

Je remercie Alain Chenciner pour ses nombreux encouragements, ainsi que Jean-Christophe Yoccoz qui m'a indiqué une démonstration de 3.8.

Je remercie aussi Daniel Goroff pour les notes qu'il a rédigées à partir des conférences que j'ai faites aux Houches en 1981, ainsi que Raphaël Douady qui m'a aidé à relire le manuscrit et à en améliorer considérablement la rédaction, et Marie-José Lécuyer qui l'a tapé avec soin et dextérité.

2. NOTATIONS.

On désigne par $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, aussi appelé cercle ; il est muni de la mesure de Haar normalisée $d\theta$.

Si $\alpha \in \mathbb{T}^1$, on note $R_\alpha : \theta \mapsto \theta + \alpha$ la translation de vecteur α (ou rotation d'angle α) de $\mathbb{T}^1$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p = L^p(\mathbb{T}^1, d\theta, \mathbb{R})$ est la classe des fonctions de puissance p -ième intégrable, munie de la norme :

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

De l'inégalité de Hölder, on déduit que $\|\varphi\|_{L^p}$ est une fonction croissante de p .

L'espace L^∞ des fonctions essentiellement bornées de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$ est muni de sa norme usuelle $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Si $\varphi \in L^p$ et $\psi \in L^\infty$, on a l'inégalité évidente :

$$\|\varphi \cdot \psi\|_{L^p} \leq \|\psi\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^p}.$$

Pour $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^r(\mathbb{T}^1)$ l'espace des fonctions de classe C^r de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$, identifiées aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $\mathbb{Z}$ -périodiques.

On munit $C^0(\mathbb{T}^1)$ de la norme :

$$\|\varphi\|_{C^0} = \|\varphi\|_{L^\infty} = \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\varphi(\theta)|$$

et si $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, on munit $C^r(\mathbb{T}^1)$ de la norme :

$$\|\varphi\|_{C^r} = \|\varphi\|_{C^0} + \|D^r \varphi\|_{C^0},$$

où $D^r \varphi$ est la dérivée r -ième de φ .

Pour $r \in \mathbb{N}$, on considère l'espace de Sobolev :

$$W^{r,2} = W^{r,2}(\mathbb{T}^1) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{T}^1) \mid \|D^r \varphi\|_{L^2} < +\infty\},$$

où $D^r \varphi$ désigne la dérivée r -ième de φ au sens des distributions :

$$\text{si} \quad \varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n \theta}$$

$$\text{alors} \quad D^r \varphi = (2\pi i)^r \sum_{n \neq 0} n^r a_n e^{2\pi i n \theta}.$$

L'espace $W^{r,2}$ muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{W^{r,2}} = (|a_0|^2 + \|D^r \varphi\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert ; sa topologie est appelée $W^{r,2}$ -topologie.

$$\text{On pose } W_0^{r,2} = \{\varphi \in W^{r,2} \mid \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0\}.$$

3. RAPPELS SUR LES ESPACES DE SOBOLEV.

3.1 Quelques propriétés élémentaires.

On a l'inclusion continue : $C^r(\mathbb{T}^1) \hookrightarrow W^{r,2}(\mathbb{T}^1)$.

Les polynômes trigonométriques sont denses dans $W^{r,2}$.

Si $s < r$, l'inclusion $W^{r,2} \hookrightarrow W^{s,2}$ est compacte (raisonner sur les coefficients de Fourier).

L'opérateur de dérivation D induit une isométrie de $W_0^{r,2}$ sur $W_0^{r-1,2}$.

Si $\varphi \in W^{1,2}$, alors φ est absolument continue et $\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y D\varphi(t) dt$ pour tous réels x et y , en effet les fonctions φ et $\psi : \theta \mapsto \int_0^\theta D\varphi(t) dt$ de L^2 , ayant les mêmes coefficients de Fourier d'indice non nul, diffèrent d'une constante.

3.2 Lemme : Si $\varphi \in W^{1,2}$, alors on a, pour x, y , réels :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \|D\varphi\|_{L^2} |y - x|^{1/2}.$$

Démonstration : On peut supposer $x < y < x+1$, et on écrit :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = \int_x^{x-1} \chi_{[x,y]}(t) D\varphi(t) dt,$$

où $\chi_{[x,y]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x,y]$.

Le lemme résulte alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

3.3 Lemme : Si $\varphi \in W^{1,2}$, alors $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ et on a :

$$\|\varphi - \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta\|_{C^0} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2}.$$

Démonstration : Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si

$$\varphi(\theta) - \int_0^1 \varphi(t) dt = \sum_{n \neq 0} a_n e^{2\pi i n \theta},$$

$$\text{on a : } \sum_{n \neq 0} |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2}.$$

Remarque : L'inégalité est optimale, ainsi que le montre l'exemple suivant :

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2\pi n \theta.$$

3.4 Lemme : Soit $\varphi \in W^{1,2}$ une fonction qui s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2}.$$

Démonstration : Soit $y \in [x_0, x_0 + 1]$ tel que $|\varphi(y)| = \|\varphi\|_{C^0}$. On a

$$\begin{aligned} 2|\varphi(y)| &= \left| \int_{x_0}^y \mathrm{D}\varphi(t) dt \right| + \left| \int_y^{x_0+1} \mathrm{D}\varphi(t) dt \right| \\ &\leq \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^1} \\ &\leq \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Remarque : L'inégalité est optimale ainsi que le montre l'exemple suivant

$$\varphi(\theta) = |\theta| \text{ si } \theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ et } \varphi \text{ est } \mathbb{Z}\text{-périodique.}$$

3.5 Proposition : Si $r \geq 1$, $W^{r,2}$ est une algèbre de Banach pour la multiplication des fonctions et on a, pour tout $\varphi, \psi \in W^{r,2}$, la formule :

$$D(\varphi \cdot \psi) = D\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot D\psi.$$

Démonstration : Soient φ et ψ deux polynômes trigonométriques. On a :

$$D^r(\varphi \cdot \psi) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} D^k \varphi \cdot D^{r-k} \psi$$

donc

$$\begin{aligned} \|D^r(\varphi \cdot \psi)\|_{L^2} &\leq \|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{W^{r,2}} + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \|\varphi\|_{W^{r,2}} \|\psi\|_{C^{r-1}} \\ &\leq C_r \|\varphi\|_{W^{r,2}} \|\psi\|_{W^{r,2}}. \end{aligned}$$

Ces inégalités s'étendent, par densité, à des fonctions φ et ψ quelconques de $W^{r,2}$, ainsi que l'égalité

$$D(\varphi \cdot \psi) = \psi D\varphi + \varphi D\psi$$

valable pour tout couple de polynômes trigonométriques. ■

3.6 Soit $\varphi \in W^{r,2}(\mathbb{T}^1)$. L'inégalité

$$\left\| \varphi - \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{(2\pi)^r} \|D^r \varphi\|_{L^2}$$

résulte de la décomposition de φ en série de Fourier ; la fonction $\theta \rightarrow \sin 2\pi\theta$ réalise l'égalité.

3.7 Proposition : Soit $\varphi \in W^{2,2}(\mathbb{T}^1)$. On a :

$$\|\varphi - \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta\|_{C^0} \leq \frac{1}{12\sqrt{5}} \|D^2\varphi\|_{L^2}.$$

Si $\varphi \in W^{3,2}(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$\|\varphi - \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta\|_{C^0} \leq \frac{1}{12\sqrt{210}} \|D^3\varphi\|_{L^2}.$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du lemme 3.3; on utilise les formules [B]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}. \quad \blacksquare$$

Remarque : Ces inégalités sont optimales (considérer les fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos 2\pi n\theta$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \cos 2\pi n\theta$). En particulier, elles sont plus fines que celles obtenues en appliquant successivement 3.3 et 3.6.

3.8 Proposition [N] : Soit $\varphi \in C^3(\mathbb{T}^1)$ telle que $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$. On a les inégalités :

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq u_k \|D^k\varphi\|_{C^0}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\text{où } u_1 = \frac{1}{4}, \quad u_2 = \frac{1}{32} \text{ et } u_3 = \frac{1}{192}.$$

Démonstration (J.C. Yoccoz [Y]) : Nous la donnons pour $k=1$ et laissons les autres cas au lecteur. Supposons que $\varphi(0) = \|\varphi\|_{C^0}$ et que $\|D\varphi\|_{C^0} = 1$. On a, pour tout $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\varphi(\theta) \geq \varphi(0) - |\theta|$, donc

$$0 \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\varphi(0) - |\theta|) d\theta = \varphi(0) - \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Remarque : Ces inégalités sont optimales.

4. LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE ET LA FONCTION NOMBRE DE ROTATION.

4.1 Pour $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, on considère le groupe

$$D^r(\mathbb{T}^1) = \{f \in \text{Diff}^r(\mathbb{R}) \mid f = \text{Id} + \psi, \psi \in C^r(\mathbb{T}^1)\}$$

des C^r -difféomorphismes de $\mathbb{R}$ commutant à la translation $x \mapsto x + 1$. Muni de la D^r -topologie, c'est un groupe topologique qui est le revêtement universel du groupe des C^r -difféomorphismes de $\mathbb{T}^1$ préservant l'orientation.

On rappelle que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha \in \mathbb{T}^1$), $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ désigne la translation de vecteurs α (resp. rotation d'angle α).

4.2 Soit $\rho : D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à un homéomorphisme $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ associe son nombre de rotation $\rho(f)$. Ce nombre est caractérisé de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (f^n(x) - x) .$$

Nous rappelons quelques propriétés du nombre rotation qui seront utiles par la suite (voir [H, II]).

- (i) l'application $\rho : D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour la C^0 -topologie ;
- (ii) $\rho(R_1 \circ f) = \rho(f) + 1$;
- (iii) $\rho(R_\alpha) = \alpha$;
- (iv) $\rho(f) = \rho(g^{-1} \circ f \circ g)$;
- (v) si $\rho(f) = \alpha$ et $n \in \mathbb{Z}$, l'homéomorphisme $f^n \circ R_{-n\alpha}$ a un point fixe, ou encore la fonction $f^n - R_{n\alpha}$ s'annule en au moins un point ;
- (vi) si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f) = \alpha$, alors $\lambda = 0$ (voir [H, III.4]).

4.3 La propriété 4.2 (vi) montre que si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$, il existe un unique nombre $\lambda_\alpha(f) \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\rho(R_{\lambda_\alpha}(f) \circ f) = \alpha \quad .$$

De plus, l'application $\lambda_\alpha : D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue pour la C^0 -topologie (cela résulte de l'unicité du nombre $\lambda_\alpha(f)$, cf. [H, III.4.2]). D'après 4.2 (v), si $f = \text{Id} + \psi \in D^0(\mathbb{T}^1)$, on a l'inégalité :

$$|\lambda_\alpha(f) - \alpha| \leq \|\psi\|_{C^0} \quad .$$

4.4 Soient e et ψ des fonctions de $C^1(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $e > 0$ et, pour tout λ tel que $|\lambda| \leq \lambda_0 = \|\psi\|_{C^0}$, l'inégalité :

$$1 + D(e(\psi + \lambda)) > 0 \quad .$$

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on peut trouver un unique nombre $\tilde{\lambda}_\alpha(\psi) \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait :

$$\rho(\text{Id} + e(\psi + \tilde{\lambda}_\alpha(\psi)) + \alpha) = \alpha \quad .$$

En effet, soit $f_\lambda = \text{Id} + e(\psi + \lambda) + \alpha$. D'après 4.2 (v), on a $\rho(f_{-\lambda_0}) \leq \alpha$ et $\rho(f_{\lambda_0}) \geq \alpha$. L'existence de $\tilde{\lambda}_\alpha(\psi)$ est assurée par la continuité de l'application $\lambda \mapsto \rho(f_\lambda)$ (qui est bien définie tant que $|\lambda| \leq \lambda_0$). Son unicité résulte de [H, III.4.1.5]. De même que précédemment, celle-ci entraîne la continuité de la fonction $\tilde{\lambda}_\alpha$ pour la C^0 -topologie induite sur l'ensemble des fonctions $\psi \in C^1(\mathbb{T}^1)$ vérifiant (+). Par construction, on a l'inégalité :

$$|\tilde{\lambda}_\alpha(\psi)| \leq \|\psi\|_{C^0} \quad .$$

5. ESPACES DE SOBOLEV ET COMPOSITION.

5.1 Rappel.

Pour qu'une fonction $\varphi: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ soit absolument continue, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) φ est continue et à variation bornée ;
- (ii) pour tout compact $K \subset \mathbb{T}^1$ de mesure de Lebesgue nulle, $\varphi(K)$ a aussi une mesure de Lebesgue nulle (voir [HS]).

5.2 Soient $\varphi: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, de variation totale $\text{Var } \varphi$, φ un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1$ et $\psi: \varphi(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, de rapport de Lipschitz $\text{Lip } \psi$. Alors les fonctions $\varphi \circ f$ et $\psi \circ \varphi$ sont à variation bornée et on a :

$$\text{Var } (\varphi \circ f) = \text{Var } (\varphi)$$

$$\text{Var } (\psi \circ \varphi) \leq \text{Lip } (\psi) \text{Var } (\varphi) .$$

5.3 Changement de variable.

Si $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^1)$, $1 \leq p < \infty$, et $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = \int_0^1 \varphi \circ f(\theta) Df(\theta) d\theta .$$

On en déduit l'inégalité :

$$\|\varphi \circ f\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|Df^{-1}\|_{C^0}^{1/p} .$$

5.4 Lemme : Si $\varphi \in W^{1,2}$ et $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$ alors $\varphi \circ f \in W^{1,2}$, $D(\varphi \circ f) = (D\varphi) \circ f \cdot Df$ et

$$\|\varphi \circ f\|_{W^{1,2}} \leq \|\varphi\|_{C^0} + \|D\varphi\|_{L^2} \|Df\|_{C^0}^{1/2} .$$

Démonstration : D'après 5.1 et 5.2, $\varphi \circ f$ est absolument continue et on a $D(\varphi \circ f) = (D\varphi) \circ f \cdot Df$ dans L^1 . Le fait que $D(\varphi \circ f) \in L^2$ et l'inégalité du lemme résultent de 5.3. ■

5.5 Pour tout entier $r \geq 2$, on définit

$$D^{r,2}(\mathbb{T}^1) = \{f \in D^1(\mathbb{T}^1) \mid f - \text{Id} \in W^{r,2}\}.$$

D'après 3.2, on a les inclusions continues :

$$D^{r,2}(\mathbb{T}^1) \subset D^{r-1/2}(\mathbb{T}^1) \subset D^{r-1}(\mathbb{T}^1).$$

Par récurrence sur r , en utilisant 3.3, 3.5 et 5.4, on montre la proposition suivante :

Proposition : Si $r \geq 2$, $\varphi \in W^{r,2}$ et $f \in D^{r,2}(\mathbb{T}^1)$ alors $\varphi \circ f \in W^{r,2}$ et $f^{-1} \in D^{r,2}(\mathbb{T}^1)$.

L'ensemble $D^{r,2}(\mathbb{T}^1)$ est donc un groupe pour la composition.

5.6 Lemme : Si $\varphi \in W^{2,2}$ et $f \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$\|D^2(\varphi \circ f)\|_{L^2} \leq \|D^2\varphi\|_{L^2} (\|Df\|_{C^0}^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \|D^2f\|_{L^2}).$$

Démonstration : On a :

$$D^2(\varphi \circ f) = D^2\varphi \circ f \cdot (Df)^2 + D\varphi \circ f \cdot D^2f$$

donc

$$\|D^2(\varphi \circ f)\|_{L^2} \leq \|D^2\varphi \circ f \cdot (Df)^2\|_{L^2}^{1/2} \|Df\|_{C^0}^{3/2} + \|D\varphi\|_{C^0} \|D^2f\|_{L^2}.$$

Le lemme résulte de 5.3 et 3.3. ■

5.7 Lemme : Soient $\varphi \in W^{r,2}$, $r \geq 1$, et $\psi : \varphi(\mathbb{T}^1) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ .

Alors $\psi \circ \varphi \in W^{r,2}$, $D(\psi \circ \varphi) = D\psi \circ \varphi D\varphi$ et on a :

$$\|\psi \circ \varphi\|_{W^{1,2}} \leq \|\psi\|_{C^0} + \|D\psi\|_{C^0} \|D\varphi\|_{L^2}.$$

La démonstration, par récurrence sur r , est laissée au lecteur. On notera que $\varphi(\mathbb{T}^1)$ est un intervalle compact et que l'identité $D(\psi \circ \varphi) = D\psi \circ \varphi D\varphi$ est valable dans L^1 dès que φ est absolument continue (et ψ de classe C^∞).

5.8 On déduit du lemme précédent que si $\varphi \in W^{r,2}$, $r \geq 1$, alors $e^\varphi \in W^{r,2}$ et si, de plus, $\varphi > 0$, alors $\text{Log } \varphi \in W^{r,2}$.

6. ESPACES DE SOBOLEV ET COMPACITÉ.

6.1 Pour $r \in \mathbb{N}$, on considère sur $W^{r,2}$ la topologie faible :

- si $r = 0$, la suite (φ_n) converge faiblement vers φ si pour tout $\psi \in L^2$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n \psi \, d\theta = \int_0^1 \varphi \psi \, d\theta$;

- si $r \geq 1$, la suite (φ_n) converge faiblement vers φ si $(D^r \varphi_n)$ converge faiblement vers $D^r \varphi$ dans L^2 et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n \, d\theta = \int_0^1 \varphi \, d\theta$ (puisque D^r est une isométrie de $W_0^{r,2} = \{\varphi \in W^{r,2} \mid \int_0^1 \varphi \, d\theta = 0\}$ sur L^2).

Si $r \geq 1$, $0 \leq k \leq r-1$ et $x \in \mathbb{T}^1$, la forme linéaire $\varphi \mapsto D^k \varphi(x)$ sur $W^{r,2}$ est continue pour la topologie de la norme, donc pour la topologie faible.

6.2 Si $c > 0$, la boule $B_c = \{\varphi \in W^{r,2} \mid \|\varphi\|_{W^{2,r}} \leq c\}$ munie de la topologie faible de $W^{r,2}$ est compacte, convexe et métrisable (car séparable).

6.3 Soit $r \geq 1$. On rappelle que $W^{r,2} \subset C^{r-1}(\mathbb{T}^1)$.

Lemme : La topologie faible de $W^{r,2}$ et la C^{r-1} -topologie induites sur B_c sont les mêmes.

Démonstration : D'après 3.2 et le théorème d'Ascoli, B_c est compacte pour la C^{r-1} -topologie qui coïncide alors avec la topologie de la convergence simple des dérivées k-ièmes, $0 \leq k \leq r-1$. D'après 6.1, si la suite (φ_n) de B_c converge faiblement vers φ , alors pour tout $x \in \mathbb{T}^1$ et tout $k \leq r-1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} D^k \varphi_n(x) = D^k \varphi(x)$, donc (φ_n) converge vers φ au sens C^{r-1} . Le lemme découle de la compacité de B_c pour les deux topologies. ■

6.4 Si $r \geq 2$ et $c > 0$, l'ensemble $\tilde{K}_c = \{\varphi \in B_c \mid \varphi(0) = 0\}$ muni de la topologie faible de $W^{r,2}$ est compact, convexe et métrisable.

Si c est assez petit, l'ensemble $K_c = \{f = \text{Id} + \psi \mid \psi \in \tilde{K}_c\}$ est inclus dans $D^{r,2}(\mathbb{T}^1)$ et homéomorphe à $\tilde{K}_c$.

6.5 Caractérisation de $W^{1,2}$.

Proposition : Soit $\varphi \in L^2$. On a $\varphi \in W^{1,2}$ si et seulement si

$$\sup_{t \neq 0} \frac{1}{|t|} \|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^2} < +\infty.$$

Pour la démonstration, le lecteur se reportera à [V, 2.10] et [VI, 2.4].

6.6 Lemme : Soit (φ_n) une suite de L^2 convergeant faiblement vers $\varphi \in L^2$ et (ψ_n) une suite de L^∞ convergeant vers $\psi \in L^\infty$ pour la topologie de la norme. Alors la suite $(\varphi_n \psi_n)$ converge faiblement dans L^2 vers $\varphi \psi$.

Indication : Si la suite (φ_n) de L^2 est faiblement convergente, alors les normes des φ_n dans L^2 sont bornées.

6.7 Corollaire : Soit (φ_n) une suite de L^2 convergeant faiblement vers $\varphi \in L^2$ et (f_n) une suite de $D^1(\mathbb{T}^1)$ tendant, dans la C^1 -topologie, vers $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$. Alors la suite $(\varphi_n \circ f_n)$ converge faiblement vers $\varphi \circ f$.

Démonstration : Soit $\psi \in L^2$. On a :

$$\int_0^1 \varphi_n \circ f_n \psi \, d\theta = \int_0^1 \varphi_n \, Df_n^{-1} \psi \circ f_n^{-1} \, d\theta \quad .$$

D'après le lemme précédent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n \cdot Df_n^{-1} \cdot \psi \circ f_n^{-1} \, d\theta = \int_0^1 \varphi \circ f \cdot \psi \, d\theta$. D'autre part,

$$\left| \int_0^1 \varphi_n \, Df_n^{-1} (\psi \circ f_n^{-1} - \psi \circ f_n^{-1}) \right| \leq \|\varphi_n\|_{L^2} \|Df_n^{-1}\|_{C^0} \|\psi \circ f_n^{-1} - \psi \circ f_n^{-1}\|_{L^2} \quad .$$

Comme la suite (φ_n) converge faiblement $\sup_n \|\varphi_n\|_{L^2} < +\infty$. De même, $\sup_n \|Df_n^{-1}\|_{C^0} < +\infty$. Il reste à voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi \circ f_n^{-1} - \psi \circ f_n^{-1}\|_{L^2} = 0$.

La suite d'applications $g_n : L^2 \rightarrow L^2$, $\psi \mapsto \psi \circ f_n^{-1}$ est équicontinue (voir 5.3) et converge simplement vers $g : \psi \mapsto \psi \circ f^{-1}$ sur le sous-ensemble dense $C^0(T^1)$ de L^2 . Par conséquent elle converge simplement sur L^2 . ■

7. INÉGALITÉS.

7.1 Soit $a \in C^0(T^1)$ tel que $a > 0$. On pose

$$a_+ = \sup_{\theta} a(\theta) \quad , \quad a_- = \inf_{\theta} a(\theta)$$

et

$$a_0 = e^{\frac{\|\text{Log } a\|_{C^0}}{2}} = \sup(a_+, 1/a_-) \quad .$$

On a :

$$\frac{1}{a_0} \leq a_- \leq a \leq a_+ \leq a_0$$

et, si $\|a - 1\|_{C^0} < 1$,

$$1 + \|a - 1\|_{C^0} \leq a_0 \leq 1/(1 - \|a - 1\|_{C^0}) \quad .$$

7.2 Soit $a \in W^{1,2}$ vérifiant $a > 0$ et $\int_0^1 a(\theta) d\theta = 1$. D'après 3.3, on a $\|a - 1\|_{C^0} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|Da\|_{L^2} \leq \frac{a_+}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2}$ et $a_+ \leq 1 + \frac{a_+}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2}$. Si $\frac{a_+}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2} < 1$, on obtient les deux inégalités suivantes :

$$(1) \quad a_+ \leq 1 / (1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2})$$

$$(2) \quad a_o \leq 1 / (1 - \frac{a_+}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2}) .$$

7.3 Remarque : Comme la fonction $a-1$ s'annule, par 3.4, on a

$\| \operatorname{Log} a \|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2}$, donc

$$(3) \quad a_o \leq e^{\frac{1}{2} \|D \operatorname{Log} a\|_{L^2}} .$$

Si $\|D \operatorname{Log} a\|_{L^2}$ est assez petit, a_+ est proche de 1 et l'inégalité (2) est plus fine que l'inégalité (3) .

7.4 Majoration de $\|D^2 \operatorname{Log} a\|_{L^2}$.

Soit $a \in W^{2,2}$ tel que $a > 0$. D'après 5.8, $\operatorname{Log} a \in W^{2,2}$ et $D^2 \operatorname{Log} a = \frac{D^2 a}{a} - (\frac{Da}{a})^2$.

On a :

$$\|D^2 \operatorname{Log} a\|_{L^2} \leq a_o \|D^2 a\|_{L^2} + a_o^2 \|Da\|_{C^0} \|Da\|_{L^2}$$

donc, d'après 3.3 et 3.6,

$$(4) \quad \|D^2 \operatorname{Log} a\|_{L^2} \leq a_o \|D^2 a\|_{L^2} + \frac{a_o^2}{4\pi\sqrt{3}} \|D^2 a\|_{L^2}^2 .$$

Si $\int_0^1 a(\theta) d\theta = 1$, on a, d'après 3.7,

$$(5) \quad \|a - 1\|_{C^0} \leq \frac{1}{12\sqrt{5}} \|D^2 a\|_{L^2}$$

et

$$(6) \quad a_o \leq 1/(1 - \|a - 1\|_{C^0}) \quad .$$

7.5 Soient $h \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1)$ et $h_o \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{h_o} \leq Dh \leq h_o$. De 5.6, on déduit que pour tout $\varphi \in W^{2,2}$, on a :

$$(7) \quad \|D^2(\varphi \circ h)\|_{L^2} \leq \|D^2\varphi\|_{L^2} (h_o^{3/2} + \frac{h_o}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^2}) \quad .$$

Si $\eta \in W^{1,2}$, alors $\eta \circ h^{-1} \in W^{1,2}$ et on a :

$$\|D(\eta \circ h^{-1})\|_{L^2} \leq \|D\eta \circ h^{-1} (Dh^{-1})^{1/2}\|_{L^2} \| (Dh^{-1})^{1/2} \|_{C^0}$$

d'où

$$(8) \quad \|D(\eta \circ h^{-1})\|_{L^2} \leq \|D\eta\|_{L^2} h_o^{1/2} \quad .$$

7.6 Soient $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ et $f_o = e^{\frac{\| \operatorname{Log} Df \|_{C^0}}{2}}$. On a, d'après 3.7,

$$\|Df - 1\|_{C^0} \leq \frac{1}{12\sqrt{5}} \|D^3 f\|_{L^2}$$

et, si $\|Df - 1\|_{C^0} < 1$, alors $f_o \leq 1/(1 - \|Df - 1\|_{C^0})$.

De (4), on déduit l'inégalité :

$$\|D^2 \operatorname{Log} Df\|_{L^2} \leq \|D^3 f\|_{L^2} (f_o + \frac{f_o^2}{4\pi\sqrt{3}} \|D^3 f\|_{L^2}) \quad .$$

D'autre part, on calcule :

$$D^2((Df^{-1})^3) = -3 D^3 f \circ f^{-1} (Df^{-1})^6 + 15 (D^2 f \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^7$$

d'où l'on tire l'inégalité :

$$\|D^2((Df^{-1})^3)\|_{L^2} \leq 3 \|D^3 f\|_{L^2} f_o^{11/2} + \frac{15}{4\pi\sqrt{3}} \|D^3 f\|_{L^2}^2 f_o^{13/2} \quad \diamond .$$

7.7 On considère toujours une fonction $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ et on suppose que $0 \leq \frac{1}{\gamma} \|D^3 f\|_{L^2} \leq x$, où γ et x sont des réels, $0 < \gamma \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Si $\gamma x < 12\sqrt{5}$, alors :

$$\frac{1}{\gamma} \|D^2 \text{Log } Df\|_{L^2} \leq \ell_{\gamma}(x)$$

où

$$\ell_{\gamma}(x) = \frac{x}{1 - \frac{\gamma x}{12\sqrt{5}}} + \frac{\gamma}{4\pi\sqrt{3}} \left(\frac{x}{1 - \frac{\gamma x}{12\sqrt{5}}} \right)^2 .$$

La fonction ℓ_{γ} est strictement croissante, convexe, et si $\gamma < \gamma'$, alors $x \leq \ell_{\gamma}(x) \leq \ell_{\gamma'}(x)$. Il est possible de calculer explicitement la fonction ℓ_{γ}^{-1} .

8. NOMBRES DE TYPE CONSTANT ET ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

8.1 Si θ est un élément de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}^1$, on note $\|\theta\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\theta - p|$. On conviendra que si $p/q \in \mathbb{Q}$, alors $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 0$ et p et q sont premiers entre eux.

Dans toute la suite, α désigne un nombre de type constant ayant pour constante de Markov $\gamma = \inf_{q \geq 1} q \|\alpha q\|$. On définit aussi $\gamma_1 = \liminf_{q \rightarrow +\infty} q \|\alpha q\|$. Les constantes γ et γ_1 sont inchangées si l'on remplace α par $-\alpha$ et il est facile de voir, par le principe de Dirichlet, que $\gamma \leq \gamma_1 < 1$. En fait, on a mieux. Les nombres α et β sont dits équivalents s'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ telle que $\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$. Dans ce cas $\gamma_1(\alpha) = \gamma_1(\beta)$. Si α est équivalent au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; dans tous les autres cas, $\gamma_1 \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$ (voir [S, th. 5E, p. 21]). Si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. C'est la plus grande valeur de γ possible.

On rappelle que α est un nombre de type constant si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si son développement en fraction continue $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$ (où les a_i sont entiers et $a_i \geq 1$ si $i \geq 1$) vérifie :

♦ Que le lecteur ne s'inquiète pas, ces inégalités serviront effectivement par la suite.

$$M = \sup_{i \geq 1} a_i < +\infty.$$

On a alors $\frac{1}{M+2} < \gamma < \frac{1}{M}$ (voir [H, V.7] ou [S]).

Petite note : Notons $p_k/q_k = a_0 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_k}}$, $k \in \mathbb{N}$, les réduites de α et

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \dots}.$$

On a, pour $k \geq 1$,

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k^2 (\alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k})}$$

donc

$$\frac{1}{\gamma} = \sup \left(\frac{1}{\|\alpha\|}, \sup_{k \geq 1} (\alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}) \right)$$

et
$$\frac{1}{\gamma_1} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (\alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}).$$

On a pour tout $\alpha \in \text{TC}$, $\gamma(\alpha) \leq (3 - \sqrt{5})/2$.

En effet, si $\gamma \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, alors $\gamma > \frac{1}{\sqrt{8}}$ est α est équivalent au nombre d'or. S'il existe un $k \geq 2$ tel que $a_k \geq 2$ et $a_i = 1$ pour $i \geq k+1$, alors on a :

$$\frac{1}{\gamma} > \alpha_k = a_k + \frac{2}{1+\sqrt{5}} \geq \frac{2}{3-\sqrt{5}}.$$

Si $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}}}$ ou si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}}$, alors $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,381966011\dots$

8.2 Equations aux différences.

On pose $r = \frac{\sin(\pi \|\alpha\|)}{2 \|\alpha\|}$. On a $1 < r < \frac{\pi}{2}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'opérateur

$$L_{\alpha, \lambda} : W_o^{k,2} \longrightarrow W_o^{k,2}, \quad \varphi \longmapsto \varphi - \lambda \varphi \circ R_\alpha$$

(où $\varphi \in W_0^{k,2}$ si $\varphi \in W^{k,2}$ et $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$).

Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $\lambda_- \in \mathbb{R}$, $\lambda_- > 0$ et $\eta \in W_0^{k,2}$.

Proposition : Pour tout $\lambda \geq \lambda_-$, il existe un unique $\varphi_\lambda \in W_0^{k-1,2}$ tel que

$$(*) \quad L_{\alpha, \lambda}(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda - \lambda \varphi_\lambda \circ R_\alpha = \eta.$$

De plus, on a :

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_-} \|D^{k-1} \varphi_\lambda\|_{L^2} \leq C \|D^k \eta\|_{L^2}$$

$$\text{où } C = \sup_{\lambda \geq \lambda_-, n \neq 0} \frac{2\pi n(1-\lambda e^{2i\pi n\alpha})^{-1}}{1} \text{ et } C \leq \frac{1}{4\pi(1+\lambda_-)r_Y} \leq \frac{1}{4\pi(1+\lambda_-)Y}.$$

Remarque : Il existe aussi un unique $\tilde{\varphi}_\lambda \in W_0^{k-1,2}$ tel que $\lambda \tilde{\varphi}_\lambda - \tilde{\varphi}_\lambda \circ R_\alpha = \eta$. Les inégalités précédentes sont valables pour $\tilde{\varphi}_\lambda$, puisque $\tilde{\varphi}_\lambda = -L_{-\alpha, \lambda}^{-1}(\eta \circ R_{-\alpha})$.

Démonstration : En dérivant l'équation (*), on se ramène au cas où $k=1$. Si $D\eta(\theta) = \sum_{n \neq 0} \hat{D\eta}(n) e^{2i\pi n\theta}$, on a nécessairement :

$$\varphi_\lambda(\theta) = \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{D\eta}(n)}{2i\pi n(1-\lambda e^{2i\pi n\alpha})} e^{2i\pi n\theta}.$$

On en déduit l'existence et l'unicité de $\varphi_\lambda \in L^2$ et la majoration

$$\|\varphi_\lambda\|_{L^2} \leq C \|D\eta\|_{L^2}.$$

Nous allons à présent majorer la constante C.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. On a :

$$|1-\lambda e^{2i\pi n\alpha}| = ((1+\lambda)^2 \sin^2 \pi n\alpha + (1-\lambda)^2 \cos^2 \pi n\alpha)^{1/2} \geq (1+\lambda_-) |\sin \pi n\alpha|.$$

D'autre part,

$$|\sin(\pi n\alpha)| = \sin(\pi \|n\alpha\|) \geq \frac{2r\gamma}{|n|},$$

en effet, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{2t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Si $\|n\alpha\| \leq \|\alpha\|$, alors

$$\sin(\pi \|n\alpha\|) \geq 2r \|n\alpha\| \geq \frac{2r\gamma}{|n|},$$

et si $\|n\alpha\| \geq \|\alpha\|$, alors

$$\sin(\pi \|n\alpha\|) \geq \sin(\pi \|\alpha\|) \geq 2r\gamma \geq \frac{2r\gamma}{|n|}.$$

Finalement, on obtient :

$$|2\pi n(1 - \lambda e^{2i\pi n\alpha})|^{-1} \leq (4\pi(1 + \lambda_-)r\gamma)^{-1}. \quad \blacksquare$$

8.3 Dans le cas où $\lambda = 1$, on obtient l'inégalité :

$$\|D^{k-1}\varphi_1\|_{L^2} \leq \frac{1}{8\pi r\gamma} \|D^k\eta\|_{L^2}.$$

Remarques : i) Cette majoration est optimale pour les nombres α tels que $\gamma = \|\alpha\|$ (par exemple pour le nombre d'or), comme le montre l'exemple $\eta(\theta) = \sin 2\pi\theta$.

ii) Si $\gamma \leq \frac{2}{\pi} \|\alpha\|$, on peut améliorer la constante r de la manière suivante. On suppose $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et on considère les réduites p_n/q_n , $n \in \mathbb{N}$ de α (voir la petite note de 8.1).

On a $q_0 = 1$ et, pour tout naturel n , q_{n+1} est le plus petit entier qui vérifie $\|q_{n+1}\alpha\| < \|q_n\alpha\|$. Par conséquent, $\gamma = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|q_n\alpha\|$ (voir [S]).

Soit n_0 le plus grand entier tel que $q_{n_0}\alpha \geq \frac{\pi}{2}\gamma$. Nous allons montrer que

l'on peut remplacer r par $r' = \frac{\sin(\pi \|q_{n_0}\alpha\|)}{2\|q_{n_0}\alpha\|} \geq r$ (puisque $\|q_{n_0}\alpha\| < \|\alpha\|$). Il s'agit de voir que, pour tout entier $q \geq 1$, on a :

$$\sin(\pi \|q\alpha\|) \geq \frac{2r'\gamma}{q}.$$

Si $\|q\alpha\| \leq \|q_{n_0}\alpha\|$, alors

$$\sin(\pi \|q\alpha\|) \geq 2 \|q\alpha\| r' \geq \frac{2r'\gamma}{q}.$$

Supposons que $\|q\alpha\| > \|q_{n_0}\alpha\|$. Dans ce cas, on a $q\|q\alpha\| \geq \frac{\pi}{2}\gamma$, en effet, si $q \geq q_{n_0}$, alors $q\|q\alpha\| \geq q_{n_0}\|q_{n_0}\alpha\| \geq \frac{\pi}{2}\gamma$ et si $q < q_{n_0}$, on peut trouver un unique entier $n < n_0$ tel que $q_n \leq q < q_{n+1}$. On a alors $q\|q\alpha\| \geq q_n\|q_n\alpha\| \geq \frac{\pi}{2}\gamma$. Par suite,

$$\sin(\pi \|q\alpha\|) \geq 2 \|q\alpha\| \geq \pi \frac{\gamma}{q} \geq \frac{2r'\gamma}{q}.$$

iii) Lorsque γ tend vers 0, soit la constante r tend vers $\frac{\pi}{2}$, soit γ devient inférieur à $\frac{2}{\pi}\|\alpha\|$ et r' tend vers $\frac{\pi}{2}$.

8.4 Soit $a \in W^{2,2}$, $a > 0$. On définit les réels a_0 et λ par :

$$\text{Log } a_0 = \|\text{Log } a\|_{C^0}$$

$$\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta.$$

On a $\frac{1}{a_0} \leq \lambda \leq a_0$ et, si $\|a - 1\|_{C^0} < 1$, alors $a_0 \leq (1 - \|a - 1\|_{C^0})^{-1}$ et $1 - \|a - 1\|_{C^0} \leq \lambda \leq 1 + \|a - 1\|_{C^0}$.

D'après 8.2, il existe un unique $b \in W^{1,2}$ vérifiant $b > 0$, $\int_0^1 \text{Log } b(\theta) d\theta = 0$ et

$$(+)\quad a = \lambda \frac{b \circ R_\alpha}{b},$$

en effet, on a $b = e^\varphi$, où $\varphi \in W_0^{1,2}$ est l'unique solution de l'équation :

$$\varphi \circ R_\alpha - \varphi = \text{Log } a - \text{Log } \lambda \quad .$$

Les fonctions b_1 qui vérifient $a = \lambda(b_1 \circ R_\alpha)/b_1$ sont les fonctions de la forme $b_1 = cb$, avec $c \in \mathbb{R}^*$.

L'inégalité de 8.3 nous fournit la majoration :

$$\|D \text{Log } b\|_{L^2} \leq \frac{1}{8\pi r\gamma} \|D^2 \text{Log } a\|_{L^2}$$

et, de 3.3, on tire :

$$\|\text{Log } b\|_{C^0} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|D \text{Log } b\|_{L^2} \quad .$$

9. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES À COEFFICIENTS VARIABLES.

9.1 On se donne une fonction $a \in W^{2,2}$, $a > 0$, une mesure de probabilité $d\sigma = \ell \, d\theta$ sur $\mathbb{T}^1$, avec $\ell \in C^0$, $\ell > 0$ et une fonction $\eta \in W_0^{1,2}$ (resp. $\eta \in W_0^{2,2}$). On cherche à résoudre l'équation :

$$\psi - a \cdot \psi \circ R_\alpha = \eta + v$$

où l'inconnue est le couple $(v, \psi) \in \mathbb{R} \times L^2$ (resp. $(v, \psi) \in \mathbb{R} \times W^{1,2}$) et où ψ vérifie $\int_0^1 \psi \, d\sigma = 0$.

Nous utiliserons la même méthode qu'en IV, 3.11 où nous renvoyons le lecteur désirant plus de détails. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de calculer explicitement toutes les constantes.

9.2 Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \geq 0$ et $\lambda \neq 1$. Pour tout $\eta \in W^{1,2}$, il existe

un unique $\varphi_\lambda \in W^{1,2}$ tel que :

$$\varphi_\lambda - \lambda \varphi_\lambda \circ R_\alpha = \eta$$

et on a $\min \eta \leq (1-\lambda)\varphi_\lambda \leq \max \eta$.

En particulier, si $\eta > 0$, alors $(1-\lambda)\varphi_\lambda > 0$.

Démonstration : Si $\lambda < 1$, on a :

$$\varphi_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \eta \circ R_{k\alpha}$$

et si $\lambda > 1$, alors

$$\varphi_\lambda = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} \eta \circ R_{-k\alpha} .$$

La proposition en résulte immédiatement. ■

9.3 Soient $d\sigma = \ell(\theta)d\theta$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^1$, où $\ell \in C^0(\mathbb{T}^1)$, $\ell > 0$ et $\int_0^1 \ell(\theta)d\theta = 1$.
 $\ell_0 = e$.

Théorème : Soit $a \in W^{2,2}$, $a > 0$. Pour tout $\eta \in W_0^{1,2}$ (i.e. $\int_0^1 \eta(\theta)d\theta = 0$), il existe
un unique couple $(\nu, \psi) \in \mathbb{R} \times L^2$ tel que $\int_{\mathbb{T}^1} \psi d\sigma = 0$ et

$$(1) \quad \psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + \nu .$$

De plus, il existe une constante $C_1(\ell_0, a)$ ne dépendant que de ℓ_0 et a telle que :

$$(2) \quad \|\psi\|_{L^2} \leq C_1(\ell_0, a) \frac{1}{\gamma} \|D\eta\|_{L^2} ;$$

on a aussi $|v| \leq \text{cste } \|D\eta\|_{L^2}$.

Nous donnerons en 9.4 des formules explicites de la constante $C_1(\ell_o, a)$.

Démonstration : Soit $a_- = \min a > 0$. On définit le réel λ par $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta$.

On a $\lambda \geq a_-$ et si $\|a - 1\|_{C^0} < 1$, $\lambda \geq 1 - \|a - 1\|_{C^0} > 0$.

D'après 8.4, on peut trouver une fonction $b \in W^{1,2}$ vérifiant $b > 0$, $\int_0^1 \text{Log } b(\theta) d\theta = 0$ et

$$a = \lambda \cdot b \circ R_\alpha / b.$$

Si $b_o = e^{\| \text{Log } b \|_{C^0}}$, on a :

$$(3) \quad b_o \leq e^{z/s}$$

où $z = \frac{1}{\gamma} \|D^2 \text{Log } a\|_{L^2}$, $s = 16\pi \sqrt{3} r$ et $r = \frac{\sin \pi \|\alpha\|}{2 \|\alpha\|}$, ainsi que les inégalités :

$$(4) \quad \|D \text{Log } b\|_{L^2} \leq \frac{1}{8\pi r} z$$

$$(5) \quad \|Db\|_{L^2} \leq b_o \|D \text{Log } b\|_{L^2}.$$

En multipliant l'équation (1) par b , on est amené à :

$$(6) \quad b\psi - \lambda (b\psi) \circ R_\alpha = b\eta + b\nu.$$

Soit v_o le réel tel que $\int_0^1 (b\eta + v_o b) d\theta = 0$. On a :

$$v_o \int_0^1 b d\theta = - \int_0^1 b \eta d\theta = \int_0^1 (1-b) \eta d\theta$$

puisque $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$. On en déduit :

$$(7) \quad |v_o| \leq b_o(b_o - 1) \|\eta\|_{L^2} \leq \frac{b_o(b_o - 1)}{2\pi} \|D\eta\|_{L^2}.$$

On note $L_{\alpha, \lambda}$ l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi - \lambda \varphi_o$. R_α étudié en 8.2 et 9.2. Soit φ_o l'unique fonction de L^2 vérifiant $\int_0^1 \varphi_o(\theta) d\theta = 0$ et

$$L_{\alpha, \lambda}(\varphi_o) = b\eta + v_o b.$$

On considère la fonction $A \in W^{1,2}$ définie par

$$A = (1 - \lambda) L_{\alpha, \lambda}^{-1}(b) \quad \text{si } \lambda \neq 1 \quad (\text{cf. 9.2})$$

$$A = 1 \quad \text{si } \lambda = 1.$$

On a dans tous les cas $0 < \frac{1}{b_o} \leq A \leq b_o$. La solution générale de l'équation (6) dépend d'un paramètre réel μ ; elle est donnée par :

$$\psi_\mu = \frac{1}{b} (\varphi_o + \mu A)$$

$$v_\mu = v_o + (1 - \lambda)\mu.$$

De 8.2 et du fait que $\lambda \geq a_-$, on déduit :

$$(8) \quad \|\varphi_o\|_{L^2} \leq \frac{1}{4\pi(1+a_-)r_Y} \|D(\eta b + v_o b)\|_{L^2}.$$

Puis, d'après (7), (5), 3.3 et 3.6, on a :

$$(9) \quad \|D(\eta b + v_o b)\|_{L^2} \leq (\|D \log b\|_{L^2} (\frac{b_o(b_o - 1)}{2\pi} + \frac{1}{2\sqrt{3}}) + 1) b_o \|D\eta\|_{L^2}.$$

Comme $A > 0$, il existe un unique μ_o tel que :

$$\int_0^1 \psi_{\mu_o} d\sigma = 0.$$

Si l'on pose $\psi = \psi_{\mu_o}$ et $v = v_o + (1-\lambda)\mu_o$, le couple (ψ, v) est l'unique solution du problème posé. On a :

$$\mu_o \int_0^1 \frac{A\ell}{b} d\theta = - \int_0^1 \frac{\varphi_o \ell}{b} d\theta = \int_0^1 \left(1 - \frac{\ell}{b}\right) \varphi_o d\theta .$$

On en déduit la majoration :

$$(12) \quad |\mu_o| \leq \ell_o b_o^2 (\ell_o b_o - 1) \|\varphi_o\|_{L^2}$$

$$(11) \quad \|\psi\|_{L^2} \leq b_o (\|\varphi_o\|_{L^2} + |\mu_o| b_o) .$$

Si $\lambda = 1$, alors $A = 1$ et on a :

$$(12) \quad |\mu_o| \leq \ell_o b_o (\ell_o b_o - 1) \|\varphi_o\|_{L^2}$$

$$(13) \quad \|\psi\|_{L^2} \leq b_o (\|\varphi_o\|_{L^2} + |\mu_o|) .$$

D'autre part, les inégalités (8) et (9) permettent de majorer $\|\varphi_o\|_{L^2}$ en fonction de $\|D\eta\|_{L^2}$. On en déduit l'inégalité (2). On peut aussi majorer $|v|$ en utilisant (7), (10) et $|v| \leq |v_o| + |1-\lambda| |\mu_o|$. ■

9.4 Calcul de la constante $C_1(\ell_o, a)$.

En combinant les inégalités (8), (9), (10) et (11), on obtient la valeur suivante de $C_1(\ell_o, a)$:

$$(14) \quad C_1(\ell_o, a) = \frac{1}{4\pi(1+a_-)r} b_o^2 (1 + \ell_o b_o^3 (\ell_o b_o - 1)) (\|D \text{Log } b\|_{L^2} \left(\frac{b_o(b_o-1)}{2\pi} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + 1) ,$$

où l'on rappelle que $r = \frac{\sin \pi \|\alpha\|}{2 \|\alpha\|} \geq 1$ et, si $z = \frac{1}{\gamma} \|D^2 \text{Log } a\|_{L^2}$ et $s = 16 \pi \sqrt{3} r$, alors (cf. (3) et (4)) $b_o \leq e^{z/s}$,

$$\|D \operatorname{Log} b\|_{L^2} \leq \frac{z}{8\pi r}$$

et $a_- = \min a \geq 1 - \|a - 1\|_{C^0}$.

Dans le cas où $\lambda = 1$, la valeur de $C_1(\ell_0, a)$ obtenue en utilisant (12) et (13) est inférieure à la précédente :

$$(15) \quad C_1(\ell_0, a) = \frac{1}{8\pi r} b_0^2 (1 + b_0 \ell_0 (b_0 \ell_0 - 1)) (\|D \operatorname{Log} b\|_{L^2} (\frac{b_0(b_0-1)}{2\pi} + \frac{1}{2\sqrt{3}}) + 1).$$

9.5 Remarques : 1) Si $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta \neq 0$, on remplace la fonction η par $\eta_1 = \eta - \int_0^1 \eta d\theta$. La constante obtenue $C_1(\ell_0, a)$ reste inchangée, puisque $D\eta_1 = D\eta$.

2) Contrairement à IV, 3.11, nous avons imposé à b la condition $\int_0^1 \operatorname{Log} b d\theta = 0$ au lieu de $\int_0^1 b d\theta = 1$, ce qui ne change pas grand-chose.

3) Nous n'imposons ici aucune condition supplémentaire à la fonction a comme nous l'avons fait en IV, 3.11, car nous avons utilisé la Proposition 9.2 au lieu de IV, 3.3.

4) La constante $C_1(\ell_0, a)$ dépend de γ par l'intermédiaire de z , donc de b_0 . Lorsque nous aurons à utiliser l'inégalité (2), nous ferons appel à d'autres arguments pour majorer b_0 de façon indépendante de γ (cf. 11.9, 3)).

5) Si a et η sont de classe C^∞ , alors b et ψ le sont aussi.

6) Je ne connais pas le rapport de $C_1(\ell_0, a)$ à la constante optimale.

9.6 Soient $d\sigma = \ell(\theta) d\theta$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^1$, où $\ell \in C^0(\mathbb{T}^1)$, $\ell > 0$ et $a \in W^{2,2}$, $a > 0$. On pose

$$\ell_0 = e^{\| \operatorname{Log} \ell \|_{C^0}}, \quad a_- = \min a > 0 \quad \text{et} \quad C_1(a) = C_1(1, a)$$

où l'expression de $C_1(1, a)$ est donnée en 9.4, (14) et (15). On définit :

$$d(a) = \left(\frac{\ell_0 - 1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) C_1(a) \gamma^{-1} \|D^2 a\|_{L^2}.$$

Théorème : Si $d(a) < 1$, alors pour tout $\eta \in W_0^{2,2}$, il existe un unique couple $(v, \psi) \in \mathbb{R} \times W^{1,2}$ tel que $\int_0^1 \psi \, d\sigma = 0$ et

$$\psi - a \cdot \psi \circ R_\alpha = \eta + v.$$

De plus, on a les inégalités :

$$(16) \quad \|D\psi\|_{L^2} \leq \frac{C_1(a)}{1-d(a)} \gamma^{-1} \|D^2 \eta\|_{L^2}$$

$$(17) \quad \|\psi\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|D\psi\|_{L^2}$$

$$(18) \quad |v| \leq \text{cte} \|D\eta\|_{L^2}.$$

Démonstration : On suppose d'abord que a et η sont de classe C^∞ . D'après la remarque 5) de 9.5, il existe un unique couple $(v, \psi) \in \mathbb{R} \times C^\infty(\mathbb{T}^1)$ tel que $\int_0^1 \psi \, d\sigma = 0$ et

$$\psi - a \cdot \psi \circ R_\alpha = \eta + v.$$

En dérivant cette égalité, on a :

$$D\psi - a \cdot D\psi \circ R_\alpha = A + v_0$$

$$\text{où} \quad v_0 = \int_0^1 Da \cdot \psi \circ R_\alpha \, d\theta$$

$$\text{et} \quad A = D\eta + Da \cdot \psi \circ R_\alpha - v_0.$$

De l'inégalité 9.3, (2) et du fait que $\int_0^1 D\psi(\theta) d\theta = 0$, on déduit :

$$(19) \quad \|D\psi\|_{L^2} \leq C_1(a) \gamma^{-1} (\|D^2\eta\|_{L^2} + \|D^2a\|_{L^2} \|\psi\|_{C^0} + \|Da\|_{C^0} \|D\psi\|_{L^2}) .$$

Comme $\int_0^1 \psi \, d\sigma = 0$, la fonction ψ s'annule et on a :

$$(20) \quad \|\psi\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|D\psi\|_{L^2} .$$

Si $\ell_o - 1$ est assez petit, on peut améliorer cette inégalité

$$\|\psi - \int_0^1 \psi \, d\theta\|_{C^0} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|D\psi\|_{L^2}$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 \psi \, d\theta = \int_0^1 (1 - \ell) \psi \, d\theta$$

$$\text{donc} \quad \left| \int_0^1 \psi \, d\theta \right| \leq (\ell_o - 1) \|\psi\|_{C^0} \leq \frac{\ell_o - 1}{2} \|D\psi\|_{L^2} .$$

Par suite :

$$(21) \quad \|\psi\|_{C^0} \leq \left(\frac{\ell_o - 1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \|D\psi\|_{L^2} .$$

D'autre part ,

$$\|Da\|_{C^0} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|D^2a\|_{L^2} .$$

En insérant ces deux inégalités dans l'inégalité (19) , on obtient :

$$\|D\psi\|_{L^2} \leq C_1(a) \gamma^{-1} \|D^2\eta\|_{L^2} + d(a) \|D\psi\|_{L^2} ,$$

d'où l'inégalité (16) .

On revient maintenant au cas général : les fonctions a et η sont de classe $W^{2,2}$ et vérifient $d(a) < 1$ et $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites

de fonctions de classe C^∞ convergeant dans la $W^{2,2}$ -topologie (forte) vers a et η respectivement. On suppose que $\int_0^1 \eta_n(\theta) d\theta = 0$ et que, si $\int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta = 0$, alors $\int_0^1 \text{Log } a_n(\theta) d\theta = 0$. On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} C_1(a_n) = C_1(a)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n) = d(a)$. En particulier, $d(a_n) < 1$ si n est assez grand.

Pour tout entier n assez grand, il existe un couple $(\psi_n, \nu_n) \in W^{1,2} \times \mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 \psi_n d\sigma = 0$ et $\psi_n - a_n \psi_n \circ R_\alpha = \eta_n + \nu_n$, ainsi que l'inégalité (16). Par compacité (cf. 5.3), on peut, quitte à extraire une suite de la suite (ψ_n, ν_n) , supposer que la suite (ψ_n) converge dans la C^0 -topologie vers $\psi \in W^{1,2}$ et que la suite (ν_n) converge vers un réel ν . Puisque la forme linéaire $\psi \mapsto \int_0^1 \psi d\sigma$ est continue pour la C^0 -topologie, on a $\int_0^1 \psi d\sigma = 0$ et, d'autre part,

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + \nu.$$

Comme $\|D\psi\|_{L^2} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|D\psi_n\|_{L^2}$, l'inégalité (16) est vérifiée par passage à la limite. Les inégalités (17) et (18) proviennent respectivement du fait que la fonction ψ s'annule et du théorème 9.3. ■

9.7 Remarque : En utilisant directement l'inégalité (20) au lieu de (21), on peut remplacer $d(a)$ par $\tilde{d}(a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) C_1(a) \gamma^{-1} \|D^2 a\|_{L^2}^2$.

10. THÉORÈME LOCAL DE CONJUGAISON.

10.1 Nous nous proposons d'énoncer et de démontrer un théorème local de conjugaison à des rotations des éléments de $D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ ayant un nombre de rotation de type constant, par un difféomorphisme de classe $W^{2,2}$. L'énoncé de ce théorème comporte des constantes explicites ; sa démonstration utilise le théorème global de conjugaison de [H, IX]. Nous utiliserons une méthode analogue à celle de V, 3.4.

En 10.5, nous améliorons les inégalités obtenues. Les § 10.6 à 10.9 sont consacrés à l'étude des équations aux différences au-dessus d'un difféomorphisme du

cercle (voir IV, 4.10).

10.2 On considère toujours un nombre α de type constant, dont la constante de Markov est notée γ . On pose :

$$r = \frac{\sin(\pi\alpha)}{2\|\alpha\|} \quad , \quad s = 16\pi\sqrt{3}r$$

$$k = \frac{2 e^{-1/3}}{2c^{-1/3} + 3\sqrt{3}} = 0,21617\dots$$

$$c_1 = s k e^{-2/3} = r \times 9,6628\dots$$

10.3 Soit $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme ayant α pour nombre de rotation et tel que

$$y = \frac{1}{\gamma} \|D^2 \text{Log Dh}\|_{L^2} \leq c_1 \quad .$$

Théorème : Il existe un unique $h \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1)$ tel que $h(0) = 0$ et

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad .$$

De plus, si $h_0 = e^{\|\text{Log Dh}\|_{C^0}}$, on a les inégalités

$$\textcircled{1} \quad 1 \leq h_0 \leq e^{2/3}$$

$$\textcircled{2} \quad \|D \text{Log Dh}\|_{L^2} \leq \frac{y h_0^{3/2}}{8\pi r(1 - h_0 y/s)}$$

$$\textcircled{3} \quad \|\text{Log Dh}\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|D \text{Log Dh}\|_{L^2} \quad .$$

Schéma de la démonstration : On se fixe $\varepsilon > 0$ et on pose :

$$F_\alpha = \{f \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

$$B = \{f \in F_\alpha^\infty \mid \|D^2 \text{Log Df}\|_{L^2} \leq \gamma c_1(1-\varepsilon)\}$$

$$U = \{f \in F_\alpha^\infty \mid f = h \circ \hat{f} \circ h^{-1} \text{ avec } \|\text{Log Dh}\|_{C^0} < \frac{2}{3}\}$$

$$V = \{f \in F_\alpha^\infty \mid f = h \circ f \circ h^{-1} \text{ avec } \|\text{Log Dh}\|_{C^0} \leq \frac{2}{3}(1-\varepsilon)\}.$$

On commence par montrer une inégalité "a priori" qui entraîne que $B \cap U \subset V$.

Puis, d'après le théorème de [H, IX], U est ouvert dans F_α^∞ (muni de la C^∞ -topologie)

et V est un fermé inclus dans U , donc $B \cap U$ est ouvert et fermé dans B . Il est non vide puisque $R_\alpha \in B \cap U$. On montre ensuite la connexité de B , qui implique que $B \subset U$.

On conclut en utilisant 6.3.

Démonstration : 1) Inégalité "a priori".

Soit $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ tel que $\rho(f) = \alpha$. D'après le théorème de [H, IX], il existe un unique homéomorphisme h de $\mathbb{T}^1$ tel que $h(0) = 0$ et

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$$

et $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$.

Supposons que $\|\text{Log } h_0\|_{C^0} = \|\text{Log Dh}\|_{C^0} \leq \frac{2}{3}$. On a :

$$D \text{Log Dh} \circ R_\alpha - D \text{Log Dh} = D(\text{Log}(Df) \circ h),$$

donc, d'après 8.3,

$$\begin{aligned} \|D \text{Log Dh}\|_{L^2} &\leq \frac{1}{8\pi\gamma} \|D^2(\text{Log}(Df) \circ h)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{8\pi\gamma} (\|D^2 \text{Log Df}\|_{L^2} h_0^{3/2} + \|D \text{Log Df}\|_{C^0} h_0 \|D \text{Log Dh}\|_{L^2}). \end{aligned}$$

On pose $y = \frac{1}{\gamma} \|D^2 \text{Log Df}\|_{L^2}$ et on suppose que

$$y \leq c_1(1-\varepsilon) = s k e^{-2/3} (1-\varepsilon)$$

où $\varepsilon > 0$.

On a alors :

$$\frac{1}{8\pi r} \|D \operatorname{Log} Df\|_{C^0} h_o \leq \frac{h_o y}{s} \leq k < 1$$

donc

$$\|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^2} \leq \frac{y h_o^{3/2}}{8\pi r(1-h_o y/s)} \leq \frac{c_1 e(1-\varepsilon)}{8\pi r(1-k)} .$$

D'autre part, $\int_0^1 Dh(\theta) d\theta = 1$, donc la fonction $\operatorname{Log} Dh$ s'annule et on a :

$$\|\operatorname{Log} Dh\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^2} .$$

On en déduit :

$$\|\operatorname{Log} Dh\|_{C^0} \leq \sqrt{3} e^{1/3} \frac{k}{1-k} (1-\varepsilon) = \frac{2}{3} (1-\varepsilon) .$$

2) Soit $F_\alpha^\infty = \{f \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$ muni de la C^∞ -topologie. On considère les parties suivantes de F_α^∞ :

$$B = \{f \in F_\alpha^\infty \mid \|D^2 \operatorname{Log} Df\|_{L^2} \leq \gamma c_1(1-\varepsilon)\}$$

$$U = \{f \in F_\alpha^\infty \mid \|\operatorname{Log} Dh\|_{C^0} < \frac{2}{3}\}$$

$$V = \{f \in F^\infty \mid \|\operatorname{Log} Dh\|_{C^0} \leq \frac{2}{3} (1-\varepsilon)\} ,$$

où $\varepsilon > 0$ et, dans les définitions de U et V , h désigne l'unique C^∞ -difféomorphisme tel que $h(0) = 0$ et $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$.

L'inégalité "a priori" que l'on vient de montrer entraîne que $B \cap U \subset V$, donc que $B \cap U = B \cap V$. D'autre part, d'après [H, IX], l'application $f \mapsto h$ est continue pour

la C^∞ -topologie, donc U est ouvert dans F_α^∞ et V est fermé. Comme $R_\alpha \in B \cap V$, si l'on montre que B est connexe, alors on a $B \subset V \subset U$, ce qui revient à dire que le théorème est vrai pour tout f de classe C^∞ tel que $y < c_1$.

3) Connexité de B .

Soit $D^\infty(\mathbb{T}^1, 0) = \{g \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid g(0) = 0\}$. Pour tout $g \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$, il existe un unique réel $\lambda_\alpha(g)$ tel que $(R_{\lambda_\alpha(g)} \circ g) = \alpha$ et l'application $g \mapsto f = R_{\lambda_\alpha(g)} \circ g$ est un homéomorphisme de $D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ sur F_α^∞ (voir [H, III.4.2]).

Il suffit donc de voir que

$$A = \{g \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0) \mid \|D^2 \text{Log } Dg\|_{L^2} \leq c_1(1-\varepsilon)\}$$

est connexe. Soit $g \in A$, on définit g_t par $g_t(0) = 0$ et

$$Dg_t = \mu_t e^{t \text{Log } Dg}$$

$$\text{où } \mu_t = \left(\int_0^1 e^{t \text{Log } Dg(\theta)} d\theta \right)^{-1}.$$

Le chemin $(g_t)_{t \in [0, 1]}$ est un chemin continu de $D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ reliant $g_0 = \text{Id}$ à $g_1 = g$. De plus, comme $D^2 \text{Log } D_{g_t} = t D^2 \text{Log } Dg$, on a $g_t \in A$ pour tout t . Par suite, A est connexe.

4) Conclusion.

Soit $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ tel que $\rho(f) = \alpha$ et $y = \frac{1}{Y} \|D^2 \text{Log } Df\|_{L^2} \leq c_1$. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F_α^∞ convergeant dans $D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ vers f et telle que $y_n = \frac{1}{Y} \|D^2 \text{Log } Df_n\|_{L^2} < c_1$ pour tout n (ce qui est possible, la démonstration de la connexité de B montre comment diminuer légèrement y_n s'il est trop grand).

Pour chaque entier n , il existe un $h_n \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ qui conjugue f_n à R et qui vérifie les inégalités (1), (2), et (3). En particulier, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en norme $W^{2,2}$ donc, d'après 6.3, on peut en extraire une suite convergeant au sens C^1 vers un $h \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1)$ et tel que

$$\|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^2} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|D \operatorname{Log} Dh_n\|_{L^2}.$$

Un tel difféomorphisme h satisfait les conclusions du théorème. ■

Remarques : 1) Si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or, on a $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,381966\dots$,

$r = 1,22005\dots$ et $c_1 = 11,7891\dots$

2) On aurait pu utiliser le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff pour démontrer ce théorème (cf. IV, 4.2) mais cette méthode fournit une moins bonne valeur de c_1 .

3) C'est en $e^{2/3}$ que la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Log} x}{x^{3/2}}$ atteint son maximum.

4) En utilisant la même méthode, il est possible de démontrer le théorème suivant :

Pour tout entier $\ell \geq 3$, il existe une constante $c_\ell > 0$ telle que si $f \in D^{\ell,2}(\mathbb{T}^1)$ vérifie $\rho(f) = \alpha$ et $\|D^{\ell-1} \operatorname{Log} Df\|_{L^2} \leq c_\ell \gamma$ alors $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ pour un $h \in D^{\ell-1,2}(\mathbb{T}^1)$. En outre, on obtient des inégalités, portant sur h , analogues à (1), (2) et (3).

5) Il est vrai que tout difféomorphisme $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ tel que $\rho(f) = \alpha$ est de la forme $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ avec $h \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1)$. La démonstration utilise des idées similaires à celles de [H]. Cependant il est difficile d'obtenir de bonnes inégalités concernant h .

6) On peut améliorer la constante c_1 , voir à ce propos 10.4 et 10.5.

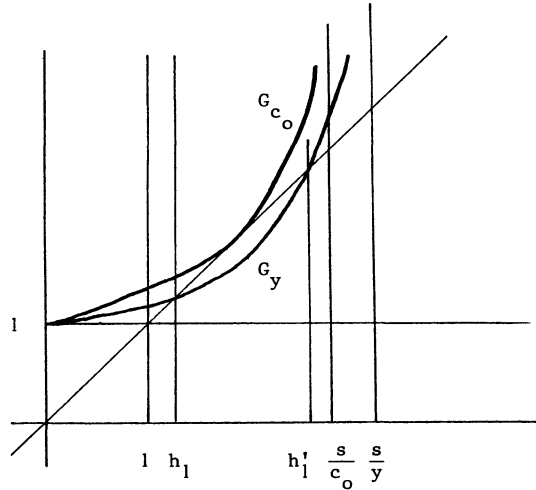
10.4 Inégalités pour h_0 .

Les notations sont les mêmes qu'en 10.3. D'après les inégalités (2) et (3), on a :

$$(4) \quad h_0 \leq \exp \frac{y h_0^{3/2}}{16 \pi r(1 - h_0 y/s)} = G_y(h_0).$$

La fonction $G_y(t)$ est une fonction croissante de t et de y . Si $y < s$, on a $G_y(1) > 1$ et $G_y(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend en croissant vers $\frac{s}{y}$. Si $y < c_0$, où $c_0/r \approx 9,767687441\dots$, alors la fonction G_y a deux points fixes h_1 et h_1' tels que

$$1 < h_1 < h'_1 < \frac{s}{y}.$$



Pour $y = c_1$, on a $h'_1 = e^{2/3}$ et h'_1 est une fonction croissante de y alors que h_1 est une fonction décroissante de y .

On déduit du théorème 10.3 et de (4) que l'on a $h_0 \leq h_1$ pour tout $y < c_1$. En fait cette inégalité est valable pour tout $y < c_0$ en utilisant le même raisonnement qu'en 10.3 et en remplaçant $e^{2/3}$ par un nombre compris strictement entre h_1 et h'_1 .

Pour $y = c_0$, on a $h_1 = h'_1 \approx 1,771886883\dots$

Si $y < c_0$, on peut obtenir h_1 sous la forme

$$h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

où $h_1 < z_0 < h'_1$ (ce qui est assuré par $G_y(z_0) < z_0$, par exemple $z_0 = e^{2/3}$ si $y < c_1$) et $z_{n+1} = G_y(z_n)$.

10.5 Une meilleure inégalité.

Si $y < c_0$, on a $h_0 \leq h_1 < 2$, donc $\|Dh - 1\|_{C^0} < 1$ et, d'après 7.1,

$$h_0 \leq \frac{1}{1 - \|Dh - 1\|_{C^0}}.$$

D'après 3.3, on a :

$$\|Dh - 1\|_{C^0} \leq \frac{h_0}{2\sqrt{3}} \|D \log Dh\|_{L^2}.$$

En combinant ces deux inégalités et (2), on obtient :

$$(5) \quad h_0 \leq \frac{1 - h_0 y/s}{1 - (h_0 + h_0^{5/2})y/s} = H_y(h_0).$$

La fonction H_y a un comportement en tous points analogue à celui de G_y . Si $y < c'_0$, avec $c'_0/r \simeq 9,160766712\dots$, alors H_y possède deux points fixes h_2 et h'_2 tels que $1 < h_2 < h''_2 < h'_2$, où h''_2 est le pôle de H_y (on a $h''_2 + h''_2^{5/2} = \frac{s}{y}$). De même que précédemment, lorsque y croît, h_2 décroît et h'_2 croît. On a $h'_2 = e^{2/3}$ pour :

$$y = c_2 = \frac{e^{2/3} - 1}{e^{7/3} + e^{4/3} - e^{2/3}} s.$$

On a $c_2/r \simeq 6,786532808\dots$

Le théorème 10.3 et l'inégalité (5) entraînent que $h_0 \leq h_2$ pour tout $y < c_2$.

En fait, cette majoration est valable pour tout $y < c'_0$ (cf. 10.4).

Si $y = c'_0$, alors $h_2 = h'_2 \simeq 1,374657868\dots$

Si $y < c'_0$, on a $h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, où $h_2 < z_0 < h'_2$ (i.e. $H_y(z_0) < z_0$, par exemple $z_0 = e^{2/3}$ si $y < c_2$) et $z_{n+1} = H_y(z_n)$.

Constante c_3 .

On considère la fonction ℓ_Y définie en 7.7 et on pose :

$$c_3 = \ell_\gamma^{-1}(c_2) \quad .$$

Si $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ et $\|D^3 f\|_{L^2} \leq c_3 \gamma$, alors $\|D^2 \text{Log } Df\|_{L^2} \leq c_2 \gamma$.

Le nombre c_3 dépend de γ et de r (par l'intermédiaire de c_2) mais on a toujours l'encadrement :

$$5,63 < c_3 \leq c_2 \leq \frac{c_2}{r} \frac{\pi}{2} = 10,661\dots$$

Remarques : 1) Le point fixe h_2 de la fonction H_γ décroît si s (ou r) croît.

2) Aux paragraphes 11 et 12, nous utiliserons les inégalités de 10.5 et non celles de 10.4, car elles permettent de mieux majorer $\|Dh - 1\|_{C^0}$ lorsque f est voisin de l'identité (cf. 7.3 et 11.12, remarque 1).

3) Les constantes c_0 et c'_0 sont peu importantes car, dans la suite, la condition $\|D^3 f\|_{L^2} \leq c_3 \gamma$ sera impliquée par d'autres conditions plus sévères (cf. 11.12, remarque 2).

10.6 Equations aux différences au-dessus d'un difféomorphisme.

On considère un difféomorphisme $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ de nombre de rotation α et qui satisfait aux hypothèses du théorème 10.3. Etant donnés $\tilde{a} \in W^{2,2}$, $\tilde{a} > 0$ et $\eta \in W^{2,2}$, on cherche à résoudre l'équation :

$$\textcircled{6} \quad \psi - \tilde{a} \psi \circ f = \eta + v$$

où l'inconnue est le couple $(\psi, v) \in W^{1,2}_0 \times \mathbb{R}$.

D'après le théorème 10.3, on a $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, où $h \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1)$ vérifie $h(0) = 0$ et les inégalités $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$ de 10.3. En composant l'équation $\textcircled{6}$ par h à droite, on obtient :

$$\textcircled{7} \quad \psi \circ h - a \psi \circ h \circ R_\alpha = \eta \circ h + v$$

où $a = \tilde{a} \circ h$.

Si l'on pose :

$$H = h_o^{3/2} + \frac{h_o}{2\sqrt{3}} \|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^2}$$

on a, d'après 7.5, les majorations :

$$\|D^2(\eta \circ h)\|_{L^2} \leq \|D^2\eta\|_{L^2} H$$

$$\|D^2a\|_{L^2} \leq \|D^2\tilde{a}\|_{L^2} H.$$

Soit $C_1 = C_1(1, a)$ la constante donnée en 9.4. Si la condition suivante est vérifiée :

$$(8) \quad d = \left(\frac{h_o - 1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) C_1 H \gamma^{-1} \|D^2\tilde{a}\|_{L^2} < 1$$

alors, d'après le théorème 9.6, l'équation (7) a une unique solution

$(\psi \circ h, v) \in W^{1,2} \times \mathbb{R}$ qui vérifie $\int_0^1 \psi \circ h \, Dh \, d\theta = \int_0^1 \psi \, d\theta = 0$. De plus, on a :

$$\|D(\psi \circ h)\|_{L^2} \leq \frac{C_1}{1-d} \gamma^{-1} H \|D^2\eta\|_{L^2}$$

et, d'après 7.5,

$$\|D\psi\|_{L^2} \leq h_o^{1/2} \|D(\psi \circ h)\|_{L^2}.$$

On obtient finalement la proposition suivante :

Proposition : Soient $f \in D^{3,2}(T^1)$ vérifiant les hypothèses de 10.3, $\tilde{a} \in W^{2,2}$, $\tilde{a} > 0$ et $\eta \in W^{2,2}$. Si l'inégalité (8) est satisfaite, alors il existe un unique couple $(\psi, v) \in W_o^{1,2} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\psi - \tilde{a} \psi \circ f = \eta + v$$

De plus, on a :

$$\|D\psi\|_{L^2} \leq \frac{C_1}{1-d} h_o^{1/2} H^{-1} \|D^2\eta\|_{L^2}.$$

Remarques : 1) Si on veut résoudre l'équation $\psi - \tilde{a} \psi \circ f^{-1} = \eta + \nu$ ou

$\psi \circ f - \tilde{a}\psi = \eta + \nu$ on procède de la même façon et on obtient les mêmes constantes.

2) Soit $\delta > 0$. Si $\|D^2\eta\|_{L^2} \leq \gamma \delta_1$, où $\delta_1 = 2\sqrt{3} \frac{1-d}{C_1} h_o^{1/2} H^{-1} \delta$, alors

$$\|\psi\|_{C^0} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|D\psi\|_{L^2} \leq \delta.$$

10.7 Cas particulier.

Soit $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme satisfaisant aux hypothèses de 10.3. Si l'on cherche à résoudre l'équation

$$\psi - \psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^3 = \eta + \nu,$$

où $(\psi, \eta) \in W_o^{1,2} \times \mathbb{R}$, on peut appliquer la proposition précédente. On pourra utiliser 7.6 pour évaluer la norme $\|D^2(Df^{-1})^3\|_{L^2}$ qui intervient dans le calcul de d (voir (8)).

D'autre part, comme

$$\text{Log}(Df^{-1})^3 \circ h = 3 \text{Log } Dh \circ R_{-\alpha} - 3 \text{Log } Dh,$$

la fonction $b \in W^{1,2}$ qui vérifie $\frac{b \circ R_{-\alpha}}{b} = (Df^{-1})^3 \circ h$ et $\int_0^1 \text{Log } b \, d\theta = 0$ est de la forme $b = \text{cste} \times (Dh)^3$. En particulier, $D \text{Log } b = 3 D \text{Log } Dh$ et

$$\text{Log } b_o = \|\text{Log } b\|_{C^0} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \|D \text{Log } Dh\|_{L^2}.$$

De plus, $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log}(Df^{-1})^3 \circ h \, d\theta = 0$, donc dans le calcul de la constante C_1 , on peut prendre l'expression 9.4, (15) (avec toujours $\ell_o = 1$).

10.8 On considère ici l'équation

$$(9) \quad \psi - \tilde{a} \psi \circ f^{-1} = \eta + v$$

où $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ satisfait aux hypothèses de 10.3, $\tilde{a} \in W^{2,2}$, $\tilde{a} > 0$ et $\eta \in W^{1,2}$. L'inconnue est le couple $(\psi, v) \in L^2 \times \mathbb{R}$; on demande en outre à ψ de vérifier $\int_0^1 \psi \, d\theta = 0$.

On écrit $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ et on compose l'équation (9) à droite par h , ce qui donne :

$$\psi \circ h - \tilde{a} \circ h \cdot \psi \circ h \circ R_{-\alpha} = \eta \circ h + v.$$

Le théorème 9.3 assure l'existence d'une unique solution $(\psi \circ h, v) \in L^2 \times \mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 \psi \circ h \, Dh \, d\theta = \int \psi \, d\theta = 0$.

De plus, si $C_1 = C_1(h_0, a)$ est la constante dont l'expression est donnée en 9.4 pour $\ell_0 = h_0$ (on a $\ell = Dh$) et $a = \tilde{a} \circ h$, on a :

$$\|\psi \circ h\|_{L^2} \leq \gamma^{-1} C_1 \|D(\eta \circ h)\|_{L^2}.$$

D'autre part, $\|\psi\|_{L^2} \leq h_0^{1/2} \|\psi \circ h\|_{L^2}$ et $\|D(\eta \circ h)\|_{L^2} \leq h_0^{1/2} \|D\eta\|_{L^2}$, donc :

$$\|\psi\|_{L^2} \leq \gamma^{-1} C_1 h_0 \|D\eta\|_{L^2}.$$

10.9 Cas particulier.

Si $\tilde{a} = (Df^{-1})^4$ et $b \in W^{1,2}$ vérifie $\frac{b \circ R_{-\alpha}}{b} = \tilde{a} \circ h$ et $\int_0^1 \text{Log } b \, d\theta = 0$, on a :

$$D \text{Log } b = 4 D \text{Log } Dh$$

donc

$$\|D \text{Log } b\|_{L^2} = 4 \|D \text{Log } Dh\|_{L^2}$$

$$\text{Log } b_0 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \|D \text{Log } Dh\|_{L^2}$$

et on peut, dans le calcul de C_1 , utiliser l'expression 9.4, (15) (avec $\ell_o = h_o$)
 puisque $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } (Df^{-1}) \circ h \, d\theta = 0$.

11. CONSTANTES EXPLICITES POUR LE THÉOREME DE LA COURBE TRANSLATÉE.

11.1 Soient $\delta > 0$ et $\mathbb{A}_\delta = \mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta]$. Si $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^k(\mathbb{A}_\delta)$ des fonctions de classe C^k de $\mathbb{A}_\delta$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $\|\varphi\|_{C^0} = \max_{\mathbb{A}_\delta} |\varphi|$ si $k=0$ et de la semi-norme

$$\|\varphi\|_{C^k} = \sup_{1 \leq i+j \leq k} \max_{\mathbb{A}_\delta} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial \theta^i \partial r^j} \varphi \right|.$$

Si $\varphi \in C^4(\mathbb{A}_\delta)$, on considère un vecteur $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ tel que $1 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 > 0$ et, pour $1 \leq j \leq 3$,

$$\|\varphi\|_{C^{4-j}} \leq k_j \|\varphi\|_{C^4}.$$

On peut toujours choisir $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Si la fonction φ est définie sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ -périodique en r (i.e. $\varphi(\theta, r+1) = \varphi(\theta, r)$; voir 12 pour les fonctions φ de la forme $\varphi(\theta, r) = \bar{\varphi}(\theta + r)$, avec $\bar{\varphi} \in C^4(\mathbb{T}^1)$), alors, d'après 3.8, on peut prendre $k_1 = \frac{1}{4}$, $k_2 = \frac{1}{32}$ et $k_3 = \frac{1}{192}$.

Si $\varphi \in C^k(\mathbb{A}_\delta)$ et $i+j \leq k$, on note :

$$\underbrace{\varphi_{\theta \dots \theta}}_i \underbrace{r \dots r}_j = \frac{\partial^{i+j}}{\partial \theta^i \partial r^j} \varphi.$$

D'après 3.8, pour tout $\varphi \in C^4(\mathbb{A}_\delta)$, on a :

$$\sup(\|\varphi_{\theta r r}\|_{C^0}, \|\varphi_{\theta \theta r}\|_{C^0}, \|\varphi_{\theta \theta \theta}\|_{C^0}) \leq u_1 \|\varphi\|_{C^4}$$

$$\sup(\|\varphi_{\theta r}\|_{C^0}, \|\varphi_{\theta \theta}\|_{C^0}) \leq u_2 \|\varphi\|_{C^4}$$

$$\|\varphi_{\theta}\|_{C^0} \leq u_3 \|\varphi\|_{C^4}$$

où $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{32}$, $u_3 = \frac{1}{192}$.

11.2 Nous renvoyons le lecteur à IV, 5.3 où l'on montre comment déduire du théorème

11.3 le théorème des courbes invariantes pour un plongement

$$F_1 : \mathbb{A}_{\delta_1} \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \quad , \quad \delta_1 > 0$$

de classe C^4 , ayant la propriété d'intersection et tel que F_1 est assez proche, en topologie C^4 , d'un difféomorphisme complètement intégrable T qui dévie la verticale.

La démonstration du théorème 11.3, dit "de la courbe translatée", est analogue à celle que nous avons donnée en IV.5, en classe $C^{3+\beta}$, $0 < \beta < 1$. Elle est allégée par le fait que la proposition 8.2 est plus simple à démontrer que la proposition IV, 3.8.

Nous calculons ici toutes les constantes qui interviennent dans ce théorème. On trouvera en 11.11 des valeurs numériques explicites des constantes c et C_2 .

11.3 Théorème de la courbe translatée : Soient $\delta > 0$, α un nombre de type constant ayant pour constante de Markov $\gamma = \inf_{p/q \in \mathbb{Q}} q^2 |\alpha - \frac{p}{q}| > 0$ et $F : \mathbb{A}_{\delta} \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ un plongement de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha + r, r + \varphi(\theta, r))$$

avec $\varphi \in C^4(\mathbb{A}_{\delta})$.

Il existe des constantes $c > 0$ et $C_2 > 0$, dont les valeurs sont données en 11.11, telles que, si

$$\|\varphi\|_{C^4} \leq c \gamma^2 \quad ,$$

alors il existe un unique couple $(\mu, \psi) \in \mathbb{R} \times W^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ tel que $f = \text{Id}_{\mathbb{T}^1} + \psi + \alpha$ a. pour

nombre de rotation $\rho(f) = \alpha$ et

$$F(\theta, \psi(\theta)) = (f(\theta), \psi \circ f(\theta) + \mu)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ (i.e. le graphe de ψ est translaté de μ par F).

De plus, on a les inégalités :

$$\|\psi\|_{W^{3,2}} \leq C_2 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^4},$$

$$|\mu| \leq \|\varphi\|_{C^0}.$$

Si $\delta \geq \gamma$, on pourra, dans tous les cas, choisir pour c et C_2 les valeurs suivantes (cf. 11.11, 4) :

$$c = 5,04 \quad \text{et} \quad C_2 = 0,153.$$

Démonstration du théorème : Soit $\psi_1 \in W^{3,2}_0$ tel que $\|D\psi_1\|_{C^0} < 1$. D'après 4.3, il existe un unique réel $\lambda_\alpha(\psi_1)$ tel que, si $f = \text{Id} + \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1)$, alors $\rho(f) = \alpha$.

Si l'on pose $\psi = \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1) - \alpha$ alors, d'après 4.2, (v), la fonction ψ s'annule, donc

$$\|\psi\|_{C^0} \leq 2 \|\psi_1\|_{C^0}.$$

Soit $0 < x \leq c_3$, où la constante c_3 est définie en 10.5 ; on a $c_3 \leq 10,67$. Si $\psi \in W^{3,2}$ et $\|D^3\psi\|_{L^2} \leq xy$, alors $\|D\psi\|_{C^0} \leq \frac{xy}{12\sqrt{5}} \leq \frac{3-\sqrt{5}}{24\sqrt{5}} \times 10,67 < 1$, donc $\text{Id} + \psi \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$. On pose :

$$K_x = \{\psi \in W^{3,2} \mid \|D^3\psi\|_{L^2} \leq xy \quad \text{et} \quad \rho(\text{Id} + \psi + \alpha) = \alpha\}.$$

Muni de la C^2 -topologie, l'ensemble K_x est homéomorphe au compact convexe métrisable

$$K'_x = \{\psi_1 \in W_0^{3,2} \mid \|D^3 \psi_1\|_{L^2} \leq x\gamma\}$$

muni aussi de la C^2 -topologie, par l'application: $K'_x \rightarrow K_x$, $\psi_1 \mapsto \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1) - \alpha$.

Si $\psi \in K_x$, et $\psi = \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1) - \alpha$, on a (cf. 3.7) :

$$\|\psi\|_{C^0} \leq 2 \|\psi_1\|_{C^0} \leq \frac{x\gamma}{6\sqrt{210}}.$$

Pour que le graphe de ψ soit inclus dans A_δ , il suffit que

$$(1) \quad \frac{x\gamma}{6\sqrt{210}} < \delta.$$

Cette condition est automatiquement vérifiée si $\frac{\delta}{\gamma} \geq 0,123$ (car $x \leq 10,67$).

Le problème revient à chercher un couple $(\mu, \psi) \in \mathbb{R} \times K_x$ qui vérifie l'équation :

$$(2) \quad \psi \circ f - \psi = \varphi \circ G + \mu$$

où $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ et $G: \mathbb{T}^1 \rightarrow A_\delta$, $\theta \mapsto (\theta, \psi(\theta))$ (on rappelle que si $\psi \in K_x$ alors $\rho(f) = \alpha$).

En dérivant deux fois l'équation (2), on obtient :

$$D^2 \psi \circ f - (Df)^2 - D^2 \psi (1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G) = B_2$$

$$\text{où } B_2 = \varphi_{\theta\theta} \circ G + 2 \varphi_{\theta r} \circ G D\psi + \varphi_{rr} \circ G (D\psi)^2,$$

puis, en divisant les deux membres par $(Df)^2$,

$$D^2 \psi \circ f - a D^2 \psi = \eta$$

avec

$$(3) \quad a = (Df)^{-2} (1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G)$$

$$(4) \quad \eta = B_2 (Df)^{-2}.$$

Comme φ est de classe C^4 , les fonctions a et η sont de classes $W^{2,2}$ et on a $\|D^2\eta\|_{L^2} \leq \text{cste} \|\varphi\|_{C^4}$.

Remarque : Si φ n'avait été que de classe $W^{4,2}$ sur A_δ , alors $\varphi_{\theta\theta}$, $\varphi_{\theta r}$ et φ_{rr} auraient été de classe $W^{2,2}$ et leur restriction à l'image de G seulement de classe $W^{1,2}$.

On se fixe un vecteur $k = (k_1, k_2, k_3)$ tel que $1 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 > 0$ et, pour $j = 1, 2, 3$,

$$\|\varphi\|_{C^{4-j}} \leq k_j \|\varphi\|_{C^4}$$

(voir 11.1). Soit v un réel tel que $v > 0$ et

$$\|\varphi\|_{C^4} \leq \gamma^2 v.$$

On a :

$$\| -D\psi \circ f + \varphi_r \circ G \|_{C^0} \leq \frac{x\gamma}{12\sqrt{5}} + k_3 \gamma^2 v$$

donc si l'inégalité suivante est vérifiée

$$(5) \quad \frac{x\gamma}{12\sqrt{5}} + k_3 \gamma^2 v < 1,$$

alors $a > 0$. Dans ce cas, notons :

$$\begin{aligned} f_o &= e \\ a_o &= e \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\| \text{Log } Df \|_{C^0} \\ &\| \text{Log } a \|_{C^0} \end{aligned}.$$

On a l'inégalité :

$$a_o \leq f_o^2 \left(1 - \frac{x\gamma}{12\sqrt{5}} - k_3 \gamma^2 v\right)^{-1}.$$

Comme $x \leq c_3$, il existe, d'après 10.3, un unique $h \in D^{2,2}(\mathbb{T}^1, 0)$ tel que :

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}.$$

On pose $h_o = e$ et on définit le réel λ par :

$$\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a \circ h \, d\theta.$$

Puisque $\text{Log}(Df)^{-2} \circ h = -2(\text{Log } Dh \circ R_\alpha - \text{Log } Dg)$, on a

$$\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } (1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G) \circ h \, d\theta$$

et
$$\lambda \geq \lambda_- = 1 - \frac{x}{12\sqrt{5}} - k_3 \gamma^2 v.$$

Supposons les inégalités (1) et (5) satisfaites. D'après la proposition 10.6, il existe une constante d_2 dépendant de $x, v, \gamma, r = \frac{\sin \pi \|\alpha\|}{2\|\alpha\|}$ et $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ telle que si

$$(6) \quad d_2 < 1$$

alors pour tout $\psi \in K_x$, il existe un unique couple $(v, \tilde{\psi}_1) \in \mathbb{R} \times W_o^{3,2}$ vérifiant :

$$(7) \quad D^2 \tilde{\psi}_1 \circ f - a D^2 \tilde{\psi}_1 = \eta + v,$$

où les fonctions a et η sont définies par (3) et (4).

De plus, comme $\|D_\eta^2\|_{L^2} \leq \text{cste.} \|\varphi\|_{C^4}$, il existe une constante C_2 dépendant de x, v, γ, r et $\vec{k}$ telle que :

$$(8) \quad \|D^3 \tilde{\psi}_1\|_{L^2} \leq \gamma^{-1} C_2 \|\varphi\|_{C^4} \leq \gamma C_2 v.$$

On posera $\tilde{\psi}_1 = \phi_1(\psi)$.

Les constantes d_2 et C_2 sont croissantes avec x, v, γ et les k_i et décroissent si r croît (pourvu que l'on adopte le procédé de 10.5 pour majorer h_0). Si x et v tendent vers 0, alors $\frac{x\gamma}{6\sqrt{2}10}, \frac{x\gamma}{12\sqrt{5}} + k_3 \gamma^2 v$ et d_2 tendent vers 0 (car a tend vers la constante en 1), donc les inégalités (1), (5) et (6) sont satisfaites pour x et v assez petits.

Soit $c = \inf(\frac{x}{C_2}, v)$. Si

$$\|\varphi\|_{C^4} \leq \gamma^2 c$$

et si les inégalités (1), (5) et (6) sont satisfaites, on peut définir l'application :

$$\begin{aligned} \phi : K_x &\longrightarrow K_x \\ \psi &\longmapsto \tilde{\psi} \end{aligned}$$

où $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \lambda_\alpha(\psi_1) - \alpha$ et $\tilde{\psi}_1 = \phi_1(\psi)$ (cf. (7)).

L'application ϕ est continue pour la C^2 -topologie, en effet soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de K_x qui converge au sens C^2 vers $\psi \in K_x$. Notons $\tilde{\psi}_{1,n} = \phi_1(\psi_n)$. Si $\tilde{\psi}_1$ est une valeur d'adhérence de la suite $(\tilde{\psi}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ du compact K'_x , alors $\tilde{\psi}_1$ satisfait l'équation (7) donc, par unicité de la solution, $\tilde{\psi}_1 = \phi_1(\psi)$. On en déduit la continuité de ϕ_1 , puis celle de ϕ puisque l'application λ_α est continue (cf. 4.3). D'après le théorème de Schauder-Tychonoff, l'application ϕ possède un point fixe $\tilde{\psi} \in K_x$, qui vérifie donc :

$$D^2 \psi \circ f - a D^2 \psi = \eta + v$$

soit, en multipliant cette équation par $(Df)^2$,

$$(9) \quad D^2(\psi \circ f - \psi - \varphi \circ G) = v(Df)^2,$$

où l'on rappelle que $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$.

Comme $(Df)^2 > 0$ et comme le membre de gauche de l'équation (9) a une intégrale nulle sur Π^1 , on a nécessairement $v = 0$; il existe donc un réel μ tel que :

$$(10) \quad \psi \circ f = \psi + \varphi \circ G + \mu.$$

De l'inégalité (8), on déduit que

$$\|D^3 \psi\|_{L^2} \leq \gamma^{-1} C_2 \|\varphi\|_{C^4}$$

et en composant l'équation (10) à droite par h , on a $\psi \circ h \circ R_\alpha - \psi \circ h = \varphi \circ G \circ h - \mu$, d'où l'on tire :

$$\mu = - \int_0^1 \varphi \circ G \circ h \, d\theta$$

et

$$|\mu| \leq \|\varphi\|_{C^0}. \quad \blacksquare$$

11.4 Remarques : 1) Parmi les conditions (1), (5) et (6), la plus restrictive en général est la condition (6).

2) Les valeurs de γ , r et $\vec{k}$ étant fixées, on cherche à maximiser la fonction $c(x, v)$ sur l'ensemble $\Delta = \{(x, v) \in \mathbb{R}_+^{*2} \mid (1), (5) \text{ et } (6) \text{ sont vérifiées}\}$. Les expressions de c et d_2 étant relativement compliquées, nous indiquerons en 11.11 des valeurs numériques de $\max_{\Delta} c(x, v)$ et de la constante $C_2(x, v)$ correspondante

obtenues à l'aide d'une machine à calculer.

3) Si $\delta < \gamma$, il existe une constante c' telle que les conclusions du théorème 11.3 sont assurées pour $\|\varphi\|_{C^4} \leq c' \gamma \delta$. Se reporter à 11.11, B) pour des valeurs numériques de c' .

4) D'après II, 4.12, une majoration du type $\|\varphi\|_{C^4} \leq cste. \gamma^2$ est nécessaire pour obtenir les conclusions du théorème.

5) Si l'on utilise 10.5 pour majorer h_0 , alors, x et v étant fixés, $c(x, v, \gamma, r, k)$ est une fonction décroissante de γ et r et croissante des k_i .

11.5 Calcul de $D^2 a$.

On a :

$$a = (Df)^{-2} g$$

où $g = 1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G$, $f = Id + \psi + \alpha$ et $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$, donc

$$D^2 a = (-2 \frac{D^3 f}{(Df)^3} + 6 \frac{(D^2 f)^2}{(Df)^4}) g - 4 \frac{D^2 f}{(Df)^3} Dg + \frac{1}{(Df)^2} D^2 g$$

$$Dg = - D^2 \psi \circ f Df + \varphi_{\theta r} \circ G + \varphi_{rr} \circ G D\psi$$

$$D^2 g = - D^3 \psi \circ f (Df)^2 + D^2 \psi \circ f D^2 f + \varphi_{\theta \theta r} \circ G + 2\varphi_{\theta rr} \circ G D\psi + \varphi_{rrr} \circ G (D\psi)^2 + \varphi_{rr} \circ G D^2 \psi$$

$$Df = 1 + D\psi \quad ; \quad D^2 f = D^2 \psi \quad \text{et} \quad D^3 f = D^3 \psi .$$

11.6 Calcul de $D^2 \text{Log } a$.

On a :

$$\text{Log } a = -2 \text{Log } Df + \text{Log } g$$

$$\text{donc} \quad D^2 \text{Log } a = -2 D^2 \text{Log } Df - \frac{D^2 g}{g} - \frac{(Dg)^2}{g^2} .$$

11.7 Calcul de $D^2\eta$.

On a :

$$\eta = (Df)^{-2} B_2$$

où $B_2 = \varphi_{\theta\theta} \circ G + 2\varphi_{\theta r} \circ G D\psi + \varphi_{rr} \circ G (D\psi)^2$ donc

$$D^2\eta = \left(-2 \frac{D^3f}{(Df)^3} + 6 \frac{(D^2f)^2}{(Df)^4}\right) B_2 - 4 \frac{D^2f}{(Df)^3} DB_2 + \frac{1}{(Df)^2} D^2B$$

$$DB_2 = \varphi_{\theta\theta\theta} \circ G + 3\varphi_{\theta\theta r} \circ G D\psi + 3\varphi_{\theta rr} \circ G (D\psi)^2 + \varphi_{rrr} \circ G (D\psi)^3 \\ + 2\varphi_{\theta r} \circ G D^2\psi + 2\varphi_{rr} \circ G D\psi D^2\psi$$

$$D^2B_2 = \varphi_{\theta\theta\theta\theta} \circ G + 4\varphi_{\theta\theta\theta r} \circ G D\psi + 6\varphi_{\theta\theta rr} \circ G (D\psi)^2 \\ + 4\varphi_{\theta rrr} \circ G (D\psi)^3 + \varphi_{rrrr} \circ G (D\psi)^4 + 5\varphi_{\theta\theta r} \circ G D^2\psi \\ + 10\varphi_{\theta rr} \circ G D^2\psi D\psi + 5\varphi_{rrr} \circ G D^2\psi (D\psi)^2 \\ + 2\varphi_{\theta r} \circ G D^3\psi + 2\varphi_{rr} \circ G D^3\psi D\psi + 2\varphi_{rr} \circ G (D^2\psi)^2 .$$

11.8 Majorations.

Nous allons utiliser les inégalités suivantes (cf. 3) :

$$\|D^3\psi\|_{L^2} \leq x_Y \quad , \quad \|D^2\psi\|_{L^2} \leq \frac{x_Y}{2\pi} \quad , \quad \|D\psi\|_{L^2} \leq \frac{x_Y}{(2\pi)^2}$$

$$\|D^2\psi\|_{C^0} \leq \frac{x_Y}{2\sqrt{3}} \quad , \quad \|D\psi\|_{C^0} \leq \frac{x_Y}{12\sqrt{5}} .$$

Si $k \geq 2$,

$$\|(D\psi)^k\|_{L^2} \leq \|D\psi\|_{C^0}^{k-1} \|D\psi\|_{L^2}$$

$$\|D^2\psi \circ f D^2\psi\|_{L^2} \leq \|D^2\psi\|_{C^0} \|D^2\psi\|_{L^2}$$

$$\|D^3\psi \circ f (Df)^{1/2}\|_{L^2} = \|D^3\psi\|_{L^2} .$$

D'après 7.1,

$$f_o = e^{\frac{\| \text{Log Df} \|}{C^o}} \leq (1 - \frac{xy}{12\sqrt{5}})^{-1}.$$

D'après 7.6, et comme $x \leq c_3$,

$$y = \frac{1}{Y} \| D^2 \text{ Log Df} \|_{L^2} \leq x f_o (1 + \frac{xy f_o}{4\pi\sqrt{3}}) = \ell_Y(x) \leq c_2.$$

Majoration de $A = \frac{1}{Y} \| D^2 a \|_{L^2}$.

On a :

$$\begin{aligned} A &\leq 2 f_o^3 x (1 + 3 \frac{xy f_o}{4\pi\sqrt{3}}) (1 + \frac{xy}{12\sqrt{5}} + Y^2 k_3 v) \\ &\quad + 4 f_o^2 \frac{x}{2\pi} (\frac{xy}{2\sqrt{3}} + f_o Y^2 v (u_2 + k_2 \frac{xy}{12\sqrt{5}})) \\ &\quad + f_o^{1/2} x + f_o^2 A_1 \end{aligned}$$

$$\text{où } A_1 = \frac{x^2 Y}{4\pi\sqrt{3}} + v Y A_2, \quad A_2 = u_1 + \frac{xy}{(2\pi)^2} (2u_1 + k_1 \frac{xy}{12\sqrt{5}}) + k_2 \frac{xy}{2\pi}.$$

Majoration de $A' = \frac{1}{Y} \| D^2 \text{ Log } a \|_{L^2}$.

On a :

$$A' \leq 2y + A'_1 A'_2 + \frac{A_1'^2 A_2'^2 Y}{4\pi\sqrt{3}}$$

$$\text{où } y = \frac{1}{Y} \| D^2 \text{ Log Df} \|_{L^2} \leq \ell_Y(x),$$

$$A'_1 = \frac{\| 1 \|}{g C^o} \leq (1 - \frac{xy}{12\sqrt{5}} - k_3 Y^2 v)^{-1}$$

$$A'_2 = \frac{1}{Y} \| D^2 g \|_{L^2} \leq x f_o^{3/2} + A_1 f_o^2$$

$$g = 1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G.$$

Majoration de $\| D^2 \eta \|_{L^2}$.

Si $\| D^2 \eta \| \leq J \| \varphi \|_C^4$, on a $J \leq J_1 + J_2 + J_3$, où

$$J_1 = \|D^2((Df)^{-2})\|_{L^2} \|B_2\|_{C^0} / \|\varphi\|_{C^4}$$

$$J_2 = 2 \|D((Df)^{-2})\|_{L^2} \|DB_2\|_{C^0} / \|\varphi\|_{C^4}$$

$$J_3 = \| (Df)^{-2} \|_{C^0} \|D^2 B_2\|_{L^2} / \|\varphi\|_{C^4} .$$

On a :

$$J_1 \leq 2x \gamma f_o^3 (1 + \frac{3x\gamma f_o}{4\pi\sqrt{3}}) (u_2 + u_2 \frac{x\gamma}{6\sqrt{3}} + k_2 (\frac{x\gamma}{12\sqrt{3}})^2)$$

$$J_2 \leq 4 \frac{x\gamma}{2\pi} f_o^3 (J_2' + J_2'')$$

où $J_2' = u_1 (1 + 3 \frac{x\gamma}{12\sqrt{3}} + 3 (\frac{x\gamma}{12\sqrt{3}})^2) + k_1 (\frac{x\gamma}{12\sqrt{3}})^3$

$$J_2'' = 2u_2 \frac{x\gamma}{2\sqrt{3}} + 2 k_2 \frac{(x\gamma)^2}{(2\sqrt{3})(12\sqrt{3})}$$

et $J_3 \leq f_o^2 (J_3' + J_3'' + J_3''')$

où $J_3' = 1 + 4 \frac{x\gamma}{(2\pi)^2} + 6 \frac{(x\gamma)^2}{(2\pi)^2 12\sqrt{3}} + 4 \frac{(x\gamma)^3}{(2\pi)^2 (12\sqrt{3})^2} + \frac{(x\gamma)^4}{(2\pi)^2 (12\sqrt{3})^3}$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{\pi^2} (1 + \frac{x\gamma}{12\sqrt{3}})^4$$

$$J_3'' = 5 u_1 \frac{x\gamma}{2\pi} + 10 u_1 \frac{(x\gamma)^2}{24\pi\sqrt{3}} + 5 k_1 \frac{(x\gamma)^3}{2\pi (12\sqrt{3})^2}$$

$$J_3''' = 2 u_2 x \gamma + 2 k_2 (\frac{(x\gamma)^2}{12\sqrt{3}} + \frac{(x\gamma)^2}{4\pi\sqrt{3}})$$

11.9 Calcul de la constante c.

1) Estimation de h_o . On a

$$f_o \leq (1 - \frac{x\gamma}{12\sqrt{3}})^{-1}$$

et $y = \frac{1}{\gamma} \|D^2 \text{Log } Df\|_{L^2} \leq x f_o (1 + \frac{x\gamma f_o}{4\pi\sqrt{3}}) .$

On majore h_o de la manière suivante (cf. 10.5). Posant $s = 16\pi\sqrt{3} r$, où $r = \frac{\sin \pi \|\alpha\|}{2 \|\alpha\|}$, on considère la fonction $H_y : t \mapsto \frac{s - ty}{s - y(t + t^{5/2})}$. Si $z_o = e^{2/3}$ et $z_{n+1} = H_y(z_n)$, on a $h_o \leq z_n$ pour tout n . On choisit un n suffisamment grand pour que $z_n - H_y(z_n) \leq 10^{-8}$.

Le théorème 10.3 nous fournit ensuite la majoration :

$$K = \|D \operatorname{Log} Dh\|_{L^2} \leq \frac{y h_o^{3/2}}{8 \pi r (1 - h_o y/s)} ;$$

puis on pose, comme en 10.6,

$$H = h_o^{3/2} + \frac{h_o}{2\sqrt{3}} K .$$

2) Connaissant x , v , γ et f_o , on calcule A , A' et J en utilisant les estimations de 11.8.

3) Majoration de b_o . Soit $b \in W^{1,2}$ tel que $\frac{b \circ f}{b} = a$ et $\int_0^1 \operatorname{Log} b \, d\theta = 0$. On a, d'après 10.6,

$$\frac{1}{\gamma} \|D^2 (\operatorname{Log} a \circ h)\|_{L^2} \leq A'H = z$$

et
$$\|D \operatorname{Log} b\|_{L^2} \leq \frac{z}{8\pi r} .$$

Si $b_o = e^{\frac{\| \operatorname{Log} b \|}{C^o}}$, alors
$$b_o \leq e^{z/s} .$$

Remarque : On obtient ici une majoration de b_o qui reste bornée lorsque γ tend vers 0, car on a su majorer $\frac{1}{\gamma} \|D^2 (\operatorname{Log} a \circ h)\|_{L^2}$ de façon adéquate (cf. 9.5, 4)).

4) Calcul de C_1 . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ défini par $\operatorname{Log} \lambda = \int_0^1 \operatorname{Log} a \circ h \, d\theta$. On a :

$$\lambda \geq \lambda_- = 1 - \frac{x}{12\sqrt{5}} - k_3 v \gamma^2 .$$

D'après 9.4, si $\lambda \neq 1$, alors

$$C_1 = \frac{1}{4\pi(1+\lambda_-)\tau} b_o^2 (1 + b_o^3(b_o - 1)) \left(\frac{z}{8\pi\tau} \left(\frac{b_o(b_o-1)}{2\pi} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + 1 \right)$$

et, si $\lambda = 1$,

$$C_1 = \frac{1}{8\pi\tau} b_o^2 (1 + b_o(b_o - 1)) \left(\frac{z}{8\pi\tau} \left(\frac{b_o(b_o-1)}{2\pi} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + 1 \right) .$$

5) Calcul de d_2 . On a, d'après 10.6,

$$d_2 = \left(\frac{h_o - 1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) A H C_1 .$$

On suppose que $d_2 < 1$.

6) Calcul de C_2 . On a, d'après 10.6 et 11.8,

$$C_2 = \frac{C_1}{1-d_2} h_o^{1/2} H J .$$

7) On a enfin :

$$c = \inf\left(\frac{x}{C_2}, v\right) .$$

11.10 Conditions à satisfaire.

1) $v > 0$, $0 < x \leq c_3$.

2) $\frac{x\gamma}{6\sqrt{2}10} < \delta$. Cette condition est entraînée par la précédente si $\frac{\delta}{\gamma} \leq 0,123$.

3) $\frac{x\gamma}{12\sqrt{5}} + k v \gamma^2 < 1$.

4) $d_2 < 1$.

Remarques : 1) Si le difféomorphisme F a la propriété d'intersection, alors on a nécessairement $\lambda = 1$ (i.e. $\int_0^1 \text{Log } a \circ h \, d\theta = 0$) (cf. [V, 6.6]).

2) Lorsque γ tend vers 0, de nombreux termes tendent vers 0, ce qui

implique que A tend vers $3x$, A' vers $2y+x$ et J vers 1.

11.11 Résultats numériques.

Nous proposons ici des valeurs numériques explicites des constantes c et C_2 .

Les résultats que nous obtenons améliorent considérablement ceux de H. Rüssmann [R] lorsque α est un nombre de type constant. Les résultats de H. Rüssmann ont l'avantage d'être valables lorsque α satisfait une condition diophantienne :

$\inf_{p/q \in \mathbb{Q}} q^{2+\beta} |\alpha - (p/q)| > 0$ pour un certain $\beta \geq 0$. Ils traitent le cas où $\delta \geq \gamma$, $\lambda = 1$ et $k_i = u_i$ (cas A, 1) ci-dessous).

La méthode utilisée est très simple. Elle consiste à programmer la fonction $c(x, v, \gamma, r, \vec{k})$ puis, pour γ , r et $\vec{k}$ fixés, à faire varier x et v de façon discrète et à choisir pour c la plus grande valeur obtenue. Nous calculons alors C_2 pour les valeurs correspondantes de x et v . La valeur de c ainsi obtenue n'est pas nécessairement la valeur maximale mais seulement une valeur possible qui en est proche. Il serait d'un intérêt limité de déterminer la valeur maximale de c puisque, par de petits raffinements locaux de la méthode, on pourrait encore l'améliorer un peu.

Nous donnons la valeur de c par défaut en donnant trois chiffres significatifs et celle de C_2 par excès en donnant deux chiffres significatifs.

A) On suppose que $\delta/\gamma \geq 0,123$. La condition 2) de 11.10 est alors automatiquement vérifiée.

1) On suppose que $k_i = u_i$, $i = 1, 2, 3$ et que $\lambda = 1$ (cf. 11.1).

Si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $r \approx 1,22\dots$, alors pour $x_0 = 1,65$ et $v_0 = 19$, on obtient

$$c = 18,9 \quad \text{et} \quad C_2 = 0,088 \quad .$$

Si on choisit $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r = 1$, on obtient, pour $x_0 = 1,35$ et $v_0 = 14,1$, les valeurs suivantes de c et de C_2 , valables pour tout nombre α de type constant :

$$c = 14,0 \quad \text{et} \quad C_2 = 0,097 \quad .$$

CALCUL DES CONSTANTES DANS LE THÉORÈME DE LA COURBE TRANSLATÉE

Si l'on choisit $r = \frac{\sin \pi \gamma}{2\gamma}$ (cf. 8.3, remarques (ii) et (iii)), on obtient le tableau de valeurs suivant :

γ	x_o	v_o	c	C_2
0,25	2,1	29,3	29,2	0,072
10^{-1}	2,85	47,6	47,5	0,060
10^{-2}	3,55	66,55	66,5	0,053
10^{-3}	3,65	69,15	69,1	0,053
10^{-4}	3,65	69,4	69,3	0,053

Remarque : Pour utiliser ce tableau, on notera que si $\gamma_1 < \gamma$ et si

$$r_1 = \frac{\sin \pi \gamma_1}{2\gamma_1}, \text{ alors}$$

$$c(x_o, v_o, \gamma_1, r_1, \vec{k}) \geq c(x_o, v_o, \gamma, r, \vec{k})$$

(voir 11.4, 5)).

2) On suppose ici que $\lambda = 1$ et que $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient, pour $x_o = 0,51$ et $v_o = 6,16$, les valeurs suivantes :

$$c = 6,16 \text{ et } C_2 = 0,083 \text{ .}$$

Si $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r = 1$, on obtient, pour $x_o = 0,47$ et $v_o = 5,8$ les valeurs suivantes :

$$c = 5,8 \text{ et } C_2 = 0,081 \text{ .}$$

Si $r = \frac{\sin \pi \gamma}{2\gamma}$, on a le tableau suivant :

γ	x_0	v_0	c	C_2
0,25	0,83	13,3	13,3	0,063
10^{-1}	2,33	39,5	39,5	0,059
10^{-2}	3,56	66,4	66,3	0,054
10^{-3}	3,66	69,2	69,1	0,053

3) On suppose que $\lambda \neq 1$ et $k_i = u_i$, $i = 1, 2, 3$.

Si $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r=1$, on obtient, pour $x_0 = 1,35$ et $v_0 = 13,7$ les valeurs suivantes

$$c = 13,6 \quad \text{et} \quad C_2 = 0,099 \quad .$$

Pour $r = \frac{\sin \pi \gamma}{2\gamma}$, on a le tableau suivant :

γ	x_0	v_0	c	C_2
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	1,58	18,4	18,3	0,087
10^{-1}	2,77	46,45	46,4	0,060
10^{-2}	3,45	65,2	65,1	0,063
10^{-3}	3,55	67,7	67,6	0,053

4) On suppose que $\lambda \neq 1$ et que $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Si $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r=1$, on obtient, pour $x_0 = 0,77$ et $v_0 = 5,04$ les valeurs suivantes

de c et C_2 , valables dans tous les cas :

$$c = 5,04 \quad \text{et} \quad C_2 = 0,153 \quad .$$

Si $r = \frac{\sin \pi \gamma}{2\pi}$, on obtient le tableau suivant :

γ	x_0	v_0	c	C_2
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	0,61	5,5	5,5	0,111
10^{-1}	2,25	32,4	32,4	0,070
10^{-2}	3,44	64,65	64,6	0,054
10^{-3}	3,54	67,7	67,6	0,053

B) On suppose que $\delta/\gamma < 0,123$.

Il faut, dans ce cas, ajouter la condition

$$x \leq 6 \sqrt{210} \delta/\gamma$$

pour que le graphe de ψ soit inclus dans A_δ .

Si, pour des valeurs données de γ , r et $\vec{k}$, les nombres c et C_2 convenaient pour $\delta/\gamma \geq 0,123$, alors on peut remplacer c par

$$\inf(c, \frac{6 \sqrt{210} \delta}{C_2 \gamma})$$

(même si ces valeurs de c et C_2 ont été obtenues pour un $x_0 > 6 \sqrt{210} \delta/\gamma$), puisque si $\|\varphi\|_{C^4} \leq c \gamma^2$, alors $\|D^3 \psi\|_{L^2} \leq 6 \sqrt{210} \delta$ et $\|\psi\|_{C^0} \leq \delta$ (cf. 11.3, (3)).

Si δ est très petit par rapport à γ , on obtient de plus grandes valeurs de c par tâtonnements numériques que par cette méthode.

11.12 Remarques sur les calculs numériques.

1) Dans tous les cas considérés, le procédé adopté en 11.9, 1) pour estimer h_0 fournit le résultat pour un $n \leq 9$. L'estimation obtenue est meilleure que si on

avait utilisé 10.4 au lieu de 10.5.

2) On ne rencontre pas la condition $x \leq c_3$; on constate, en effet, que la fonction c prend son maximum pour un $x_0 \leq c_3$.

Nous avons choisi certains procédés de majoration plutôt que d'autres (par exemple dans l'évaluation de h_0 ou dans le calcul de la constante d de 10.6 en utilisant l'expression de 9.6 et non celle de 9.7) à cause des valeurs relativement petites de x pour lesquelles la fonction $c(x, v)$ atteint son maximum.

Dans les cas considérés en 11.11, 1) et dans tous les cas où γ est petit, c est la condition 4) de 11.10 (i.e. $d_2 < 1$) qui est la plus difficile à satisfaire. Dans tous les autres cas, c est la condition 3).

3) Si l'on se réfère à II, 3 et 4, ainsi qu'à III.9, la constante c est toujours finie. Néanmoins, il paraît étonnant que ce soit la constante d_2 qui dépasse avant que x ne devienne supérieur à c_3 , ce qui signifie que $\tilde{f} = \text{Id} + \phi(\psi) + \alpha$ n'est plus un difféomorphisme avant que $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ ne satisfasse plus aux hypothèses du théorème local de conjugaison à R_α (cf. 10.3).

Cela semble dû à l'accroissement conjugué des nombres f_0 , y , h_0 et v , inévitable si l'on veut agrandir la constante c .

4) Soit $S_{\alpha, \delta}$ l'ensemble des $\varphi \in C^4(\mathbb{A}_\delta)$ pour lesquels le plongement F défini en 11.3 ne vérifie pas les conclusions du théorème 11.3. Il serait d'un certain intérêt de déterminer le nombre $\inf_{\varphi \in S_{\alpha, \delta}} \|\varphi\|_{C^4}$, intérêt cependant limité puisque d'après [V]), il est plus naturel de poser la question en norme C^3 qu'en norme C^4 (voir 12.6, remarque 3).

12. CONSTANTES EXPLICITES POUR $\frac{f+f^{-1}}{2}$.

12.1 Soit F un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$$

où $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$.

Un tel difféomorphisme est symplectique et possède la propriété d'intersection (cf. [I, 1]).

La courbe Γ , graphe de la fonction $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ est invariante par F si et seulement si $f = \text{Id} + \psi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1$ qui satisfait l'équation :

$$\frac{f + f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \quad .$$

Dans ce cas, le nombre de rotation de $F|_{\Gamma}$ est égal à celui de f (voir [II, 2]).

12.2 Théorème : Soit α un nombre de type constant ayant pour constante de Markov

$\gamma = \inf_{p/q \in \mathbb{Q}} q^2 |\alpha - \frac{p}{q}| > 0$. Il existe des constantes $c_4 > 0$ et $C_3 > 0$ telle que si

$\varphi \in W_{0,2}^{4,2}$ vérifie :

$$\|D^4 \varphi\|_{L^2} \leq c_4 \gamma^2 \quad ,$$

alors il existe un difféomorphisme $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ de nombre de rotation $\rho(f) = \alpha$ et tel que :

$$\frac{f + f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi$$

De plus, on a la majoration :

①

$$\|D^3 f\|_{L^2} \leq C_3 \gamma^{-1} \|D^4 \varphi\|_{L^2} \quad .$$

Démonstration : Soit $0 < x \leq c_3$, où c_3 est la constante définie en 10.5. On pose

$$K'_x = \{\psi_1 \in W^{3,2}_0 \mid \|D^3 \psi_1\|_{L^2} \leq x\gamma\}$$

et

$$K_x = \{\psi = \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1) \mid \psi_1 \in K'_x\}$$

où $\lambda_\alpha(\psi_1)$ est l'unique réel tel que $\rho(\text{Id} + \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1)) = \alpha$.

Munis de la C^2 -topologie, K_x et K'_x sont des compacts homéomorphes par l'application $\psi_1 \rightarrow \psi = \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1)$; d'autre part, K'_x est convexe et métrisable.

On cherche un $\psi \in K_x$ tel que, si $f = \text{Id} + \psi$, alors

$$\frac{f + f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi.$$

En dérivant deux fois cette équation, on obtient

$$D^2 \psi - D^2 \psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^3 = D^2 \varphi.$$

Soit ψ un élément quelconque de K_x et $f = \text{Id} + \psi$. On a $\rho(f) = \alpha$ donc, d'après 10.6 et 10.7, il existe des constantes d_3 et C_3 , dépendant de x , γ et $r = \frac{\sin(\pi \|\alpha\|)}{2 \|\alpha\|}$, telles que si

$$d_3 < 1$$

alors il existe un unique couple $(v, \tilde{\psi}_1) \in \mathbb{R} \times W^{3,2}_0$ vérifiant :

$$D^2 \tilde{\psi}_1 - D^2 \tilde{\psi}_1 \circ f^{-1} (Df^{-1})^3 = D^2 \varphi + v.$$

De plus, on a l'inégalité :

$$(2) \quad \|D^3 \tilde{\psi}_1\|_{L^2} \leq \gamma^{-1} C_3 \|D^4 \varphi\|_{L^2}.$$

Remarque : La fonction φ étant ici une fonction d'une seule variable, on n'a pas besoin, comme en 11.3, qu'elle soit de classe C^4 .

La constante d_3 tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc $d_3 < 1$ si x est assez petit.

Si $c_4 \leq x/C_3$ et si $\|D^4\varphi\|_{L^2} \leq c_4 \gamma^2$, alors $\tilde{\psi}_1 \in K'_x$. On pose dans ce cas

$$\phi(\psi) = \tilde{\psi}_1 + \lambda_\alpha(\tilde{\psi}_1) \quad .$$

On montre comme en 11.3 que l'application $\phi : K_x \rightarrow K_x$ ainsi définie est continue pour la C^2 -topologie. D'après le théorème de Schauder-Tychonoff, ϕ possède un point fixe $\psi \in K_x$. Si $f = \text{Id} + \psi$, on a $\rho(f) = \alpha$ et

$$D^2\left(\frac{f + f^{-1}}{2}\right) = D^2\left(\text{Id} + \frac{1}{2}\varphi\right) + \nu \quad .$$

En intégrant cette équation par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$, on remarque que $\nu = 0$, donc

$$\frac{f + f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi + \mu$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

D'après II, 2.3.2, on a :

$$\int_0^1 \left(\frac{f + f^{-1}}{2} - \text{Id}\right) d\theta = 0$$

donc $\mu = 0$.

L'inégalité (1) résulte de (2) . ■

12.3 Remarques : 1) Les nombres γ et r étant fixés, on cherche à maximiser la fonction

$$x \longmapsto c_4(x) = x/C_3(x)$$

sur $\{x > 0 \mid d_3(x) < 1\}$.

2) Si l'on utilise le procédé de 10.5 pour évaluer h_o , alors $c_4(x, \gamma, r)$ est une fonction décroissante de γ et croissante de r .

12.4 Calcul de la fonction $c_4(x)$.

1) On majore f_o , y , h_o et $K = \|D \log Dh\|_{L^2}$ comme en 11.9, 1).

2) A l'aide de 7.6, on majore $E = \frac{1}{\gamma} \|D^2((Df^{-1})^3)\|_{L^2}$ en fonction de x , γ et f_o :

$$E \leq 3 \times f_o^{11/2} + \frac{15}{4\pi\sqrt{3}} x^2 \gamma f_o^{13/2} .$$

3) On majore b_o en utilisant 10.7 :

$$\|D \log b\|_{L^2} = 3K$$

et

$$\log b_o \leq \frac{\sqrt{3}}{2} K .$$

4) On calcule la constante C_1 de 9.4. D'après 10.6, on est dans le cas où $\lambda = \ell_o = 1$

$$C_1 = \frac{1}{8\pi r} b_o^2 (1 + b_o(b_o - 1)) (3K(\frac{b_o}{2\pi} (b_o - 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}) + 1) .$$

5) On calcule d_3 en utilisant la formule de 10.6 :

$$d_3 = (\frac{h_o - 1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}) C_1 H E$$

$$\text{où } H = h_o^{3/2} + \frac{h_o}{2\sqrt{3}} K .$$

6) On obtient la valeur de C_3 par la proposition de 10.6

$$C_3 = \frac{C_1 h_o^{1/2} H}{1 - d_3} .$$

7) Enfin,

$$c_4 = \frac{x}{c_3} \quad .$$

Les conditions à satisfaire sont :

$$1) \quad 0 < x \leq c_3$$

$$2) \quad d_3 < 1 \quad .$$

12.5 Résultats numériques.

La méthode est la même que celle 11.11.

1) Si $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, on obtient, pour $x_0 = 2,15$, les valeurs suivantes :

$$c_4 = 34,95 \quad , \quad c_4 \gamma^2 = 5,09$$

$$c_3 = 0,0615 \quad .$$

En particulier, si $\varphi(\theta) = \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi \theta)$, $a \in \mathbb{R}$, le difféomorphisme F défini en 12.1 possède une courbe invariante de nombre de rotation $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour tout a tel que :

$$|a| \leq 0,029 \simeq \frac{1}{34,5} \quad .$$

Remarque : D'après un résultat de J. Mather (cf.[III, 9]), si $|a| > \frac{4}{3}$, le difféomorphisme F ne laisse invariante aucune courbe homotope à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ (par la théorie de Birkhoff, cf.[I], il est équivalent de dire que F ne laisse invariante aucune courbe qui soit un graphe d'une fonction continue $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$).

Nous montrerons ailleurs (en [H₁]) comment améliorer les résultats numériques dans le cas particulier de la fonction $\varphi(x) = \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x)$, en utilisant une machine à calculer.

D'après [III, 9] et [II, 2.5.3], il existe une plus grande valeur de a pour laquelle

le difféomorphisme F possède une courbe invariante qui est un graphe. Si le lecteur est prêt à prendre pour argent comptant les résultats d'expériences numériques (cf. [G]), ce qui est loin d'être le cas de l'auteur de ces lignes, cette plus grande valeur de a est :

$$a \approx 0,971635... !$$

et le nombre de rotation de F sur la courbe invariante est $\pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Si $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r=1$, on obtient, pour $x_0 = 1,85$, les valeurs suivantes de c_4 et C_3 , qui conviennent pour tout nombre α de type constant :

$$c_4 = 24,1 \text{ et } C_3 = 0,077 .$$

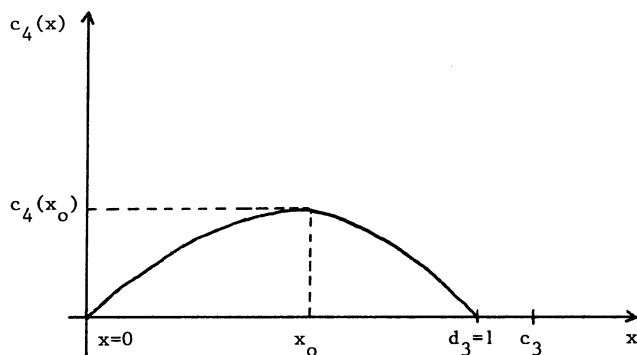
3) Si $r = \frac{\sin \pi \gamma}{2\gamma}$ (cf. 8.3, remarques 2 et 3) on obtient le tableau de valeurs suivant (voir la remarque de 11.11, A, 1) et la remarque 2 de 12.3) :

γ	x_0	c_4	C_3
0,25	2,65	48,7	0,055
10^{-1}	3,24	62,7	0,052
10^{-2}	3,62	68,8	0,053
10^{-3}	3,65	69,3	0,053
10^{-4}	3,67	69,4	0,053

12.6 Remarques sur les résultats numériques (cf. toutes les remarques de 11.12).

1) C'est la condition $d_3 < 1$ qui est toujours plus restrictive que $x \leq c_3$.

2) Grapher la fonction $c_4(x)$ pour $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



3) Soit α un nombre de type constant et S_α l'ensemble des $\varphi \in W_0^{4,2}$ pour lesquels F ne possède pas de courbe invariante dont le nombre de rotation est α . On peut poser la question de déterminer $\inf_{\varphi \in S_\alpha} \|D^4 \varphi\|_{L^2}$. Ce nombre est évidemment strictement positif. Il dépend de α et de γ (cf. [II, 4.12] et [III, 9]). D'après [V, 8], il est plus naturel de déterminer $\inf_{\varphi \in S_\alpha} \|D^3 \varphi\|_{L^2}$. Malheureusement, cela semble difficile de calculer de "bonnes constantes" pour le théorème [V, 8].

12.7 Une deuxième démonstration du théorème 12.2.

Les notations sont celles de 12.2.

Nous allons construire, pour $0 \leq x < c_3$, une application $\phi' : K_x \rightarrow K_x$ dont les points fixes sont solution de

$$\textcircled{3} \quad \frac{f + f^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \quad .$$

En dérivant trois fois l'équation $\textcircled{3}$, on obtient :

$$D^3 \psi - D^3 \psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^4 = D^3 \varphi - 3(D^2 \psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^5 \quad .$$

Pour tout $\psi \in K_x$, on considère l'unique solution $(v, \tilde{\psi}_1) \in \mathbb{R} \times W_0^{3,2}$ de l'équation :

$$D^3 \tilde{\psi}_1 - D^3 \tilde{\psi}_1 \circ f^{-1} (Df^{-1})^4 = D^3 \varphi - 3(D^2 \psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^5 + v$$

assurée par 10.8.

On a :

$$\|D^3 \tilde{\psi}_1\|_{L^2} \leq \gamma^{-1} C_4 (\|D^4 \varphi\|_{L^2} + 3 \|D((D^2 \psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^5)\|_{L^2})$$

où la constante C_4 dépend de x , γ et r .

D'autre part,

$$\frac{3}{\gamma^2} \|D((D^2 \psi \circ f^{-1})^2 (Df^{-1})^5)\|_{L^2} \leq E'(x) ,$$

où

$$(4) \quad E'(x) = \frac{6}{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{f_0^{11/2}} + \frac{15}{2\pi(2\sqrt{3})^2} \frac{\gamma x^3}{f_0^{13/2}} .$$

Si $\|D^4 \varphi\|_{L^2} \leq c_5 \gamma^2$, où $c_5 = \frac{x}{C_4} - E'(x)$, on peut définir l'application $\Phi' : K_x \rightarrow K_x$, $\psi \mapsto \tilde{\psi}_1 + \lambda_\alpha(\tilde{\psi}_1) = \tilde{\psi}$. Cette application est continue pour la C^2 -topologie (voir 6.6 et 6.7) et un point fixe ψ de Φ' est tel que $f = \text{Id} + \psi$ vérifie $\rho(f) = \alpha$ et (3).

Remarque : On cherche à maximiser la fonction $c_5(x)$ sur l'intervalle $]0, c_3]$.

12.8 Calcul de la fonction $c_5(x)$.

- 1) On majore f_0 , γ , h_0 et K comme en 11.9, 1).
- 2) On calcule $E'(x)$ par (4).
- 3) D'après 10.9, on a :

$$\|D \text{Log } b\|_{L^2} = 4K$$

et

$$\text{Log } b_0 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} K .$$

4) On calcule la constante C_1 par la formule de 9.4, avec $\lambda = 1$ et $\ell_0 = h_0$ (cf. 10.8 et 10.9).

5) D'après 10.8, on a :

$$C_4 = h_0 C_1 .$$

6) On calcule enfin

$$c_5 = \frac{x}{C_4} - E' .$$

La seule condition à satisfaire est

$$0 < x \leq c_3 .$$

Nous n'indiquons pas de résultats numériques, car ceux-ci sont un peu moins bons que ceux de 12.5.

13. CAS OU LA TORSION EST DIFFÉRENTE DE 1 ET GÉNÉRALISATIONS.

13.1 Torsion différente de 1.

13.1.1 On considère ici les plongements de la forme :

$$\begin{aligned} F_2 : \mathbb{A}_\delta &\rightarrow \mathbb{A} \\ (\theta, r) &\mapsto (\theta + er + \alpha, r + \varphi(\theta, r)) \end{aligned}$$

où α est un nombre de type constant ayant γ pour constante de Markov, e est un réel non nul et $\varphi \in C^4(\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R})$.

Par une démonstration analogue à celle du théorème 11.3, il existe des constantes c_6 et C_6 dépendant de e, δ, γ, r et $\vec{k}$ telles que si

$$\|\varphi\|_{C^4} \leq c_6 \gamma^2$$

alors il existe un couple $(\mu, \psi) \in \mathbb{R} \times W^{3,2}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \rho(f_e) &= \alpha \quad \text{où } f_e = \text{Id} + e\psi + \alpha \\ \textcircled{1} \quad \psi \circ f_e &= \psi + \varphi \circ G + \mu \quad \text{où } G(\theta) = (\theta, \psi(\theta)) \end{aligned}$$

La deuxième équation signifie que le graphe de ψ est translaté de la constante μ par F_e . En outre, on a :

$$\|D^3\psi\|_{L^2} \leq c_6 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^4}.$$

13.1.2 Cas $|e| < 1$.

Dans ce cas, on peut prendre pour valeurs respectives de c_6 et C_6 les valeurs de c et C_2 données en 11.11. En effet, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 11.3, si $\psi_1 \in K'_x$ alors $f_e = \text{Id} + e\psi_1 + \lambda_\alpha(e\psi_1)$ est plus proche de R_α que $f = \text{Id} + \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1)$.

Remarques : 1) Il est possible d'améliorer les constantes c_6 et C_6 en calculant f_o , y et h_o à partir de f_e au lieu de f .

2) Si $e = 0$, la même démonstration donne le théorème 11.3 à condition d'imposer une condition qui assure l'unicité de ψ . Par exemple :

- a) $\int_0^1 \psi(\theta) d\theta = 0$.
- b) Si $F(\theta, r) = (\theta + \alpha, r + r^2 + \varphi(\theta, r))$, $\int_0^1 \text{Log}(1 + \psi(\theta)) d\theta = 0$.

13.1.3 Cas $|e| \geq 1$.

Il est possible ici de prendre respectivement pour valuer de c_6 et C_6 les valeurs de c et C_2 obtenues en remplaçant, dans les expressions de f_o , y et h_o , le difféomorphisme f par f_e .

On peut aussi procéder ainsi. Posant $\psi_e = e\psi$ et $\varphi_e(\theta, r) = e\varphi(\theta, \frac{r}{e})$, l'équation $\textcircled{1}$

devient :

$$\psi_e \circ f_e = \psi_e + \varphi_e \circ G_e + e\mu$$

où $G_e(\theta) = (\theta, \psi_e(\theta))$.

Si $v_e = \gamma^{-2} \|\varphi_e\|_C^4 \leq e v = e \gamma^{-2} \|\varphi\|_C^4$, on peut prendre pour c_6 et C_6 les valeurs suivantes :

$$c_6 = \frac{1}{e} c(x, v_e, \gamma, \delta, r, \vec{k})$$

$$C_6 = C_2(x, v_e, \gamma, \delta, r, \vec{k}) .$$

Il reste à maximiser c_6 par rapport aux valeurs convenables de x et v_e (voir 11.11).

Remarque : Dans certains termes des expressions de A , A' et J , on peut remplacer x par $\frac{x}{|e|}$, ce qui affine un peu les constantes c_6 et C_6 .

13.2 Perturbations de difféomorphismes laissant un cercle invariant.

13.2.1 Formes normales (d'après R. Douady [D]).

On se donne un plongement

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}_\delta &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (\theta, r) &\longmapsto (\theta, R) \end{aligned}$$

préservant l'orientation, déviant la verticale, laissant $\mathbb{A}_0 = \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ invariant et tel que $\rho(F|_{\mathbb{A}_0}) = \alpha$. D'après [H, IX], $F|_{\mathbb{A}_0}$ est conjugué à la rotation R_α , donc il est possible de changer de coordonnée θ pour que $F(\theta, 0) = (\theta + \alpha, 0)$. Comme F dévie la verticale on peut remplacer la coordonnée r par $\theta - \theta - \alpha$ de sorte que F est un plongement de la forme suivante :

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha + r, ru(\theta) + O(r^2)) .$$

Effectuons un changement de variables $H: (\theta, r) \mapsto (\tilde{\theta}, \tilde{r})$ où

$$\tilde{\theta} = \theta + \eta(\theta)r$$

$$\tilde{r} = \theta + \eta(\theta)R - \tilde{\theta} - \alpha .$$

Si
$$H \circ F \circ H^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{r}) = (\tilde{\theta}, \tilde{R}) ,$$

on a :
$$\tilde{\theta} = \theta + \eta(\theta)R = \tilde{\theta} + \alpha + \tilde{r} ,$$

$$\tilde{r} = r v(\theta) + O(r^2)$$

et
$$\tilde{R} = r u(\theta) v(\theta + \alpha) + O(r^2)$$

où
$$v(\theta) = 1 + u(\theta) \eta(\theta + \alpha) - \eta(\theta) .$$

Si F est assez différentiable et si $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } u(\theta) d\theta$, il est possible

de trouver, d'après 8.2, une fonction $v > 0$ telle $u = \lambda \frac{v}{v \circ R_\alpha}$. Il existe alors un scalaire $\mu > 0$ et une fonction η tels que $u \cdot \eta \circ R_\alpha - \eta = \mu v - 1$. Pour un tel choix de η , on a :

$$H \circ F \circ H^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{r}) = (\tilde{\theta} + \alpha + \tilde{r}, \lambda \tilde{r} + \tilde{r}^2 \varphi_1(\tilde{\theta}, \tilde{r})) .$$

Nous nous intéresserons exclusivement au cas $\lambda = 1$ puisque, dans le cas contraire, le cercle A_0 est normalement hyperbolique, donc isolé et persiste sous une perturbation petite en norme C^1 .

Remarques : 1) Si F possède la propriété d'intersection, on a nécessairement $\lambda = 1$.

2) Si F est de classe $W^{k,2}$, alors H est de classe $W^{k-2,2}$ et φ_1 de classe $W^{k-4,2}$ (donc C^{k-5}).

13.2.2 Perturbations de difféomorphismes laissant un cercle invariant.

On considère un plongement de la forme :

$$F : \mathbb{A}_\delta \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$(\theta, r) \longmapsto (\theta + \alpha + r, r + \varphi(\theta, r))$$

où $\varphi(\theta, r) = \frac{r^2}{e} \varphi_1(\theta, \frac{r}{e}) + e \varphi_2(\theta, \frac{r}{e})$. On suppose que φ_1 et φ_2 sont de classe C^4 et que $e \geq 1$. On posera $\|\varphi_1\|_{C^4} = \sup(\|\varphi_1\|_{C^0}, \|\varphi_1\|_{C^4})$ (voir 11.1) ; le vecteur $\vec{k}$ est défini comme en 11.1.

Théorème : Il existe des constantes c_7 et C_7 dépendant de $e, \delta, \gamma, r, \|\varphi_1\|_{C^4}$ et $\vec{k}$ telles que si

$$\|\varphi_2\|_{C^4} \leq c_7 \gamma^2,$$

alors il existe un unique couple $(\mu, \psi) \in \mathbb{R} \times W^{3,2}$ vérifiant :

$$F(\theta, \psi(\theta)) = (f(\theta), \psi \circ f(\theta) + \mu)$$

et $\rho(f) = \alpha$, où $f = \text{Id} + \psi + \alpha$. De plus, on a :

$$\|\psi\|_{W^{3,2}} \leq C_7 \gamma^{-1} \|\varphi_2\|_{C^4}.$$

Démonstration : Nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 11.3.

On cherche un $\psi \in K_x$, $0 < x < c_3$, tel que

$$\psi \circ f = \psi + \varphi \circ G + \mu,$$

où $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ et $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$. En outre, x doit satisfaire la condition $x\gamma \leq 6\delta e \sqrt{210}$. Posons $v_1 = \|\varphi_1\|_{C^4}^{-2}$ et $v_2 = \|\varphi_2\|_{C^4}^{-2}$. Pour x et v_3 assez petits (cf. 11.3 (5) et (6)), à un $\psi \in K_x$, on associe l'unique solution $\psi = \Phi(\psi)$ de l'équation 11.3, (7) qui vérifie $\rho(\text{Id} + \psi + \alpha) = \alpha$. On a une majoration du type :

$$\|D^3 \tilde{\psi}\|_{L^2} \leq \Gamma_1 x^2 \gamma v_1 + \Gamma_2 \gamma v_2 ,$$

où Γ_1 et Γ_2 sont des constantes dépendant de e , donc, si v_2 et x sont assez petits, l'application Φ sera bien à valeurs dans K_x et on pourra conclure comme en 11.3. ■

13.3 Difféomorphismes préservant les aires.

13.3.1 Soit F un difféomorphisme de $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ préservant l'orientation et la mesure de Lebesgue et déviant la verticale. Si l'on pose :

$$F(\theta, r) = (\theta, R) \quad ,$$

la forme différentielle $R d\theta - r d\theta$ est fermée. Nous la supposons exacte (i.e. F est un difféomorphisme globalement canonique). Puisque F dévie la verticale, on peut repérer $\mathbb{A}$ à l'aide des coordonnées θ et $v = \theta - \theta$. On considère alors une fonction $S(\theta, v)$ telle que $dS = (R - r)d\theta + R dv$ (où R et r sont considérés comme des fonctions de θ et v). Si F est classe C^k alors S est de classe C^{k+1} . On a :

$$R = \frac{\partial}{\partial v} S(\theta, v) = \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \theta - \theta)$$

et
$$r = -\frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, v) + \frac{\partial}{\partial v} S(\theta, v) = -\frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \theta - \theta) \quad .$$

Si l'on pose :

$$S_1(\theta, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \theta - \theta)$$

$$S_2(\theta, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \theta - \theta)$$

la recherche d'une courbe C invariante par F telle que $\rho(F|_C) = \alpha$ équivaut à celle d'un difféomorphisme du cercle $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ de nombre de rotation α vérifiant l'équation :

$$\textcircled{2} \quad S_1(\theta, f(\theta)) + S_2(f^{-1}(\theta), \theta) = 0 \quad .$$

La courbe C est alors le graphe de la fonction $-S_1 \circ \tilde{G} = S_2 \circ \tilde{G} \circ f^{-1}$ où $\tilde{G}(\theta) = (\theta, f(\theta))$.

Il est possible d'améliorer les constantes données en § 11 d'une manière com-

parable à celle du § 12. On suppose que $S \in C^5(\mathbb{A})$ est une perturbation petite en norme C^5 d'une fonction S_0 de classe C^∞ ne dépendant que de $v = \theta - \theta$ et telle que $\frac{dS_0}{dv}(\alpha) = 0$ et $\frac{d^2S_0}{dv^2}(v) \neq 0$ pour tout v .

Le compact K_x étant défini dans la démonstration de 11.3, on cherche une fonction $\psi \in K_x$ telle que $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ satisfasse l'équation (2). En dérivant trois fois cette équation, on obtient une nouvelle équation à résoudre :

$$(3) \quad E D^3 \psi - E \circ f^{-1} D^3 \psi \circ f^{-1} (Df^{-1})^4 = P(f, S)$$

où $E(\theta) = S_{12}(\theta, f(\theta))$, $S_{12}(\theta, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta} S(\theta, \theta - \theta)$ et $P(f, S)$ est une fonction polynomiale des dérivées de f jusqu'à l'ordre 2 et de celles de S jusqu'à l'ordre 4. Comme S dévie la verticale, E est une fonction $\mathbb{Z}$ -périodique de θ qui ne s'annule pas. On procède alors de façon analogue à 12.7. A un $\psi \in K_x$, on associe l'unique $\tilde{\psi} = \phi(\psi) \in W^{3,2}$ tel que $\rho(\text{Id} + \tilde{\psi} + \alpha) = \alpha$ et

$$(4) \quad E D^3 \tilde{\psi} - E \circ f^{-1} D^3 \tilde{\psi} \circ f^{-1} (Df^{-1})^4 = P(f, S) + v$$

où $v \in \mathbb{R}$. Si $\|S - S_0\|_{C^5} \leq \gamma^2 v$ et si x n'est pas trop grand, on a une majoration de la forme suivante :

$$\|D^3 \tilde{\psi}\|_{L^2} \leq \text{cte}(\gamma v + \gamma x^2) \quad .$$

Par suite, si x et v sont assez petits, l'application ϕ est à valeurs dans K_x . On démontre qu'elle est continue pour la topologie faible induite sur K_x et on conclut comme en 12.7 (en utilisant 6.6 et 6.7 pour voir que l'application ϕ est continue) qu'on peut trouver une solution ψ de (3). En intégrant (3) on obtient :

$$S_1(\theta, f(\theta)) + S_2(f^{-1}(\theta), \theta) = c$$

où $c \in \mathbb{R}$ est indépendant de θ . Il suit que le graphe de $-S_1 \circ G$ est translaté par F et comme F a la propriété d'intersection, on a $c = 0$.

Notant c_8 la valeur maximale autorisée à v et C_8 la valeur minimale de $\frac{x}{v}$, on a finalement obtenu le théorème suivant :

Théorème : Si $\|S - S_o\|_{C^5} \leq c_8 \gamma^2$, alors l'équation (2) possède une solution unique $f \in D^{3,2}(\mathbb{T}^1)$ de nombre de rotation α . En outre, si $f = \text{Id} + \psi + \alpha$, alors :

$$\|D^3 \psi\|_{L^2} \leq C_8 \gamma^{-1} \|S - S_o\|_{C^5}.$$

13.3.2 Esquisse du calcul des constantes c_8 et C_8 .

Si $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, on compose l'équation (4) à droite par h et on obtient :

$$\chi - a \chi \circ R_{-\alpha} = \eta + v$$

où $\chi = e D^3 \tilde{\psi} \circ h$, $e = E \circ h$, $a = (Df^{-1})^4 \circ h = \frac{b \circ R_{-\alpha}}{b}$, $b = (Dh)^4$ (voir 10.9) et $\eta = P(f, S) \circ h$. L'inconnue χ doit vérifier $\int_0^1 \chi(\theta) \ell(\theta) d\theta = 0$ avec $\ell = \frac{Dh}{e}$. D'après 9.3 et 9.4, (15), on a la majoration :

$$(5) \quad \|\chi\|_{L^2} \leq C_1 \gamma^{-1} \|D\eta\|_{L^2}$$

avec
$$C_1 = \frac{1}{8\pi r} b_o^2 (1+\tau) (\|D \text{Log } b\|_{L^2} (\frac{b_o(b_o-1)}{2\pi} + \frac{1}{2\sqrt{3}}) + 1)$$

où $r = \frac{\sin(\pi\|\alpha\|)}{2\|\alpha\|}$, $b_o = h_o^4$, $\text{Log } h_o = \|\text{Log } Dh\|_{C^0}$, et

$\tau = \inf_{z \in \mathbb{R}} \|\frac{\ell}{b} - z\|_{C^0} (\min \frac{\ell}{b})^{-1} = \frac{1}{2} (\frac{\max \ell/b}{\min \ell/b} - 1)$, (voir le calcul de μ_o dans la démonstration de 9.3). On a toujours :

$$\max \ell/b \leq h_o^3 (\min e)^{-1} \quad \text{et} \quad \min \ell/b \geq h_o^{-3} (\max e)^{-1}$$

donc
$$\tau \leq \frac{1}{2} (h_o^6 \frac{\max e}{\min e} - 1).$$

Cette majoration est meilleure que la majoration $\tau \leq b_0 \ell_0 (b_0 \ell_0 - 1)$ proposée par 9.3, (12) car, dans le calcul de ℓ/b apparaît une simplification par Dh et, d'autre part, le choix de $z=1$ peut, pour certaines fonctions e , ne pas être le meilleur.

On déduit de l'inégalité (5) la majoration :

$$\|D^3 \gamma\|_{L^2} \leq (\min e)^{-1} h_0 C_1 \gamma^{-1} \|DP(f, S)\|_{L^2}$$

(voir 10.8).

L'estimation de $\|DP(f, S)\|_{L^2}$ en fonction des normes des dérivées de f et S permet le calcul explicite des constantes c_8 et C_8 . On procède de façon analogue à 11.9 et 12.4. Les améliorations obtenues par rapport au § 11 sont comparables à celles du § 12.

Nous n'indiquons pas ici de nouveaux résultats numériques.

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

- [I], [II], ... désignent les chapitres I, II, ... de ce travail.
- [B] N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle, chap. VI.
- [G] J.M. Greene, A method for determining a stochastic transition, J. Math. Phys. 20 (1979), 1183-1200.
- [H] M.R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. Math. I.H.E.S. 49 (1979), 5-233.
- [H₁] M.R. Herman, En préparation, probablement au volume 3 de ce travail.

- [HS] E. Hewitt et K. Stromberg, Real and abstract analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1965).
- [N] D.G. Northcott, Some inequalities between periodic functions and their derivatives, J. London Math. Soc. 14 (1939), 198-202.
- [R] H. Rüssmann, On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus, Lect. Notes in Math. n° 1007, Springer (1983), 677-718.
- [S] W. Schmidt, Diophantine approximation, Lect. Notes in Math. n° 785, Springer (1980).
- [Y] J.C. Yoccoz, notes manuscrites (1983).
- [D] R. Douady, Applications du théorème des tores invariants, thèse de 3ème cycle, Université Paris VII, 1982.

*
* *
*

CHAPITRE VIII

COURBES INVARIANTES POUR UNE CLASSE D'HOMÉOMORPHISMES DU PLAN PRÉSERVANT LES AIRES.

CHAPITRE VIII

COURBES INVARIANTES POUR UNE CLASSE D'HOMÉOMORPHISMES
DU PLAN PRÉSERVANT LES AIRES

Plan

1. Introduction.
2. Le groupe de Froechlé
3. Le groupe $D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$
4. Inégalités
5. Conjugaison différentiable en classe C^{2+vb}
6. Tentative d'extension de l'ensemble des nombres de rotation autorisés
7. Conjugaison différentiable en classe $V^{3,\infty}$

1. INTRODUCTION.

On adopte les notations des chapitres précédents. Soit $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme dont la troisième dérivée D^3f , au sens des distributions, est une mesure, c'est à dire que D^2f est à variation bornée (mais pas forcément continue) ; cette classe de régularité sera désignée par C^{2+vb} .

Nous démontrons au §5 que si $\rho(f) = \alpha$ est un nombre de type constant, i.e. :

il existe un $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q^2}$, alors f est conjugué à la rotation $R_\alpha : \theta \rightarrow \theta + \alpha$ par un difféomorphisme h de classe $C^{2-\delta}$, pour tout $\delta > 0$.

On en conclut le résultat suivant. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{T}^1$ on considère l'homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, linéaire par morceaux et préservant les aires :

$$G_\lambda(x, y) = ((\cos 2\pi\lambda)x - (\sin 2\pi\lambda)(x + |y|), (\sin 2\pi\lambda)x + (\cos 2\pi\lambda)(x + |y|))$$

Il existe un ensemble non dénombrable de $\lambda \in \mathbb{T}^1$ pour lesquels G_λ est topologiquement conjugué à une rotation de $\mathbb{R}^2$ et donc complètement intégrable ; de plus G_λ préserve une famille de courbes invariantes, de classe $C^{1-\delta}$ pour tout $\delta > 0$. On introduit au § 2 un groupe $\mathbb{F}$ d'homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, appelé groupe de Froeschlé ; les G_λ appartiennent à $\mathbb{F}$ et tous les résultats cités dans l'introduction restent valables pour les éléments de $\mathbb{F}$.

Soit g_λ le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1$ induit par l'action de G_λ sur les demi-droites issues de l'origine. On vérifie aisément que g_λ est de classe C^{2+vb} . Si son nombre de rotation $\rho(g_\lambda) = \alpha$ est irrationnel alors, d'après [GH], l'homéomorphisme G_λ possède une orbite dense dans $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, g_λ n'est pas conjugué de façon C^1 à R_α (voir 2.4). Dans le cas contraire, G_λ est topologiquement conjugué à une rotation de $\mathbb{R}^2$; ce sera le cas, d'après le théorème du §5, lorsque $\rho(g_\lambda)$ est de type constant. Ce fait avait été constaté numériquement par C. Froeschlé [F₁]. Cependant, dans le cas d'un difféomorphisme du cercle de classe C^{2+vb} dont le nombre de rotation a une mauvaise arithmétique, l'inégalité de Denjoy-Koksma [H, VI.3, p.73] laisse penser que la divergence des dérivées des

itérées est très lente, et donc difficile à constater numériquement.

Il dépend en général de l'arithmétique de son nombre de rotation (supposé irrationnel) qu'un difféomorphisme du cercle de classe C^∞ soit conjugué de façon différentiable à une rotation (voir [H], $[Y_1]$ et $[Y_2]$) ; c'est sans doute aussi le cas pour les g_λ (voir 2.7). Les auteurs de [HW] ne semblent pas avoir remarqué que, pour expliquer l'exemple de C. Froeschlé, la principale difficulté consiste précisément à savoir quand g_λ est conjugué de façon C^1 à une rotation.

La démonstration du théorème 5.1 suit d'assez près celle du théorème fondamental de [H] et utilise le résultat de [H2] (voir aussi [V, 3.4]). Malheureusement, si f est un difféomorphisme de classe C^{2+vb} , la dérivée schwarziennne ne fournit que des estimées en norme L^2 de $D \log Df^n$ (voir 4.2), et pas en norme L^∞ comme dans le cas où f est de classe C^3 (voir [H] et $[Y_1]$). Ceci rend la situation présente plus délicate et, en particulier, nous limite aux nombres de type constant. Les espaces de Besov étudiés au chapitre VI constituent un outil essentiel. Notons que ce résultat est de nature globale: si, dans l'expression de G_λ , on remplace $|y|$ par $\varepsilon|y|$, où ε est un paramètre petit, alors, en s'appuyant sur 3.6, le §[VI.5] permettrait de conclure.

Au §7, nous améliorons légèrement le résultat de J.C. Yoccoz $[Y_1]$ (voir aussi $[Y_2]$).

C. Froeschlé a constaté numériquement, dans $[F_2]$, l'existence de courbes invariantes pour des difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de la forme :

$$(x, y) \mapsto ((\cos 2\pi\lambda)x - (\sin 2\pi\lambda)(x + \varphi(y)), (\sin 2\pi\lambda)x + (\cos 2\pi\lambda)(x + \varphi(y)))$$

$$\text{où} \quad \varphi(y) = -y^2 \text{ si } y \geq 0 \text{ et } \varphi(y) = -y^3 \text{ si } y \leq 0.$$

Bien que la fonction φ soit de classe C^{2+vb} , il semble nettement plus compliqué d'expliquer l'existence de courbes invariantes. D'une part on est au voisinage d'un point fixe elliptique où G_λ n'est que de classe C^2 , ce qui rend difficile la réduction en forme normale de Birkhoff ; d'autre part les résultats obtenus en [V, 7.10] et en [VI, 4.4] sont insuffisants. Malgré les remarques [V, 6.8.6 et 6.8.8], et le théorème [V, 8.11], la situation est loin d'être complètement éclair-

cie.

Je remercie Raphaël Douady d'avoir considérablement amélioré le manuscrit en le rédigeant à nouveau et Claudine Harmide d'en avoir assuré la frappe avec son soin habituel.

2. LE GROUPE DE FROESCHLÉ.

2.1. Soit $\mathbf{F}$ le sous-groupe du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$ engendré par les éléments de $SL_2(\mathbb{R})$ et les transformations du type suivant :

$$(x, y) \rightarrow (x, y + \psi_k(x))$$

où $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\psi_k(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{si } x \geq 0 \\ k_2 x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Chaque élément G de $\mathbf{F}$ fixe l'origine, préserve la mesure de Lebesgue et vérifie :

$$G(sx, sy) = sG(x, y)$$

pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $s \in \mathbb{R}_+$.

En faisant agir G sur les directions de demi-droites issues de l'origine, on obtient un homéomorphisme du cercle g .

Identifions $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à

$$\mathbb{S}^1 = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}, \text{ où } \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

par le difféomorphisme $\varphi : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$. L'application g est alors définie par :

$$g(\theta) = \varphi^{-1}(G(\varphi(\theta)) / \|G(\varphi(\theta))\|)$$

et, comme G préserve les aires, g est dérivable, de dérivée :

$$Dg(\theta) = \|G(\varphi(\theta))\|^{-2}.$$

Bien que la fonction continue Dg ne soit pas de classe C^1 , on remarque qu'elle est lipschitzienne. Sa dérivée D^2g est définie et continue partout sauf en un nombre fini de points où elle possède une limite à droite et à gauche. Elle est au surplus

à variation bornée.

Le groupe $\mathbb{F}$ se plonge donc canoniquement dans le groupe $\text{Diff}^{2+\text{vb}}(\mathbb{T}^1)$ formé des difféomorphismes de classe C^1 de $\mathbb{T}^1$ possédant une dérivée seconde à variation bornée.

Lorsque $G \in \mathbb{F}$ et que $g \in \text{Diff}^{2+\text{vb}}(\mathbb{T}^1)$ est le difféomorphisme du cercle correspondant, on notera indifféremment $\rho(G)$ ou $\rho(g)$ son nombre de rotation.

Si maintenant, pour $\lambda \in \mathbb{T}^1$, on pose $G_\lambda = r_\lambda \circ G$, où r_λ est la rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda & -\sin 2\pi\lambda \\ \sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda \end{pmatrix}$, l'application g_λ correspondante est définie par :

$$g_\lambda(\theta) = g(\theta) + \lambda.$$

La fonction $\lambda \mapsto \rho(g_\lambda)$, de $\mathbb{T}^1$ dans lui-même, est continue, croissante et de degré 1, donc surjective. De plus, si $\alpha \in \mathbb{T}^1 \setminus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ alors il existe un unique $\lambda_\alpha \in \mathbb{T}^1$ tel que $\rho(g_{\lambda_\alpha}) = \alpha$ (cf. [H, III.4, p.34]).

2.2. Soit $G \in \mathbb{F}$ et g le difféomorphisme du cercle correspondant. Si $\rho(g) = \alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors, d'après le théorème de Denjoy (cf. [H, VI.5 p.76]) comme la fonction $\text{Log } Dg$ est à variation bornée, on a :

$$g = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$$

où h est un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1$ et

$$R_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1, \quad \theta \mapsto \theta + \alpha.$$

En particulier, g est minimal.

Revenant au plan $\mathbb{R}^2$, un passage en polaires permet de conjuguer de façon $\mathbb{R}$ -analytique la restriction de G à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aux deux transformations suivantes :

$$\begin{aligned} F_1 : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+^* \\ (\theta, r) &\mapsto (g(\theta), r(Dg(\theta))^{-1/2}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_2 : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \\ (\theta, r) &\mapsto (g(\theta), r - \frac{1}{2} \text{Log } Dg(\theta)). \end{aligned}$$

2.3. D'après [H, IV.6, p.48] , lorsque $\alpha = \rho(g)$ est irrationnel, une condition nécessaire et suffisante pour que h soit de classe C^1 est :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \max_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\text{Log } Dg^n(\theta)| < +\infty$$

2.4 On suppose toujours α irrationnel. Soit

$$H(\theta, r) = (h(\theta), r) ;$$

on a :

$$H \circ F_2 \circ H^{-1}(\theta, r) = (\theta + \alpha, r - \frac{1}{2} \text{Log } Dg \circ h(\theta))$$

et, d'après [H, VI.1., p.71],

$$\int_0^1 \text{Log } Dg \circ h(\theta) d\theta = 0 .$$

On rappelle qu'un homéomorphisme f d'un espace topologique X est dit topologiquement transitif s'il existe un $x \in X$ dont l'orbite $\{f^n(x)/n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans X .

De la proposition de Gottschalk et Hedlund (cf. [G, §14.13] ou [H, IV.4, p.45]), on déduit l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) L'homéomorphisme h n'est pas de classe C^1 ,
- (ii) h n'est pas un difféomorphisme de classe C^1 ,
- (iii) L'homéomorphisme $H \circ F_2 \circ H^{-1}$ de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ est topologiquement transitif,
- (iv) L'homéomorphisme G de $\mathbb{R}^2$ est topologiquement transitif.

Il est clair que (iii) et (iv) sont équivalentes ; (i) et (ii) le sont d'après [H, IV.6, p.51]. D'après Gottschalk et Hedlund, (non iii) équivaut à l'existence d'une fonction continue $k : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\text{Log } Dg = k - k \circ g$$

soit, posant $\ell = e^k / \int_0^1 e^{k(\theta)} d\theta > 0$ $\log Dg = \ell$

On définit $t(\theta) = \int_0^\theta \ell(u) du$ qui est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{T}^1$ puisque $t(\theta+1) = t(\theta)+1$. On a

$$D(t \circ g) = Dt$$

et donc

$$t \circ g = c + t \quad c \in \mathbb{R}$$

ce qui implique

$$g = t^{-1} \circ R_c \circ t.$$

L'invariance du nombre de rotation par conjugaison implique que $c = \alpha$ de sorte que nous obtenons (non i). ■

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, on pose :

$$H_1^*(\theta, r) = (h(\theta), r(Dh(\theta)))^{-1/2}$$

et on a :

$$H_1 \circ F_2 \circ H_1^{-1}(\theta, r) = (\theta + \alpha, r);$$

l'homéomorphisme G est topologiquement conjugué à une rotation de $\mathbb{R}^2$ donc complètement intégrable (i.e. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est feuilleté par des courbes invariantes).

Remarque: L'application G n'a pas de propriétés de torsion.

Si h est de classe $C^{1+\beta}$, $0 \leq \beta < 1$ (puisque $\beta = 1$ est impossible dès que g n'est pas de classe C^2) alors G laisse invariantes des courbes de classe C^β .

Le scolie suivant résume ce paragraphe :

Scolie 2.4 : Si $\rho(g) = \alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) L'homéomorphisme h est de classe C^1 ,
- (ii) L'homéomorphisme G n'est pas topologiquement transitif,
- (iii) L'homéomorphisme G laisse invariante une courbe C^0 , fermée et simple de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d'indice 1 autour de 0,
- (iv) L'homéomorphisme G est complètement intégrable, au sens défini plus haut.

2.5 On sait que, si $\rho(g) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et si g n'est pas topologiquement conjugué à la rotation $R_{p/q}$, alors il existe un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{T}^1$ sur lequel la suite $(Dg^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend simplement vers 0. En utilisant [H, IV.5.3, p.48], on en déduit l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i') il existe un difféomorphisme $h \in \text{Diff}^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$ conjuguant g à $R_{p/q}$.

(iii') L'homéomorphisme G laisse invariante une courbe C^0 , fermée et simple de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d'indice 1 autour de 0.

Remarque : Si $\rho(G) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et si g a un nombre fini d'orbites périodiques alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$ $(G^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ tend vers l'infini lorsque $n \rightarrow \pm \infty$.

2.6 Lorsque f est un difféomorphisme du cercle dont le nombre de rotation $\alpha = \rho(f)$ est irrationnel, la classe de différentiabilité de l'homéomorphisme h , fourni par le théorème de Denjoy et conjuguant f à R_α , dépend non seulement de la classe de différentiabilité de f , mais aussi de l'arithmétique de α (voir [H], [Y₁] et [Y₂]).

D'après 2.4 et [H, XI, 4.2, p.160], si α est un nombre de Liouville, on peut trouver un difféomorphisme f de classe C^∞ , vérifiant $\rho(f) = \alpha$ et tel que la transformation de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+^*$:

$$F : (\theta, r) \rightarrow (f(\theta), r(Df(\theta))^{-1/2})$$

soit topologiquement transitive. Quitte à restreindre la classe des nombres de rotation autorisés (on en conserve tout de même un G_δ dense) on peut choisir f de telle sorte que F soit ergodique pour une mesure de Haar (voir [HE] et [K] pour la construction de tels difféomorphismes appelés "de type III₁").

2.7 On peut se demander s'il existe des éléments de $\mathbb{F}$ transitifs. Nous posons ici une conjecture impliquant une réponse positive à cette question.

Conjecture : Il existe un homéomorphisme $G \in \mathbb{F}$ et une partie dense D de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tels que, pour tout $p/q \in D$ et tout $\lambda \in \mathbb{T}^1$ vérifiant $\rho(G_\lambda) = p/q$, on a :

$$G_\lambda^q \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

où l'on rappelle que $G_\lambda = r_\lambda \circ G$ et que r_λ est la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $2\pi\lambda$ autour de 0.

Cette conjecture revient à trouver, dans $\mathbb{F}$, un élément G pour lequel les intervalles compacts

$$\{\lambda \in \mathbb{T}^1 / \rho(G_\lambda) = p/q\}$$

soient d'intérieur non vide pour tout $\frac{p}{q} \in D$ (cf. H, III, 2.7, p.32]).

Ceci est légèrement moins restrictif que la propriété A_0 de [H, III.4.5.p.37] , où la requête s'applique à tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Supposons que l'homéomorphisme $G \in \mathbb{F}$ satisfasse aux conclusions de la conjecture. Par un raisonnement analogue à celui de [H, XII.1.12,p.169] , on peut trouver un $\lambda_0 \in \mathbb{T}^1$ pour lequel le difféomorphisme g_{λ_0} a un nombre de rotation $\alpha = \rho(g_{\lambda_0})$ irrationnel et n'est pas C^1 -conjugué à R_α . D'après 2.4, l'homéomorphisme G_{λ_0} est topologiquement transitif.

2.8. L'exemple suivant a pour but de convaincre le lecteur du bien fondé de la conjecture précédente.

Soit $F_{\varepsilon, \lambda} \in \mathbb{F}$ défini par :

$$F_{\varepsilon, \lambda}(x, y) = ((\cos 2\pi\lambda)x - (\sin 2\pi\lambda)(y + \varepsilon|x|), (\sin 2\pi\lambda)x + (\cos 2\pi\lambda)(y + \varepsilon|x|)).$$

Proposition : Soit $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où q est impair. Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ (dépendant de q) tel que, si $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, alors l'intervalle compact :

$$\{\lambda \in \mathbb{T}^1 / \rho(F_{\varepsilon, \lambda}) = \frac{p}{q}\}$$

est d'intérieur non vide.

Démonstration : Elle s'inspire de l'article de R. Hall [Ha] . On fait agir , comme en 2.1, $F_{\varepsilon, \lambda}$ sur $\mathbb{T}^1$, puis sur son revêtement universel $\mathbb{R}$ et on obtient :

$$R_\lambda \circ f_\varepsilon(\theta) = \theta + \lambda + \varphi(\varepsilon, \theta)$$

où :

$$\theta + \varphi(\varepsilon, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}(2\pi\theta) + \varepsilon) & \text{si } -\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}(2\pi\theta) - \varepsilon) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

et $\varphi(\varepsilon, \theta + 1) = \varphi(\varepsilon, \theta)$.

La fonction φ ainsi définie est une fonction continue du couple (ε, θ) . Soit :

$$\psi(\theta) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi(\varepsilon, \theta) \Big|_{\varepsilon = 0} .$$

On a :

$$\psi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}(1 + \cos 4\pi\theta) & \text{si } -\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4\pi}(1 + \cos 4\pi\theta) & \text{si } \frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

On en déduit aisément que les coefficients de Fourier de ψ d'ordre pair sont nuls (puisque $\psi(\theta + \frac{1}{2}) = -\psi(\theta)$), alors que ceux d'ordre impair sont tous non nuls (calcul).

Comme q est impair, la fonction :

$$\psi_{p/q} = \sum_{i=0}^{q-1} \psi \circ R_{\frac{i p}{q}}$$

vérifie :

$$\psi_{p/q}(\theta + \frac{1}{2}) = -\psi_{p/q}(\theta)$$

et elle n'est pas nulle, puisque :

$$\hat{\psi}_{p/q}(q) = q \hat{\psi}(q) \neq 0.$$

Lorsque ε tend vers 0, on a :

$$(R_{p/q} \circ f)^q(\theta) - \theta - p = \varepsilon \psi_{p/q}(\theta) + \varepsilon R(\varepsilon, \theta)$$

où le reste $R(\varepsilon, \theta)$ tend uniformément vers 0 avec ε , donc, si ε est assez petit, mais non nul, cette fonction s'annule sans être identiquement nulle. Par suite, $\rho(R_{p/q} \circ f) = \frac{p}{q}$ mais $R_{p/q} \circ f_\varepsilon$ n'est pas conjugué à $R_{p/q}$. La proposition résulte alors de [H, III.2.7, p.32]. ■

2.9. Le théorème 5.1 affirme que, si $G \in \mathbb{F}$ a un nombre de rotation α de type constant, alors G est complètement intégrable (au sens de 2.4) et laisse invariantes des courbes de classe $C^{1-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$; ces courbes sont donc de dimension de Hausdorff 1.

On peut aussi montrer, par une démonstration presque identique à celle de [HM], (en utilisant que les nombres de type constant sont de dimension de Hausdorff 1 [J]) que, $G \in \mathbb{F}$ étant fixé, l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{T}^1 / \rho(G_\lambda) \text{ est de type constant}\}$ (où $G_\lambda = r_\lambda \circ G$) a pour dimension de Hausdorff 1.

3. LE GROUPE $D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$

3.1. On note $VB(\mathbb{T}^1)$ l'espace des fonctions à variation bornée de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{R}$, où l'on a identifié deux fonctions différant sur un ensemble au plus dénombrable. Pour plus de détails, voir [V,8.9].

Muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{VB} = \left| \int_{\mathbb{T}^1} \varphi(\theta) d\theta \right| + \text{Var}(\varphi),$$

l'espace $VB(\mathbb{T}^1)$ est une algèbre de Banach, en particulier, le produit de deux fonctions à variation bornée l'est aussi.

3.2. Si $\varphi \in VB(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$\left\| \varphi - \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \text{Var}(\varphi).$$

3.3. Pour toute fonction $\varphi \in VB(\mathbb{T}^1)$, on peut trouver une suite $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^∞ convergeant simplement vers φ sur $\mathbb{T}^1 \setminus \Delta$ où Δ est un ensemble au plus dénombrable et vérifiant :

$$\text{Var}(\varphi_i) \leq \text{Var}(\varphi)$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il suffit, pour cela, d'approcher dans la topologie vague la mesure $D\varphi$ par une suite de mesures $D\varphi_i$ à densité C^∞ vérifiant

$$\int_0^1 D\varphi_i(\theta) d\theta = 0 \text{ et } \int_0^1 |D\varphi_i(\theta)| d\theta \leq \text{Var}(\varphi).$$

3.4. Soit

$$D^{2+vb}(\mathbb{T}^1) = \{f \in D^1(\mathbb{T}^1) / D^3f \text{ est une mesure de Radon}\}$$

où D^3f désigne la dérivée troisième de f au sens des distributions. On vérifie que cet ensemble est un sous-groupe de $D^1(\mathbb{T}^1)$.

Si $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$, alors Df est lipschitzienne mais f n'est pas nécessairement de classe C^2 (c'est le cas par exemple des difféomorphismes du cercle associés à des éléments du groupe de Froehlé $\mathbb{F}$)

$$\text{Si } f \in D^{1+Lip}(\mathbb{T}^1) = \{f \in D^1(\mathbb{T}^1) / Df \text{ est lipschitzienne}\}$$

alors

$$f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1) \Leftrightarrow D \operatorname{Log} Df \in VB(\mathbb{T}^1)$$

De plus, si $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$\|D^2 f\|_{L^\infty} \leq \operatorname{Var}(D^2 f)$$

et

$$\|D \operatorname{Log} Df\|_{L^\infty} \leq \operatorname{Var}(D \operatorname{Log} Df) \leq \operatorname{Var}(D^2 f) \left\| \frac{1}{Df} \right\|_{C^0} + \|D^2 f\|_{L^\infty} \left\| \frac{D^2 f}{(Df)^2} \right\|_{L^1}.$$

3.5. Soit $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$. D'après 3.3, il existe une suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifiant :

(i) $\operatorname{Var}(D^2 f_j) \leq \operatorname{Var}(D^2 f)$ pour tout j .

(ii) La suite (f_j) converge vers f en topologie C^1 .

(iii) Il existe un ensemble $\Delta \subset \mathbb{T}^1$ au plus dénombrable tel que, si $x \in \mathbb{T}^1 \setminus \Delta$,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} D^2 f_j(x) = D^2 f(x).$$

(iv) Si $1 \leq p < +\infty$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|D^2 f_j - D^2 f\|_{L^p} = 0$

(c'est une conséquence de (iii)).

(v) Soit S l'opérateur "dérivée schwarzienne" :

$$S(f) = D^2 \operatorname{Log} Df - \frac{1}{2} (D \operatorname{Log} Df).$$

On a :

$$\|S(f_j)\|_{L^1} \leq \operatorname{Var}(D \operatorname{Log} Df_j) + \frac{1}{2} \|D \operatorname{Log} Df_j\|_{L^1}$$

$$\leq C(f) < +\infty$$

où $C(f)$ ne dépend (comme son nom l'indique) que de f (en fait que de $\operatorname{Var}(D^2 f)$ et de $\| \operatorname{Log} Df \|_{C^0}$).

(vi) $\rho(f_j) = \rho(f)$ pour tout j

(voir [H,III] pour se convaincre de la possibilité de cette restriction).

3.6. Soient $1 < p < +\infty$ et $0 < \beta < 1$. L'espace de Besov $B^{\beta,p}(\mathbb{T}^1)$ a été défini en [VI, 2.5].

Proposition : Si $\varphi \in VB(\mathbb{T}^1)$, alors $\varphi \in B^{1/p,p}(\mathbb{T}^1)$ et $\|\varphi\|_{1/p,p} \leq \text{Var}(\varphi)$

Démonstration : D'après 3.3, il suffit de montrer l'inégalité lorsque φ est de classe C^∞ . On a, pour tout $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t|^{1/p}} \|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^p} &\leq \left\| \frac{1}{t} (\varphi \circ R_t - \varphi) \right\|_{L^1}^{1/p} \|\varphi \circ R_t - \varphi\|_{L^\infty}^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|D\varphi\|_{L^1}^{1/p} (\text{Var}(\varphi))^{\frac{p-1}{p}} \leq \text{Var}(\varphi) \end{aligned}$$

(la deuxième inégalité résulte de [VI, 2.4] et de 3.2). ■

3.7. De la proposition précédente, on déduit que le groupe $D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$ est contenu dans le groupe $D^{2+1/p,p}(\mathbb{T}^1)$ défini en [VI, 6], et que la suite $(f_j)_j$ de 3.5 vérifie :

$$(vii) \quad \|D^2 f_j\|_{1/p,p} \leq \text{Var } D^2 f \quad \text{pour tout } j.$$

4. INÉGALITÉS.

4.1. La dérivée schwarzienne S définie, sur un élément f de $D^3(\mathbb{T}^1)$, par la formule :

$$S(f) = D^2 \text{Log } Df - \frac{1}{2} (D \text{Log } Df)^2,$$

vérifie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$(*) \quad S(f^n) = \sum_{j=0}^{n-1} S(f) \circ f^j (Df^j)^2.$$

4.2. Proposition : Soit $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$. Il existe une constante c_1 (ne dépendant que de f) satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'inégalité :

$$\|D \text{Log } Df^n\|_{L^2}^2 \leq c_1 \left\| \sum_{j=0}^{n-1} Df^j \circ f^{-j} \right\|_{C^0}^2$$

Démonstration : On considère une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ remplissant les conditions de 3.5. En intégrant sur $\mathbb{T}^1$ l'égalité (*) appliquée à chaque f_i , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^1 (D \operatorname{Log} Df_1^n)^2 d\theta &= - \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 S(f_1) \circ f_1^j (Df_1^j)^2 d\theta \\
 &= - \int_0^1 S(f_1) \left(\sum_{j=0}^{n-1} Df_1^j \circ f_1^{-j} \right) d\theta \\
 &\leq \|S(f_1)\|_{L^1} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} Df_1^j \circ f_1^{-j} \right\|_{C^0} .
 \end{aligned}$$

On conclut grâce à 3.5, (ii) et (v). ■

4.3. On rappelle que les espaces $V^{3,p}(\mathbb{T}^1)$ ont été définis en [V,8.9]. Soit $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$ de la forme : $f = \operatorname{Id} + \varphi$, où φ vérifie :

$$-\varphi + \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \in V^{3,\infty}(\mathbb{T}^1)$$

En suivant la méthode de [V,8.10], on peut trouver une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifiant les propriétés (i) à (vii) de 3.5 et 3.7, et, en outre, la condition :

$$(viii) \quad \|(-S(f_i))^+\|_{L^\infty} \leq C$$

où $\psi^+ = \sup(0, \psi)$ et C est une constante ne dépendant que de f . La plus petite constante C ainsi obtenue sera notée $\|(-S(f))^+\|_{L^\infty}$.

4.4. Proposition : Pour tout difféomorphisme f vérifiant les hypothèses de 4.3, il existe une constante c_2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|D \operatorname{Log} Df^n\|_{L^\infty}^2 \leq c_2 \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (Df^j)^2 \right\|_{C^0}$$

Démonstration : On considère une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ remplissant les conditions (i) à (viii) de 3.5, 3.7 et 4.3. Fixons les entiers i et n et choisissons un point $x_0 \in \mathbb{T}^1$ où la fonction $|D \operatorname{Log} Df_i^n|$ est maximale. En ce point, $D^2 \operatorname{Log} Df_i^n = 0$ (car f_i est de classe C^∞) et :

$$\|D \operatorname{Log} Df_i^n\|_{C^0} = |D \operatorname{Log} Df_i^n(x_0)| = -2 S(f_i^n)(x_0) .$$

D'après 4.1, (*), on a :

$$\begin{aligned} \|D \operatorname{Log} Df_i^n\|_{C^0} &\leq 2 \sup_{x \in \mathbb{T}^1} \left(- \sum_{j=0}^{n-1} S(f_i)(f_i^j(x)) (Df_i^j(x))^2 \right) \\ &\leq 2 \|(-S(f_i))^+\|_{L^\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (Df_i^j)^2 \right\|_{C^0}. \end{aligned}$$

L'inégalité analogue est valable, par passage à la limite, pour f grâce à 3.5, (ii) et 4.3, (viii). ■

4.5. Proposition : Soit $f \in D^1(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme vérifiant l'hypothèse de

4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|D \operatorname{Log} Df^n\|_{L^\infty} \leq 2 \|(-S(f))^+\|_{L^\infty}^{1/2} \sqrt{n} \|\operatorname{Log} Df^n\|_{C^0}^{1/2} \sup_{1 \leq j \leq n-1} \|Df_i^j\|_{C^0}.$$

Démonstration : On se ramène, grâce à 3.5, 3.7 et 4.3, au cas où f est de classe C^∞ . De l'identité (*), on déduit que :

$$\min(D^2 \operatorname{Log} Df^n) \geq -n \|(-S(f))^+\|_{L^\infty} \sup_{0 \leq j \leq n-1} \|Df_i^j\|_{C^0}^2.$$

La proposition résulte du lemme suivant appliqué à la fonction $\operatorname{Log} Df^n$.

Lemme : Soit $\psi \in C^2(\mathbb{T}^1)$ et $M_2 = -\min D^2 \psi$. On a :

$$\|D\psi\|_{C^0} \leq 2 \|\psi\|_{C^0}^{1/2} M_2^{1/2}$$

Démonstration : Quitte à changer ψ en $\tilde{\psi} : x \rightarrow \psi(-x)$, on peut supposer qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $D\psi(x_0) = \|D\psi\|_{C^0}$. Pour tout $y > 0$, on a :

$$\psi(x_0 + y) \geq \psi(x_0) + y D\psi(x_0) - \frac{1}{2} M_2 y^2$$

donc :

$$\begin{aligned} D\psi(x_0) &\leq \frac{\psi(x_0 + y) - \psi(x_0)}{y} + \frac{1}{2} M_2 y \\ &\leq \frac{2}{y} \|\psi\|_{C^0} + \frac{y}{2} M_2. \end{aligned}$$

On suppose que $M_2 \neq 0$ car sinon l'inégalité est trivialement vérifiée si l'on

choisit $y = 2 \|\psi\|_{C^0}^{1/2} M_2^{-1/2}$, on obtient l'inégalité requise. ■

5. CONJUGAISON DIFFÉRENTIABLE EN CLASSE C^{2+vb} .

5.1. Théorème : Soit $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation

$\alpha = \rho(f)$ est de type constant. Il existe un $h \in \bigcap_{0 < \delta \leq 1} D^{2-\delta}(\mathbb{T}^1)$ tel que :

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} .$$

Ce théorème implique l'existence de courbes invariantes sous l'action des éléments F de $\mathbb{F}$ dont le nombre de rotation $\rho(F)$ est de type constant.

5.2 Démonstration :

5.2.1. Dans cette partie, on supposera seulement que α est irrationnel et que $f \in D^{1+Lip}(\mathbb{T}^1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On pose, en suivant les notations de [H,VII.2, p.93-95] :

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j - j\alpha)$$

et

$$f_n = g_n \circ f \circ g_n^{-1} .$$

On a $\rho(f_n) = \rho(f) = \alpha$ et si $f \in D^{1+Lip}(\mathbb{T}^1)$ (resp. $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$) , alors g_n et f_n appartiennent à $D^{1+Lip}(\mathbb{T}^1)$ (resp. $D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$) .

L'identité suivante est valable presque partout (i.e. dans L^∞) et au sens des distributions.

$$(1) \quad D^2 f_n = \left[\frac{D^2 f_n}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Df^i} - (Df^n - 1) \frac{\sum_{i=0}^{n-1} D^2 f^i}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right)} \right] \circ g_n^{-1}$$

(voir [H, VII.2.6, p.95] .

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \text{Var}(Df_n) = \|D^2 f_n\|_{L^1} .$$

D'après [H, VII.2.5.1, p.94] et la remarque [H,VII.1.5, p.87], on sait que :

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Df_n - 1\|_{C^0} = 0.$$

Le théorème [H,VII,2.5.1] suppose que f est de classe C^2 , mais n'utilise, en fait que l'ergodicité de f qui reste vraie lorsque $f \in D^{1+\text{Lip}}(\mathbb{T}^1)$ d'après la remarque [H, VII, 1.5]

5.2.2. Définition : Le nombre irrationnel α est dit de densité bornée si son développement en fraction continue

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

vérifie :

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i < +\infty.$$

Si α est de type constant, alors les a_i sont bornés (condition nécessaire et suffisante), donc α est de densité bornée. Les nombres de densité bornée forment un ensemble de mesure nulle (voir [H,V.10,p.67]).

Proposition : Soit $f \in D^{1+\text{Lip}}(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation $\alpha = \rho(f)$ est de densité bornée. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{T}^1$, on ait :

$$(3) \quad C_\varepsilon^{-1} k^{-\varepsilon} \leq Df^k(\theta) \leq C_\varepsilon k^\varepsilon.$$

La démonstration est faite dans [H,VIII;1.7, p.104] dans le cas où f est de classe C^2 mais n'utilise que le fait que les V_n tendent vers 0 (cf.(2)). Elle s'applique donc lorsque $f \in D^{1+\text{Lip}}(\mathbb{T}^1)$.

On déduit de cette proposition les inégalités suivantes, valables pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$:

$$(4) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \|Df^i\|_{C^0} \leq C_\varepsilon n^{1+\varepsilon},$$

$$(5) \quad \left\| \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i} \right\|_{C^0} \leq c_\varepsilon n^{1+\varepsilon}.$$

5.2.3. On suppose à présent que $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$ et que son nombre de rotation $\alpha = \rho(f)$ est de densité bornée. D'après 4.2 et (4), on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(6) \quad \|D \operatorname{Log} Df^n\|_{L^2} \leq c_\varepsilon n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$$

où c_ε est une constante ne dépendant que de f et de ε .

Proposition : On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D^2 f_n\|_{L^2} = 0.$$

Démonstration : La formule (1) fournit :

$$\|D^2 f_n\|_{L^2}^2 \leq A_n + B_n$$

où

$$A_n = \left\| \frac{D^2 f^n}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right)^2} \circ g_n^{-1} \right\|_{L^2}^2$$

et

$$B_n = \left\| (Df^{n-1}) \left[\frac{\sum_{i=0}^{n-1} D^2 f^i}{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} Df^i \right)^3} \right] \circ g_n^{-1} \right\|_{L^2}^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \int_{\mathbb{T}^1} n^2 \frac{(D^2 f^n)^2 \circ g_n^{-1}}{(\sum Df^i)^4 \circ g_n^{-1}} Dg_n \circ g_n^{-1} Dg_n^{-1} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}^1} n \frac{(D^2 f^n)^2}{(\sum Df^i)^3} d\theta \end{aligned}$$

par définition de g_n (cf. 5.2.1.).

En utilisant :

$$D^2 f^n = Df^n \cdot D \operatorname{Log} Df^n,$$

on obtient la majoration :

$$A_n^2 \leq n \|Df^n\|_{C^0}^2 \|(\Sigma Df^i)^{-1}\|_{C^0}^3 \|D \operatorname{Log} Df^n\|_L^2.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{6}[$. On peut trouver une constante C'_ε vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité :

$$A_n^2 \leq C'_\varepsilon n^{1+2\varepsilon-3+3\varepsilon+1+\varepsilon} = C'_\varepsilon n^{-1+6\varepsilon}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0.$$

On procède de même pour majorer B_n :

$$\begin{aligned} B_n^2 &= \int_{\mathbb{T}^1} n^2 (Df^{n-1})^2 \circ g_n^{-1} \frac{(\Sigma D^2 f^i)^2 \circ g_n^{-1}}{(\Sigma Df^i)^6 \circ g_n^{-1}} Dg_n \circ g_n^{-1} \cdot Dg_n^{-1} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}^1} n (Df^{n-1})^2 \frac{(\Sigma D^2 f^i)^2}{(\Sigma Df^i)^5} d\theta. \end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} (\Sigma D^2 f^i)^2 &= (\Sigma Df^i D \operatorname{Log} Df^i)^2 \\ &\leq (\Sigma (Df^i)^2) (\Sigma (D \operatorname{Log} Df^i)^2) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par suite,

$$B_n^2 \leq n \|Df^{n-1}\|_{C^0}^2 \|(\Sigma Df^i)^{-1}\|_{C^0}^5 (\Sigma \|Df^i\|_{C^0}^2) (\Sigma \|D \operatorname{Log} Df^i\|_L^2).$$

Si l'on choisit un $\varepsilon \in]0, \frac{1}{10}[$, on peut trouver une constante C''_ε telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait :

$$B_n^2 \leq C''_\varepsilon n^{1+2\varepsilon-5+5\varepsilon+1+2\varepsilon+2\varepsilon} = C''_\varepsilon n^{-1+10\varepsilon}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = 0.$$

Remarque : Nous avons en fait montré que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \|D^2 f_n\|_L^2 = 0.$$

5.2.4. On suppose à présent α de type constant. D'après le théorème [V,3.4] (voir aussi [HZ]), si n est un entier assez grand, alors

$$f_n = h_n \circ R_\alpha \circ h_n^{-1}$$

où h_n est un homéomorphisme dérivable presque partout qui vérifie $\text{Log } Dh_n \in \text{BMO}(\mathbb{T}^1)$ et

$$(8) \quad \|\text{Log } Dh_n\|_{\text{BMO}} \leq c_3 \|D^2 f_n\|_{L^2},$$

la constante c_3 ne dépendant que du nombre de rotation α . On rappelle que l'espace $\text{BMO}(\mathbb{T}^1)$ et sa norme ont été définis en [V,2.12].

5.2.5. La proposition suivante montre que, pour tout $p \in]1,2[$, il existe un $n_p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_p$, $\text{Log } Dh_n \in C^{1/p}(\mathbb{T}^1)$. De cette proposition résulte le théorème, puisque chaque f_n est conjugué à f par le difféomorphisme $g_n \in D^{1+\text{Lip}}(\mathbb{T}^1)$. On rappelle que les espaces de Besov $B^{\beta,p}$ ainsi que leurs normes ont été définis en [VI,2.5].

Proposition : Soit $f \in D^{2+\text{vb}}(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation $\alpha = \rho(f)$ est de type constant, et $p \in]1,2[$. Il existe une constante $\ell > 0$, ne dépendant que de α et p , telle que, si :

$$\|D^2 f\|_{L^2} \leq \ell$$

alors :

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1},$$

où $h \in D^{1+1/p}(\mathbb{T}^1)$ et

$$(9) \quad |\text{Log } Dh|_{C^{1/p}} \leq c_4 |\text{Log } Df|_{1/p,p} \leq c_4 \text{Var}(D \text{Log } Df)$$

La constante c_4 ne dépend que de ℓ , α et p .

Démonstration : Nous supposons que f est de classe C^∞ et montrerons l'inégalité (9). Les résultats de densité de 3.5, 3.7 et 4.3 permettront de conclure grâce au

théorème d'Ascoli (voir à ce propos [IV,4.9, vol.1 p.192]). Notons que la seconde inégalité de (9) résulte de 3.6.

D'après le théorème fondamental de [H] (cf. [H, IX.5.1, p.127]) on peut écrire

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$$

où $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$.

Choisissons des réels p_1 et p_2 vérifiant $1 < p_2 < p_1 < p$ et soient q_0, q_1, q_2 tels que :

$$(+)\quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q_0}, \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2}.$$

En dérivant l'équation :

$$f \circ h = h \circ R_\alpha$$

puis en en prenant le logarithme, on obtient :

$$\text{Log } D h \circ R_\alpha - \text{Log } D h = \text{Log } D f \circ h.$$

D'après [VI,3.2] , on a :

$$(10) \quad |\text{Log } D h|_{C^{1/p}} \leq c_5 |D(\text{Log } D f \circ h)|_{\frac{1}{p}, p_2}$$

où la constante c_5 ne dépend que de α, p et p_2 .

De la formule

$$D(\text{Log } D f \circ h) = (D \text{Log } D f) \circ h \cdot Dh$$

et de (10), on déduit que :

$$(11) \quad |\text{Log } D h|_{C^{1/p}} \leq c_5 (|D \text{Log } D f \circ h|_{\frac{1}{p}, p_1} \|Dh\|_{L^{q_2}} + \|(D \text{Log } D f) \circ h\|_{L^{p_1}} |Dh|_{\frac{1}{p}, q_2}).$$

En effet, d'après l'inégalité de Hölder, si $\beta > 0$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p_2}$, $\varphi \in B^{\beta, p_1}$

et $\psi \in B^{\beta, q_2}$, alors, pour tout $t > 0$, on a :

$$\frac{1}{t^\beta} \|\varphi \circ R_t \cdot \psi \circ R_t - \varphi \psi\|_{L^{p_2}}$$

$$\leq \frac{1}{t^\beta} \| \varphi \circ R_t (\psi \circ R_t - \psi) \|_{L^{p_2}} + \frac{1}{t^\beta} \| (\varphi \circ R_t - \varphi) \psi \|_{L^{p_2}}$$

$$\leq \| \varphi \|_{L^{p_1}} \| \psi \|_{L^{q_2}} + \| \varphi \|_{L^{p_1}} \| \psi \|_{L^{q_2}}$$

Donc $\varphi \psi \in B^{\beta, p_2}$ et :

$$\| \varphi \psi \|_{B^{\beta, p_2}} \leq \| \varphi \|_{L^{p_1}} \| \psi \|_{L^{q_2}} + \| \varphi \|_{L^{p_1}} \| \psi \|_{L^{q_2}}.$$

Par ailleurs, on rappelle (cf. [V, 3.4] et (8)) que si ℓ est suffisamment petit, alors $\text{Log Dh} \in \text{BMO}(\mathbb{T}^1)$ et :

$$(12) \quad \| \text{Log Dh} \|_{\text{BMO}} \leq c_3 \ell.$$

D'après [V, 3.5] et [V, 2.16], pour tout $q \in [1, +\infty[$ et tout $s \in \mathbb{R}$, on peut trouver un $\ell(s, q) > 0$ tel que, si $\ell \leq \ell(s, q)$, alors des inégalités du type suivant sont satisfaites :

$$(13) \quad \begin{cases} \| (Dh)^s \|_{L^q} \leq 1 + \mu(s, q) \ell \\ \| (Dh^{-1})^s \|_{L^q} \leq 1 + \mu(s, q) \ell \end{cases}$$

où $\mu(s, q)$ est une constante ne dépendant que de s, q , $\ell(s, q)$ et c_3 .

On a alors (cf. (+)) :

$$\begin{aligned} \| (D \text{Log Dh}) \circ h \|_{L^{p_1}} &= \| (D \text{Log Dh}) \cdot (Dh^{-1})^{1/p_1} \|_{L^{p_1}} \\ &\leq \| D^2 f \|_{L^2} \| Df^{-1} \|_{L^\infty} \| (Dh^{-1})^{1/p_1} \|_{L^{q_0}}. \end{aligned}$$

Lorsque ℓ tend vers 0, les quantités $\| Df^{-1} \|_{L^\infty}$ et $\| (Dh^{-1})^{1/p_1} \|_{L^{q_0}}$ tendent vers 1, donc, si ℓ est assez petit,

on a :

$$(14) \quad \| (D \text{Log Dh}) \circ h \|_{L^{p_1}} \leq 2\ell.$$

Nous devons à présent estimer $|(D \operatorname{Log} Df) \circ h|_{\frac{1}{p}, p_1}$. Pour ce faire, on décompose la fonction $\psi = D \operatorname{Log} Df$ (qui est de classe C^∞) en blocs $\Delta\psi_k$, $k \in \mathbb{N}$, comme en [VI, 2.11]. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\Delta\psi_k\|_{L^p} \leq C |\psi|_{\frac{1}{p}, p} 2^{-k/p}$$

et

$$\|D\Delta\psi_k\|_{L^p} \leq C |\psi|_{\frac{1}{p}, p} 2^{k(1-\frac{1}{p})}$$

où la constante C ne dépend que de p (on notera que, comme $\int_0^1 \psi(\theta) d\theta = 0$, on a pu remplacer, dans les inégalités de [VI, 2.11], la norme $\|\psi\|_{B^{1/p, p}}$ par la semi-norme $|\psi|_{\frac{1}{p}, p}$).

Les inégalités (13) entraînent, si ℓ est assez petit :

$$\begin{aligned} \|(\Delta\psi_k) \circ h\|_{L^{p_1}} &= \|(\Delta\psi_k) \cdot (Dh^{-1})^{1/p_1}\|_{L^{p_1}} \\ &\leq \|\Delta\psi_k\|_{L^p} \| (Dh^{-1})^{1/p_1} \|_{L^{q_1}} \\ &\leq 2 C |\psi|_{\frac{1}{p}, p} 2^{-k/p}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|D(\Delta\psi_k \circ h)\|_{L^{p_1}} &= \|D(\Delta\psi_k) \cdot (Dh^{-1})^{\frac{1}{p_1}-1}\|_{L^{p_1}} \\ &\leq \|D\Delta\psi_k\|_{L^p} \| (Dh^{-1})^{\frac{1}{p_1}-1} \|_{L^{q_1}} \\ &\leq 2 C |\psi|_{\frac{1}{p}, p} 2^{k(1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

On déduit alors de [VI, 2.12] que :

$$(15) \quad |(D \operatorname{Log} Df) \circ h|_{\frac{1}{p}, p_1} \leq c_6 |D \operatorname{Log} Df|_{\frac{1}{p}, p}$$

dès que ℓ est suffisamment petit.

Il nous reste à contrôler $\|Dh\|_{\frac{1}{p}, q_2}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

On a :

$$(16) \quad \|Dh \circ R_t - Dh\|_{L^{q_2}} = \|Dh(e^{\frac{\text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}}{-1}})\|_{L^{q_2}} \\ \leq \|Dh\|_{L^{2q_2}} \|e^{\frac{\text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}}{-1}}\|_{L^{2q_2}}.$$

en vertu de l'inégalité $|e^x - 1| \leq e^{|x|} - 1$ et de celle de Cauchy-Schwarz.

D'après (12), on a :

$$\rho = \|\text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}\|_{\text{BMO}} \leq 2 c_3 \ell.$$

Si l'on applique le théorème [V, 2.13] à la fonction $\varphi = \text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}$ et la formule [V, 2.14] à la fonction $\lambda \rightarrow (e^\lambda - 1)^{2q_2}$, on obtient des constantes c_7 et c_8 vérifiant :

$$\|e^{\frac{|\text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}|}{-1}}\|_{L^{2q_2}}^{2q_2} \leq c_7 \int_0^\infty e^\lambda (e^\lambda - 1)^{2q_2-1} e^{-\frac{\lambda}{c_8 \rho}} d\lambda \\ = c_7 \rho \int_0^\infty e^{\rho \lambda} (e^{\rho \lambda} - 1)^{2q_2-1} e^{-\frac{\lambda}{c_8}} d\lambda.$$

La fonction :

$$\rho \rightarrow \int_0^\infty e^{\rho \lambda} (e^{\rho \lambda} - 1)^{2q_2-1} e^{-\frac{\lambda}{c_8}} d\lambda$$

est de classe C^∞ au voisinage de 0 et toutes ses dérivées à l'origine jusqu'à l'ordre $2q_2 - 2$ inclus sont nulles. On en déduit que :

$$\int_0^\infty e^{\rho \lambda} (e^{\rho \lambda} - 1)^{2q_2-1} e^{-\frac{\lambda}{c_8}} d\lambda = O(\rho^{2q_2-1})$$

et qu'il existe une constante c_9 vérifiant :

$$(17) \quad \|e^{\frac{|\text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}|}{-1}}\|_{L^{2q_2}}^{2q_2} \leq c_9 \rho \\ \leq c_9 \|\text{Log Dh} \circ R_t - \text{Log Dh}\|_{L^\infty}.$$

La constante c_9 ne dépendant pas du réel t , on obtient, en conjuguant (16) et (17) et en divisant par $t^{1/p}$:

$$(18) \quad |Dh|_{\frac{1}{p}, q_2} \leq c_9 |Log Dh|_{C^{1/p}}.$$

Enfin l'inégalité (11) devient, après intervention de (13), (14), (15) et (18) :

$$|Log Dh|_{C^{1/p}} \leq 2 c_5 c_6 |D Log Df|_{\frac{1}{p}, p} + 2 c_5 c_9 \ell |Log Dh|_{C^{1/p}}.$$

Dès que $\ell \leq \frac{1}{4c_5 c_9}$, on a :

$$|Log Dh|_{C^{1/p}} \leq 4c_5 c_6 |D Log Df|_{\frac{1}{p}, p}.$$

Comme nous l'avons annoncé, cette inégalité, identique à (9), valable pour toute $f \in D^\infty(T^1)$ dont la norme $\|D^2 f\|_{L^2}$ est suffisamment petite entraîne la proposition. ■

6. TENTATIVE D'EXTENSION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES DE ROTATION AUTORISÉS.

6.1. Conjecture : Il existe une partie B de T^1 de mesure de Haar 1 telle que tout $f \in D^{2+vb}(T^1)$ dont le nombre de rotation $\alpha = \rho(f)$ appartient à B , est conjugué à R_α de façon $C^{1+\delta}$, où $\delta > 0$ peut dépendre de α .

La proposition suivante et le théorème 7.2, sans y donner de réponse, justifient cette conjecture.

6.2. Proposition : Soit $f \in D^{2+vb}(T^1)$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation $\alpha = \rho(f)$ est un nombre de densité bornée. Il existe une fonction $\eta \in L^4(T^1)$ telle que :

$$(X) \quad \eta \circ f - \eta = Log Df.$$

On rappelle que les nombres de densité bornée ont été définis en 5.2.2.

Remarque : L'égalité (X) implique que la mesure σ -finie sur T^1 de densité $e^{-\eta}$ est invariante par f .

6.3. Démonstration : On suppose d'abord seulement que $f \in D^{1+Lip}(T^1)$ et que α satisfait à la condition A (cf. [H,V.10,p.67] ; c'est le cas de tout nombre de densi-

té bornée). On note $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des réduites de α .

D'après 5.2.1., (2) et [H, VIII, 2.3, p.108] (voir aussi [H, VIII.2.4, p.109]), on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^{1-\varepsilon} \|f^{q_n} - \text{Id} - p_n\|_{C^0} = 0.$$

D'autre part, si $V = \text{Var}(\text{Log } Df)$, l'inégalité de Denjoy (cf [H, VI.4.4., p.75]) fournit :

$$(20) \quad \|\text{Log } Df^{q_n}\|_{C^0} \leq V.$$

On suppose maintenant les hypothèses de la proposition satisfaites ($f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$ et α de densité bornée). On déduit de 5.2.3, (6) et de (20) que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(21) \quad \|D^2 f^{q_n}\|_{L^2} = O(q_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}).$$

L'inégalité [V, 2.11, prop.1] appliquée à la fonction $f^{q_n} - \text{Id} - p_n$ donne :

$$\|Df^{q_n} - 1\|_{L^4} \leq \sqrt{3} \|D^2 f^{q_n}\|_{L^2}^{1/2} \|f^{q_n} - \text{Id} - p_n\|_{C^0}^{1/2}.$$

Puis, en utilisant (19) et (21), on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(22) \quad \|Df^{q_n} - 1\|_{L^4} = O(q_n^{-\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

D'après (20), les fonctions $\text{Log } Df^{q_n}$ sont uniformément bornées. L'estimation (22) entraîne donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(23) \quad \|\text{Log } Df^{q_n}\|_{L^4} = O(q_n^{-\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

(on a, pour tout $x \in [-V, V]$, $|x| \leq e^V |e^x - 1|$).

Soient, à présent, q et r des entiers ; on a :

$$\|\text{Log } Df^q \circ f^r\|_{L^4} \leq \|Df^{-r}\|_{C^0}^{1/4} \|\text{Log } Df^q\|_{L^4}.$$

On déduit de 5.2.2., (3), que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante c_ε telle que, pour tous entiers q et r , on ait :

$$(24) \quad \|\text{Log Df}^q_{\circ f^r}\|_{L^4} \leq c_2 |r|^\varepsilon \|\text{Log Df}^q\|_{L^4}.$$

On veut montrer que la suite $(\|\text{Log Df}^n\|_{L^4})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Pour ceci, on fixe un entier n et on choisit k vérifiant :

$$q_k \leq n < q_{k+1}.$$

On décompose alors n sous la forme :

$$n = \sum_{i=0}^k b_i q_i$$

où $0 \leq b_i \leq a_{i+1}$ (cf. [H, VIII.1.2.2., p.101]) ; cette décomposition est unique si l'on requiert, de plus, les conditions :

$$r_i = \sum_{j=0}^{i-1} b_j q_j < q_i$$

pour $0 \leq i \leq k$ (on a $r_0 = 0$ et $r_k = n$).

De la formule, valable pour tout entier $q \geq 0$,

$$\text{Log Df}^q = \sum_{r=0}^{q-1} \text{Log Df}_{\circ f^r}$$

on déduit :

$$(25) \quad \text{Log Df}^n = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{b_i-1} \text{Log Df}_{\circ f}^{q_i r_i + j q_i}$$

(cf. [H, VIII.1.2.3, p.102]).

En appliquant l'inégalité (24) et l'estimation (23) à la formule (25), on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante c_ε telle que :

$$(26) \quad \begin{aligned} \|\text{Log Df}^n\|_{L^4} &\leq c_\varepsilon \sum_{i=0}^k b_i q_i^{-\frac{1}{2} + \varepsilon} (a_i q_i)^\varepsilon \\ &\leq c_\varepsilon \sum_{i=0}^k a_i^2 q_i^{-\frac{1}{2} + 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Comme α est de densité bornée, on a :

$$a_i = O(i)$$

alors que, comme pour tout nombre irrationnel, les q_i vérifient :

$$q_i \geq 2^{(i-1)/2}.$$

On en déduit, en choisissant un $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$, que

$$(27) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\text{Log Df}^n\|_{L^4} < +\infty.$$

La proposition résulte alors du lemme [H, XIII.3.3.2, p.183] appliqué à l'opérateur $A : L^4(\mathbb{T}^1) \rightarrow L^4(\mathbb{T}^1)$, $\varphi \rightarrow \varphi \circ f$ et à la fonction $\varphi = \text{Log Df}$. ■

7. CONJUGAISON DIFFÉRENTIABLE EN CLASSE $V^{3,\infty}$.

7.1. Soit $f = \text{Id} + \varphi \in D^1(\mathbb{T}^1)$ un difféomorphisme pour lequel la fonction φ vérifie :

$$(\circ) \quad -\varphi + \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \in V^{3,\infty}(\mathbb{T}^1),$$

(on rappelle que l'ensemble $V^{3,\infty}(\mathbb{T}^1)$ a été défini en [V, 8.9]). Dans ce cas, $f \in D^{2+vb}(\mathbb{T}^1)$ mais la réciproque est fautive ; de plus, $D^2 f$ est bornée mais pas nécessairement continue.

On suppose que $\alpha = \rho(f)$ satisfait à une condition diophantienne d'exposant compris entre 2 et 3 :

Il existe un $\beta \in [0, 1[$ et un $\gamma > 0$ tels que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait :

$$(\circ\circ) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \gamma q^{-2-\beta}.$$

7.2. Théorème : Sous les hypothèses précédentes, on a :

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1},$$

où $h \in D^{1+\delta}(\mathbb{T}^1)$ pour tout $\delta \in]0, \frac{2-2\beta}{3+\beta}[$.

7.3. Démonstration : C'est la même que celle de J.C. Yoccoz [Y₂] (voir aussi [Y₁]), à quelques petites modifications près que nous allons indiquer. On montre d'abord que h est de classe C^1 . Le lemme 4 de [Y₂] nécessite l'inégalité 4.4 et, dans le §1.5, comme Df n'est pas de classe C^1 , mais est seulement lipschitzienne, on utilise l'inégalité :

$$|\text{Log Df}^j(x) - \text{Log Df}^j(y)| \leq \|D \text{Log Df}^j\|_{L^\infty} |x-y|.$$

Le reste de la démonstration convient et montre que $h \in D^1(\mathbb{T}^1)$. Pour voir que Dh est höldérienne, on utilise les inégalités de convexité, valable pour toute fonction lipschitzienne $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $\delta \in]0,1[$:

$$\|\psi\|_{\delta} \leq 2\|\psi\|_{C^0}^{1-\delta} \|D\psi\|_{L^{\infty}}^{\delta}.$$

On déduit alors de 4.5 que :

$$(28) \quad \|\text{Log } Df^{q_n}\|_{\delta} \leq 4\|(-Sf)^+\|_{L^{\infty}}^{\delta/2} \|\text{Log } Df\|_{C^0}^{1-\delta/2} q_n^{\delta/2} \sup_{1 \leq j \leq q_n-1} \|Df^j\|_{C^0}^{\delta}.$$

pour tout dénominateur q_n d'une réduite de α . Le reste de la démonstration de $[Y_2]$ convient parfaitement et prouve le théorème. ■

7.3. Remarque : Si on suppose que α est de type Roth (i.e. diophantien d'exposant $2 + \beta$ pour tout $\beta > 0$), le lemme [H, IX.6.3.1, p.129], montre que h est de classe $C^{2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

7.4. Quitte à remplacer f par f^{-1} on peut changer dans le théorème 7.2. la condition (o) par $(o') \psi - \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta \in V^3, P(\mathbb{T}^1)$

BIBLIOGRAPHIE

- [F₁] C. Froeschlé, Etude numérique de transformations ponctuelles planes conservant les aires, C.R. Acad. Sci. Paris t.266 (1968), 846-848.
- [F₂] C. Froeschlé, Etude numérique de transformations ponctuelles planes conservant les aires, C.R. Acad. Sci. Paris t.266 (1968), p.747-749.
- [G] W.H. Gottschalk and G.A. Hedlund, Topological dynamics, Am. Math. Soc; Providence (1953).
- [Ha] G.R. Hall, Resonance zones in two-parameter families of circle homeomorphisms, Siam. J. Math. Anal. 15 (1984), 1075-1081.
- [HW] M. Hénon et J. Wisdom, The Benettin-Strelcyn oval billiard revisited, Physica 8D (1983), 157-169.
- [H] M.R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Pub. I.H.E.S. v.49 (1979), 5-233.

- [HZ] M.R. Herman, Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant, Proc. Conf. in Chicago (1981), Conferences on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Edited Beckner and..., Wardsworth Belmont (1983), vol. II, p.708-725.
- [HE] M.R. Herman, Constructions de difféomorphismes ergodiques, en préparation.
- [HM] M.R. Herman, Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, Lec. Notes Math.n°597, Springer Verlag, Berlin (1977), 271-293.
- [J] V. Janik, "Über die simultanen diophantischen approximationen, Math.Z, 33 (1931), 505-543.
- [K] Y. Katznelson, Sigma-finite invariant measures for smooth mappings of the circle, J. d'Analyse Math. 31 (1977), 135-147.
- [Y₁] J.C. Yoccoz, Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série t.17 (1984), 333-359.
- [Y₂] J.C. Yoccoz, C¹-conjugaison des difféomorphismes du cercle, Springer Lec. Notes in Math. n°1007, Springer Verlag, Berlin (1983), 814-827.

*
*
*

M.R.HERMAN
Centre de Mathématiques (*)
Ecole Polytechnique
F-91128 PALAISEAU Cedex

(*) U.A. du CNRS n°169

CORRECTIONS DU VOLUME I .

Notations : p = page, l = ligne

- p.5 l + 12 et 13 : on ait pour tout x , $b(x) < 0$, $|d(x)| \leq C |b(x)|$ et $|a(x)| \leq C |b(x)|$.
- p.11 l - 10 : à 3.5.6. (iii) on obtient puisque
- p.19 l - 7 : l'angle orienté de la verticale $v = (0,1)$ avec $\frac{d\hat{\varphi}(t)}{dt}$ (i.e. angle $(v, \frac{d\hat{\varphi}(t)}{dt})$) est
- p.26 l + 4 : la 1-forme $Rd\Theta - rd\theta = \dots$
- p.77 l + 7 : $C_3^{-s_1} (1 + \frac{1}{n^{a/2}})^{C_2 n^{(a/2)+\varepsilon}} \rightarrow +\infty$.
- p.82 l + 9 : $a_N = [a_0, a_1, \dots]$
- p.120 l - 10 : si $0 \leq x \leq a'$
- p.145 l + 12 : $C^{r+\beta}(M_1, \mathbb{R})$
- p.150 l - 2 et - 3 : remplacer dans les formules les signes = par $\leq$
- p.153 l - 1 : $\|\varphi \circ g\|_{C^\beta} \leq \dots$
- p.154 l + 9 : $\|\varphi \circ g\|_{C^0} \leq \|D\varphi\|_{C^0} \|g\|_{C^0}$
- p.154 l - 6 : $\dots \leq 2 \|D^r \varphi\|_\beta \leq 2\|\varphi\|_{C^{r+\beta}}$
- p.155 l + 5 : $\{\varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) , \varphi(0) = 0\}$
- p.155 l + 6 : $C^{r+\beta}$ -topologie
- p.182 l + 5 : (8) implique :
- p.186 l - 4 : [H, XIII.4.6]

p.186 1 - 6 : [H, XIII. 4.6]

p.207 1 - 1 : Dans l'expression $C_2 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{k+\beta}}$ supprimer γ^{-1}

p.209 1 - 6 : $\leq C_5 \gamma^{-1} (\gamma \|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + \|D^3 f\|^2_{C^{k-4+\beta}})$

Couverture au dos lire H. Rüssmann.

SUMMARY

Classically, since the work of J. Moser, for perturbation theorems in small divisors (the existence of invariant curves, the problem of conjugating diffeomorphisms of the circle to rotations) one uses Hölder spaces. In this volume we study and prove existence theorems of invariant curves when one weakens the Hölder conditions on the 3^{rd} derivatives (see chap. IV) by L^p conditions ; this imposes that we require the rotation numbers to be of constant type.

Chapter V is devoted to the proof of persistence of invariant curves whose rotation number is of constant type for C^3 -area preserving, globally canonical, that are C^3 -perturbations of a completely integrable monotone twist maps of the annulus. The proof requires almost all the chapter and is, the least one can say, a rather elaborate continuation argument. The main difficulty being that only an estimate on the second of the invariant curve in L^s , $\frac{3}{2} < s < 2$, is obtained and this forces us to use Yves Meyer's Lemma on the finite difference equation in order to get L^q estimates on the derivatives of the mapping that conjugates, to a rotation, diffeomorphism of the circle whose rotation number is of constant type. At the end of chapter V we show the C^3 invariant curve theorem can be generalized to the Sobolev spaces $W^{3,p}$, $p > 1$, for certain special classes of twist maps. Chapter V is independent of the rest of the volume.

In chapter VI the translated curve theorem is proved for Besov spaces (i.e. $B^{3+\delta, p}$, $\delta > 1/p$, $p > 1$, or with E. Stein's notations $\Lambda_{3+\delta}^{p, \infty}$). The proof is almost the same as that of chapter IV once standard preliminaries on the regularized dyadic decompositions are obtained. These preliminaries will also be used in chapter VIII.

In chapter VII a proof, only using L^2 Sobolev spaces of the translated curve theorem for perturbations in the C^4 -topology, is given when the rotation numbers invariant curves are once again of constant type. The proof is probably the most elementary, in low differentiability, existing at the present date. The use of L^2 Sobolev space enables us to compute, in a natural way and without too much work, a series of general constants which, when applied for example to the "standard map", gives the correct result up to a factor smaller than 50.

In chapter VIII the main (global) theorem is that a C^1 -diffeomorphism of the circle, having a second derivative of bounded variation (but no necessarily continuous) and a rotation number of constant type, is $C^{2-\delta}$ -conjugated to a rotation for every $\delta > 0$. The corresponding perturbation theorem is much more elementary and is given at the end of chapter VI. This explains mathematically the

existence of invariant curves for certain piecewise linear area preserving homeomorphisms of the plane studied by C.Froeschlé, who observed this phenomenon numerically in 1968.