

Astérisque

JEAN-LUC BRYLINSKI

**Transformations canoniques, dualité projective,
théorie de Lefschetz, transformations de Fourier
et sommes trigonométriques**

Astérisque, tome 140-141 (1986), p. 3-134

http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__140-141__3_0

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATIONS CANONIQUES

DUALITÉ PROJECTIVE

THÉORIE DE LEFSCHETZ

TRANSFORMATIONS DE FOURIER

ET SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

par

Jean-Luc BRYLINSKI

TABLE DES MATIÈRES

	page
I - <u>TRANSFORMATIONS CANONIQUES TOPOLOGIQUES</u>	
I - Cycles Évanescents et Variété caractéristique	10
II - Traduction Topologique des Transformations Canoniques (cas propre)	18
III - Application : Dualité Projective et Théorie de Lefschetz	24
IV - Traduction Topologique des Transformations Canoniques (cas non propre)	41
V - Transformations de Radon Topologiques	47
II - <u>TRANSFORMATION(S) DE FOURIER</u>	
VI - Transformation de Fourier vectorielle, à la Malgrange	62
VII - Transformation de Fourier-Malgrange et Modules sur les Algèbres de Weyl	72
VIII - Un Lemme Technique sur la Transformation de Fourier Formelle	96
IX - La Transformation de Fourier-Deligne (d'après Katz et Laumon)	103
X - Estimation Uniforme de Sommes Trigonométriques	113
XI - Représentations de Springer (des groupes de Weyl).	119

INTRODUCTION

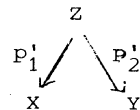
Depuis un peu plus d'un an, de nombreux mathématiciens se sont rendu compte des relations existant entre "cycles évanescents" (pour des faisceaux constructibles, ou même pervers) et "microlocalisation" (étude locale dans le fibré cotangent des $\mathcal{D}$ -modules cohérents, à l'aide des opérateurs microdifférentiels). Ces relations sont étudiées, de manière à peine implicite, dès 1976 par Kashiwara [K2] (et remontent en partie à [S-K-K]). Goresky et Mac Pherson ont apparemment mis à jour cette relation dans leur travail [G-M2] sur la théorie de Morse stratifiée, comme en témoigne un fragment de leur introduction, que nous reproduisons ici dans l'intérêt du lecteur :

"A primary object of study is the complex link of an i -dimensional stratum of a complex stratified subset of n -space. This is (roughly) the intersection of a small tubular neighbourhood of that stratum with a nearly generic plane of dimension $n-i-1$. Points in the complex link represent normal complex directions away from the stratum—in the language of Hörmander, a neighbourhood in the complex link is "microlocal". The proofs in this paper involve the study of complex links of strata in the complex link, i.e. "micro-micro local analysis, micro³-local analysis, and so on".

Un aspect important de cette relation, à savoir la définition d'un "cycle caractéristique", dans le fibré cotangent, associé à un faisceau pervers sur une variété analytique complexe lisse, qui coïncide avec la variété caractéristique du $\mathcal{D}$ -Module holonome correspondant (au sens de [Me 1,2,3],[K-K]) a été clairement observé par Deligne et par Mac Pherson, sur la base de la note [B-D-K] montrant que l'invariant topologique qui apparaît dans la formule de l'indice locale de Kashiwara n'est autre que l'obstruction d'Euler locale de Mac Pherson. On trouvera une intéressante application topologique dans [LE-Me].

La question se posait, dès lors que les cycles évanescents vivaient dans le fibré cotangent, et qu'en un certain sens on pourrait faire "opérer" des transformations canoniques quantifiées sur des cycles évanescents de faisceaux pervers, d'étudier les transformations canoniques d'un point de vue topologique, et de les faire opérer sur les faisceaux pervers (et complexes constructibles) eux-mêmes.

La réponse était probablement connue de Kashiwara et de Malgrange ; grosso modo si X et Y sont des variétés complexes lisses et si $T_Z^*(X \times Y)$ - le fibré conormal à Z dans $X \times Y$ est tel que les projections $T_Z^*(X \times Y) \rightarrow T^*(X)$ et $T^*(X \times Y) \rightarrow T^*(Y)$ sont génériquement des isomorphismes, l'analogue de la transformation canonique quantifiée (qui permet de transformer un $\mathcal{E}_X$ -Module en un $\mathcal{E}_Y$ -Module) est l'opération suivante sur les complexes constructibles

$$F^\bullet \mapsto \mathbb{R}p_{2,*} p_1^* F^\bullet$$


On trouvera aux § 2 et 4 des énoncés précis.

Bien sûr on peut considérer $F^\bullet \rightarrow \mathbb{R}p_{2,*} p_1^* F^\bullet$; toutefois, dans de nombreux cas, la "différence" entre ces deux opérations n'est pas bien grande, et disparaît même par une microlocalisation (au sens topologique) convenable, comme nous l'expliquons au paragraphe 2.

Dans l'étude de ces "transformations canoniques topologiques", on rencontre deux surprises agréables :

(1) Bien que les identifications entre $\mathcal{E}_X$ et $\mathcal{E}_Y$ dépendent du choix d'une "quantification" de la transformation canonique, et qu'il n'y ait pas d'identification plus naturelle que les autres, il existe un $(\mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_X)$ -bi-Module intrinsèque qui permet d'identifier la catégorie des $\mathcal{E}_X$ -Modules (sur un ouvert de T^*X) à celle des $\mathcal{E}_Y$ -Modules (sur un ouvert de T^*Y) ;

(2) L'étude d'une transformation canonique très belle ($X = \mathbb{P}^n, Y = (\mathbb{P}^n)^V, Z$ est la variété d'incidence) permet d'obtenir des résultats assez surprenants sur les faisceaux pervers sur $\mathbb{P}^n$: "modulo faisceaux constants", la transformation précédente est inversible, et préserve les conditions de perversité ; en particulier, modulo des faisceaux constants, le transformé d'un faisceau pervers irréductible est un faisceau pervers irréductible. On généralise ainsi au cas singulier un résultat connu sur l'irréductibilité de la monodromie des cycles évanescents dans la cohomologie en dimension moitié des sections hyperplanes d'une variété lisse. C'est l'objet du § 3 (théorème 3.1, corollaires 3.3 et 3.6), qui s'appuie sur les

méthodes "microdifférentielles" du § 2 ; Mazur m'a fait observer le caractère algébrique (ou micro-algébrique ?) de la transformation canonique définie par Z ; ce point est développé à la fin du § 3 et est repris à la fin du § 7 (7.27 et 7.29). De toute manière, on trouvera au § 3 un traitement purement topologique de cette transformation (faisceaux sur $\mathbb{P}^n$) $\rightarrow$ (faisceaux sur $(\mathbb{P}^n)^\vee$). Les propriétés fondamentales établies au § 3 seront prouvées au § 9 en caractéristique positive, à l'aide de la transformation de Fourier-Deligne. Il convient, bien entendu, de faire observer que cette approche par la "géométrie de contact" de la dualité projective ou, ce qui revient au même, de la théorie de Lefschetz, est enracinée profondément dans la géométrie du 19^e siècle, et culmine chez Lefschetz lui-même, bien que la géométrie algébrique contemporaine semble l'avoir quelque peu négligée. Il me semble d'ailleurs qu'elle clarifie la notion classique de pinceau de Lefschetz, que nous généralisons en 3.7, 3.8, 3.9, 3.14, 3.16, au cas singulier. Il est clair que la méthode des pinceaux devrait jouer un rôle important dans une démonstration par récurrence de mes conjectures sur la théorie de Hodge pour la cohomologie d'intersection [Br1],[Br2]. J'essaie d'ouvrir la voie en esquissant un plan de démonstration que la filtration que je définis sur $IH^1(X)$, pour X une courbe plane singulière, donne naissance à la bonne structure de Hodge, à savoir celle de $H^1(\tilde{X})$, où $\tilde{X}$ est la normalisée de X . Dans ce cas, la méthode des pinceaux consiste à projeter X sur $\mathbb{P}^1$ de façon "générique" ; on décrit alors $IH^1(X)$ comme $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L})$ où le système local associé à la représentation de permutation du groupe fondamental d'un ouvert de $\mathbb{P}^1$ sur les feuilles de $X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

J'ai été aussi inspiré par le traitement très géométrique des fronts d'onde et des opérateurs de Fourier intégraux, dû à Guillemin et Sternberg [G-S]. Guillemin m'a fait observer que la définition topologique des variétés caractéristiques, mentionnée plus haut, ressemble beaucoup à la définition de loc. cit. des fronts d'onde (dans les deux cas, on projette sur une droite). Inspiré également par leurs observations sur la transformation de Radon ([G-S] et par une question de Guillemin, j'ai étudié la version topologique de cette transformation (où $X = \mathbb{P}^n$,

Y est la grassmannienne des k -plans de $\mathbb{P}^n$, Z est encore la variété d'incidence). Je suis ici une méthode purement topologique (cf. § 5) pour obtenir la caractérisation de l'image de la transformation de Radon, ainsi qu'une formule d'inversion. Les résultats obtenus sont des "analogues symboliques" de ceux de Gelfand-Graev-Vilenkin [G-G-V], Gindikin-Henkin [G-H], etc

La deuxième partie de l'article est consacrée à trois types de "transformations de Fourier", à leurs relations et à quelques applications. La transformation de Fourier vectorielle, à la Malgrange, envoie un complexe de faisceaux sur un fibré vectoriel $E \rightarrow X$, "invariant par homothéties de rapport positif" sur un complexe de faisceaux sur le fibré dual $E' \rightarrow X$. J'ai eu connaissance de cette construction de Malgrange par des exposés qu'il a donnés à l'Ecole Polytechnique en Mars 1982. J'en rappelle les propriétés principales au § 6, en m'appuyant sur des notes de Verdier. Pour nous E est en fait un fibré vectoriel complexe sur X , et on fait agir la transformation de Fourier sur des complexes de faisceaux "monodromiques" sur E .

Le long § 7 est consacré à établir le lien entre la "transformation de Fourier formelle" pour des modules sur une algèbre de Weyl $\mathbb{C}[\underline{x}, \frac{\partial}{\partial \underline{x}}]$. J'ai dû incorporer quelques sorites sur les $\mathcal{D}$ -modules algébriques holonomes, et la notion "singularités régulières" pour de tels modules. L'outil essentiel est ici, outre les travaux de Mebkhout [Me1,2,3], la bonne filtration canonique d'un $\mathcal{D}$ -module holonome à singularités régulières, due à Kashiwara et Kawai [K-K]. La comparaison entre les 2 transformations de Fourier se réduit, grâce à une idée de Malgrange, au cas d'un fibré de rang 1, qui permet un calcul explicite. Je donne une démonstration de la commutation de la transformation de Fourier-Malgrange à la dualité de Verdier, fondée sur l'étude des transformations canoniques topologiques au § 4 (cf. proposition 7.21). Enfin le § 7 se termine par la description de la relation entre transformation de Fourier-Malgrange et transformation de Radon (d'un $\mathbb{P}^n$

vers l'espace projectif dual). C'est l'objet du théorème 7.27, dont la démonstration est purement topologique.

Le §8 est consacré à un lemme sur la transformation de Fourier formelle en dimension 1 (corollaire 8.3) qui permet de calculer le "rang générique" du transformé de Fourier d'un $\mathbb{C}[\underline{x}, \frac{\partial}{\partial \underline{x}}]$ -module (à singularités régulières) (8.6). Ce lemme joue un rôle crucial dans la "majoration uniforme de sommes trigonométriques" (cf. § 10). On en donne une démonstration due à Malgrange (et s'appuyant sur ses travaux inédits sur l'irrégularité en dimension un), ainsi qu'une démonstration purement algébrique et sans doute peu élégante.

Au § 9 on présente des résultats de Laumon et Katz sur la transformation de Fourier-Deligne (en caractéristique p), dont le plus remarquable est le théorème 9.8 (dont une preuve est esquissée dans le cas de dimension 1) En 9.13 on prouve une relation entre transformation de Radon (de $\mathbb{P}^n$ vers $(\mathbb{P}^n)^\vee$) et transformation de Fourier-Deligne, formellement identique à 7.27. C'est la seule approche connue pour établir l'analogie du § 3 en caractéristique p ; elle m'a été suggérée par Deligne. Notons qu'on n'a pas à l'heure actuelle d'analogie des résultats du § 5 en caractéristique positive.

La transformation de Fourier-Deligne est particulièrement bien adaptée à l'étude de sommes trigonométriques. Les résultats du § 10 sur ces sommes, concernant des majorations pour p fixé ou pour p générique, sont presque tous dus à Katz et Laumon [Ka-La]. La seule exception est la détermination de la constante apparaissant dans la majoration pour p générique, en terme de rang générique du transformé de Fourier d'un $\mathbb{C}[\underline{x}, \frac{\partial}{\partial \underline{x}}]$ -Module (théorème 10.8). Le § 11 utilise les diverses transformations de Fourier pour tenter de réconcilier la construction par Springer des représentations des groupes de Weyl avec celle de Lusztig-Borho-Mac Pherson [B-M1],[B-M2],[S2]. Il s'agit en grande partie d'un analogue en caractéristique p d'un résultat de Kashiwara, qu'il m'a communiqué en Octobre 1981 (cf. [K4]). En 11.3, on prouve une formule pour la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de la variété nilpotente (en un corps fini), due à Springer.

Les relations entre ces diverses transformations de Fourier sont encore en grande partie mystérieuses. Elles sont fondées sur l'analogie profonde entre irrégularité d'une équation différentielle ordinaire et ramification sauvage d'un faisceau (ℓ -adique) sur une courbe de caractéristique $p > 0$. A la lumière de ses travaux sur les équations irrégulières, Malgrange a introduit la notion de faisceau pervers sur une courbe, muni de "structure de Stokes" aux points singuliers, et sait faire opérer Fourier sur de tels objets [Ma2], [Ma3].

Bien que des relations précises entre les théories en caractéristique nulle (resp. positive) soient difficiles, même à imaginer, on peut sans doute attendre de la dite analogie des progrès pour chacune d'elles. Il n'est sans doute pas exagéré d'estimer, par exemple, que la méthode par laquelle Laumon définit le conducteur de Swan d'un faisceau en un point d'une surface [La2] est fondamentalement micro-locale.

Le présent article a de nombreux points de contact avec l'article de [K-S] (de Kashiwara et Schapira) qui introduit et étudie le concept général de "micro-support" d'un faisceau, et étudie la topologie des transformations canoniques de manière plus approfondie et plus générale.

Il me reste à remercier Pierre Deligne, Victor Guillemin, Masaki Kashiwara, Lê Dũng Tráng, Bernard Malgrange, Zoghman Mebkhout, Robert Mac Pherson, Barry Mazur, Pierre Schapira, Jean-Louis Verdier, pour de nombreuses conversations relatives aux cycles évanescents et aux transformations canoniques, et pour m'avoir éclairé sur leurs travaux inédits. Bernard Malgrange m'a communiqué nombre de ses idées, lettres et manuscrits, touchant également à la transformation de Fourier ; je lui en suis très reconnaissant. Jean-Louis Verdier m'a fait parvenir les manuscrits [V1] et [V2], et a joué pour moi un rôle très stimulant. En ce qui concerne la transformation de Fourier-Deligne et les sommes trigonométriques, le peu que j'en sais m'a été enseigné par Pierre Deligne, Nicolas Katz et Gérard Laumon ; dans le calcul de la constituante intervenant dans l'estimation des sommes trigonométriques, j'ai d'une part plagié [Ka] et d'autre part bénéficié du soutien théorique et technique de Bernard Malgrange. Enfin, l'étude des représentations de Springer via la transformation de Fourier est un pâle additif au travail de Kashiwara [K4], [Ho]. Je le remercie à nouveau pour de très utiles discussions à ce sujet ; l'encouragement et les conseils de Tonny A. Springer, Ryashi Hotta et Robert Mac Pherson m'ont été précieux.

Ce texte, écrit à l'automne 1982, a été remanié en Août 1984. Je remercie G. Laumon, B. Malgrange, et le rapporteur, pour leurs critiques constructives.

Mes remerciements les plus vifs vont à Paule Truc, sans la compétence et la patience de laquelle cet opuscule n'aurait pu voir le jour.

I) TRANSFORMATIONS CANONIQUES TOPOLOGIQUES

1) Cycles évanescents et variété caractéristique

Soit X une variété analytique complexe, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme analytique non constant. A un objet $K^\bullet$ de la catégorie dérivée $D_C^b(X)$ des complexes bornés d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ à cohomologie constructible, on associe [SGA 7 II, Exposé XIV] un objet $\phi_f(K^\bullet)$ ou $\phi(K^\bullet)$ de $D_C^b(X_0)$ où $X_0 = f^{-1}(0)$, muni d'un automorphisme de monodromie T . Rappelons que pour ce faire, on introduit le revêtement universel $\tilde{\mathbb{C}} \xrightarrow{p'} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ et on note $p: \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ l'espace topologique sur $\mathbb{C}$ déduit de $\tilde{\mathbb{C}}$ par adjonction d'un point 0 , de sorte que

a) $\tilde{\mathbb{C}}^*$ est ouvert dans $\tilde{\mathbb{C}}$

b) $p: \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ prolonge $p: \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $p(0) = 0$

c) les $p^{-1}(U)$, pour U voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\tilde{\mathbb{C}}$.

On pose $\bar{X} = X \times_{\mathbb{C}} \tilde{\mathbb{C}}$, $X^* = X \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*$ et $\bar{X}^* = \bar{X} - X_0 = X \times_{\mathbb{C}} \tilde{\mathbb{C}}^*$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{\bar{i}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{j}} & \bar{X}^* \\ \parallel & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ X_0 & \xleftarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X^* \end{array}$$

cartésien au-dessus du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \xleftarrow{\bar{i}} & \tilde{\mathbb{C}} & \xleftarrow{\bar{j}} & \tilde{\mathbb{C}}^* \\ \parallel & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ \{0\} & \xleftarrow{i} & \mathbb{C} & \xleftarrow{j} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

A $K^\bullet$ on associe l'objet $\psi_f(K^\bullet) = \bar{i}^* R\bar{j}_* p'^* j^*(K^\bullet)$ de $D_C^b(X_0)$.

Sur $\psi_f(K^\bullet)$ agit l'automorphisme de monodromie T , correspondant à l'automorphisme de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ au-dessus de $\mathbb{C}^*$ associé au générateur canonique de $\pi_1(\mathbb{C}^*)$. On a un morphisme naturel $i^*(K^\bullet) \rightarrow \psi_f(K^\bullet)$ qui est T -équivariant; par définition $\phi_f(K^\bullet)$ est le troisième terme d'un triangle construit sur ce morphisme.

Le morphisme de changement de base $p^* \mathbb{R}j_* (j^* K^\bullet) \rightarrow \mathbb{R}\bar{j}_* p'^* (j^* K^\bullet)$ permet de définir un morphisme $i^* \mathbb{R}j_* (j^* K^\bullet) \rightarrow \psi_f(K^\bullet)$.

Dans $D^b(X^*)$, on a un triangle distingué

$$j^* K^\bullet \rightarrow \mathbb{R}p'_* p'^* j^* (K^\bullet) \xrightarrow{T-\text{Id}} \mathbb{R}p'_* p'^* j^* (K^\bullet) \rightarrow j^* (K^\bullet)[+1]$$

En effet, on a $j^* (K^\bullet) = \mathbb{R}\Gamma(Z, \mathbb{R}p'_* p'^* j^* (K^\bullet))$ (Hochschild-Serre), et pour M un $\mathbb{C}[Z]$ -module, $\mathbb{R}\Gamma(Z, M)$ est représentable par $M \xrightarrow{T-\text{Id}} M$.

On a d'autre part un morphisme naturel (de changement de base)

$$i^* \mathbb{R}p'_* (\mathbb{R}\bar{j}_* p'^* j^* K^\bullet) \longrightarrow i^* (\mathbb{R}\bar{j}_* p'^* j^* K^\bullet)$$

ou encore $i^* \mathbb{R}j_* \mathbb{R}p'_* p'^* j^* K^\bullet \longrightarrow \psi_f(K^\bullet)$.

On vérifie aisément que c'est un isomorphisme, en se localisant sur X_O .

On a donc prouvé la

Proposition 1.1 : Il existe un triangle distingué naturel

$$\begin{array}{ccc} i^* \mathbb{R}j_* (j^* K^\bullet) & \longrightarrow & \psi_f(K^\bullet) \\ & \nwarrow +1 \quad \nearrow T-\text{Id} & \\ & \psi_f(K^\bullet) & \end{array}$$

Le résultat suivant est dû à O. Gabber (voir [§ 3, Prop. 2.3.6], [B-B-De-Ge]).

Théorème 1.2 : Si $K^\bullet$ est un faisceau pervers sur X , $\psi_f(K^\bullet)[-1]$ est un faisceau pervers sur X_O .

Nous allons en indiquer une démonstration. Elle résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 1.3 : Si K est un faisceau pervers, les faisceaux de cohomologie perverse $H_{\mu}^i(\psi_f(K\bullet))$ de $\psi_f(K\bullet)$ sont nuls pour $i \geq 0$.

Lemme 1.4 : $D_{X_0}(\psi_f(K\bullet))$ est (non canoniquement) isomorphe à $\psi_f(D_X(K\bullet))[-2]$.

En raisonnant par induction sur $\dim(X_0)$, on déduit facilement le lemme 1.3 du fait que les faisceaux de cohomologie (ordinaire) de $\psi(K\bullet)$ sont nuls en degrés ≥ 0 (on utilise l'estimation bien connue sur la dimension cohomologique des variétés de Stein).

Pour la démonstration de 1.4, nous suivrons une méthode de Beilinson et de Bernstein. Si $F\bullet$ est un complexe d'objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, sur lequel opère un automorphisme T , pour tout élément P non nul de $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$, nous notons $F_{(P)}\bullet$ le complexe simple associé au complexe double $F\bullet \xrightarrow{P} F\bullet$; si P divise Q , on a un morphisme naturel de $F_{(P)}\bullet$ vers $F_{(Q)}\bullet$ déduit du morphisme de complexes doubles.

$$\begin{array}{ccc} F\bullet & \xrightarrow{P} & F\bullet \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow \frac{Q}{P} \\ F\bullet & \xrightarrow{Q} & F\bullet \end{array}$$

Si $\mathcal{A}$ admet des limites inductives, nous noterons $F_{\det \text{ fin.}}\bullet$ la limite inductive des $F_{(P)}\bullet$, les $P \in \mathbb{C}[T, T^{-1}] - \{0\}$ étant ordonnés par divisibilité. On a un morphisme naturel de $F_{(P)}\bullet$ vers $F\bullet$, d'où un morphisme $F_{\det \text{ fin.}}\bullet \longrightarrow F\bullet$.

Lemme 1.5 : Si $\mathcal{A}$ est la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$ -vectoriels sur X_0 , et si $F\bullet$ est à cohomologie bornée et constructible, alors $F_{\det \text{ fin.}}\bullet \xrightarrow{\sim} F\bullet$.

Le foncteur $F\bullet \longmapsto F_{\det \text{ fin.}}\bullet$ étant exact, on peut par dévissage supposer que $F\bullet$ est un faisceau constructible F placé en degré 0 ; comme le passage aux fibres commute aux limites inductives, on se ramène à une vérification fibre à fibre ; on est amené à vérifier que si A est un $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ - module de longueur finie, on a $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ P}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]}(\mathbb{C}[T, T^{-1}]/(P), A) = A$ et $\lim_{\longrightarrow} \text{Ext}_{\mathbb{C}[T, T^{-1}]}^1(\mathbb{C}[T, T^{-1}]/(P), A) = 0$, ce qui est immédiat. Ceci prouve 1.5.

En représentant $K^\bullet$ par un complexe de faisceaux injectifs sur $\mathbb{A}[T, T^{-1}]$, on voit alors facilement qu'on a $\psi(K^\bullet) = i^* \mathcal{R}j_* [(\mathcal{R}p'_! p'^* K^\bullet)_{\det.\text{fin}}]$
 $= i^* \mathcal{R}j_* [K^\bullet \otimes (\mathcal{R}p'_! p'^* \mathcal{C}_{X^\bullet})_{\det.\text{fin}}]$. Ensuite $p'_! \mathcal{C}_{X^\bullet} = \mathcal{R}p'_! \mathcal{C}_{X^\bullet}$ est un faisceau localement constant de $\mathbb{A}[T, T^{-1}]$ -modules libres de rang 1.

Pour M un $\mathbb{A}[T, T^{-1}]$ -module libre de rang 1, le complexe $M_{(P)}$ est quasi isomorphe à $M/P.M[-1]$; par ailleurs $p'_* \mathcal{C}_{X^\bullet} = \mathcal{R}p'_* \mathcal{C}_{X^\bullet}$ est un faisceau de $\mathbb{A}[T, T^{-1}]$ -modules localement isomorphe à $\mathbb{A}[[T, T^{-1}]]$; on a canoniquement $p'_* \mathcal{C}_{X^\bullet} = \mathbb{A}[[T, T^{-1}]] \otimes_{\mathbb{A}[T, T^{-1}]}^{L} p'_! \mathcal{C}_{X^\bullet}$. Le complexe $\mathbb{A}[[T, T^{-1}]]_{(P)}$ est noncanoniquement quasi-isomorphe à $\mathbb{A}[T, T^{-1}]/(P)$; on peut choisir ces isomorphismes pour P variable de sorte que pour P divisant Q , on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}[[T, T^{-1}]]_{(P)} & \longrightarrow & \mathbb{A}[[T, T^{-1}]]_{(Q)} \\ \uparrow \text{q.isom.} & & \uparrow \text{q.isom.} \\ \mathbb{A}[T, T^{-1}]/(P) & \xhookrightarrow{Q/P} & \mathbb{A}[T, T^{-1}]/(Q) \end{array}$$

On dispose alors d'un quasi-isomorphisme

$$[\mathcal{R}p'_* \mathcal{C}_{X^\bullet}]_{\det.\text{fin.}} \xrightarrow{\sim} [\mathcal{R}p'_! \mathcal{C}_{X^\bullet}]_{\det.\text{fin.}}[1]$$

On en déduit que $\psi(K^\bullet) = i^* \mathcal{R}j_* [(\mathcal{R}p'_! p'^* K^\bullet)_{\det.\text{fin.}}][1]$

$$= i^* \mathcal{R}j_* \mathcal{R}p'_! p'^* K^\bullet[1]$$

Posant $F^\bullet = \mathcal{R}p'_! p'^* K^\bullet$, on a $i^* \mathcal{R}j_*(F^\bullet) = i^! j_!(F^\bullet)[1]$

d'où on déduit, en utilisant la constructibilité du complexe $i^* \mathcal{R}j_*(F^\bullet)$

$$D(i^* \mathcal{R}j_*(F^\bullet)) = i^* D j_!(F^\bullet)[-1] = i^* \mathcal{R}j_*(DF^\bullet)[-1]$$

Le premier complexe est $D\psi(K^\bullet)[+1]$, le troisième complexe est $\psi(DK^\bullet)[-1]$; on a donc prouvé le lemme 1.4.

Corollaire 1.6 : Pour $K^\bullet$ un faisceau pervers sur X , on a une suite exacte de faisceaux pervers sur X_0 , où $\psi(K^\bullet)[-1]_{\text{uni}}$ désigne le plus grand sous-faisceau pervers de $\psi(K^\bullet)[-1]$ sur lequel l'action de $T-1$ est nilpotente, et N le logarithme de T sur $\psi(K^\bullet)[-1]_{\text{uni}}$

$$0 \longrightarrow \underline{H}_\mu^{-1}(i^* \text{IR} j_* j^* K^\bullet) \longrightarrow \psi K^\bullet[-1]_{\text{uni}} \xrightarrow{N} \psi(K^\bullet)[-1]_{\text{uni}} \\ \longrightarrow \underline{H}_\mu^0(i^* \text{IR} j_* j^* K^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Preuve : Sur $\psi(K^\bullet)[-1]_{\text{uni}}$, on a $N = A \cdot (T-1)$, avec A inversible. On peut donc remplacer N par $T-1$; on écrit alors simplement la suite exacte longue de cohomologie perverse déduite du triangle 1.1, en tenant compte que 1.6 la raccourcit.

Corollaire 1.7 : Sous la même hypothèse, $\emptyset K^\bullet[-1]$ est pervers.

Preuve : On sait que $\underline{H}_\mu^k(i^* K^\bullet) = 0$ pour $k \leq -2$, donc le foncteur $F^\bullet \longrightarrow \underline{H}_\mu^{-1}(i^* F^\bullet)$ des faisceaux pervers sur X vers les faisceaux pervers sur X_0 est exact à gauche ; le noyau $N^\bullet$ du morphisme de faisceaux pervers $K^\bullet \longrightarrow \text{IR} j_* j^* K^\bullet$ est à support dans X_0 , donc $\underline{H}_\mu^{-1}(i^* N^\bullet) = 0$.

Au triangle $i^* K^\bullet \longrightarrow \psi K^\bullet$ est associée la suite exacte de cohomologie perverse

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ +1 & & \emptyset K^\bullet \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \underline{H}_\mu^{-2}(\emptyset K^\bullet) \longrightarrow \underline{H}_\mu^{-1}(i^* K^\bullet) \longrightarrow \underline{H}_\mu^{-1}(\psi K^\bullet) \longrightarrow \underline{H}_\mu^{-1}(\emptyset K^\bullet) \longrightarrow \underline{H}_\mu^0(i^* K^\bullet) \longrightarrow 0$$

De la nullité de $\underline{H}_\mu^{-1}(i^* N^\bullet)$ résulte que $\underline{H}_\mu^{-1}(i^* K^\bullet)$ s'injecte dans $\underline{H}_\mu^{-1}(i^* \text{IR} j_* j^* K^\bullet)$ donc dans $\underline{H}_\mu^{-1}(i^* \psi K^\bullet) = \psi K^\bullet[-1]$ d'après 1.6. D'où $\underline{H}_\mu^{-2}(\emptyset K^\bullet) = 0$.

Pour $i \geq 0$, on obtient $\underline{H}_\mu^i(\emptyset K^\bullet) = \underline{H}_\mu^i(\psi K^\bullet) = 0$, d'où le corollaire.

Nous nous intéresserons surtout au cas particulier suivant de ce corollaire : $x \in X$ est un point isolé du support de $\emptyset K^\bullet$ (en d'autres termes, dans un voisinage de x , le morphisme $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ est localement acyclique relativement à $K^\bullet$ en dehors de x). Alors le corollaire 1.7 dit que $\underline{H}_\mu^i(\emptyset K^\bullet)_x = 0$ pour $i \neq -1$. Dans le cas où X est lisse, $K^\bullet = \mathbb{C}[\dim X]$ et f a une singularité isolée en x , on retrouve une théorème bien connu de Milnor. De façon générale, soit X non nécessairement

lisse et $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ une stratification de Whitney de X telle que la restriction à chaque X_{α} de chaque faisceau de cohomologie $H^i(K')$ soit un faisceau localement constant. Soit $x \in X_{\alpha_0}$. Si la restriction de f à X_{α_0} admet un point critique isolé en x , et si f est transverse aux autres strates X_{β} dans un voisinage de x , alors de nouveau f est localement acyclique relativement à K' en dehors de x (dans un voisinage de x), donc la fibre $(\emptyset K')$ a sa cohomologie concentrée en degré -1 . On comparera ce résultat à [G-M3]. On peut aussi retrouver (à la torsion près) un résultat de Lê Dung Trang [Lê] où X est localement ensemblistement intersection complète et K' est égal à $\mathbb{C}_X[\dim X]$, F vérifiant la condition ci-dessus. On s'appuie pour cela sur la remarque suivante :

Sorite 1.8 : Si X est localement ensemblistement intersection complète, alors $\mathbb{C}_X[\dim X]$ est un faisceau pervers.

La démonstration la plus élégante (à ma connaissance) consiste à plonger X (ou à vrai dire un voisinage de x dans X) dans une variété lisse Z , de sorte que X soit ensemblistement intersection complète dans Z . Il est alors connu que $H_X^i(\mathcal{O}_Z) = 0$ pour $i \neq \dim Z - \dim X$ (comparer à [SGA2] La nullité du $\mathcal{D}_Z^{\infty}$ -Module à gauche $H_X^i(\mathcal{O}_Z)$ implique celle du $\mathcal{I}_Z$ -Module $H_{[X]}^i(\mathcal{O}_Z)$, puisque $H_X^i(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{D}_Z^{\infty} \otimes_{\mathcal{I}_Z} H_{[X]}^i(\mathcal{O}_Z)$ et que $\mathcal{D}_Z^{\infty}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{I}_Z$ [Me 1] Mebkhout a démontré que $\mathbb{C}_X = \text{Sol}(\text{IR}_{[X]}^{\Gamma}(\mathcal{O}_Z))$ d'où on tire $\mathbb{C}_X = \text{Sol}(H_{[X]}^{\dim Z - \dim X}(\mathcal{O}_Z))[\dim Z - \dim X]$; comme $\mathbb{C}_X[\dim X - \dim Z]$ est le complexe solution d'un $\mathcal{D}_Z$ -module holonome, $\mathbb{C}_X[\dim X]$ est pervers d'après Kashiwara (cf. [K 1] ou [Br 1]).

Dans la suite de ce numéro, nous supposons X lisse et K' pervers. On a $K' = \text{DR}(\mathcal{M})$ pour un unique $\mathcal{D}_X$ -Module holonome $\mathcal{M}$ à singularités régulières [Me 1,2,3][Br 1]. On souhaite comprendre le cycle caractéristique $\text{Ch}(\mathcal{M})$, somme algébrique des composantes de la variété caractéristique $\text{SS}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$, comptées, avec leur multiplicité, en termes de cycles évanescents pour K' . Pour cela, en suivant [K 1] commençons par choisir une stratification de Whitney $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$

telle que $\text{Ch}(\mathcal{M}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \cdot \overline{T_{X_{\alpha}}^* X}$ où m_{α} est un entier ≥ 0 . D'après [K1] ou [K2] la restriction de chaque $H^i(K^*)$ à chaque strate X_{α} est un faisceau localement constant. Il en résulte que si $f: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est un germe de fonction tel que $(df)_x \notin \bigcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$, le morphisme f est localement acyclique relativement à K^* en x . Considérons maintenant $f: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $(df)_x$ soit un point de $T_{X_{\alpha_0}}^* X$ (où X_{α_0} est la strate contenant x) et n'appartienne pas à $\overline{T_{X_{\alpha}}^* X}$ pour $\alpha \neq \alpha_0$. On dispose alors du résultat suivant de Kashiwara (légèrement extrapolé).

Théorème 1.9 [K2, théorème 3.2.5] . Sous les hypothèses plus haut $\emptyset_f(K^*)_x$ ne dépend que du microlocalisé $\mathcal{E}_{X, \tilde{x}} \otimes_{\mathcal{D}_{X, x}} \mathcal{M}_x$ de $\mathcal{M}$ en $\tilde{x} = (x, (df)_x)$ et est donc nul si $m_{\alpha_0} = 0$.

En effet $\emptyset_f(K^*)_x[-1]$ est isomorphe à

$$\text{IRHom}_{\mathcal{D}_{X, x}}(\mathcal{M}_x, (C_{X_{\alpha_0}}^{\text{IR}}|_x)_{\tilde{x}}) = \text{IRHom}_{\mathcal{E}_{X, \tilde{x}}}(\mathcal{E}_{X, \tilde{x}} \otimes_{\mathcal{D}_{X, x}} \mathcal{M}_x, (C_{X_{\alpha_0}}^{\text{IR}}|_x)_{\tilde{x}})$$

Si de plus, le graphe de df coupe $T_{X_{\alpha_0}}^* X$ transversalement au point $\tilde{x}$, $H^{-1}\emptyset_f(K^*)_x$ est de dimension m_{α_0} et on a $H^i\emptyset_f(K^*)_x = 0$ pour $i \neq -1$.

Remarque : On n'a pas besoin ici de connaître la définition du $\mathcal{E}^{\text{IR}}$ -Module à gauche $C_{X_{\alpha_0}}^{\text{IR}}|_x$; remarquons simplement qu'il est déduit du $\mathcal{D}$ -Module à gauche $\mathcal{B}_{X_{\alpha_0}}|_x = \frac{H}{H} [X_{\alpha_0}]$ par extension des scalaires de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{E}^{\text{IR}}$.

Voir loc.cit. et [S-K-K, Chapter II, § 1] pour plus de détails.

Corollaire 1.10 : Si $(df)_x \notin \text{SS}(\mathcal{M})$, f est localement acyclique relativement à K^* au point x .

Corollaire 1.11 : Si (x, ξ) est un point lisse de $\text{SS}(\mathcal{M})$, il existe un germe de fonction $f: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ avec $(df)_x = \xi$ qui soit non acyclique relativement au point x .

Remarque : D'après Lê Dũng Tráng (à paraître), le corollaire 1.11 vaut sans supposer que (x, ξ) est un point lisse de $\text{SS}(\mathcal{M})$; on prend pour f une fonction dont le graphe coupe $\text{SS}(\mathcal{M})$ proprement en (x, ξ) ; la dimension de $H^{-1}(\emptyset_f(K^*))_x$ est

alors égale à la multiplicité d'intersection de $\text{Ch}(\mathcal{M})$ et du graphe de df au point (x, ξ) . Tenant compte de cette amélioration de 1.11 on obtient le résultat suivant annoncé dans [Br 3, théorème 4.2.8].

Corollaire 1.12 : $\text{SS}(\mathcal{M})$ est l'ensemble des $(x, (df)_x)$ où f parcourt les germes $f: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ nonacycliques en x relativement à K^* . On écrit $\text{SS}(K^*) = \text{SS}(\mathcal{M})$ où $K^* = \text{DR}(\mathcal{M})$

Remarque 1.13 : La combinaison de 1.9 et de 1.12 fournit l'interprétation topologique annoncée de $\text{Ch}(\mathcal{M})$ en termes de cycles évanescents pour $K^* = \text{DR}(\mathcal{M})$.

Remarquons de plus que 1.9 montre, en un sens qu'il faudrait préciser, que lorsque le graphe df coupe transversalement $\text{SS}(\mathcal{M})$ en un point de $T_{X_{\alpha_0}}^* X$ qui n'appartient à aucune autre composante de $\text{SS}(\mathcal{M})$, le groupe des cycles évanescents

$\underline{H}^{-1}(\phi_f(K^*))_x$ ne dépend pas de f , mais seulement de $(df)_x$; c'est d'ailleurs la fibre en $(x, (df)_x)$ d'un système local sur $T_{X_{\alpha_0}}^* X - (\bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} T_{X_{\alpha}}^* X)$.

De plus, si une transformation canonique quantifiée, d'un ouvert homogène de

$\dot{T}^*X = T^*X - T_{X_{\alpha_0}}^* X$ vers un ouvert homogène de $\dot{T}^*Y$, transforme $T_{X_{\alpha_0}}^* X$ en $T_{Y_{\alpha_0}}^* Y$ et $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ en le $\mathcal{E}_Y$ -Module $\mathcal{N}$, $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}, C_{X_{\alpha_0}}^{\text{IR}}/X)$ est transformé en $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{N}, C_{Y_{\alpha_0}}^{\text{IR}}/Y)$. Ceci exhibe en quelque sorte une propriété d'invariance des cycles évanescents par transformation canonique ; nous y reviendrons au § 2.

Notation 1.14 : Si $K^* \in \text{D}_c^b(X)$, on note $\text{SS}(K^*) = \bigcup_i \text{SS}(\underline{H}_{\mu}^i(K^*))$.

Sur le lieu lisse de $\text{SS}(K^*)$, on dispose d'un complexe $\text{Ev}(K^*)$ (à faisceaux de cohomologie localement constants) dont la fibre en (x, ξ) s'identifie à $\phi_f(K^*)_x$ où $f: (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est tel que le graphe df coupe $\text{SS}(K^*)$ transversalement en $(x, \xi) = (x, (df)_x)$. On a $\underline{H}_{\mu}^i \text{Ev}(K^*) = \text{Ev}(\underline{H}_{\mu}^{i+1}(K^*)) [-1]$.

On a alors l'utile caractérisation des faisceaux pervers :

Proposition 1.15 : $K^* \in \text{D}_c^b(X)$ est pervers si et seulement si $\underline{H}_{\mu}^i \text{Ev}(K^*)$ est nul pour $i \neq -1$.

Preuve : Supposons $\underline{H}_{\mu}^i(\text{Ev } K^*)$ nul pour $i \neq -1$. Soit, pour un $j \neq 0$,

$\text{Ch}(\underline{H}_{\mu}^j(K^*)) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \cdot T_{X_{\alpha_0}}^* X$. Il résulte de 1.9 que m_{α} est la dimension de la fibre en $\tilde{x}$ de $\underline{H}_{\mu}^{j-1}(\text{Ev } K^*)$ (pour $\tilde{x}$ comme en loc.cit.), donc $m_{\alpha} = 0$ et $\underline{H}_{\mu}^j(K^*) = 0$.

II) TRADUCTION TOPOLOGIQUE DES TRANSFORMATIONS CANONIQUES (cas propre)

Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ p'_1 \swarrow & & \searrow p'_2 \\ X & & Y \end{array}$$

où X, Y, Z sont des variétés analytiques complexes lisses, Z une sous-variété lisse de $X \times Y$, p'_1 et p'_2 les deux projections. On suppose p'_1 et p'_2 propres. On note q_1 la projection $T_Z^*(X \times Y) \longrightarrow T^*X$ et q_2 la projection $T_Z^*(X \times Y) \longrightarrow T^*Y$. On se donne un ouvert homogène Ω_1 de $\dot{T}^*X = T^*X - T_X^*X$ et un ouvert homogène Ω_2 de $\dot{T}^*Y = T^*Y - T_Y^*Y$ et on suppose

(i) $q_1^{-1}(\Omega_1)$ est égal à $q_2^{-1}(\Omega_2)$ et est un ouvert de $\dot{T}_Z^*(X \times Y)$ que l'on note Ω .

(ii) $(q_i)|_{\Omega}$ est un isomorphisme de Ω sur Ω_i (pour $i = 1, 2$).

Ces conditions impliquent évidemment $\dim(X) = \dim(Y)$.

Nous considérons alors le foncteur F de la catégorie dérivée $\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X)$ des complexes bornés de $\mathcal{O}_X$ -Modules à gauche à cohomologie cohérente sur X vers $\mathbb{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_Y)$:

$$F(\mathcal{M}^\bullet) = \int_{p'_2} \mathbb{L}_{p'_1}{}^* \mathcal{M}^\bullet.$$

Analysons $F(\mathcal{G}_X)$ en commençant par introduire l'inclusion $i : Z \hookrightarrow X \times Y$ et les deux projections $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$. Alors

$$\mathbb{L}_{p'_1}^*(\mathcal{G}_X) = \mathcal{O}_{X \times Y} \otimes_{p_1^{-1}(\mathcal{O}_X)}^{L} p_1^{-1}(\mathcal{G}_X) = \mathcal{O}_{X \times Y} \otimes_{p_1^{-1}(\mathcal{O}_X)} p_1^{-1}(\mathcal{G}_X) = p_1^* \mathcal{G}_X \text{ puisque } \mathcal{G}_X \text{ est plat sur } \mathcal{O}_X. \text{ On utilise ensuite le}$$

Lemme 2.1 : Soit $i : Z \longrightarrow V$ une immersion fermée entre variétés analytiques complexes lisses, et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_V$ -Module à gauche cohérent. On a alors

$$\int_i i^* \mathcal{N} = \mathbb{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{N}[\dim V - \dim Z]).$$

Ce lemme est dû à Mebkhout [Me3].

On a donc $\int_i \mathbb{L}_{p_1}^* \mathcal{G}_X = \mathbb{R}\Gamma_{[Z]}(p_1^* \mathcal{G}_X)[\dim X + \dim Y - \dim Z]$ puisque $\mathbb{L}_{p_1}^* \mathcal{G}_X$ a de la cohomologie seulement en degré 0.

On a ensuite $F(\mathcal{G}_X) = \int_{p_2'} p_1'^* \mathcal{G}_X = \int_{p_2} \int_i i^* p_1^* \mathcal{G}_X$ ou encore

$F(\mathcal{G}_X) = \mathbb{R}p_{2*}(\mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathbb{H}_{[Z]}^{\dim X + \dim Y - \dim Z}(p_1^* \mathcal{G}_X)))$ où $\mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathcal{M})$ dénote le complexe de De Rham relatif à la projection $X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & p_1^*(\Omega_X^1) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{N} \longrightarrow \dots \longrightarrow p_1^*(\Omega_X^{\max}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{N} \\ | & & | \\ \text{degré} - \dim X & & \text{degré } 0 \end{array}$$

Lemme 2.2 : Soit $\mathcal{N} = \mathbb{H}_{[Z]}^{\dim X + \dim Y - \dim Z}(p_1^* \mathcal{G}_X)$; alors $\mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathcal{N})$ a sa cohomologie concentrée en degré 0; l'inclusion naturelle de $\mathbb{H}_{[Z]}^{\dim X + \dim Y - \dim Z}(\mathcal{O}_{X \times Y})$ dans $\mathcal{N}$ induit un isomorphisme $(p_2^{-1}(\mathcal{G}_Y), p_1^{-1}(\mathcal{G}_X))$ - linéaire de $p_1^*(\Omega_X^{\max}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathbb{H}_{[Z]}^{\dim X + \dim Y - \dim Z}(\mathcal{O}_{X \times Y})$ vers $\mathbb{H}^0 \mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathcal{N})$

Preuve : On filtre $\mathcal{N}$ par les $\mathcal{N}_m = \mathbb{H}_{[Z]}^{\dim X + \dim Y - \dim Z}(p_1^* \mathcal{G}_X(m))$ et

$\mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathcal{N})$ par les sous-complexes :

$$\mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathcal{N})_m : \mathcal{N}_m \longrightarrow p_1^*(\Omega_X^1) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{N}_{m+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow p_1^*(\Omega_X^{\max}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{N}_{m+\dim X}$$

On a $\text{gr } \mathbb{D}R_{X \times Y/Y}(\mathcal{N}) = \mathcal{B}_{Z/X \times Y} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \text{gr } \mathbb{D}R_X(p_1^* \mathcal{G}_X)$.

Le complexe $\mathbb{D}R_X(\mathcal{G}_X)$ est une résolution de $\Omega_X^{\max}$, par conséquent $\mathbb{D}R_X(p_1^* \mathcal{G}_X)$ est une résolution de $p_1^*(\Omega_X^{\max})$; de même $\text{gr } \mathbb{D}R_X(p_1^* \mathcal{G}_X)$ est isomorphe à $p_1^*(\Omega_X^{\max})$.

On remarque que $p_1^*(\Omega_X^{\max}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \otimes_{\mathbb{H}^1[\mathbb{Z}]}^{\dim X + \dim Y - \dim Z} (\mathcal{O}_{X \times Y})$ est un $(p_2^{-1}(\mathcal{D}_Y), p_1^{-1}(\mathcal{D}_X))$ -bi-Module. Par ailleurs, on dispose sur $\mathcal{M}$ d'une structure de $(\mathcal{D}_{X \times Y}, p_1^{-1}(\mathcal{D}_X))$ -bi-Module, qui définit une structure de $(p_2^{-1}(\mathcal{D}_Y), p_1^{-1}(\mathcal{D}_X))$ -bi-Module sur $\mathbb{H}^1 \text{DR}_{X \times Y/Y}(\mathcal{M})$; on vérifie que ces deux structures se correspondent via l'isomorphisme du lemme 2.2.

On a donc $F(\mathcal{D}_X) = \mathbb{R}p_{2*} (p_1^* \Omega_X^{\max} \otimes_{\mathcal{O}_{Z/X \times Y}} \mathcal{B}_{Z/X \times Y})$.

On s'intéresse au microlocalisé $\mathcal{L}_Y \otimes_{\mathcal{D}_Y} F(\mathcal{D}_X)$ restreint à l'ouvert Ω_2 de T^*Y (on commet ici un abus de langage, puisque $\mathcal{D}_Y$ est un faisceau sur Y , et $\mathcal{L}_Y$ un faisceau sur T^*Y).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \otimes_{\mathcal{D}_Y} F(\mathcal{D}_X) &= \mathbb{R}pr_{2*} (pr_2^{-1}(\mathcal{L}_Y) \otimes_{p_2^{-1}(\mathcal{D}_Y)} [p_1^* \Omega_X^{\max} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{B}_{Z \times Y}]) \\ &= \mathbb{R}pr_{2*} (p_1^* \Omega_X^{\max} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} [pr_2^{-1}(\mathcal{L}_Y) \otimes_{p_2^{-1}(\mathcal{D}_Y)} \mathcal{B}_{Z/X \times Y}]) \end{aligned}$$

où $pr_2: X \times T^*Y \longrightarrow T^*Y$.

Maintenant le théorème affirmant l'existence de transformations canoniques

([S-K-K, chapter II, § 4.3] voir aussi [K2, §2.3]) dit que le morphisme canonique entre faisceaux de $(\mathcal{L}_Y)_{/Z \times T^*Y}$ -Modules

$$pr_2^{-1}(\mathcal{L}_Y) \otimes_{p_2^{-1}(\mathcal{D}_Y)} \mathcal{B}_{Z/X \times Y} \longrightarrow h_* [\mathcal{L}_{X \times Y} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y}} \mathcal{B}_{Z/X \times Y}]$$

(où h est la projection de $T_Z^*(X \times Y)$ sur $Z \times_Y (T^*Y)$) est un isomorphisme. Les hypothèses

i) et (ii) impliquent que h est une immersion fermée de Ω vers $Z \times_Y \Omega_2$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_Y \otimes_{\mathcal{D}_Y} F(\mathcal{D}_X)]_{/\Omega_2} &= q_{2*} [p_1^* \Omega_X^{\max} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} (\mathcal{L}_{X \times Y} \mathcal{B}_{Z/X \times Y})] \\ &= q_{2*} [p_1^* \Omega_X^{\max} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times Y}} C_{Z/X \times Y}] \end{aligned}$$

d'après la définition de $C_{Z/X \times Y}$ comme microlocalisé de $\mathcal{O}_{Z/X \times Y}$ [S-K-K] et le fait que $q_2|_{\Omega}$ induit un isomorphisme de Ω sur Ω_2 .

Cette égalité est compatible aux structures de $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{C}_X)$ -bi-Modules des deux membres et montre donc que $[\mathcal{C}_Y \otimes_Y F(\mathcal{C}_X)]_{/\Omega_2}$ est naturellement muni d'une structure de $((\mathcal{C}_Y)_{/\Omega_2}, \varphi_*(\mathcal{C}_X))$ bi-Module, où $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est l'isomorphisme qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \Omega & \\ q_1 \swarrow & \varphi & \searrow q_2 \\ \Omega_1 & \xrightarrow{\sim} & \Omega_2 \end{array}$$

Considérons maintenant l'avatar microlocal G du foncteur F ; G envoie un complexe $\mathcal{M}^\bullet$ de $(\mathcal{C}_X)_{/\Omega_1}$ -Modules, borné à cohomologie cohérente, sur un complexe $G(\mathcal{M}^\bullet)$ de $(\mathcal{C}_Y)_{/\Omega_2}$ -Modules, borné et à cohomologie cohérente : $G(\mathcal{M}^\bullet) = \int_{\mathbb{P}_2} \mathbb{L}_{\mathbb{P}_1^*}(\mathcal{M}^\bullet)$.

On a un carré commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{F} & D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_Y) \\ \downarrow \text{microloc.} & & \downarrow \text{microloc.} \\ D_{\text{coh}}^b[(\mathcal{C}_X)_{/\Omega_1}] & \xrightarrow{G} & D_{\text{coh}}^b[(\mathcal{C}_Y)_{/\Omega_2}] \end{array}$$

Le théorème fondamental sur les transformations canoniques quantifiées dit que $[C_{Z/X \times Y}]_{/\Omega}$ est égal à $q_1^{-1}(\mathcal{C}_X) \cdot u$ et à $q_2^{-1}(\mathcal{C}_Y) \cdot u$, si u est un générateur local de $C_{Z/X \times Y}$. De plus $q_1^{-1}(\mathcal{C}_X) \xrightarrow{\sim} q_1^{-1}(\mathcal{C}_X) \cdot u$ et $q_2^{-1}(\mathcal{C}_Y) \xrightarrow{\sim} q_2^{-1}(\mathcal{C}_Y) \cdot u$ et le choix de u permet ainsi d'identifier $[(\mathcal{C}_Y)_{/\Omega_2}]$ au faisceau d'anneaux opposé à $h_*([(\mathcal{C}_X)_{/\Omega_1}])$. En particulier $C_{Z/X \times Y}$ est localement libre de rang 1 comme $q_1^{-1}(\mathcal{C}_X)$ -Module à gauche sur Ω , donc $[\mathcal{C}_Y \otimes_Y F(\mathcal{O}_X)]_{/\Omega_2}$ est localement libre de rang 1 comme $\varphi_*(\mathcal{C}_X)_{/\Omega_1}$ -Module à droite. Etant donné un complexe $\mathcal{M}^\bullet$ de $(\mathcal{C}_X)_{/\Omega_1}$ -Modules, borné, à cohomologie cohérente, on peut le résoudre localement sur Ω_1 , par un complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $(\mathcal{C}_X)_{/\Omega_1}$ -Modules libres, de sorte que $G(\mathcal{M}^\bullet)$ est localement représenté par

$$[\mathcal{C}_Y \otimes_Y F(\mathcal{O}_X)] \otimes_{\varphi_*(\mathcal{C}_X)} \varphi_*(\mathcal{L}^\bullet) = G(\mathcal{C}_X) \otimes_{\varphi_*(\mathcal{C}_X)} \varphi_*(\mathcal{L}^\bullet)$$

Ceci démontre le

Théorème 2.3 : Le morphisme naturel

$$G(\mathcal{C}_X) \xrightarrow[\varphi_*(\mathcal{C}_X)]{\mathbb{L}} \varphi_*(\mathcal{M}) \longrightarrow G(\mathcal{M})$$

est un isomorphisme.

Localement sur X , on peut identifier $\mathcal{C}_X$ à son propre opposé ; on a alors, au moyen d'un générateur local u de $C_{Z/X \times Y}$, un isomorphisme (local sur Ω_2) entre $h_*(\mathcal{C}_X)/\Omega_1$ et $(\mathcal{C}_Y)/\Omega_2$; G est alors déduit de cet isomorphisme.

Corollaire 2.4 : G définit une équivalence entre la catégorie des $(\mathcal{C}_X)/\Omega_1$ -Modules à gauche cohérents et la catégorie des $(\mathcal{C}_Y)/\Omega_2$ -Modules à gauche cohérents. On a $\text{Ch}(G(\mathcal{M})) = \varphi(\text{Ch}(\mathcal{M}))$ (la variété caractéristique, ainsi que les multiplicités, se transportent par l'isomorphisme φ).

Remarque 2.5 : Vu la symétrie de la situation, on a un foncteur similaire :

$(\mathcal{C}_Y)/\Omega_2$ -Modules à gauche $\longrightarrow (\mathcal{C}_X)/\Omega_1$ -Modules à gauche. On vérifie non sans peine que c'est un foncteur quasi-inverse de G .

Il reste à tirer les conséquences topologiques de ces résultats.

Le foncteur F envoie la catégorie $D(\mathcal{D}_X)_{h.r}$ dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$ -Modules à cohomologie holonome R.S (i.e. à singularités régulières) sur $D(\mathcal{D}_Y)_{h.r}$ d'après [Me1],[Me3] ou [K-K, theorem 6.2.1].

Le foncteur DR ("complexe de De Rham") normalisé comme dans [Br3,

Définition 4.1.13] définit une équivalence de catégorie entre $D(\mathcal{D}_X)_{h.r}$ et $D_C^b(X)$ [Me3].

On a alors un diagramme essentiellement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D(\mathcal{D}_X)_{h.r} & \xrightarrow{DR} & D_C^b(X) \\ \downarrow F & & \downarrow \Phi \\ D(\mathcal{D}_Y)_{h.r} & \longrightarrow & D_C^b(Y) \end{array} \quad \Phi = \mathbb{R} p_{2,*}' \circ p_1'^* [\dim Z - \dim X]$$

On en déduit le

Théorème 2.6 : Supposons que K^* est un faisceau pervers sur X ; alors pour $i \neq 0$, la variété caractéristique de $H_{\mu}^i(\Phi(K^*))$ est contenue dans $T^*Y - \Omega_2$.

Corollaire 2.7 : Le foncteur $K^* \rightarrow H_{\mu}^0(\Phi(K^*))$ induit une équivalence entre le quotient de la catégorie des faisceaux pervers sur X par la sous catégorie des faisceaux pervers K^* tels que $SS(K^*) \cap \Omega_1 = \emptyset$ et le quotient de la catégorie des faisceaux pervers sur Y par la sous catégorie des faisceaux pervers K^* tels que $SS(K^*) \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Soit $\Phi' = \mathbb{R}p_1' * p_2'^* [\dim Z - \dim Y]$.

On a alors un morphisme de foncteurs :

$$\begin{aligned} \text{id} &\longrightarrow \mathbb{R}p_{1*}' \circ p_1'^* \longrightarrow \mathbb{R}p_{1*}' \circ p_2'^! \circ \mathbb{R}p_{2*}' \circ p_1'^* \\ &\longrightarrow \mathbb{R}p_{1*}' \circ p_2'^* \circ \mathbb{R}p_{2*}' \circ p_1'^* [2 \dim(Z) - 2 \dim(Y)] \end{aligned}$$

ou encore $\text{id} \longrightarrow \Phi' \circ \Phi$. Microlocalement sur Ω_1 , c'est un isomorphisme.

Pour K^* pervers, on a donc $K^* \xrightarrow{\sim} H_{\mu}^0(\Phi' \circ \Phi(K^*))$ modulo la sous-catégorie des faisceaux pervers dont la variété caractéristique est disjointe de Ω_1 .

Par ailleurs, $H_{\mu}^0(\Phi' \circ \Phi(K^*))$ est muni d'une filtration de longueur finie, dont les sous-quotients sont des constituants de $H_{\mu}^i \Phi' (H_{\mu}^{-i} \Phi(K^*))$; pour $i \neq 0$, un tel faisceau pervers a sa variété caractéristique disjointe de Ω_1 , d'après le Corol. 2.4.

Il en résulte que $H_{\mu}^0(\Phi' \circ \Phi(K^*))$ est isomorphe à $(H_{\mu}^0 \Phi') \circ (H_{\mu}^0 \Phi)(K^*)$ dans la catégorie quotient. Le corollaire s'ensuit.

Remarque 2.9 : Soit K^* pervers, $\Lambda_1 = SS(K^*) \cap \Omega_1$, $\Lambda_2 = \varphi(\Lambda_1) \subset \Omega_2$.

Soit $(Y, y) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction tel que $(df)_y$ est un point lisse de Λ_2 et que le graphe de df coupe Λ_2 transversalement en $(df)_y$. On a alors :

$\emptyset_f(\Phi(K^*))_y = R\Gamma(\emptyset_f \circ p_2' (p_1'^* K^*) / p_2'^{-1}(y)) [\dim Z - \dim X]$ d'après [SGA 7, II, Exposé XIII, 2.1.7]. Supposons p_1' lisse. Alors la variété caractéristique de $p_1'^* K^*$ (un faisceau pervers décalé) est contenu dans $Z \times_X T^*X \subset T^*Z$; par ailleurs, le graphe de $d(f \circ p_2')$ est contenu dans l'image de $Z \times_X T^*Y$ dans T^*Z .

Soit $(z=x, y)$; (x, ξ) un point de $Z \times_X T^*X$ qui appartient à l'image de $Z \times_Y T^*Y \rightarrow T^*Z$, il existe donc $\eta \in (T^*Y)_y$ tel que $(\xi, -\eta)$ appartienne à $T_Z^*(X \times Y)_z$. Si $(y, \eta) \in \Lambda_2 \subset \Omega_2$, il existe au plus un point $(z=(x, y) ; (x, \xi))$ de $Z \times_X T^*X$ satisfaisant ces conditions, à savoir $(z ; \varphi^{-1}(y, \eta))$ où z est la projection sur Z de $q_2^{-1}(y, \eta) \in T_Z(X \times Y)$. En ce point z , $f \circ p_2'$ a même différentielle que $g \circ p_1'$, si $g : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ a pour différentielle ξ en x . D'après la remarque 1.13, $\emptyset_f(\Phi(K^*))_y$ est isomorphe à $\emptyset_g(K^*)$. Ceci donne un peu plus de substance à l'assertion de cette remarque selon laquelle "les cycles évanescents se comportent bien par transformation canonique". Je subodore d'ailleurs que l'hypothèse de lissité de p_1' est ici inutile, mais je ne vois pas comment m'en débarrasser à l'heure actuelle.

III) APPLICATION : DUALITÉ PROJECTIVE DE LEFSCHTZ

Les théorèmes du §2 sont bien sûr d'autant plus forts que les ouverts Ω_1 et Ω_2 sont "grands". Il est connu (mais je n'ai pas de référence) que le seul cas où les hypothèses (i) et (ii) du §2 sont satisfaites avec $\Omega_1 = \dot{T}^*X$, $\Omega_2 = T^*Y$, $\Omega = \dot{T}_Z^*(X \times Y)$ est le suivant : $X = P$ est un espace projectif de dimension n , $Y = P$ est l'espace projectif dual, $Z \subset P \times P^V$ est la variété d'incidence : c'est une hypersurface lisse de $P \times P^V$, les morphismes p'_1 et p'_2 sont lisses. La projection $\dot{T}_Z^*(P \times P^V) \rightarrow \dot{T}^*(P)$ est un isomorphisme comme on le vérifie aisément en quotientant les deux espaces par l'action des homothéties : on a alors $Z \cong \dot{T}^*(P)/\mathbb{C}^*$ (existence et unicité d'un hyperplan de P passant par $x \in P$ et de direction donnée).

Le théorème 2.7 et le corollaire 2.8 ont ici la signification suivante :

Théorème 3.1 : Soit $\Phi : D_C^b(P) \longrightarrow D_C^b(P^V)$ le foncteur.

$K' \longrightarrow \Phi(K') = \mathbb{R}p'_{2*} p'_1{}^*(K')[n-1]$, et $\Phi^V = D_C^b(P^V) \longrightarrow D_C^b(P)$ le foncteur similaire, où les rôles de P et P^V sont inversés.

(i) Si K' est pervers, $H_{\mu}^i(\Phi(K'))$ est un faisceau (localement) constant placé en degré $-n$ sur P^V , pour $i \neq 0$.

(ii) Le foncteur $K' \longrightarrow H_{\mu}^0(\Phi(K'))$ induit une équivalence entre le quotient de la catégorie des faisceaux pervers sur P par la sous-catégorie des faisceaux pervers K' constants (i.e. $K' \simeq \mathbb{C}_P^m[n]$ pour un entier m) et le quotient de la catégorie des faisceaux pervers sur P^V par la sous-catégorie des faisceaux pervers constants sur P^V ; un foncteur quasi-inverse est donné par $K' \longrightarrow H_{\mu}^0(\Phi^V(K'))$.

Il suffit de remarquer que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$ -Module holonome tel que $SS(\mathcal{M}) \subset T_X^*X$ (section nulle de T^*X), alors $\mathcal{M}$ est un fibré vectoriel (de rang fini) à connexion intégrable ; cela implique que si un faisceau pervers K' satisfait $SS(K') \subset T_X^*X$, K' est de la forme $\mathcal{F}[\dim X]$, où $\mathcal{F}$ est un système local ; de plus, P étant simplement connexe, tout faisceau localement constant sur P est constant.

Notons $\mathcal{A}(P)$ le quotient de la catégorie $\mathcal{M}(P)$ des faisceaux pervers sur P par la sous-catégorie formée des $\mathbb{C}_P^m[n]$ (faisceaux pervers constants).

Lemme 3.2 : Les objets simples de $\mathcal{A}(P)$ sont les images dans $\mathcal{A}(P)$ des objets $\underline{IC}^*(V, \mathcal{L})$ où V est un fermé irréductible de P et $\mathcal{L}$ est un système local irréductible sur un ouvert de Zariski dense de V_{reg} , tel que $\mathcal{L}$ a une monodromie non triviale dans le cas où $V = P$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la classification des objets simples de $\mathcal{M}(P)$ [B-B-D-G] ou [Br3, §2.3].

Corollaire 3.3 : Soient V et $\mathcal{L}$ comme dans le lemme 3.2. Il existe alors une sous-variété irréductible W de P^V et un système local irréductible $\mathcal{G}$ sur un ouvert de Zariski dense de W_{reg} , tel que $H_{\mu}^0(\Phi(\underline{IC}^*(V, \mathcal{L}))) = F^*$ ait une filtration à trois crans dans $\mathcal{M}(P^V)$:

$$0 \subset U_1(F^*) \subset U_2(F^*) \subset U_3(F^*) = F^*$$

avec $U_2(F^*)/U_1(F^*) \simeq \underline{IC}^*(W, \mathcal{G})$ et

$U_1(F^*)$ et $U_3(F^*)/U_2(F^*)$ des faisceaux pervers constants. Le couple $(W, \mathcal{G})$ est du type 3.2 et est uniquement déterminé par $(V, \mathcal{L})$.

Preuve : L'image de $F^* \in \mathcal{M}(P^V)$ dans $\mathcal{A}(P^V)$ est un objet simple de $\mathcal{A}(P^V)$ donc est l'image dans $\mathcal{A}(P^V)$ d'un objet $\underline{IC}^*(W, \mathcal{G})$ uniquement déterminé. On prend alors une suite de Jordan-Hölder de F^* ; tous les sous-quotients sont alors isomorphes à $\mathbb{C}_{P^V}[n]$, sauf exactement un d'entre eux, qui est isomorphe à $\underline{IC}^*(W, \mathcal{G})$. On observe alors que $\text{Ext}_{P^V}^1(\mathbb{C}_{P^V}[n], \mathbb{C}_{P^V}[n]) = H^1(P^V, \mathbb{C}_{P^V}) = 0$ pour obtenir le corollaire.

Prenons par exemple $\mathcal{L} = \mathbb{C}_{V_{\text{reg}}}$; sur l'ouvert $\mathcal{U}$ des hyperplans de P transverses à une stratification de Whitney donnée de V les $H_{\mu}^i(\Phi(\underline{IC}^*(V)))$ sont localement constants ; pour $h \in \mathcal{U}$, la fibre en h de $\Phi(\underline{IC}^*(V))$ est égale à $\text{IR}\Gamma(V \cap h, \underline{IC}^*(V)_{/V \cap h})[n-1] = \text{IR}\Gamma(V \cap h, \underline{IC}^*(V \cap h))[n]$ en vertu du lemme suivant [G-M1, Chapter 7].

Lemme 3.4 : Si h est transverse aux strates d'une stratification de Whitney de V , on a : $\underline{IC}^*(V)|_{V \cap h} \cong \underline{IC}^*(V \cap h)[1]$.

La fibre de $\underline{H}_{\mu}^i(\phi(\underline{IC}^*(V)))$ en h est alors égale à $H^i(V \cap h, \underline{IC}^*(V \cap h))$; le cas $i \neq 0$ étant sans mystère d'après le théorème 3.1, considérons le cas $i = 0$; alors $H^0(V \cap h, \underline{IC}^*(V \cap h))$ est la fibre en $h \in \mathcal{U}$ d'un système local sur $\mathcal{U}$. Deux cas sont possibles :

- 1) Ce système local est non constant; alors d'après le corollaire 3.3, ce système local $\mathcal{H}$ admet une filtration $0 \subset U_1(\mathcal{H}) \subset U_2(\mathcal{H}) \subset U_3(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ telle que
 - $\mathcal{G} = U_2(\mathcal{H})/U_1(\mathcal{H})$ est un système local irréductible non constant.
 - $U_1(\mathcal{H})$ et $U_3(\mathcal{H})/U_2(\mathcal{H})$ sont des systèmes locaux constants sur $\mathcal{U}$.

Dans ce cas, il est facile de voir que $H_{\mu}^0(\phi(\underline{IC}^*(V)))$ est égal à $\underline{IC}^*(P^V, \mathcal{G})$.

- 2) Ce système local est constant; la variété W du corollaire 3.3 est alors distincte de P^V (et irréductible, bien sûr). On trouve un exemple de cette sorte dans [SGA 7 II, Exposé XVIII, §5.9]: $n=3$, i.e. $P = \mathbb{P}_3$, V est une quadrique lisse de P ; sur l'ouvert des hyperplans transverses à V , le système local dont la fibre en h est $H^0(V \cap h, \underline{IC}^*(V \cap h)) = H^1(V \cap h, \mathbb{C})$ est nul, donc en particulier constant. La variété W est alors la quadrique duale de V et $\mathcal{F}$ est le système local trivial sur W de rang un, dont la fibre en $h \in W$ est $\mathbb{C} \cdot ([\ell_1] - [\ell_2]) \subset \mathbb{C} \cdot [\ell_1] \oplus \mathbb{C} \cdot [\ell_2] = H^2(V \cap h, \mathbb{C})$, où $h \cap V = \ell_1 \cup \ell_2$. D'après le corollaire 3.3, on a

$F^* = H_{\mu}^0(\phi(\underline{IC}^*(V, \mathcal{L}))) = \underline{IC}^*(W)$. Pour des raisons de pureté (exposées plus bas) $\phi(\underline{IC}^*(V))$ se décompose en la somme directe des $\underline{H}_{\mu}^i(\phi(\underline{IC}^*(V)))[-i]$, soit ici $\mathbb{C}_P[4] \oplus \underline{IC}^*(W, \mathcal{G}) \oplus \mathbb{C}_P[2]$. Prenant la fibre en $h \in W$, on retrouve le fait que $H^2(V \cap h, \mathbb{C})$ est de dimension 2 (grâce au fait que la fibre en h de $\underline{IC}^*(W)$ est $\mathbb{C}[2]$).

Remarquons que lorsque $V \subset P$ est lisse, Katz prouve dans [SGA 7, Exposé XVIII, § 6] que pour n assez grand, le plongement de V dans $\mathbb{P}(\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)))$ se trouve dans la lère situation; il y aurait lieu de généraliser ce résultat au cas où V n'est pas lisse (il suffirait de démontrer que lorsque $n \longrightarrow +\infty, |\chi(\Gamma(V \cap \Sigma_n, \underline{IC}^*(V \cap \Sigma_n)))| \longrightarrow +\infty$, si Σ_n est une hypersurface

générale de P de degré n ; on pourrait envisager d'utiliser à cet effet la formule de l'indice globale de Dubson [Du].

Le résultat suivant est de nature différente ; sa démonstration utilise un argument de fonds et n'est possible à l'heure actuelle qu'en réduisant modulo p la situation et en invoquant les conjectures de Weil.

Théorème 3.5 : $\Phi(\underline{IC}^*(V))$ est isomorphe à $\bigoplus_i H_{\mu}^i(\Phi(\underline{IC}^*(V)))[-i]$.

Chaque faisceau pervers $H_{\mu}^i(\underline{IC}^*(V))$ est semi-simple.

Preuve : On a $(p_1')^* \underline{IC}^*(V) = \underline{IC}^*((p_1')^*(V))[1-n]$ puisque p_1' est lisse de dimension relative $n-1$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber ([B - B - D , Théorème 6.2.5]) à $\underline{IC}^*(p_1')^*(V)$.

Corollaire 3.6 : On a $\Phi(\underline{IC}^*(V)) = \bigoplus_i H_{\mu}^i(\Phi(\underline{IC}^*(V)))[-i]$ et si on est dans le cas 1), $H_{\mu}^0(\Phi(\underline{IC}^*(V)))$ est somme directe d'un faisceau pervers constant et de $\underline{IC}^*(P^V; \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est un système local irréductible non constant sur un ouvert dense de P^V .

Preuve : Cela résulte immédiatement de 3.5 et des remarques déjà faites sur le cas 1).

Dans le cas où V est lisse, on peut comparer les résultats précédents à ceux de la théorie de Lefschetz. Le fait que $H_{\mu}^i(\Phi(\underline{IC}^*(V))) = H_{\mu}^i(\Phi(\mathbb{C}_V[\dim V]))$, restreint à l'ouvert $\mathcal{U}$ de P^V formé des hyperplans transverses à V , soit un faisceau pervers constant pour $i \neq 0$ résulte pour $i < 0$ du théorème des sections hyperplanes de Lefschetz, et pour $i > 0$ de la dualité de Poincaré sur $V \cap h$ (où $h \in \mathcal{H}$) et du cas $i < 0$. Il est connu dans ce cas que le système local $\mathcal{G}$ (alias système local des cycles évanescents : sa fibre en $h \in \mathcal{U}$ est la "partie évanescence" de $H^{\dim(V)-1}(V \cap h, \mathbb{C})$) est irréductible. Rappelons brièvement le principe de la démonstration classique [SGA 7II, Exposé XVIII, § 6]. $\mathcal{G}_h$ est engendré par les "cycles évanescents", dont on prouve aisément qu'ils sont conjugués sous le groupe $\pi_1(\mathcal{U})$. Si δ est un cycle évanescent, on dispose de la transformation de Picard-Lefschetz $T_{\delta} \in \pi_1(\mathcal{U}, h)$ celle-ci agit sur $\mathcal{G}_h$ par $T_{\delta}(x) = x \pm (x, \delta)$, où le signe dépend de $\dim(V)$. Soit $x \in \mathcal{G}_h - \{0\}$; il existe un cycle évanescent δ tel que $x, \delta \neq 0$ (on sait que la restriction à la partie évanescence de la forme d'intersection sur

$H^{\dim(V)-1}(V \cap h, \mathbb{C})$ est non dégénérée ; alors

$T_\delta(x) - x = \pm (x \cdot \delta) \delta$ est un multiple non nul de δ ; donc le sous-espace $\pi_1(\mathcal{U})$ invariant de $\mathcal{G}_h$ engendré par x est égal à $\mathcal{G}_h$.

La démonstration de l'irréductibilité de la monodromie de $\mathcal{G}_h$ qui résulte de l'interprétation topologique des transformations canoniques n'utilise pas la formule de Picard-Lefschetz et c'est une des raisons pour lesquelles elle vaut pour $\underline{\mathbb{C}}^*(V)$ avec $V \subset P$ singulier. Dans le cas où V est lisse, on peut se contenter du cas où V acquiert une singularité quadratique ordinaire, h se mouvant dans un pinceau de Lefschetz $\mathbb{P}_1 \hookrightarrow P^V$. Notons qu'un tel pinceau, d'axe L , définit un morphisme $P - L \xrightarrow{\sigma} \dot{T}^*(P - L)/\mathbb{G}_m$ qui est une section de la projection naturelle (on a $\sigma(x) = (x, (df_x)_x \bmod \mathbb{G}_m)$ où f_x est une équation locale de l'hyperplan du pinceau passant par x).

Soit $\tilde{P}$ l'éclaté de L dans P ; alors σ se prolonge de façon unique en $\tilde{\sigma} : \tilde{P} \longrightarrow \dot{T}^*(P)/\mathbb{G}_m$. Soit $\tilde{L}$ l'image inverse de L dans $\tilde{P}$. Le pinceau considéré est de Lefschetz si et seulement si

- (1) l'image de $\tilde{\sigma}$ rencontre $\dot{T}^*(P)/\mathbb{G}_m$ en un ensemble fini de points $(x_i, \xi_i)_{1 \leq i \leq k}$, où aucun x_i n'appartient à L ; de plus ces 2 variétés se coupent transversalement en ces points.
- (2) pour $1 \leq i \neq j \leq k$, x_i et x_j ne sont pas sur le même hyperplan du pinceau.

Dans ces conditions, un relèvement local de σ à $\dot{T}^*(P - L)$ au voisinage de x_i est $y \longmapsto (y, (df_x)_y)$, une sous-variété lagrangienne de l'espace cotangent qui rencontre transversalement $\dot{T}^*(P)$; l'espace $H^{-1}(\emptyset_{f_x}(\mathbb{C}[\dim V]))_x$ est de dimension 1 (une sphère dans $f_x^{-1}(\epsilon)$ s'évanouit pour $(\epsilon) \rightarrow 0$).

De notre point de vue, $\dot{T}^*(P)$ intervient ici comme $SS(\mathbb{C}_V[\dim V])$; l'irréductibilité de cette variété caractéristique est un miracle dû à la lissité de V . On est conduit irrésistiblement à la

Définition 3.7 : Soit V une sous-variété irréductible propre de P .

Un pinceau (linéaire) d'hyperplans de P , d'axe L , est dit de Lefschetz pour V si, avec les notations plus haut

(1) l'image de $\tilde{\sigma} : \tilde{P} \longrightarrow \dot{T}^*(P)/\mathbb{G}_m$ rencontre $SS(\underline{IC}^*(V))/\mathbb{G}_m$ en un nombre fini de points $(x_i, \xi_i)_{1 \leq i \leq k}$, où aucun x_i n'appartient à L et où (x_i, ξ_i) est un point de lissité de $SS(\underline{IC}^*(V))/\mathbb{G}_m$. L'intersection est transversale en chacun de ces points.

(2) pour $1 \leq i \neq j \leq k$, x_i et x_j ne sont pas sur le même hyperplan du pinceau.

Proposition 3.8 : Il existe un pinceau de Lefschetz pour V .

Preuve : Considérons $SS(\underline{IC}^*(V)) - T_P^*P \subset \dot{T}^*P$, et soit Λ son transformé par $\varphi : \dot{T}^*P \xrightarrow{\sim} \dot{T}^*P^V$. On peut écrire $\bar{\Lambda} = \bigcup_{i \in I} \overline{T_{Z_i}^*P^V}$, où $\bar{\Lambda}$ est l'adhérence de Λ dans $\dot{T}^*P^V$ et où les Z_i sont des sous-variétés lisses localement fermées de P^V .

Soit $P^V = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ une stratification de Whitney telle que chaque Z_i soit une union de strates X_{α} . La proposition résulte immédiatement du

Lemme 3.9 : Si le pinceau $\mathbb{P}_1 \subset P^V$ est transverse aux strates X_{α} , c'est un pinceau de Lefschetz pour V .

Preuve : Vérifions d'abord la condition (1) de la définition 3.7. Il est immédiat que l'image par $\varphi \bmod. \mathbb{G}_m$ de $\text{im}(\tilde{\sigma})$ est égale à $(\dot{T}^*P^V)|_{\mathbb{P}_1} \bmod. \mathbb{G}_m$. La condition signifie donc que $(\dot{T}^*P^V)|_{\mathbb{P}_1} \bmod. \mathbb{G}_m$ coupe $\bar{\Lambda}/\mathbb{G}_m$ transversalement en un nombre fini de points de lissité de $\bar{\Lambda}$ (si l'image de $\tilde{\sigma}|_L$ rencontrait $SS(\underline{IC}^*(V))/\mathbb{G}_m$, $\bar{\Lambda}/\mathbb{G}_m$ couperait $(\dot{T}^*P^V)|_{\mathbb{P}_1} \bmod. \mathbb{G}_m$ suivant une droite). La condition du lemme implique que l'intersection de ces variétés est finie (en effet $\mathbb{P}_1$ ne coupe que les X_{α} qui sont de codimension 1 dans P^V , et ce en un nombre fini de points).

L'espace tangent à $(\dot{T}^*P^V)|_{\mathbb{P}_1} \bmod. \mathbb{G}_m$ en un tel point d'intersection contient la fibre en ce point de $\dot{T}^*P^V \longrightarrow P^V$; si ce point est un point lisse de $(\dot{T}_{Z_i}^*P^V)/\mathbb{G}_m$, la transversalité de Z_i et de $\mathbb{P}_1$ entraîne celle de $(\dot{T}^*P^V)|_{\mathbb{P}_1} \bmod. \mathbb{G}_m$ et de

$(\dot{T}_{Z_i}^* P^V)/\mathbb{C}_m$. La condition (2) est, elle, dès lors automatique. C.Q.F.D.

Remarque 3.10 : Ici $H^{-1}(\emptyset_{f_x}(\underline{IC}^*(V)))$ (notations comme avant 3.7) n'est plus de dimension 1 en général (voir le § 1 et [G-M3]). On ne voit pas ce qui tiendrait office d'un cycle évanescent distingué, et a fortiori, comment généraliser la formule de Picard-Lefschetz. De plus, Λ a plusieurs composantes, qui donnent autant de types possibles de dégénérescences pour $H^0(V, h, \underline{IC}(V \cap h))$. Cela dit, seuls comptent vraiment ici les $\overline{T_{Z_i}^* P}$ pour lesquels Z_i est de codimension 1 dans P^V ; mais il peut y en avoir plusieurs tels Z_i . Si $n = 3$ et V est défini dans $P = \text{proj } \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ par l'équation homogène $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0$, $SS(\underline{IC}^*(V))$ est la réunion de $\overline{T_V^* P}$ et de $\overline{T_{\{x\}}^* P}$ où x est le point de P défini par $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. On a alors $\overline{\Lambda} = \overline{T_{V_{\text{reg}}}^* P} \cup \overline{T_{H_x}^* P^V}$ où V est le lieu des hyperplans de P tangents à V et où H_x est l'hyperplan défini par x . La composante $\overline{T_{H_x}^* P}$ est de multiplicité 2 dans le cycle caractéristique, et le groupe de cycles évanescents, observés au passage par x d'un hyperplan d'un pinceau de Lefschetz, est de dimension 2.

Le lemme 3.9 est bien connu dans le cas où V est lisse.

L'utilité des pinceaux de Lefschetz est d'étudier la cohomologie (à coefficients dans $\mathbb{Q}$, ou dans $\mathbb{C}$) des variétés projectives lisses par récurrence sur la dimension. Examinons le cas de V sous-variété propre irréductible de P (non nécessairement lisse) et donnons-nous un pinceau de Lefschetz pour V (noté $\mathbb{P}_1 \hookrightarrow P^V$). Soit $\tilde{V}$ l'éclatement de $V \cap L$ dans V , où L est l'axe du pinceau. Le pinceau étant de Lefschetz, L est transverse aux strates d'une stratification de Whitney de V (cela résulte immédiatement de la condition (1) dans 3.7). Le théorème de décomposition pour $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ prend alors la forme suivante :

Lemme 3.11 : $IR\pi_* \underline{IC}^*(\tilde{V}) = \underline{IC}^*(V) \oplus \underline{IC}^*(V \cap L)$.

Preuve : Remarquons d'abord que la transversalité de L aux strates d'une

stratification de Whitney de V implique que $\pi^* \underline{IC}^*(V)$ est isomorphe à son propre dual de Verdier. De plus $\text{Supp } H^i(\underline{IC}^*(V))$ est une réunion de strates, donc a même dimension que $\text{Supp } H^i \pi^* \underline{IC}^*(V)$, qui en est l'image inverse par π . Il résulte donc de la caractérisation du complexe d'intersection donnée dans [G-M1, §6.1] que $\pi^* \underline{IC}^*(V)$ est isomorphe à $\underline{IC}^*(\tilde{V})$. On a alors $\mathbb{R} \pi_* \underline{IC}^*(\tilde{V}) = \mathbb{R} \pi_* \pi^* \underline{IC}^*(V)$

$$= \underline{IC}^*(V) \otimes \mathbb{R} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$$

On a par ailleurs un triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_V & \longrightarrow & \mathbb{R} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \\ & \nearrow +1 & \searrow \\ & \mathcal{O}_{V \cap L}[-2] & \end{array}$$

puisque π induit un morphisme propre et lisse de $\pi^{-1}(V \cap L)$ sur $V \cap L$, de fibres isomorphes à $\mathbb{P}_1$. On a donc un triangle

$$\begin{array}{ccc} \underline{IC}^*(V) & \longrightarrow & \mathbb{R} \pi_* \underline{IC}^*(\tilde{V}) \\ & \nearrow +1 & \searrow \\ & \underline{IC}^*(V)|_{V \cap L}[-2] & \end{array}$$

Comme $\underline{IC}^*(V)|_{V \cap L}[-2] = \underline{IC}^*(V \cap L)$, le lemme résulte alors de la semi-simplicité du faisceau pervers $\mathbb{R} \pi_* \underline{IC}^*(\tilde{V})$, prouvée dans [B-B-D].

Le morphisme $f: V \rightarrow \mathbb{P}_1$ se prolonge de manière unique en un morphisme $f: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{P}_1$ ainsi noté par abus de langage. On s'intéresse à $\mathbb{R} f_* \underline{IC}^*(\tilde{V})$. Il est clair que le carré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{i} & Z \\ \pi \downarrow & & \downarrow p'_1 \\ V & \hookrightarrow & P \end{array}$$

est cartésien.

On a $\mathbb{R}f_* \underline{\mathrm{IC}}^*(\tilde{V}) = \mathbb{R}p'_2{}_* (i_* \underline{\mathrm{IC}}^*(\tilde{V}))|_{\mathbb{P}_1}$ puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{i} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow p'_2 \\ \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{\quad} & P^V \end{array}$$

est cartésien et p'_2 est propre.

Dans la démonstration du lemme 3.9, on a vu que $\underline{\mathrm{IC}}^*(\tilde{V}) = \pi^* \underline{\mathrm{IC}}^*(V)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}f_* \underline{\mathrm{IC}}^*(\tilde{V}) &= \mathbb{R}p'_2{}_* (i_* \pi^* \underline{\mathrm{IC}}^*(V))|_{\mathbb{P}_1} \\ &= \mathbb{R}p'_2{}_* (p'_1{}^* \underline{\mathrm{IC}}^*(V))|_{\mathbb{P}_1} \\ &= \Phi(\underline{\mathrm{IC}}^*(V))|_{\mathbb{P}_1} [1-n] \end{aligned}$$

Posons pour simplifier $\mathcal{F}_i = H_{\mu}^i(\underline{\mathrm{IC}}^*(V))$.

Pour $i \neq 0$, $\mathcal{F}_i$ est pervers "constant". On a vu en 3.6 que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0,\text{const.}} \oplus \mathcal{F}_{0,\text{ev}}$ où $\mathcal{F}_{0,\text{const.}}$ est un faisceau pervers constant et $\mathcal{F}_{0,\text{ev}} = \underline{\mathrm{IC}}^*(P^V, \mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est un système local irréductible non constant (sur un ouvert dense de P^V). D'après

3.5 et 3.6, on a :

$$\Phi(\underline{\mathrm{IC}}^*(V)) = \bigoplus_{i \neq 0} \mathcal{F}_i[-i] \oplus (\mathcal{F}_{0,\text{const.}} \oplus \mathcal{F}_{0,\text{ev}}).$$

On a bien sûr $(\mathcal{F}_{0,\text{ev}})|_{\mathbb{P}_1} = \underline{\mathrm{IC}}^*(\mathbb{P}_1, \mathcal{G}|_U)[n-1]$ où U est un ouvert dense de $\mathbb{P}_1$ (on peut prendre U aussi grand qu'on veut, pourvu que f soit localement acyclique relativement à $\underline{\mathrm{IC}}^*(V)$ au-dessus de U). D'où la

Proposition 3.12 : On a $\mathbb{R}f_* (\underline{\mathrm{IC}}^*(\tilde{V})) = \bigoplus_{i \neq 0} (\mathcal{F}_i)[1-n-i] \oplus (\mathcal{F}_{0,\text{const.}})|_{\mathbb{P}_1} [1-n] \oplus \underline{\mathrm{IC}}^*(\mathbb{P}_1, G)$

où $G = \mathcal{G}|_U$ est un système local irréductible sur un ouvert de Zariski dense U de $\mathbb{P}_1$.

Preuve : Seul reste à établir le fait que G est irréductible, ce qui résulte du fait que pour $\mathcal{U}$ l'ouvert de Zariski dense de P^V considéré en 3.3, et prenant $U = \mathbb{P}_1 \cap \mathcal{U}$ comme il nous est loisible, l'homomorphisme de $\pi_1(U)$ vers $\pi_1(\mathcal{U})$ est surjectif.

On veut ensuite calculer $\mathbb{R}\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathbb{R}f_*(\mathcal{IC}^*(\tilde{V})))$. Comme G est irréductible, non constant, on a : $H^i(\mathbb{P}_1, \mathcal{IC}^*(\mathbb{P}_1, G)) = 0$ pour $i \neq 0$ et $H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{IC}^*(\mathbb{P}_1, G)) = \text{im}(H_C^1(U, G) \rightarrow H^1(U, G))$.

Comme on connaît $\mathcal{F}_i$ (pour $i \neq 0$) et $\mathcal{F}_{0, \text{const}}$ on obtient facilement la

Proposition 3.13 : $H^0(\tilde{V}, \mathcal{IC}^*(\tilde{V}))$ est égal à

$$H^1(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h))_{\text{const}} \oplus H^{-1}(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h)) \\ \oplus H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{IC}^*(\mathbb{P}^1, G))$$

pour h un hyperplan général.

Compte tenu du fait que $H^{-1}(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h))$ est isomorphe à $H^0(V \cap L, \mathcal{IC}^*(V \cap L))$ (par le théorème de Lefschetz "facile" de [G-M1, Chapter 7]) et du lemme 3.11, on obtient la

Proposition 3.14 : $H^0(V, \mathcal{IC}^*(V))$ est égal à la somme directe de

$$H^0(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h))_{\text{const}} \text{ et de } \text{im}(H_C^1(U, G) \rightarrow H^1(U, G)).$$

Remarque 3.15 : Ce n'est rien d'autre que la décomposition en "partie non-primitive" (image de L : $H^{-2}(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h)) \rightarrow H^0(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h))$) et "partie primitive".

On obtient de même la

Proposition 3.16 : L'image de $H^{-1}(V, \mathcal{IC}^*(V))$ dans $H^0(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h))$ est égale à la partie constante (i.e. invariante par monodromie) de $H^0(V \cap h, \mathcal{IC}^*(V \cap h))$ (où h parcourt l'ouvert $\mathcal{U}$).

Cet énoncé est connu sous le nom de "Théorème de Lefschetz" et est effectivement dû à Lefschetz dans le cas où V est lisse (voir [SGA 7 II, Exposés XVIII et XIX], [Weil II, Corollaire 6.2.12], [B-B-D]).

Il semble raisonnable de penser qu'une adaptation aux modules holonomes filtrés des méthodes qui précèdent devrait permettre à long terme, de vérifier ma conjecture sur la structure de Hodge de la cohomologie d'intersection d'une

variété projective (voir [Br1][Br2, §2]). Puisqu'il faut un commencement à tout, je propose un plan de démonstration du cas particulier où $V \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ est une courbe plane irréductible.

Je renvoie tout d'abord à des jours meilleurs la démonstration de l'assertion suivante, qui contredit aussi bien une affirmation de [Br2, § 1.2] que l'opinion des spécialistes.

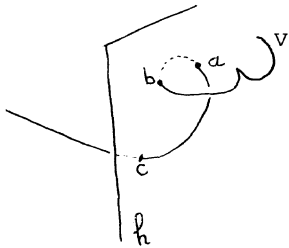
Proposition 3.17 : La filtration par l'ordre (modifiée comme en [Br1], [Br2, §1.2] des $\mathcal{U}$ -Modules holonomes à singularités régulières est invariante par transformation canonique quantifiée.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_P$ -Module cohérent muni d'une bonne filtration globale $F(\mathcal{M}) = \int_{P_2} p_1^* \mathcal{M}[n-1]$ est l'image dans $D^b(\mathcal{D}_{P^V})$ d'un objet d'une catégorie dérivée filtrée, grâce au procédé de [Br2, § 2.1]. Il en est de même pour $G(\mathcal{M})$ si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{U}_P$ -Module cohérent sur $T^*(P)$ muni d'une bonne filtration (G est l'analogue microdifférentiel de F introduit au § 2). Si $\mathcal{M} = \mathcal{U}_P$ muni de sa filtration naturelle, $G(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{U}_{P^V}$ -Module localement libre de rang un (voir les remarques après le théorème 2.3) qu'une quantification locale de $\varphi: T^*P \xrightarrow{\sim} T^*P^V$ canonique permet d'identifier à $\mathcal{U}_{P^V}$. On vérifie alors, à l'aide des calculs du § 2 que la filtration obtenue sur $G(\mathcal{M})$ correspond ainsi à la filtration par l'ordre de $\mathcal{U}_{P^V}$, à un décalage de n près. Comme tout $\mathcal{U}_P$ -Module cohérent bien filtré admet localement une résolution filtrée libre, on obtient la

Proposition 3.18 : Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{U}_P$ -Module cohérent sur $T^*(P)$ muni d'une bonne filtration, la filtration sur $G(\mathcal{M})$ obtenue par le procédé de [Br2, § 2.2] coïncide à un décalage près, avec la filtration obtenue sur $G(\mathcal{M})$ en l'identifiant à $\mathcal{U}_{P^V}$ grâce à une quantification locale de $\varphi: T^*P \xrightarrow{\sim} T^*P^V$ (i.e. $\varphi^* \mathcal{U}_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{P^V}$).

Corollaire 3.19 : Dans le cas particulier où $\mathcal{M}$, holonome régulier, se trouve muni de la filtration par l'ordre modifié, la filtration sur $G(\mathcal{M})$ obtenue par le procédé de [Br2, §2.1] coïncide à un décalage près (de n) avec la filtration par l'ordre modifié de $G(\mathcal{M})$.

Cela résulte en effet des propositions 3.17 et 3.18. Il résulte du corollaire 3.6 que lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{L}(V, P)$ (V une courbe de P) de sorte que $DR(\mathcal{M}) = \underline{IC}^*(V)$ (la notation a été introduite dans [B-K]) $\cdot \underline{H}^0(F(\mathcal{M}))$ est extension de $\mathcal{L}(P^V, \mathcal{G})$ par un fibré vectoriel sur P^V de rang un à connexion intégrable, et $\mathcal{G}$ est ici un système local associé à une représentation de $\pi_1(\mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ ouvert de P^V) qui se factorise par un quotient fini de $\pi_1(\mathcal{U})$.



$$\mathcal{G}_h \subset \mathbb{C}.a \oplus \mathbb{C}.b \oplus \mathbb{C}.c$$

est engendré par $b-a$ et $c-a$

La filtration de $\mathcal{L}(P^V, \mathcal{G})$ induite par celle de $F(\mathcal{M})$ est la filtration par l'ordre modifié, donc coïncide avec la filtration définie dans [Br 2, § 2.1]. On ne sait rien à priori en dehors de $\mathcal{U}$ sur la filtration induite sur le sous-fibré vectoriel de $\underline{H}^0(F(\mathcal{M}))$. On restreint maintenant la situation à un pinceau de Lefschetz pour V , noté $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{i} P^V$. Sur $\mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G)$ (notation de 3.12) on obtient par restriction de la filtration de $\mathcal{L}(P^V, \mathcal{G})$ une filtration qui est celle définie dans [Br2, §2.2]. Par ailleurs la filtration qu'on obtient sur $i^*\underline{H}^0(F(\mathcal{M}))$ est celle que le procédé de [Br 2, §2.1] définit sur $\underline{H}^0(\int_{f|_E} (V, E))$ où E est un voisinage de V dans P qui ne rencontre pas l'axe L du pinceau (donc $f|_E$ est bien défini).

On a une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow \underline{H}^0(\int_{f|_E} \mathcal{L}(V, E)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G) \longrightarrow 0$.

Cette suite exacte est scindée, mais on veut connaître la filtration induite sur $\mathcal{G}_{\mathbb{P}_1}$.

Lemme 3.20 : Admettons la conjecture 3.21 plus bas. Alors la filtration induite sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ est la filtration telle que toute section locale non nulle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ est d'ordre 0.

Preuve : Il ne se pose pas de problème qu'en deux sortes de points de $\mathbb{P}^1$:

- a) $x \in \mathbb{P}^1$ est égal à $f(y) = f(z)$, où y et z sont deux points lisses de V ;
- b) $x \in \mathbb{P}^1$ est l'image d'un point singulier de V .

Le cas a) se traite par un calcul trivial. Dans le cas b), par définition d'un pinceau de Lefschetz (cf. 3.7), $h = f^{-1}(x)$ est transverse à chaque branche de V en x .

Dans un voisinage de x dans P , considérons un système de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ tel que $f = y_1$; alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ s'identifie localement au sous $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ -module de

$\mathcal{L}(V, P) / \sum_{i=2}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{L}(V, P)$ engendré par un élément u de $\mathcal{L}(V, P)$ qui n'appartient pas à $\sum_{i=2}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{L}(V, P)$ et tel que $\left[\frac{\partial u}{\partial y_1} \right] y$ appartient. Dans la suite de la démonstration, nous supposons $n = 2$ et déterminons u explicitement. Soit f une équation

locale de V et considérons l'élément $u = \left[\frac{\partial f / \partial y_2}{f} \right]$ de $\mathcal{L}(V, P) = H_{[V]}^1(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}_P(*V) / \mathcal{O}_P$

(on note par $[g]$ la classe dans $\mathcal{L}(V, P)$ d'une fonction de $\mathcal{O}_P(*V)$).

On a supposé que V a une seule branche en x ; le cas pluribranche se traiterait de même. Alors u n'appartient pas à $\frac{\partial}{\partial y_2} \mathcal{L}(V, P)$ par contre

$\frac{\partial}{\partial y_1} (u) = \frac{\partial}{\partial y_2} \left[\frac{\partial f / \partial y_1}{f} \right] y$ appartient. Il est clair que u est d'ordre 0 relativement à la composante $T_{V_{\text{reg}}}^* P$. Il faut voir qu'il est d'ordre ≤ 0 relativement à la composante $T_{\{x\}}^* P$ de $SS(\mathcal{L}(V, P))$; or si on se microlocalise sur cette composante, on a $u = \frac{\partial}{\partial y_2} (\text{Log } f)$.

Conjecture 3.21 : $\text{Log } f$ est d'ordre ≤ -2 relativement à $T_{\{x\}}^* P$.

La conjecture entraîne que u est une section d'ordre 0 de $\mathcal{L}(V, P)$ et le Lemme 3.20.

$\Gamma(\mathbb{P}_1, \Omega_{\mathbb{P}_1}^1 \otimes [\mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G)]_0)$ étant donné que la flèche

$\Gamma(\mathbb{P}_1, \Omega_{\mathbb{P}_1}^1 \otimes [\mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G)]) \xrightarrow{d} H^1(\mathbb{P}_1, \Omega_{\mathbb{P}_1}^1)$ est nulle (après tout

$H^0(\int_{f|E} (V, E))$ est semi-simple, cf. 3.12) et qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow [H^0(\int_{f|E} \mathcal{L}(V, E))]_0 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G)_0 \longrightarrow 0.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de [Br2, § 2.2] selon lequel

$\Gamma(\mathbb{P}_1, \Omega_{\mathbb{P}_1}^1 \otimes [\mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G)]_0)$ détermine la filtration de Hodge sur $H^0(\mathbb{P}_1, DR(\mathcal{L}(\mathbb{P}_1, G)))$ pour obtenir la conjecture de [Br1] dans le cas particulier considéré.

Exemple 3.22 : (illustrant la démonstration du lemme 3.20).

Supposons que V a pour équation $f(y_1, y_2) = y_1^3 + y_2^2$ et analysons micro-localement, sur $\Lambda = T_{\{0\}}^* \mathbb{A}^2$, la section $u = [\frac{\partial f / y_2}{f}] = 2 [\frac{y_2}{f}]$ de $H_V^1(\mathbb{A}^2)$.

On a évidemment $(2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 3) \cdot u = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs, on a } \frac{\partial}{\partial y_1}(u) &= -6 \left[\frac{y_2 y_1}{f^2} \right], \quad \frac{\partial}{\partial y_2}(u) = \left[\frac{2}{f} - \frac{4y_2^2}{f^2} \right] \\ &= \left[\frac{2(y_1^3 - y_2^2)}{f^2} \right] \end{aligned}$$

Donc $\left[(y_1^3 - y_2^2) \frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_2 y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right](u) = 0$ ce qui s'écrit encore, avec les notations de [K-0, §2] et [K-K, §1.5], $y_2^2 \frac{\partial}{\partial y_1}(u) \in \mathcal{L}_\Lambda(-2) \cdot u$. En combinant ceci avec

l'équation précédente on obtient $y_2^2 (y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 1)(u) \in \mathcal{L}_\Lambda(-3) \cdot u$ d'où l'on déduit

$$(y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 1)^2 (y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 2)(u) \in \mathcal{L}_\Lambda(-1) \cdot u = 0.$$

On en déduit, par combinaison avec $(2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 3) \cdot u = 0$, l'égalité.

$$(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 1)^2 \cdot (y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{1}{2}) u \in \mathcal{L}_\Lambda(-1)u$$

donc u est d'ordre ≤ -1 relativement à Λ .

Les résultats principaux de ce paragraphe (théorème 3.1 et corollaires 3.3 et 3.6) sont vrais en caractéristique p , grâce à l'utilisation de la transformation de Fourier-Deligne, comme on le verra au § 9.

3.23 : Le théorème 3.1 s'étend à la situation

$$\begin{array}{ccc} & S \times Z & \\ \swarrow & & \searrow \\ S \times P & & S \times P^V \end{array}$$

où S est une variété analytique complexe lisse.

Ici l'ouvert Ω_1 de $\dot{T}^*(S \times P)$ est $T^*S \times \dot{T}^*P$ et l'ouvert Ω_2 de $\dot{T}^*(S \times P^V)$ est $T^*S \times \dot{T}^*P^V$.

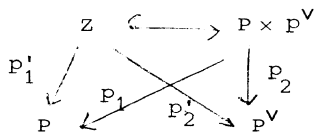
Si K^* est un faisceau pervers sur $S \times P$ tel que $SS(K^*)$ soit disjoint de Ω_1 , K^* est de la forme $q^*F^*[n]$, où q est la projection de $S \times P \rightarrow S$ et F^* est un faisceau pervers sur S ; en effet comme K^* est "constant" sur les fibres de q ,

on a $K^* = \underline{H}_{-1}^0(q^*Rq_*K^*) = q^*(\underline{H}_{-1}^{-n}Rq_*K^*)[n]$. On dit que K^* provient de S s'il est de la forme $q^*F^*[n]$. Dans l'énoncé du théorème 3.1, il convient donc de remplacer "faisceau pervers constant" par "faisceau pervers provenant de S ". Les corollaires 3.3 et 3.6 se généralisent de la même manière.

Enfin, en réponse à une question de Kashiwara, nous calculons

$$F(\mathcal{G}_P) = \int_{P'_2} p_1'^* \mathcal{G}_P = R p_{2*}' (H_{[Z]}^1(\mathcal{O}_{P \times P^V}) \otimes p_1'^* \Omega_P^n)$$

d'après le § 2. Pour la commodité du lecteur, je rappelle le diagramme



On suppose $n \geq 0$.

On a une suite exacte $0 \longrightarrow p_1^* \Omega_P^n \longrightarrow p_1^* \Omega_P^n(*Z) \longrightarrow H_{[Z]}^1(p_1^* \Omega_P^n) \longrightarrow 0$

où $p_1^* \Omega_P^n(*Z)$ est le faisceau des sections méromorphes de $p_1^* \Omega_P^n$, régulières en dehors de Z . On a $R^i p_{2*}(p_1^* \Omega_P^n(*Z)) = 0$ pour $i > 0$ (d'après le "vanishing theorem" de Serre); par ailleurs on a $R^i p_{2*}(p_1^* \Omega_P^n) = 0$ pour $i \neq n$ et $R^n p_{2*}(p_1^* \Omega_P^n) = \mathcal{O}_P$.

On a donc

Proposition 3.24 : Pour $n \geq 2$, on a $H^i(F(\mathcal{G}_P)) = 0$ pour $i \neq 0, n-1$

et de plus $H^0(F(\mathcal{G}_P)) = p_{2*}(H_{[Z]}^1(p_1^* \Omega_P^n)) = p_{2*}(p_1^* \Omega_P^n(*Z))$

et $H^{n-1}(F(\mathcal{G}_P)) = \mathcal{O}_{P^v}$.

On veut décrire plus précisément $p_{2*}(H_{[Z]}^1(p_1^* \Omega_P^n))$ comme $\mathcal{G}_P^v$ -Module à gauche. Il est muni d'une filtration naturelle, comme $\mathcal{G}_P$ -Module, par l'ordre du pôle le long de Z . Le gradué de $H_{[Z]}^1(\mathcal{G}_{P \times P^v})$ pour la filtration par l'ordre (modifié) est isomorphe à la partie de degrés > 0 de l'image directe de $\mathcal{O}_{T_Z^*(P \times P^v)}$, à un décalage près, du simple fait que Z est une hypersurface lisse de $P \times P^v$. On a

$$H_{[Z]}^1(\mathcal{G}_{P \times P^v})(m) / H_{[Z]}^1(\mathcal{G}_{P \times P^v})(m-1) = \mathcal{N}_{Z/P \times P^v}^{\otimes(m+1)}$$

où $\mathcal{N}_{Z/P \times P^v}$ est le faisceau normal de l'immersion $Z \hookrightarrow P \times P^v$ (c'est un faisceau localement libre de rang un sur Z). Par ailleurs on a

$\mathcal{N}_{Z/P \times P^v} = p_1'^* \mathcal{G}_P(1) \otimes p_2'^* \mathcal{O}_{P^v}(1)$. Comme $\mathcal{G}_P(-n-1)$ est isomorphe à Ω_P^n , on a $p_{2*} H_{[Z]}^1(p_1^* \Omega_P^n)(m) = 0$ pour $m \leq n$ et

$$p_{2*} H_{[Z]}^1(p_1^* \Omega_P^{n(n+1)}) \cong p_{2*}(p_2'^* \mathcal{G}_P^{v(n+1)}) \cong \mathcal{G}_P^{v(n+1)}$$

D'où un morphisme de $\mathcal{D}_P^V$ -Modules à gauche

$$\beta : \mathcal{D}_P^V \otimes_{\mathcal{D}_P^V} (\Omega_{P^V}^n)^{\otimes -1} \rightarrow P_{2*} (H_{[Z]}^1 (p_1^* \Omega_P^n)) .$$

Lemme 3.25 - β est un isomorphisme :

Décrivons la structure de $\Gamma(P, \mathcal{D}_P^V)$ -module à droite sur $\mathcal{D}_{P^V}^V \otimes_{\mathcal{D}_P^V} (\Omega_{P^V}^n)^{\otimes -1}$

$D(P)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre opposée à $D(P^V)$:

si $(X_0, \dots, X_n)$ sont des coordonnées homogènes sur P , $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ les coordonnées duales sur P^V , $X_i \frac{\partial}{\partial X_j}$ a pour image $\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. L'isomorphisme $\tilde{\varphi} : D(P) \longrightarrow D(P^V)$ ainsi obtenu est tel que $Q \cdot \delta(\sum_0^n X_i \xi_i) = \tilde{\varphi}(Q) \cdot \delta(\sum_0^n X_i \xi_i)$; c'est donc une "quantification globale" de $\varphi : T^*P \xrightarrow{\sim} T^*P^V$. Je dis que $\mathcal{D}_{P^V}^V \otimes_{\mathcal{D}_P^V} (\Omega_{P^V}^n)^{\otimes -1}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_{P^V}^V$ -Module à gauche (de sorte qu'il devient un $(\mathcal{D}_{P^V}^V, \mathcal{D}_{P^V}^{opp})$ -bi-Module).

En effet $\mathcal{D}_{P^V}^V \otimes_{\mathcal{D}_P^V} (\Omega_{P^V}^n)^{\otimes -1}$ est un $\mathcal{D}_{P^V}^V(\Omega_{P^V}^n)$ Module à droite, si $\mathcal{D}_{P^V}^V(\Omega_{P^V}^n)$ est le faisceau des opérateurs différentiels de $\Omega_{P^V}^n$ vers $\Omega_{P^V}^n$. Or $\mathcal{D}_{P^V}^V(\Omega_{P^V}^n)$ est isomorphe au faisceau d'algèbres opposé à $\mathcal{D}_{P^V}$. Donc $\mathcal{D}_{P^V}^V \otimes_{\mathcal{D}_P^V} (\Omega_{P^V}^n)^{\otimes -1}$ a une structure de $D(P^V)$ -module à gauche, qui devient par $\tilde{\varphi}$, une structure de $D(P)$ -module à droite. C'est la structure voulue.

Le $(D(P^V), D(P))$ -bi-module $M = \Gamma(P^V, \mathcal{D}_{P^V}^V \otimes_{\mathcal{D}_P^V} (\Omega_{P^V}^n)^{\otimes -1})$ définit un foncteur $A \longrightarrow M \otimes_{D(P)} A$ de la catégorie des $D(P)$ -modules à gauche vers la catégorie des $D(P^V)$ -modules à gauche.

Théorème 3.26 : Ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie des $D(P)$ -modules, quotientée par la sous-catégorie (de Serre) des modules "banaux"

et la catégorie des $D(P^V)$ -modules, quotientée par la sous-catégorie des modules "banaux".

Un foncteur quasi-inverse est $B \longmapsto M^V \otimes_{D(P^V)} B$, où

$$M^V = \Gamma(P, \mathcal{D}_P \otimes_{\mathcal{D}_P} (\Omega_P^n)^{\otimes -1}) .$$

Remarque : Un $D(P)$ -module M est dit "banal" si les champs de vecteurs sur P y opèrent par 0.

Preuve : Beilinson et Bernstein [B-B] ont montré que la catégorie des $D(P)$ -modules à gauche est équivalente à la catégorie des $\mathcal{D}_P$ -modules à gauche, globalement limites inductives de faisceaux de $\mathcal{D}_P$ -Modules cohérents. Les deux foncteurs sont $\mathcal{M} \longrightarrow N = \Gamma(P, \mathcal{M})$ et $N \longmapsto \mathcal{M} = \mathcal{D}_P \otimes_{D(P)} N$. Il suffit alors d'appliquer les résultats du § 2, compte tenu du fait que N est "banal" si et seulement si $\mathcal{M}$ est un fibré vectoriel à connexion intégrable.

IV) TRADUCTION TOPOLOGIQUE DES TRANSFORMATIONS CANONIQUES (cas non propre).

Comme au § 2, on se donne une sous-variété lisse de $Z \times Y$ et considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ p'_1 \swarrow & & \searrow p'_2 \\ X & & Y \end{array}$$

mais ici on ne suppose pas que p'_1 et p'_2 sont propres. On cherche à généraliser le théorème 2.7 et le corollaire 2.8. On dispose ici de deux foncteurs $\Phi!$ et Φ_* de $D_C^b(X)$ vers $D_C^b(Y)$:

$$\Phi! = \mathbb{R}p'_{2,!} \circ p'_1{}^*[\dim Z - \dim X]$$

$$\Phi_* = \mathbb{R}p'_{2,*} \circ p'_1{}^*[\dim Z - \dim X] .$$

Si $D = D_X$ désigne le foncteur "dual de Verdier", on a le

Lemme 4.1 : Si p'_1 est lisse, on a un diagramme (essentiellement) commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} D_C^b(X) & \xrightarrow{\Phi!} & D_C^b(Y) \\ \downarrow D=D_X & & \downarrow D=D_Y \\ D_C^b(X) & \xrightarrow{\Phi_*} & D_C^b(Y) \end{array}$$

Preuve : Cela résulte des formules standard : $p_1'^* \circ D = D \circ p_1'^! = D \circ p_1'^* [2\dim Z - 2\dim Y]$
 (puisque p_1' est lisse) et $\mathbb{R}p_{2,*}' \circ D = D \circ \mathbb{R}p_{2,!}'$. (voir [Weil II] ou [V1], §1 et 2).

Nous introduisons des hypothèses analogues à (i) et (ii) du §2, en termes d'une compactification $X \xrightarrow{j} \bar{X}$ telle que $\bar{X}$ soit lisse et que l'adhérence $\bar{Z}$ de Z dans $\bar{X} \times Y$ soit une sous-variété analytique lisse. On note $X_\infty = \bar{X} - X \hookrightarrow \bar{X}$ et on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\sim j} & \bar{Z} & \xrightarrow{\bar{p}_2'} & Y \\ p_1' \downarrow & & \bar{p}_1' \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{j} & \bar{X} & & \end{array}$$

On considère alors $\dot{T}_Z^*(\bar{X} \times Y)$ et comme au §2 on note q_1 et q_2 les projections sur $T^*(\bar{X})$ et $\dot{T}^*(Y)$, respectivement. On se donne un ouvert homogène Ω_1 de $T^*(\bar{X})$, contenu dans $\dot{T}^*(X)$, et un ouvert homogène Ω_2 de $\dot{T}^*(Y)$ et on suppose, comme au §2 :

(i) $q_1^{-1}(\Omega_1)$ est égal à $q_2^{-1}(\Omega_2)$ et est ouvert dans $T_Z^*(\bar{X} \times Y)$ (donc en fait dans $\dot{T}_Z^*(X \times Y)$). On note $\Omega = q_1^{-1}(\Omega_1) = q_2^{-1}(\Omega_2)$.

(ii) $(q_i)_|_\Omega$ est un isomorphisme de Ω sur Ω_i (pour $i=1,2$).

On est alors en mesure d'étudier $\Phi!(K')$ pour K' pervers. On a

$\Phi!(K') = \mathbb{R}p_{2,!}' \circ p_1'^*(K') [\dim Z - \dim X] = \mathbb{R}\bar{p}_{2,*}' \circ \tilde{j}_! \circ p_1'^*(K') [\dim Z - \dim X]$ où on écrit $\tilde{j}_!$ au lieu de $\mathbb{R}\tilde{j}_!$ (puisque au niveau des faisceaux, $\tilde{j}_!$ est un foncteur exact). La commutation au changement de base du foncteur "image directe à supports propres" permet d'écrire

$$\Phi!(K') = \mathbb{R}\bar{p}_{2,*}' \circ \bar{p}_1'^* \circ j_!(K') [\dim Z - \dim X]$$

Puisque K' est pervers, $j_!(K')$ est pervers en dehors de X_∞ et on a donc :

$$SS(H_{\mathbb{H}}^i(\Phi(j_!(K')))) \subset X_\infty \times T^*(\bar{X}) \text{ pour } i \neq 0$$

On obtient donc l'analogue suivant du théorème 2.7 :

Proposition 4.2 :

Si K^* est un faisceau pervers sur X , alors pour $i \neq 0$, la variété caractéristique de $H_{\mu}^i(\Phi_!(K^*))$ est contenue dans $T^*Y - \Omega_2$.

Preuve : Il suffit de démontrer que pour $i \neq 0$ et j quelconque, on a $SS(H_{\mu}^{i-j}(\overline{\Phi}(H_{\mu}^j(j_!K^*)))) \subset T^*Y - \Omega_2$. Pour $j = 0$, cela résulte immédiatement du théorème 2.7. Pour $j \neq 0$, $SS(H_{\mu}^j(j_!K^*))$ est contenue dans $X_{\infty} \times_{\overline{X}} T^*(\overline{X})$ donc ne rencontre pas Ω_1 . Si $i \neq j$, l'assertion résulte encore du théorème 2.7 et si $i = j$ elle résulte de l'invariance de la variété caractéristique par transformation canonique (corollaire 2.5).

Remarque 4.3 : Nous nous sommes imposé des hypothèses non symétriques, qui font référence à une compactification $\overline{X}$ de X . En supposant qu'il existe une compactification $\overline{Y}$ de Y satisfaisant des conditions analogues à celles de $\overline{X}$, on obtient un analogue du corollaire 2.8, que nous nous dispenserons d'énoncer, car ne n'est probablement pas le meilleur possible.

Nous nous proposons maintenant d'analyser la "différence" entre $\Phi_!(K^*)$ et $\Phi_*(K^*)$. C'est sûrement par un effet de notre maladresse que nous sommes amenés à supposer que le morphisme $\overline{p}_1'$ est lisse. On a alors

$\Phi_*(K^*) = \mathbb{R}\overline{p}_{2,*}' \circ \mathbb{R}\widetilde{j}_* \circ p_1'^*(K^*)[\dim Z - \dim X]$ et on a canoniquement $\mathbb{R}\widetilde{j}_* \circ p_1'^* = \overline{p}_1'^* \circ \mathbb{R}j_*$ parce que p_1' est un morphisme lisse (théorème de changement de base pour un morphisme lisse, voir [SGA 4, 2])

On a alors un triangle

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi_!(K^*) & \longrightarrow & \Phi_*(K^*) \\
 \uparrow & & \nwarrow \\
 +1 & & \alpha(K^*)
 \end{array}$$

où $\alpha(K')$ est obtenu en appliquant Φ au troisième terme G' du triangle dans $D_C^b(\bar{X})$ construit sur le morphisme $j_!(K') \longrightarrow \mathbb{R}j_*(K')$. La variété caractéristique de G' est contenue dans $X_\infty \times_{\bar{X}} \bar{T}^*(\bar{X})$, donc ne rencontre pas Ω_1 . On déduit alors du théorème 2.7 la

Proposition 4.4 : Si $\bar{p}_1'$ est lisse, le complexe $\alpha(K')$ de $D_C^b(Y)$ a sa variété caractéristique contenue dans $T^*(Y) - \Omega_2$

(en termes imagés, $\Phi_!(K') \longrightarrow \Phi_*(K')$ est un isomorphisme, microlocalement sur Ω_2)

Notons qu'on a un morphisme naturel $\Phi_!(DK') \longrightarrow D\Phi_!(K') = \Phi_*(\mathbb{D}K')$

(cette égalité n'est autre que 2.1). On peut donc reformuler 4.4 en le

Corollaire 4.5 : Si $\bar{p}_1'$ est lisse, le troisième terme du triangle de $D_C^b(Y)$ construit sur le morphisme $\Phi_!(DK') \longrightarrow D\Phi_!(K')$ a sa variété caractéristique contenue dans $T^*(Y) - \Omega_2$

(en termes imagés, $\Phi_!$ commute à la dualité de Verdier, microlocalement sur Ω_2).

Exemple 4.6 (Transformation de Legendre) : Soit X un espace vectoriel complexe de dimension $n+1$, muni de coordonnées linéaires $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et soit Y un autre espace vectoriel de même dimension, muni de coordonnées linéaires $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ et soit Z la sous-variété de $X \times Y$ d'équation $x_0 + y_0 + \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$. Soit $j : X \rightarrow \bar{X}$ la compactification de X par un espace projectif et choisissons sur $\bar{X}$ des coordonnées homogènes $(x_0, \dots, x_n, T)$ de sorte que $x_i = \frac{x_i}{T}$ ($0 \leq i \leq n$); $\bar{Z}$ étant l'adhérence de Z dans $\bar{X} \times Y$, montrons que $\bar{p}_1' : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ est lisse. C'est clair sur X , donc on choisit i ($0 \leq i \leq n$) et on se place sur l'ouvert $X_i \neq 0$. L'équation projective de $\bar{Z}$ s'écrit :

$$x_0 + y_0 T + \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0.$$

Si $i \neq 0$, la lissité de $\bar{p}_1'$ restreint à l'ouvert $X_i \neq 0$ est claire. Sur l'ouvert

$x_0 \neq 0$, on choisit des coordonnées $(z_1 = \frac{x_1}{x_0}, \dots, z_n = \frac{x_n}{x_0}, t = \frac{T}{x_0})$ et l'équation

de $\bar{Z}$ s'écrit alors

$$y_0 t + \sum_{i=1}^n y_i z_i = -1$$

donc $\bar{Z} \longrightarrow \bar{X}$ est bien un morphisme lisse.

On a $T^*(X) = X \times X^*$, que nous munissons de coordonnées $(x_0, \dots, x_n; \xi_0, \dots, \xi_n)$; de même nous munissons $T^*(Y)$ de coordonnées $(y_0, \dots, y_n; \eta_0, \dots, \eta_n)$.

Dans $T^*(X \times Y) = T^*(X) \times T^*(Y)$, $T_Z^*(X \times Y)$ a pour équations $\eta_0 = \xi_0, \xi_i = y_i \xi_0 (1 \leq i \leq n), \eta_i = x_i \xi_0$ (pour $1 \leq i \leq n$), $x_0 + y_0 + \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$. On prend pour Ω_1 (resp. Ω_2) l'ouvert $\xi_0 \neq 0$ (resp. $\eta_0 \neq 0$) de $\dot{T}^*(X)$ (resp. $\dot{T}^*(Y)$). On vérifie que ces deux ouverts vérifient les hypothèses (i) et (ii) introduites plus haut.

Il est clair en effet que Ω , l'ouvert $\xi_0 \neq 0$ de $\dot{T}_Z^*(X \times Y)$ satisfait l'hypothèse (ii) mais il faut vérifier que Ω est égal à $q_2^{-1}(\Omega_2)$. C'est clair en dehors de X_0 ; plaçons-nous par exemple sur l'ouvert $X_0 \neq 0$ de $\bar{Y}$ et munissons $T^*(\bar{X})$ de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n, t; \zeta_1, \dots, \zeta_n, \tau)$. Les équations locales de $T_Z^*(\bar{X} \times Y)$ s'écrivent alors $y_0 \eta_0 = t\tau, z_i \eta_0 = t\eta_i (1 \leq i \leq n), y_i \eta_0 = t\zeta_i (1 \leq i \leq n)$ $y_0 t + \sum_{i=1}^n y_i z_i = -1$. Si on a $\eta_0 \neq 0$ et $t = 0$ pour un point de $T_Z^*(X \times Y)$ on a alors $z_i = 0 (1 \leq i \leq n)$ ce qui est incompatible avec $y_0 + \sum_{i=1}^n y_i z_i = -1$. Donc, dans cet ouvert, on a $q_2^{-1}(\Omega_2) \subset \Omega$. Dans les ouverts $X_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ on procède de même.

On dispose donc de la proposition 4.4 et du corollaire 4.5 pour la transformation de Legendre. Pour éclairer l'intérêt topologique de ces résultats, écrivons $X = E \times \mathbb{C}$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées sur E et x_0 une coordonnée sur $\mathbb{C}$. De même $Y = E^* \times \mathbb{C}$, les coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ sur E^* étant duales de $(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi Y est l'espace des hyperplans affines de $E \times \mathbb{C}$ qui ne sont pas parallèles à un hyperplan de E . Soit K^* un faisceau pervers sur $X = E \times \mathbb{C}$; alors la variété caractéristique de $\alpha(K^*)$ est contenue dans $\eta_0 = 0$ d'après la proposition 4.4. Notons alors le lemme suivant, qui est d'utilité courante.

Lemme 4.7 : Soit $F^* \in D_C^b(V)$ où V est une variété analytique complexe lisse, et supposons donné un champ de vecteurs holomorphe ξ sur V qui s'annule sur $SS(F^*)$; alors la restriction de F^* à toute courbe intégrale de ξ est localement constante.

Preuve : On peut aussi bien supposer F^* pervers ; soit $SS(F^*) = \bigcup_i \overline{T_{Y_i}^* V}$.

L'hypothèse implique que ξ est tangent à chaque Y_i . D'après Lê-Dung-Trang et Teissier [Lê-Te 2.2], il existe une stratification de Whitney minimale $V = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$ de V telle que chaque Y_i soit réunion de strates. L'unicité de la dite stratification minimale implique son invariance par le flot associé à ξ ; par conséquent ξ est tangent à chaque V_{α} . D'après [K1], la restriction de F^* à chaque V_{α} est localement constante, d'où le lemme.

La proposition 4.4 fournit alors le résultat suivant, qui nous sera fort utile dans l'étude de la "transformation de Fourier vectorielle topologique (à la Malgrange)".

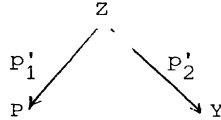
Proposition 4.8 : Soit K^* un faisceau pervers sur $E \times \mathbb{C} = X$; alors le troisième terme $\alpha(K^*)$ du triangle dans $D_C^b(Y)$ construit sur $\Phi_! (K^*) \longrightarrow \Phi^* (K^*)$ a une restriction localement constante à toute droite $\{y\} \times \mathbb{C}$, où $y \in E^*$.

Dans l'application que nous avons en vue au Chapitre II, K^* sera le prolongement par zéro d'un faisceau pervers sur $E \times \{0\} \subset X$.

Remarque 4.9 : On traiterait de même les transformations canoniques (de $E \times \mathbb{C}$ vers $E^* \times \mathbb{C}$) dites "paraboloides", associées à un automorphisme symplectique de $E \oplus E^*$. Comme nous n'avons pas en vue d'application de ces transformations, nous en resterons là, renvoyant à [K2, §2.3] pour leur construction.

V) TRANSFORMATIONS DE RADON TOPOLOGIQUES

On considère ici le diagramme



où P est un espace projectif de dimension n , et Y la grassmannienne des k -plans de P (où $1 \leq k \leq n-1$), et $Z \subset P \times Y$ la variété d'incidence $Z = \{(x, L) \in P \times Y \text{ t.q. } x \in L\}$.

On a donc $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = (k+1)(n-k)$ et $\dim(Z) = n+k(n-k)$. Comme au § 2, où est traité le cas où $k = n-1$, on s'intéresse au foncteur $\phi: D_C^b(P) \longrightarrow D_C^b(Y)$

$$\text{tel que } \phi(K') = \mathbb{R}p'_{2,*} p'_1{}^*(K') [\dim Z - \dim P]$$

$$= \mathbb{R}p'_{2,*} p'_1{}^*(K') [k \cdot (n-k)]$$

Nous allons établir, par voie essentiellement topologique, des propriétés de ϕ qui permettent en particulier de retrouver, lorsque $k = n-1$, le théorème 3.1. On commence par donner sens au "quotient de $D_C^b(X)$ par les systèmes locaux" (où X est une variété analytique complexe).

Lemme 5.1 : Soit $S = S_X$ l'ensemble des morphismes de $D_C^b(X)$ défini par $S = \{F: K'_1 \longrightarrow K'_2 \text{ tq le noyau et le conoyau de } H_{\mu}^i(F): H_{\mu}^i(K'_1) \rightarrow H_{\mu}^i(K'_2) \text{ sont localement constants sur } X \text{ pour tout } i\}$.

Alors S est un système multiplicatif saturé au sens de [V 4, § 2, Définition 1.2]

Preuve : Comme au § 3, introduisons la catégorie abélienne $\mathcal{A}(X)$, quotient de la catégorie $\mathcal{M}(X)$ des faisceaux pervers sur X par la sous-catégorie de Serre des faisceaux pervers localement constants sur X . Soit $\rho: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ le foncteur canonique et H le foncteur cohomologique $\rho \circ H_{\mu}^0: D_C^b(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$. Alors $F: K'_1 \rightarrow K'_2$ est dans S si et seulement si H transforme tout translaté de F en un isomorphisme de $\mathcal{A}(X)$; donc, d'après [V 4, § 2, n° 4-1], S est un système multiplicatif saturé.

Corollaire 5.2 : La catégorie $D_C^b(X) \text{ mod. loc. const.}$, obtenue à partir de $D_C^b(X)$ en
résolvant le problème universel suivant : si C est une catégorie, un élément de
 $\text{Hom}_{\text{Cat}}(D_C^b(X), C)$ se factorise par $\text{Hom}_{\text{Cat}}(D_C^b(X) \text{ mod. loc. const.}, C)$ si et seulement si
ce morphisme transforme les morphismes de S en isomorphismes, est une catégorie triangu-
lée, qui s'obtient à partir de $D_C^b(X)$ et de S par calcul de fractions (à droite ou à
gauche). On a un foncteur cohomologique de $D_C^b(X) \text{ mod. loc. const. vers } \mathcal{U}(X)$ qui, par
abus de langage, sera noté $H_{\mu}^0(\text{---}) \text{ mod. loc. const.}$.

Preuve : La première phrase de l'énoncé s'obtient en appliquant [V 4, §2, n°3].
 La dernière résulte du fait que le foncteur cohomologique $H : D_C^b(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$
 (notation de la preuve de 5.1) transforme le morphisme de S en isomorphisme, donc
 se factorise à travers $D_C^b(X) \text{ mod. loc. const.}$.

On est alors en position d'énoncer le

Théorème 5.3 : Soit $\Phi^V : D_C^b(Y) \longrightarrow D_C^b(P)$

tel que $\Phi^V(K^*) = \mathbb{R}p'_{1,*} p'_2(K^*) [\dim Z - \dim Y]$

(i) Le composé $D_C^b(P) \xrightarrow{\Phi} D_C^b(Y) \longrightarrow D_C^b(Y) \text{ mod. loc. const.}$ se factorise par un fonc-
teur $\Phi \text{ mod. loc. const.}$ $D_C^b(P) \text{ mod. loc. const.} \longrightarrow D_C^b(Y) \text{ mod. loc. const.}$.

(ii) idem pour Φ^V

(iii) Le composé de $\Phi^V \text{ mod. loc. const.}$ et de $\Phi \text{ mod. loc. const.}$ est isomorphe à

$$K^* \longrightarrow \bigoplus_j (V_j \otimes K^*) [-j + \dim G(k-1, n-2)], \text{ où } V_j = H_j^{G(k-1, n-2)}(\mathbb{T})$$

où $G(k-1, n-2)$ est la grassmannienne des $(k-1)$ plans de $\mathbb{P}^{n-2}$.

Démonstration : (i) est immédiat : on a $\Phi(\mathbb{C}_P) = \mathbb{R}p'_{2,*} p'_1^*(\mathbb{C}_P) [\dim Z - \dim P]$

$$= \mathbb{R}p'_{2,*}(\mathbb{C}_Z) [\dim Z - \dim P] = \bigoplus_i H_{\mu}^i(\mathbb{R}p'_{2,*}(\mathbb{C}_Z)) [\dim Z - \dim P - i]$$

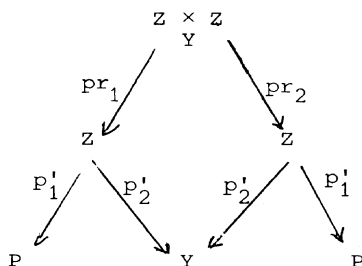
et les $H_{\mu}^i(\mathbb{R}p'_{2,*}(\mathbb{C}_Z))$ sont localement constants sur Y puisque p'_2 est lisse ;

donc Φ transforme morphisme de S_X en morphisme de S_Y .

De même pour (ii) (p'_1 est aussi lisse) : on utilise bien sûr la simple connexité de X et de Y .

(iii) se déduira du théorème de décomposition de [B-B-D-G] ;

Considérons le diagramme



$$\begin{aligned}
 \text{On a } \phi^V \circ \phi(K') &= \mathbb{R}p'_{1*} p'_2 \mathbb{R}p'_{2*} p'_1 {}^*(K') [2 \dim(Z) - \dim(Y) - \dim(P)] \\
 &= \mathbb{R}p'_{1*} \mathbb{R}pr_{2*} pr_1 {}^*p'_1 {}^*(K') [n + (k-1)(n-k)].
 \end{aligned}$$

On a une factorisation de $p'_1 \circ pr_2$ en $Z \times_Z Z \xrightarrow{\pi} P \times P \xrightarrow{s_2} P$
 où s_2 est la deuxième projection. De même $p'_1 \circ pr_1$ se factorise en
 $Z \times_Z Z \xrightarrow{r} P \times P \xrightarrow{s_1} P$ où s_1 est la première projection.

$$\begin{aligned}
 \text{On a donc } \phi^V \circ \phi(K') &= \mathbb{R}s_{2*} \mathbb{R}\pi_* \pi^* s_1 {}^*(K') [n + (k-1)(n-k)] \\
 &= \mathbb{R}s_{2*} (s_1 {}^*K') \otimes \mathbb{R}\pi_* (\mathbb{C}_{Z \times_Z Y}) [n + (k-1)(n-k)]
 \end{aligned}$$

de sorte qu'on doit calculer $\mathbb{R}\pi_* (\mathbb{C}_{Z \times_Z Y})$.

Pour $x \neq y$, $\pi^{-1}(x, y)$ est la variété des k -plans L de P tels que L contienne la droite $\overline{xy}$; $\pi^{-1}(x, y)$ est donc du type $G(k-2, n-2)$ (grassmannienne des $k-2$ plans dans un espace projectif de dimension $n-2$).

Compte tenu du fait que $(P \times P) - \Delta_P$ (où Δ_P est la diagonale de $P \times P$) est simplement connexe ($n \geq 2$), on a sur $(P \times P) - \Delta_P$ la décomposition

$$\mathbb{R}\pi_* (\mathbb{C}_{Z \times_Z Y}) / (P \times P) - \Delta_P \simeq \bigoplus_i (H^i(G(k-2, n-2)) \otimes \mathbb{C}_{P \times P - \Delta_P}[-i])$$

Maintenant, $\pi^{-1}(x, x)$ est du type $G(k-1, n-1)$. L'inclusion $G(k-2, n-2) \hookrightarrow G(k-1, n-1)$ induit un morphisme de restriction

$$H^*(G(k-1, n-1)) \longrightarrow H^*(G(k-2, n-2)) .$$

On considère ici $G(k-2, n-2)$ comme l'ensemble des $k-1$ plans L de $\mathbb{P}^{n-1}$ qui contiennent un point donné x ; on a un morphisme g de $G(k-1, n-1) - G(k-2, n-2)$ vers $G(k-1, n-2)$; au $(k-1)$ plan L ne contenant pas x on associe le k -plan $\langle L, x \rangle$ engendré par L et x ; une fibre de g est isomorphe à l'espace affine de dimension k . On en déduit l'égalité :

$$H_C^i(G(k-1, n-1) - G(k-2, n-2)) = H^{i-2k}(G(k-1, n-2))$$

(on a identifié $G(k-1, n-2)$ à la variété des k -plans de $\mathbb{P}^{n-1}$ contenant x).

Lemme 5.4 : La dimension du noyau de $H_C^i(G(k-1, n-1)) \rightarrow H_C^i(G(k-2, n-2))$ est égale à la dimension de $H^{i-2k}_C(G(k-1, n-2))$.

Preuve : On le prouve par réduction mod p , pour $p \gg 0$

$H_C^j(G(k-1, n-1) - G(k-2, n-2)) = H^{j-2k}(R^{2k}g^!\mathcal{O}_\ell)$ et comme $R^{2k}g^!\mathcal{O}_\ell$ est pur de poids $2k$, il résulte de [Weil II, Proposition 2.6] que $H_C^j(G(k-1, n-1) - G(k-2, n-2))$ est pur de poids j . Dans la suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots H^{i-1}_C(G(k-2, n-2)) \xrightarrow{d_{i-1}} H^i_C(G(k-1, n-1) - G(k-2, n-2)) \\ \longrightarrow H^i(G(k-1, n-1)) \longrightarrow H^i(G(k-2, n-2)) \dots \end{aligned}$$

le morphisme de connexion d_{i-1} est nul pour raison de poids. D'où le lemme.

Remarque : On prouverait aussi facilement le lemme en utilisant le fait que $G(k-2, n-2)$ est réunion de cellules de Bruhat de $G(k-1, n-1)$.

Dans la décomposition de $\mathbb{R}\pi_{\star}(\mathbb{C}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}^Y)$ en somme directe de translatés de complexes de complexes d'intersection relatifs à des systèmes locaux sur des ouverts de sous-variétés de $P \times P$, ne sauraient apparaître que des sous-variétés invariantes par l'action du groupe des automorphismes de P (un tel automorphisme agit sur Y, Z et toute la situation). Or seule ΔP est une telle sous-variété de $P \times P$. On obtient dès lors, sans coup férir :

$$\mathbb{R}\pi_{\star}(\mathbb{C}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}^Y) = \bigoplus_i (H^i(G(k-2, n-2)) \otimes \mathbb{C}_{P \times P})[-i] \\ \bigoplus_j (V_j \otimes \mathbb{C}_{\Delta P})[-j-2k]$$

où $V_j = H^j(G(k-1, n-2))$.

$$\text{On trouve alors } \Phi^V \circ \Phi(K') = \bigoplus_i H^i(G(k-2, n-2)) \otimes \mathbb{R}s_{2, \star}(s_1^{*K'}[-i])[k \cdot (n+1-k)] \\ \bigoplus_j (V_j \otimes K')[-j+k(n-1-k)]$$

On remarque que $k(n-1-k)$ est la dimension de $G(k-1, n-2)$.

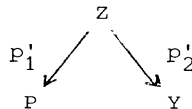
Comme $\mathbb{R}s_{2, \star}(s_1^{*K'})$ est constant sur P , de fibre $\mathbb{R}\Gamma(P, K')$, on obtient l'énoncé voulu

Remarque : La démonstration du théorème 5.4 vaut aussi en caractéristique p .

Théorème 5.5 :

- (i) Si K' est un faisceau pervers sur P , $H_{\mu}^i(\Phi(K'))$ est constant sur Y , pour $i \neq 0$.
- (ii) Le foncteur $H_{\mu}^{k(n-k-1)} \circ \Phi^V \circ H_{\mu}^0 \circ \Phi$ induit sur $\mathcal{A}(P)$ (quotient de $\mathcal{U}(P)$) le foncteur identique.
- (iii) Le foncteur $H_{\mu}^0 \circ \Phi$ induit une équivalence entre $\mathcal{A}(P)$ et la sous-catégorie de $\mathcal{U}(Y)$, image des $LE\mathcal{S}((Y))$ tels que $SS(L') \subset q_2^*(T_Z^*(P \times Y))$.

Démonstration : Elle est fondée sur l'étude du diagramme ci-dessous du point de vue de la géométrie symplectique.



On rappelle la notation

$$\begin{array}{ccc} \dot{T}_Z^*(P \times Y) & \xrightarrow{q_1} & \dot{T}^*(P) \\ \downarrow q_2 & & \\ \dot{T}^*(Y) & & \end{array}$$

Lemme 5.6 :

- (a) q_1 est un morphisme surjectif propre et lisse, dont la fibre en (x, ξ) est la grassmannienne $G(k-1, n-2)$ des k -plans L de P tels que $x \in L$ et $L \subset h$, où h est l'hyperplan conormal à ξ en x .
- (b) q_2 est une immersion fermée, dont l'image est une sous-variété involutive de $\dot{T}^*(Y)$.
- (c) Considérant $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ comme une sous-variété involutive de $\dot{T}^*(Y)$, q_1 est le quotient de $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ par le feuilletage bicaractéristique.
- (d) si Λ est une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(P)$, $q_2^{-1}(\Lambda)$ est une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(Y)$; si $\tilde{\Lambda}$ est une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(Y)$, contenue dans $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$, $\tilde{\Lambda}$ est égale à $q_1^{-1} q_1(\tilde{\Lambda})$ et $q_1(\tilde{\Lambda})$ est une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(P)$; on obtient ici une bijection entre sous-variétés lagrangiennes de $\dot{T}^*(P)$ et sous-variétés lagrangiennes de $\dot{T}^*(Y)$, contenues dans $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$.

Remarque 5.7 : A ma connaissance, ce lemme est dû à Guillemin [G]. Le rôle de la géométrie symplectique dans l'étude des transformations de "Radon" (qui a fait l'objet de nombreux travaux de l'école de Gelfand) a été clairement exposé par Guillemin et Sternberg [G-S, Chapter VI] .

Preuve du lemme 5.6 : Il me paraît commode de faire jouer ici un rôle essentiel au groupe G des automorphismes de P (G est bien sûr isomorphe à $\text{PGL}(n+1, \mathbb{C})$).

On a $P = G/Q_1$ où Q_1 est un sous-groupe parabolique, stabilisateur d'une droite ℓ_0 de l'espace vectoriel E dual de $H^0(P, \mathcal{O}_P(1))$. Le fibré cotangent $\dot{T}^*(P)$ se décrit comme le sous-fibré $G^{Q_1} \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_1)^*$ du fibré trivial $(G/Q_1) \times \mathfrak{g}^*$ sur G/Q_1 , où $\mathfrak{q}_1$ est l'algèbre de Lie de Q_1 . La forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}^*$.

Il est bien connu que l'orthogonal de $\mathcal{O}_1$ est le radical nilpotent de $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{O}_1$. On a $\mathcal{N}_1 = \{u \in \mathcal{G} \text{ t.q. } \text{im}(u) \subset \mathcal{L}_0 \subset \ker(u)\}$. En se souvenant que $\mathcal{J}$ (égale à $\mathfrak{sl}(E)$) est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(E)$, dont la structure de l'algèbre de Lie provient d'une structure d'algèbre associative, on peut écrire :

$$\mathcal{N}_1 = \{u \in \mathcal{G} \text{ t.q. } u^2 = 0 \text{ et } \text{im}(u) \subset \mathcal{L}\}$$

$$\text{On a } T^*(P) = G \times_{Q_1} \mathcal{N}_1 = \{(\ell, u) \in P \times \mathcal{G} \text{ t.q. } u^2 = 0 \text{ et } \text{im}(u) \subset \mathcal{L}\}$$

$$\mathcal{N}_1 = \left(\begin{array}{c|c} * & \mathcal{N}_1 \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

$$\mathcal{N}_2 = \left(\begin{array}{c|c} * & \mathcal{N}_2 \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$$

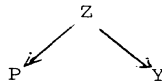
De même on a $P = G/Q_2$ où Q_2 est le stabilisateur d'un sous-espace vectoriel

F_0 de E , de dimension égale à $k+1$. Si $\mathcal{N}_2$ est l'algèbre de Lie de Q_2 , et $\mathcal{N}_2$ le radical nilpotent de $\mathcal{N}_2$, on a $T^*(Y) = G \times_{Q_2} \mathcal{N}_2$.

Par ailleurs $\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{G} \text{ t.q. } \text{im}(u) \subset F_0 \subset \ker(u)\}$

d'où $T^*(Y) = \{(u, F) \in Y \times \mathcal{G} \text{ t.q. } \text{im}(u) \subset F \subset \ker(u)\}$.

Il reste à décrire $T_Z^*(P \times Y)$; on remarque que G opère sur le diagramme



et agit transitivement sur P . Par conséquent, en un point $z = (x, L)$ de $Z \subset P \times Y$, l'espace tangent $(TZ)_z$, vu comme sous-espace vectoriel de $(TP)_x \oplus (TY)_L$ est l'image de $\mathcal{J}$ par l'application $\mathcal{J} \xrightarrow{\text{diag}} \mathcal{J} \oplus \mathcal{J} \longrightarrow (TP)_x \oplus (TY)_L$ (l'action de G sur Z est la restriction à Z de l'action diagonale de G sur $P \times Y$).

La fibre en z de $T_Z^*(P \times Y)$, sous-espace vectoriel de $(T^*P)_x \oplus (T^*Y)_L$ est alors le noyau de l'application linéaire $(T^*P)_x \oplus (T^*Y)_L \longrightarrow \mathcal{J}^* \oplus \mathcal{J}^* \xrightarrow{\delta} \mathcal{J}^*$.

où $(T^*P)_x \longrightarrow \mathcal{G}^*$ et $(T^*Y)_L \longrightarrow \mathcal{G}^*$ sont les applications linéaires duales de $\mathcal{G} \longrightarrow (TP)_x$ et $\mathcal{G} \longrightarrow (TY)_L$, et où $\delta(\xi, \eta) = \xi - \eta$.

Il en résulte que si $x = P(\ell_0)$, $L = P(F_0)$ (ℓ_0 et F_0 sous-espaces vectoriels de E) la fibre en z de $T_Z^*(P \times Y)$ s'identifie à $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = (\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2) \cap \Delta \mathcal{J}$ (l'intersection étant calculée dans $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$). Comme $\ell_0 \subset F_0$, on a

$$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{J} \text{ t.q. } \text{im}(u) \subset \ell_0 \text{ et } F_0 \subset \ker(u)\}.$$

D'où enfin la description cherchée de $T_Z^*(P \times Y)$:

$$T_Z^*(P \times Y) = \{(\ell, F, u) \in P \times Y \times \mathcal{J} \text{ tq } \text{im}(u) \subset \ell \subset F \subset \ker(u)\}.$$

Cette description rend évidents les morphismes q_1 et q_2 . Prouvons donc l'énoncé (a) du lemme. Il est clair que $q_1: \dot{T}_Z^*(P \times Y) \longrightarrow \dot{T}^*(P)$ est propre et surjectif (puisque $1 \leq k \leq n-1$ et que si $\text{im}(u) = \ell$ pour $(\ell, u) \in \dot{T}^*(P)$, il existe F tel que $\ell \subset F \subset \ker(u)$ et $\dim(F) = k+1$). Il est aussi clair que q_1 est lisse, et que sa fibre en (ℓ, u) est le lieu des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\ker(u)/\ell$, qui est isomorphe à $G(k-1, n-2)$. De plus, l'hyperplan $\ker(u)$ de E est évidemment tel que $P(\ker(u)) \subset P$ est l'hyperplan conormal à ξ en $x = \mathbb{P}(\ell)$.

Il est évident que q_2 est une immersion fermée (comme $u \neq 0$, on a $\ell = \text{im}(u)$) dont l'image est $\{(F, u) \in T^*(Y) \text{ tq } u \text{ est de rang } 1\}$.

Dans (b) il reste à prouver que $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ une sous-variété involutive de $\dot{T}^*(Y)$. Pour ce faire, notons σ_P (resp. σ_Y) la 2-forme canonique sur $T^*(P)$ (resp. $T^*(Y)$).

Soit V l'espace tangent à $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ en un point ; on veut montrer que l'orthogonal $V^\perp$ de V , relativement à σ_Y , est contenu dans V . Puisque $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ est une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(P \times Y)$, V est son propre orthogonal relativement à $\sigma_P + \sigma_Y$ (notation un peu abusive). Donc $V^\perp$ contient l'intersection de l'espace tangent à $\dot{T}^*(Y)$ (vu comme sous-espace de l'espace tangent à $T^*(P \times Y)$) et de V . Mais un calcul de dimensions prouve que ces deux espaces sont égaux. Par conséquent, $V^\perp$ est inclus dans V . (c) est alors évidente, puisque, $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ étant lagrangienne dans $\dot{T}^*(P) \times \dot{T}^*(Y)$, la restriction de σ_Y à $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ coïncide avec $q_1^{-1}(\sigma_P)$ et que σ_P est non dégénérée.

sur $T^*(P)$.

Soit Λ une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(P)$, alors $q_1^{-1}(\sigma_P)$ a une restriction nulle à $q_1^{-1}(\Lambda)$; la restriction à $q_1^{-1}(\Lambda) \subset \dot{T}^*(P \times Y)$ de $q_2^{-1}(\sigma_Y)$, qui coïncide avec la restriction à $q_1^{-1}(\Lambda)$ de $q_2^{-1}(\sigma_P)$, est donc nulle : c'est-à-dire que $q_2 q_1^{-1}(\Lambda)$ est une sous-variété isotope de $\dot{T}^*(Y)$. On a
 $\dim q_2 q_1^{-1}(\Lambda) = \dim q_1^{-1}(\Lambda) = \dim(\Lambda) + \dim G(k-1, n-2) = n+k(n-1-k) = (k+1)(n-k) = \dim(Y)$
 donc $q_2 q_1^{-1}(\Lambda)$ est en fait une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(Y)$.

Soit $\tilde{\Lambda}$ une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*(Y)$, contenue dans $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$; alors $\tilde{\Lambda}$ est une réunion de feuilles bicaractéristiques de la variété involutive $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$; donc $\tilde{\Lambda} = q_1^{-1}(q_1(\tilde{\Lambda}))$. L'image réciproque à $\tilde{\Lambda}$ de σ_P est nulle, car elle est égale à l'image réciproque à $\tilde{\Lambda}$ de σ_Y ; cela signifie que $\Lambda = q_1(\tilde{\Lambda})$ est une sous-variété isotrope de $\dot{T}^*(Y)$, donc lagrangienne puisque $\dim(\Lambda) = \dim(P)$, par le calcul effectué plus haut. Ceci prouve (d).

Remarque 5.8 : Soit X une sous-variété analytique fermée irréductible de P , et soit Λ_X l'intersection de $\dot{T}^*(P)$ et de $\overline{T_{X_{\text{reg}}}^*} P$. D'après le lemme, il lui correspond une sous-variété lagrangienne homogène $\tilde{\Lambda}$ de $\dot{T}^*(Y)$; on vérifie immédiatement que $\tilde{\Lambda}$ est l'intersection de $\dot{T}^*(Y)$ et de $\overline{T_{\tilde{X}_{\text{reg}}}^*} Y$, où $\tilde{X}$ est l'adhérence de $\{L \in Y \text{ t.q. } \exists y \in L \cap X_{\text{reg}} \text{ t.q. } L \text{ ne soit pas transverse à } X \text{ en } y\}$.

On obtient ainsi une liste complète des sous-variétés $\tilde{X}$ de Y telles que $\dot{T}^*(Y) \cap \overline{T_{\tilde{X}_{\text{reg}}}^*} Y$ soit contenue dans $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$. Illustrons ceci sur le cas $k=1, n=3$.

Si X est un point, $\tilde{X}$ est l'ensemble des droites de P contenant ce point ($\dim \tilde{X}=2$)

Si X est une courbe, $\tilde{X}$ est l'ensemble des droites de P rencontrant X ($\dim \tilde{X}=3$)

Si X est une surface, $\tilde{X}$ est l'ensemble des droites de P tangentes à X ($\dim \tilde{X}=3$)

sauf si X est un plan, auquel cas $\dim \tilde{X}=2$).

Suite de la démonstration du théorème 5.5 :

On rappelle qu'en 1.14 on a introduit le complexe localement constant $\text{Ev}(K')$ sur le lieu lisse de $\text{SS}(K')$; d'après 1.15, on a $H^i \text{Ev}(K') = 0$ pour $i \neq -1$.

La méthode utilisée en 2.9 prouve ici que

$\text{Ev}(\Phi(K'))|_{\dot{T}^*(Y)} = \text{Rq}_{2,*} q_1^*(\text{Ev}(K')|_{\dot{T}^*(P)})$. D'après le lemme 5.6, q_1 est lisse et q_2 est une immersion fermée. Il en résulte que pour $i \neq 1$, la restriction de $\underline{H}^i(\text{Ev}(\Phi(K')))$ à $\dot{T}^*(Y)$ est nulle.

On a $\underline{H}^i(\text{Ev}(\Phi(K'))) = \text{Ev}(\underline{H}_{\mu}^{i+1}(\Phi(K')))[-1]$ (cf. 1.14).

Pour $i \neq -1$, on a donc $\text{SS}(\underline{H}_{\mu}^{i+1}(\Phi(K'))) \subset T_Y^*Y$, d'où la partie (i) du théorème.

D'après 5.3 (iii), on a pour $K' \in D_C^b(P) \bmod.\text{loc.const.}$ un isomorphisme naturel $(\Phi^V \circ \Phi)(K') \bmod.\text{loc.const.} = \bigoplus_j (V_j \otimes K')[-j + \dim G(k-1, n-2)]$ où $V_j = H_j^i(G(k-1, n-2))$ donc $V_j = 0$ pour $j \geq 2\dim G(k-1, n-2) = 2k(n-1-k)$ et $V_{2k(n-1-k)} = \mathbb{C}$.

Si $K' \in \mathcal{Q}(P)$ (en d'autres termes, si $\underline{H}_{\mu}^i \bmod.\text{loc.const.}(K') = 0$ pour $i \neq 0$), on a alors un isomorphisme naturel

$$K' \xrightarrow{\sim} \underline{H}_{\mu}^{k(n-1-k)} \bmod.\text{loc.const.} \circ \Phi^V \bmod.\text{loc.const.}(K').$$

D'après (i), on a $\Phi \bmod.\text{loc.const.}(K') = \underline{H}_{\mu}^0 \bmod.\text{loc.const.} \circ \Phi \bmod.\text{loc.const.}(K')$ d'où l'énoncé (ii) du théorème.

Pour prouver (iii), compte tenu que (ii) fournit un inverse à gauche de $\underline{H}_{\mu}^0 \circ \Phi$, il suffit de montrer que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soit donc $L' \in \mathcal{U}(Y)$ un faisceau pervers sur Y . On considère $K' = \underline{H}_{\mu}^0(\Phi^V(L'))$. On utilise le

Lemme 5.9 : On a un morphisme naturel de foncteurs

$$\text{Id} \longrightarrow \Phi \circ \Phi^V[-\dim G(k-1, n-2)]$$

$$\begin{aligned} \text{Preuve : } \quad \Phi \circ \Phi^V &= \text{Rp}'_{1*} \circ p_2'^* \circ \text{Rp}'_{2*} \circ p_1'^* [2\dim(Z) - \dim(Y) - \dim(P)] \\ &= \text{Rp}'_{1*} \circ p_2'^! \circ \text{Rp}'_{2*} \circ p_1'^* [\dim(Y) - \dim(P)]. \end{aligned}$$

$$\text{On a une suite de morphismes } \text{Id} \longrightarrow \text{Rp}'_{1*} \circ p_1'^* \longrightarrow \text{Rp}'_{1*} (p_2'^! \circ \text{Rp}'_{2*} \circ p_1'^*)$$

(flèches d'adjonction) d'où le lemme, compte tenu du fait que

$$\dim G(k-1, n-2) = \dim(Y) - \dim(P).$$

$L^\cdot$ étant pervers, le morphisme naturel $L^\cdot \longrightarrow \Phi \circ \Phi^V(L^\cdot)$ induit, en appliquant le foncteur $\underline{H}_\mu^O \text{ mod.loc.const.}$ et en tenant compte de (i) déjà prouvé, un morphisme dans $\mathcal{U}(Y)$

$$L^\cdot = \underline{H}_\mu^O(L^\cdot) \longrightarrow \underline{H}_\mu^O \Phi \underline{H}_\mu^{k(n-1-k)} \Phi^V(L^\cdot)$$

(on a laissé tomber les qualificatifs "mod.loc.const." pour laisser une chance de survie au lecteur). Il s'agit de prouver que c'est un isomorphisme et pour cela il suffit, d'après une légère variante de 1.15, de prouver qu'on obtient un isomorphisme après application du foncteur $\text{Ev}(\rightarrow) |_{\dot{T}^*(Y)}$. Or, par la méthode 2.9 on trouve :

$$\text{Ev } \Phi^V(L^\cdot) |_{\dot{T}^*(P)} = Rq_{1,*} q_2^* \text{Ev}(L^\cdot) |_{\dot{T}^*(Y)} [k(n-1-k)]$$

Rappelons que $\text{Ev}(L^\cdot) |_{\dot{T}^*(Y)}$ est supporté dans l'image de q_2 , par hypothèse.

Puisque $\text{Ev}(L^\cdot)$ est localement constant le long des fibres de q_1 , on a

$$q_1^* \text{Ev } \Phi^V(L^\cdot) = \text{Ev}(L^\cdot) \otimes \left\{ \bigoplus_j V_j[-j+k(n-1-k)] \right\}$$

où V_j est comme en 5.3 et comme q_1 est lisse, d'après 1.14, on a

$$\begin{aligned} q_1^* \text{Ev } \underline{H}_\mu^{k(n-1-k)} \Phi^V(L^\cdot) &= \underline{H}^{k(n-1-k)-1} (q_1^* \text{Ev } \Phi^V(L^\cdot)) \\ &= \text{Ev}(L^\cdot)[-1] \otimes V_{2k(n-1-k)} = \text{Ev}(L^\cdot)[-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de sorte que } \text{Ev } \underline{H}_\mu^O \Phi \underline{H}_\mu^{k(n-1-k)} \Phi^V(L^\cdot) \\ &= Rq_{2,*} q_1^* \text{Ev } \underline{H}_\mu^{k(n-1-k)} \Phi^V(L^\cdot) \\ &= \text{Ev}(L^\cdot) \end{aligned}$$

au moins sur $\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ (donc sur $\dot{T}^*(Y)$) ce qui prouve (iii).

Commentaires 5.10 : Comme on l'a dit dans l'introduction, le théorème 5.5 doit être considéré comme un analogue topologique de la théorie de la transformation de Radon. Grosso modo, cette théorie consiste à étudier les fonctions sur la grassmannienne Y obtenues en intégrant sur le k -plan $L \in Y$ (au moyen d'une mesure adéquate sur L) une fonction f sur P . On obtient ainsi une fonction f^V sur Y .

On dispose alors :

- d'une formule d'inversion, permettant de récupérer f à partir de f^V , (voir [He])
(l'analogie topologique est fourni par le théorème 5.3) ;

- d'une caractérisation de l'image de la transformation de Radon $f \longrightarrow f^V: g$
est du type f^V si elle satisfait un système d'équations aux dérivées partielles.

L'analogie topologique est le théorème 3.5 : la sous-variété involutive

$\dot{T}_Z^*(P \times Y)$ de $\dot{T}^*(Y)$ a pour équations les symboles des équations aux dérivées partielles précédentes.

Je renvoie à [G] pour une discussion claire et détaillée du cas $k = 1, n = 3$

(d'après Gelfand-Graev-Vilenkin) et pour l'application à la formule de Plancherel pour le groupe $SL(2, \mathbb{C})$.

Dans certaines variantes de la théorie, on remplace P par un ouvert U tel que tout point de U appartienne à un k -plan contenu dans U et Y par l'ouvert des k -plans contenus dans U [G-G-G], [G-H], [Mar], [W].

Je ne sais pas s'il est raisonnable de chercher un analogue topologique, ni quelles conditions devraient satisfaire des faisceaux pervers sur U lorsqu'on s'approche du bord de U .

Autocritique 5.11 : Je n'ai pas l'ombre d'une idée pour démontrer l'analogie de 5.5 en caractéristique p (à vrai dire je ne sais même pas ce que devrait devenir l'énoncé 5.5(iii)). Le cas où $k = n-1$ est justifiable d'une démonstration utilisant la transformation de Fourier-Deligne, que nous présentons au § 9.

Autocritique 5.12 : Je ne sais pas démontrer 5.5 par la méthode du § 2.

Le $((\zeta_Y) \mid \dot{T}_Z^*(P \times Y), q_1^{-1}(\zeta_X))$ -bi-Module $\zeta_Y \otimes_{\mathcal{D}_Y} F(\mathcal{D}_X)$ admet la même description qu'au § 2 et l'image essentielle du § 2 est formée des (ζ_Y) -Modules qui admettent localement une résolution par des sommes de $\zeta_Y \otimes_{\mathcal{D}_Y} F(\mathcal{D}_X)$. Il n'est certainement pas vrai que tout ζ_Y -Module cohérent à support dans l'image de q_2 est de ce type ; il est probable toutefois qu'en passant aux ζ_Y^∞ -Modules cohérents "admissibles", ce problème disparaît. J'ignore si cette question a été traitée par l'école de Kyoto.

Exemple 5.13 : Illustrons le théorème 5.5 dans le cas $k = 1, n = 3$ et $K' = \mathbb{C}_S[2]$,

où $S \subset P$ est une surface lisse de degré 3. Une droite générale $L \in Y$ rencontre S en 3 points x_1, x_2, x_3 , et on a $H^{-2}(L \cap S, \mathbb{C}_S[2]) = \mathbb{C} \cdot [x_1] \oplus \mathbb{C} \cdot [x_2] \oplus \mathbb{C} \cdot [x_3]$.

$H^{-2}(L \cap S, \mathbb{C}_S[2])$ est la fibre en L d'un système local $\mathcal{F}$ sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset Y$ des

droites transverses à S . Ce système local se décompose en $\mathcal{F} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{G}$ où

$$\mathcal{G}_L = \{ \sum a_i \langle x_i \rangle \mid \sum a_i = 0 \}. \text{ Le théorème 5.5 implique que } \Phi(\mathbb{C}_S[2]) = \mathbb{C}_Y[4] \oplus \underline{\mathrm{IC}}'(Y, \mathcal{G}) \\ = \underline{\mathrm{IC}}'(Y, \mathcal{F}).$$

Il est facile de le vérifier directement. On a $p_1'^* \mathbb{C}_S[2] = \mathbb{C}_{p_1'^{-1}(S)}[2]$ et comme $\dim(Z) - \dim(P) = 2$, on a :

$$\Phi(\mathbb{C}_S[2]) = R p_{2*}' p_1'^* \mathbb{C}_S[2] = R p_{2*}' \mathbb{C}_{p_1'^{-1}(S)}[4]$$

Maintenant $p_1'^{-1}(S) = \{(x, L) \in P \times Y \mid x \in L \cap S\}$ est lisse et le morphisme

$(p_2')|_{p_1'^{-1}(S)} : p_1'^{-1}(S) \longrightarrow Y$ est petit ("small" dans la terminologie

[G-M1, § 6.2]). En effet, la fibre en $L \in Y$ est de dimension 0, sauf lorsque L est une des 27 droites de P contenues dans S . Au-dessus de $\mathcal{U}$, le morphisme est étale de degré 3, et l'image directe du faisceau constant est égale à $\mathcal{F}$.

On conclut $R p_{2*}' \mathbb{C}_{p_1'^{-1}(S)}[4] = \underline{\mathrm{IC}}'(Y, \mathcal{F})$

d'après loc.cit. (voir aussi [S2, § 4]);

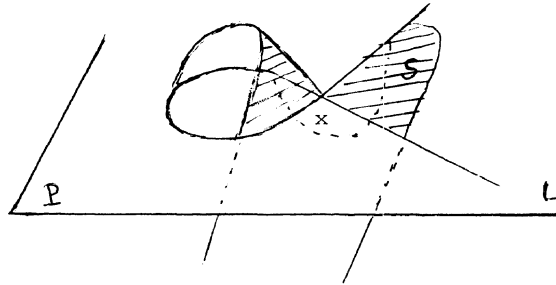
On peut remarquer que $p_1'^{-1}(S)$ s'identifie à l'éclatement de S , plongé

"diagonalement" dans la variété (rationnellement lisse) $\mathrm{Sym}^2(S)$.

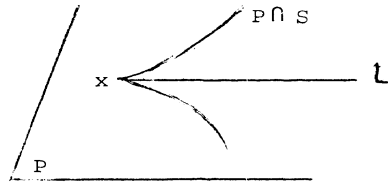
Il serait intéressant d'étudier de plus près $\underline{\mathrm{IC}}'(Y, \mathcal{G})$. Plusieurs accidents peuvent arriver à une droite L (relativement à S)

- L est tangente à S en x et recoupe S en $y \neq x$

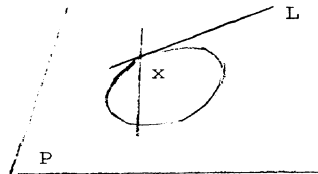
- L est tangente à S en x et $L \cap S = \{x\}$; plus précisément, l'intersection de S et du plan P tangent à S en x est une cubique à point double ordinaire en x , et L est tangente à une des branches en x



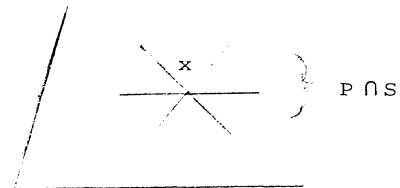
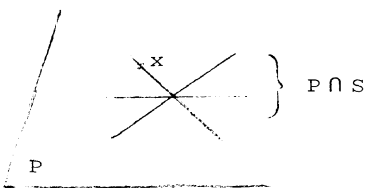
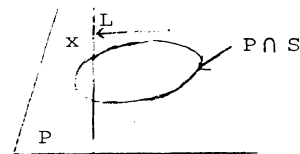
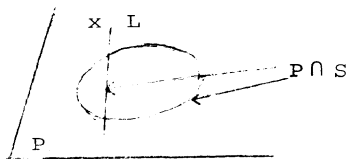
- L est tangente à S en x , $L \cap S = \{x\}$, $P \cap S$ est une cubique avec un cusp en x et L est tangente en x à $P \cap S$



- $P \cap S$ est réunion d'une conique et d'une droite différente

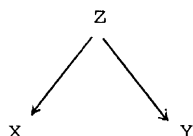


- L est contenu dans S ; on a encore plusieurs cas



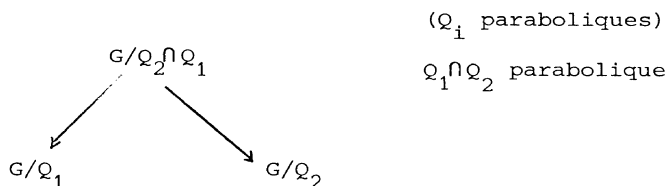
J'aimerais comprendre ce qui se passe en chacun de ces cas, et pourquoi seul le 1^{er} accident crée des cycles évanescents (puisque d'après la preuve de 5.5 on a $\text{Ch}(\underline{\text{IC}}^*(Y, \mathcal{L})) = 2 \cdot T_Y^* Y + \overline{T_{S_{\text{reg}}}^* Y}$, où $\tilde{S}$ est l'ensemble des L tangentes à S).

Remarque 5.16 : Le diagramme



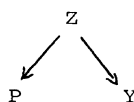
où $X = G(k, n)$, $Y = G(n-k-1, n)$, Z est la variété d'incidence, possède, lorsque $k \leq n-k-1$, des propriétés presque aussi bonnes que le diagramme étudié dans ce numéro, du point de vue de la géométrie symplectique, à condition de se restreindre à un ouvert convenable de $T^*(X)$; plus précisément, on a $T^*(X) = \{(F_{k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}, u \in \text{End}(\mathbb{C}^{n+1}) \text{ tq } \text{im}(u) \subset F_{k+1} \subset \ker(u)\}$ et on prend l'ouvert des (F_{k+1}, u) où $\text{im}(u) = F_{k+1}$. On obtiendrait sans doute une version adéquate (mais affaiblie) de 5.5 dans cette situation. Cela aiderait sans doute à comprendre pourquoi la transformation de Radon a ici encore de bonnes propriétés (voir [He]).

Il conviendrait d'étudier pour G , un groupe algébrique semi-simple complexe, quels diagrammes



ont des propriétés similaires. La question se transforme en un problème sur les systèmes de racines, qu'il vaudrait sans doute la peine d'examiner.

On pourrait étudier aussi des situations du type



où P est un espace projectif de dimension $3g-3$ et Y est l'espace des n courbes stables de genre g tricanoniques dans P (munies de quelque structure de niveau)

Le diagramme
$$\begin{array}{ccc} T_Z^*(P \times Y) & \longrightarrow & T^*(Y) \\ \downarrow & & \\ T^*(P) & & \end{array}$$
 a probablement encore génériquement

de bonnes propriétés. Comme me l'a suggéré B. Angéniol, on aurait envie aussi de prendre pour Y une variété de Chow, mais on est ici coïncé par les singularités de Y (du moins à l'heure actuelle).

II - TRANSFORMATION(S) DE FOURIER

VI) TRANSFORMATION DE FOURIER VECTORIELLE, A LA MALGRANGE

Malrange a développé, au Printemps 1982, une transformation de Fourier topologique "vectorielle" qui s'inspire de [S-K-K, Chapter II, § 1.14], mais fonctionne sur des fibrés vectoriels plutôt que sur des fibrés en sphères, et a toutes les propriétés habituelles d'une transformation de Fourier. Malgrange et Verdier ont dégagé les propriétés essentielles, que nous exposons succinctement. Nous avons surtout en vue le lien avec la transformation de Fourier pour les modules sur l'algèbre de Weyl (§ 7), le lien avec la dualité entre espaces projectifs et la théorie de Lefschetz (§ 7) et l'application à l'estimation uniforme de sommes trigonométriques (§ 10). Dans ce numéro, nous nous inspirons de notes de Verdier [V3].

Soit X un espace topologique localement compact, E un fibré vectoriel sur X , localement trivial, de rang constant r . On fixe un corps commutatif k de caractéristique 0. Un faisceau de k -espaces vectoriels est dit conique s'il est constant sur les demi-droites ouvertes de E . Un complexe de faisceaux sur E est dit conique si ces faisceaux de cohomologie sont coniques. On note E' le fibré

vectorel dual de E .

On note $\tau: E \longrightarrow X$ et $\pi: E' \longrightarrow X$ les projections. Si $I^\bullet$ est un complexe, borné inférieurement, de faisceaux injectifs sur E , on note $\mathcal{F}(I^\bullet)$ le complexe de faisceaux sur E' associé au complexe de préfaisceaux

$$U \longrightarrow \Gamma_U^\circ(\tau^{-1}\pi(U), I^\bullet|_{\tau^{-1}\pi(U)})$$

où $U^\circ = \{x \in E \text{ t. } q\tau(x) \in \pi(U) \text{ et } \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \xi \in U \text{ tel que } \pi(\xi) = \tau(x)\}$.

Pour $U \subset U_1$, on a la chaîne d'inclusions $U \subset U_1 \cap \pi^{-1}\pi(U) \subset U_1$.

On a $(U_1 \cap \pi^{-1}\pi(U))^\circ \subset U^\circ$ puisque ces deux ouverts ont même projection sur X , d'où un morphisme $\Gamma_{(U_1 \cap \pi^{-1}\pi(U))^\circ}(-) \longrightarrow \Gamma_{U^\circ}(-)$.

Par ailleurs, on a un morphisme de restriction

$$\Gamma_{(U_1)^\circ(\tau^{-1}\pi(U_1))} I^\bullet|_{\tau^{-1}\pi(U_1)} \longrightarrow \Gamma_{(U_1) \cap \tau^{-1}\pi(U)} (\tau^{-1}\pi(U), I^\bullet|_{\tau^{-1}\pi(U)})$$

Posant $U_2 = U_1 \cap \pi^{-1}\pi(U)$, on a $(U_1)^\circ \cap \tau^{-1}\pi(U) = (U_2)^\circ$, $\tau^{-1}\pi(U) = \tau^{-1}\pi(U_2)$.

On a donc défini un morphisme de restriction

$$\Gamma_{(U_1)^\circ}(-) \longrightarrow \Gamma_{(U_2)^\circ}(-)$$

Ceci signifie que $U \longmapsto \Gamma_U^\circ(\tau^{-1}\pi(U), I^\bullet|_{\tau^{-1}\pi(U)})$ est un complexe de préfaisceaux.

Il est absolument clair que $\mathcal{F}(I^\bullet)$ est conique (sans même supposer que $I^\bullet$ le soit), et est borné inférieurement. On a en fait $\mathcal{F}(I^\bullet)(U) = \Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U), I^\bullet|_{\tau^{-1}\pi(U)})$ si U est convexe (i.e. chaque fibre de $\tau^{-1}_{(U)}$ est convexe). La construction $\mathcal{F}$ passe aux catégories dérivées. On utilise la notation $D_{\text{con}}^+(E, k)$ ou simplement $D_{\text{con}}^+(E)$ pour la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés inférieurement de faisceaux de K -espaces vectoriels, à cohomologie conique.

On note $\mathcal{F}: D_{\text{con}}^+(E) \longrightarrow D_{\text{con}}^+(E')$ le foncteur exact obtenu : c'est la "transformation de Fourier vectorielle (topologique)".

Théorème 6.1 : (Verdier, [V3])

- 1) La transformation de Fourier commute aux changements d'espaces de base.
- 2) Soit $u : E \longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels, $t_u : F' \longrightarrow E'$ le morphisme transposé. Pour $G' \in D_{\text{con}}^+(E)$, on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{F}(\text{IR}_{u_!} G') = (t_u)^* \mathcal{F}(G').$$

Corollaire 6.2 : Soit $\bar{\omega} : E \times_X E' \longrightarrow \mathbb{R} \times_X E'$ l'application $\bar{\omega}(x, \xi) = (\langle x, \xi \rangle, \xi)$, vue comme morphisme de fibrés vectoriels sur E' .

Alors $\mathcal{F}_X(G') = \mathcal{F}_E(\text{IR } \bar{\omega}_! \text{pr}_1^*(G') |_{\{1\} \times_X E'}$, pour $G' \in D_{\text{con}}^+(E)$.

Cela se déduit formellement du théorème. Comme l'a fait remarquer Malgrange, cette réduction de la transformation de Fourier vectorielle au cas d'un fibré de rang 1 est à rapprocher de la formule familière

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau t} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t - \langle x, \xi \rangle) f(x) dx \quad (\text{pour } \tau = 1).$$

Son analogue dans le cas de fibrés vectoriels complexes joue un rôle clé dans les numéros qui suivent.

Sur $D_{\text{con}}^b(E)$, on a l'opération de convolution :

$F' * G' = \text{IR}_{s_!}(F' \boxtimes_X G')$, où $s : E \times_X E \longrightarrow E$ est l'application somme : $s(x, y) = x + y$.

Avec cette notation, on a le

Corollaire 6.3 : Pour F', G' dans $D_{\text{con}}^b(E)$, on a $\mathcal{F}(F' * G') = \mathcal{F}(F') \otimes \mathcal{F}(G')$.

Corollaire 6.4 : Avec les notations de l'énoncé 2) de 6.1, pour $H' \in D_{\text{con}}^+(F)$; on a $\mathcal{F}(u^*(H'))[\text{rg } E] = \text{IR}(t_u)_!(\mathcal{F}(H'))[\text{rg } F]$.

Cela résulte du théorème 6.1(2) et de la formule d'inversion suivante, où on utilise la notation $\mathcal{F}$ pour $\mathcal{F} : D_{\text{cont}}^b(E') \longrightarrow D_{\text{cont}}^b(E)$ et a_E l'application antipodale de E ($x \longmapsto -x$).

Théorème 6.5 (Sato-Kashiwara - Kawai, Malgrange, Verdier) :

Pour $G' \in D_{\text{con}}^b(E)$, on a un isomorphisme naturel $G' \xrightarrow{\sim} a_E^{-1} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(G')[r]$.

Corollaire 6.6 : Si X est de dimension finie, et D dénote le foncteur "dual de Verdier", les foncteurs $D_{E'} \circ \mathcal{F}$ et $a_{E'} \circ \mathcal{F} \circ D_E[r]$, de $D_{\text{con}}^b(E)$ vers $D_{\text{con}}^b(E')$, sont isomorphes.

La démonstration de Verdier [V3] est essentiellement formelle à partir du fait que $\mathcal{F}(D_E^\bullet)$ est le prolongement par zéro de $D_X^\bullet$ à E' (X étant considéré comme la section nulle de E'). Nous donnerons au § 7 une démonstration du cas particulier où E est un fibré holomorphe sur une variété complexe X , et où on se restreint aux objets constructibles de $D_{\text{con}}^b(E)$.

Corollaire 6.7 : (a) Pour $G^\bullet \in D_{\text{con}}^b(E)$, on a avec les notations de 6.1 (2)

$$\mathcal{F} \text{IRu}_*(G^\bullet)[rg F] = ({}^t u)^! \mathcal{F} G^\bullet[rg E]$$

$$(b) \text{ Pour } H^\bullet \in D_{\text{con}}^b(F), \text{ on a : } \mathcal{F}(u^! H^\bullet) = \text{IR}({}^t u)_* \mathcal{F} H.$$

Nous aurons besoin au § 11 du résultat suivant :

Proposition 6.8 : Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application continue, soit $E \times_X Y \longrightarrow Y$ le fibré vectoriel image inverse de $E \longrightarrow X$, $\text{pr}_1 : E \times_X Y \longrightarrow E$ la projection. Pour $G^\bullet \in D_{\text{con}}^b(E \times_X Y)$, on a un isomorphisme naturel $\text{IRpr}_{1,*}(\mathcal{F}_Y G^\bullet) \cong \mathcal{F}_X(\text{IRpr}_{1,*}(G^\bullet))$.

Preuve : C'est formel à partir des résultats énoncés ci-dessus.

Pour $H^\bullet \in D_{\text{con}}^b(E')$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{E'}(H^\bullet, \text{IRpr}_{1,*}(\mathcal{F}_Y G^\bullet)) &= \text{Hom}_{E' \times_X Y}(\text{pr}_1^* H^\bullet, \mathcal{F}_Y G^\bullet) \\ &= \text{Hom}_{E \times_X Y}(a^{-1} \mathcal{F}_Y \text{pr}_1^* H^\bullet, G^\bullet) \quad (\text{d'après 6.5}) \\ &= \text{Hom}_{E \times_X Y}(a^{-1} \text{pr}_1^* \tilde{\mathcal{F}}_X H^\bullet, G^\bullet) \quad (\text{d'après 6.1}) \\ &= \text{Hom}_E(a^{-1} \tilde{\mathcal{F}}_X(H^\bullet), \text{IRpr}_{1,*} G^\bullet) \quad (\text{adjonction}) \\ &= \text{Hom}_{E'}(H^\bullet, \mathcal{F}_X(\text{IRpr}_{1,*} G^\bullet)) \quad \text{encore d'après 6.5.} \end{aligned}$$

Mentionnons au passage une description concrète de $\mathcal{F}$ dans le cas

$E = \mathbb{R} \times X$. Un objet $G^\bullet$ de $D_{\text{con}}^b(E)$ est décrit par trois objets de

$D^b(X)$, $G_a^\bullet = G^\bullet|_{\{a\} \times X}$ pour $a = -1, 0, +1$ et par deux flèches

$$G_0^\bullet \xrightarrow{sp_+} G_1^\bullet \quad \text{et} \quad G_0^\bullet \xrightarrow{sp_-} G_{-1}^\bullet.$$

Soit $D_E(G^\bullet)$ le dual de Verdier de $G^\bullet$; on a $D_E(G^\bullet)_{\pm 1} = D_X(G_{\pm 1}^\bullet)[1]$

et on a $D_E(G^\bullet)_0 = D_X(\mathbb{R} \Gamma_{\{0\} \times X}(G^\bullet))$, d'où un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} D_E(G^\bullet)_0 & \xleftarrow{\quad} & D_X(G_0^\bullet) \\ & \searrow +1 & \nearrow (D_X(sp_+), D_X(sp_-)) \\ & & D_X(G_{+1}^\bullet) \oplus D_X(G_{-1}^\bullet) \end{array}$$

qui exhibe les flèches $sp_\pm: D_E(G^\bullet)_0 \longrightarrow D_E(G^\bullet)_{\pm 1} = D_X(G_{\pm 1}^\bullet)[1]$.

$\mathcal{F}(G^\bullet)$ est de même décrit par $\mathcal{F}(G^\bullet)_a$ ($a = -1, 0, +1$).

On a un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(G^\bullet)_{\pm 1} & \xrightarrow{\quad} & G_0^\bullet \\ & \searrow +1 & \nearrow sp_\mp \\ & & G_{\mp 1}^\bullet \end{array}$$

et un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(G^\bullet)_0 & \xrightarrow{\quad} & G_0^\bullet \\ & \searrow +1 & \nearrow (sp_+, sp_-) \\ & & G_1^\bullet \oplus G_{-1}^\bullet \end{array}$$

La flèche $sp_\pm: \mathcal{F}(G^\bullet)_0 \longrightarrow \mathcal{F}(G^\bullet)_{\pm 1}$ complète en un diagramme commutatif de triangles le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_0^\bullet & \xrightarrow{(sp_+, sp_-)} & G_+^\bullet \oplus G_-^\bullet \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow pr_\mp \\ G_0^\bullet & \xrightarrow{sp_\mp} & G_{\mp 1}^\bullet \end{array}$$

De l'axiome de l'octaèdre, on déduit un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc}
 G' & \longrightarrow & \mathcal{F}(G')_0 \\
 \nwarrow \mathbb{F}_1 & & \nearrow sp_+ \\
 +1 & & \\
 & \mathcal{F}(G') &
 \end{array}$$

ainsi que le triangle distingué

$$\begin{array}{ccc}
 G'_0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(G')_0 \\
 \nwarrow +1 & & \nearrow (sp_+, sp_-) \\
 & \mathcal{F}(G')_1 \oplus \mathcal{F}(G')_{-1} &
 \end{array}$$

ce qui permet de récupérer dans ce cas la formule d'inversion 6.5.

On retrouve de même la commutation 6.6 à la dualité de Verdier.

Cela suggère qu'avec la notation de 6.2, on devrait pouvoir démontrer 6.5 en prouvant que le troisième terme du triangle construit sur

$\mathbb{R} \bar{\omega}_! pr_1^* G' \longrightarrow \mathbb{R} \bar{\omega}_* pr_1^* G'$ est constant sur une demi-droite ouverte du fibré $\mathbb{R} \times_X E' \rightarrow E'$ (auquel sa transformée de Fourier a une restriction nulle à $\{1\} \times E'$). C'est la méthode que nous suivons au § 7, G' étant constructible sur E fibré holomorphe sur X analytique complexe.

Dans la suite, E est un fibré vectoriel complexe sur X , et on note r son rang sur X . Le fibré vectoriel complexe E' dual de E a pour fibré réel sous-jacent le dual réel de E (par convention, pour V un espace vectoriel complexe, on identifie $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ à $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ par $\ell \mapsto \text{Re}(\ell)$). Ainsi, pour U ouvert dans E' , on a $U^0 = \{x \in \tau^{-1} \pi(U) \mid \text{Re} \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \xi \in U \text{ tel que } \pi(\xi) = \tau(x)\}$.

Définition 6.9 (Verdier) [V 2], [V 3]). Un faisceau sur E est dit monodromique s'il est localement constant sur les génératrices épointées de E (i.e. sur les orbites de $\mathbb{C}^*$ dans E . Un complexe de faisceaux sur E est dit monodromique si ses faisceaux de cohomologie le sont. On note $D_{\text{mon}}^b(E)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux (de k -espaces vectoriels) sur E , à cohomologie

monodromique.

Proposition 6.10 (Verdier [Ve 2]) : Soit K^* un complexe monodromique sur E (i.e; un objet de $D_{\text{mon}}(E)$). Notant $\theta : \mathbb{C} \times E \rightarrow E$ l'application $\theta(\lambda, y) = \exp(\lambda) \cdot y$, il existe un unique morphisme $T : \theta^* K^* \rightarrow \text{pr}_2^* K^*$ tel que $T|_{\{0\} \times E}$ soit l'identité. Ce morphisme est un isomorphisme.

Preuve : Par adjonction, on a un morphisme naturel : $\theta^* K^* \rightarrow \text{pr}_2^! \mathbb{R} \text{pr}_{2,!} \theta^* K^*$. Comme pr_2 est lisse, la formation de $\text{pr}_2^! \mathbb{R} \text{pr}_{2,!} = \text{pr}_2^* \mathbb{R} \text{pr}_{2,!} [2r]$ commute aux changements de base. Comme $\theta^* K^*$ est localement constant sur une droite $\mathbb{C} \times \{x\}$, on en déduit que ce morphisme est un isomorphisme fibre par fibre, donc un isomorphisme. On peut donc écrire $\theta^* K^* = \text{pr}_2^* F^*$ où $F^* \in D(E)$. En restreignant cet isomorphisme à $\{0\} \times E$, on trouve $F^* = K^*$, d'où l'existence de T . L'unicité de T résulte de ce que $\text{Hom}_{\mathbb{C} \times E}(\text{pr}_2^* K^*, \text{pr}_2^* K^*) = \text{Hom}_{\mathbb{C} \times E}(\text{pr}_2^! K^*, \text{pr}_2^! K^*)$

$$= \text{Hom}_E(\mathbb{R} \text{pr}_{2,!} \text{pr}_2^! K^*, K^*)$$

$$= \text{Hom}_E(K^*, K^*).$$

Notation : T induit, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, un isomorphisme $T_\lambda : (\exp \lambda)^* F \xrightarrow{\sim} F$.

On note abusivement $T = T_{2\pi i}, T^{1/2} = T_{i\pi}$.

On a ici l'analogue du corollaire 6.2 pour les fibrés complexes.

Proposition 6.11 (Verdier [V 3], Malgrange [Ma 4]) :

Soit $\bar{\omega}_{\mathbb{C}} : E \times_X E' \rightarrow \mathbb{C} \times E'$ l'application $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}(x, \xi) = (\langle x, \xi \rangle, \xi)$.

Alors on a $\mathcal{F}_X(G^*) = \mathcal{F}_{E'}(\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C},!} \text{pr}_1^* G^*)|_{\{1\} \times E'}$

pour $G^* \in D_{\text{con}}^+(E)$.

Corollaire 6.12 (Verdier [V 3]) : Pour G^* monodromique, $\mathcal{F}(G^*)$ est monodromique.

Preuve : Considérons l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ sur $E \times_X E'$ pour $(\lambda, \mu) \cdot (x, \xi) = (\lambda x, \mu \xi)$ et l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C} \times E'$ pour $(\lambda, \mu) \cdot (v, \xi) = (\lambda \mu v, \mu \xi)$. Alors $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ -équivariant. $\text{pr}_1^* G^*$ est localement constant sur les orbites de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$,

donc $\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C},!}(\mathrm{pr}_1^* G^*)$ a la même propriété. En particulier, il est localement constant sur $(\lambda) \times \mathbb{C}^* \xi \subset \mathbb{C} \times E'$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\xi \in E'$.

Il résulte de 6.10 que $\mathcal{F}_E, (\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C},!}(\mathrm{pr}_1^* G^*))$ a les mêmes propriétés.

Pour G^* monodromique, on a $a^{-1}(G^*) = T_{1/2}^{-1}(G^*) \xrightarrow{\sim} G^*$, donc la formule d'inversion 6.5 devient

Proposition 6.13 :

- (i) Pour G^* monodromique, on a $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(G^*) \simeq G^*[-2r]$.
- (ii) On a $D \circ \mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \circ D[2r]$.

Ceci suggère de définir la transformation de Fourier normalisée par $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}[r] = \mathcal{F}[\mathrm{rg} E]$, puisqu'alors $\tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}$ et $D \circ \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}} \circ D$.

Comme le montre 6.11, le calcul d'une transformée de Fourier (pour r quelconque) se ramène (modulo des opérations faisceautiques standard) à celui d'une transformée de Fourier pour un fibré de rang un ; le cas $r = 1$ donne lieu à une description complète de $\mathcal{F}$ (ou $\tilde{\mathcal{F}}$). Commençons par étudier le cas où $E = X \times \mathbb{C}$.

Si G^* est un complexe de faisceaux injectifs sur $X \times \mathbb{C}$ qui est monodromique, on lui associe deux complexes de faisceaux injectifs sur X , à savoir

$G_0^* = \pi_* G^*$ et $G_1^* = \tilde{\pi}_* F^* G^*$ où F est le morphisme $X \times \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow X \times \mathbb{C}$ et $\tilde{\pi}$ la projection $X \times \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow X$. L'action de la monodromie T sur $X \times \tilde{\mathbb{C}}^*$ définit un automorphisme T de G_1^* ; on a par ailleurs un morphisme naturel $G_0^* \xrightarrow{\mathrm{sp}} G_1^*$ de complexes de faisceaux, tel que $T \circ \mathrm{sp} = \mathrm{sp}$.

Proposition 6.14 (Deligne, Malgrange) : La construction ci-dessus induit une équivalence entre $D_{\mathrm{mon}}^+(\mathbb{E})$ et la catégorie dérivée $D^+(\mathbb{E}, T, T^{-1}; X)$ de la catégorie abélienne dont les objets sont les diagrammes de faisceaux sur X :

$$G_0 \xrightarrow{\epsilon} G_1 \overset{\circlearrowleft}{\circlearrowright} T$$
où T est inversible, et $T \circ \epsilon = \epsilon$ et les morphismes, les morphismes entre tels diagrammes.

Un foncteur quasi-inverse consiste à associer à un diagramme $G^\bullet_O \xrightarrow{\text{sp}} G^\bullet_1 \otimes T$ de complexes de faisceaux sur X , le complexe monodromique $G^\bullet$ sur $X \times \mathbb{C}$ dont la restriction à $X \times \{0\}$ est $G^\bullet_O$ et la restriction à $X \times \mathbb{C}^*$ sur $X \times \mathbb{C}$ est égale à $[\tilde{\pi}^{\circ}_* G_1]^\text{T}$ où $\tilde{\pi}^\circ$ est la projection de $X \times \tilde{\mathbb{C}}^*$ sur $X \times \mathbb{C}^*$, et $\tilde{G}_1$ le complexe de faisceaux T -équivariant sur $X \times \tilde{\mathbb{C}}^*$ associé à G_1 .

Le recollement de ce complexe de faisceaux s'effectue grâce à sp .

Soit maintenant $G^\bullet$ un complexe monodromique de faisceaux injectifs sur $X \times \mathbb{C}$, et soient $G^\bullet_O$ et $G^\bullet_1$ comme plus haut.

On peut supposer que $G^\bullet_1$ est un complexe de faisceaux $k[T, T^{-1}]$ -injectifs. Alors $\mathcal{F}(G^\bullet)_O = \tau_* \mathcal{F}(G^\bullet)$, quasi-isomorphe au complexe simple associé au complexe double $G^\bullet_O \longrightarrow G^\bullet_1 \xrightarrow{T-1} G^\bullet_1$ (le point en-dessous de $G^\bullet_O$ indiquant que ce complexe est placé en degré 0), est aussi quasi-isomorphe au complexe simple associé au complexe double $G^\bullet_O \longrightarrow (G^\bullet_1)^\text{T}$ (où $(G^\bullet_1)^\text{T}$ dénote le sous-complexe de faisceaux de $G^\bullet_1$ formé de sections T -invariantes).

Par ailleurs, $\mathcal{F}(G^\bullet)_1$ est le complexe simple associé au complexe double

$G^\bullet_O \xrightarrow{\varepsilon} G^\bullet_1$; l'automorphisme T de ce complexe double est décrit par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G^\bullet_O & \xrightarrow{\varepsilon} & G^\bullet_1 \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow T^{-1} \\ G^\bullet_O & \xrightarrow{\varepsilon} & G^\bullet_1 \end{array}$$

Le morphisme $\mathcal{F}(G^\bullet)_O \longrightarrow \mathcal{F}(G^\bullet)_1$ provient du morphisme de complexes doubles

$$\begin{array}{ccc} G^\bullet_O & \xrightarrow{\varepsilon} & (G^\bullet_1)^\text{T} \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow \text{incl} \\ G^\bullet_O & \longrightarrow & G^\bullet_1 \end{array}$$

Pour avoir une description agréable de la transformation de Fourier, on est amené à considérer la catégorie dérivée $D^+(\frac{\cdot}{\cdot}, X)$ de la catégorie des diagrammes $\psi \begin{smallmatrix} u \\ \leftarrow \\ v \end{smallmatrix} \phi$, où ψ et ϕ sont des faisceaux de k -espaces vectoriels sur X , et $D^+_{\text{inv}}(\frac{\cdot}{\cdot}, X)$ la sous-catégorie formée des diagrammes $\psi \begin{smallmatrix} u \\ \leftarrow \\ v \end{smallmatrix} \phi$ tels que $\text{id} + uv$ et $\text{id} + vu$ soit un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux sur X .

Proposition 6.15 (Deligne-Malgrange) : Le foncteur qui, au diagramme $G_0^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} G_1^\bullet \mathcal{G}^T$

associe le diagramme $\psi \xrightarrow[\downarrow v]{\uparrow u} \phi$, où ψ est le complexe simple associé au complexe double $G_0^\bullet \xrightarrow{(id, -\varepsilon)} G_0^\bullet \oplus G_1^\bullet$, où ϕ est le complexe simple associé au complexe double $G_0^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} G_1^\bullet$,

où can est décrit par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_0^\bullet & \xrightarrow{(id, -\varepsilon)} & G_0^\bullet \oplus G_1^\bullet \\ id \downarrow & & \downarrow (0, id) \\ G_0^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon} & G_1^\bullet \end{array}$$

et où Var est décrit par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_0^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon} & G_1^\bullet \\ 0 \downarrow & & \downarrow (0, T-id) \\ G_0^\bullet & \longrightarrow & G_0^\bullet \oplus G_1^\bullet \end{array}$$

induit une équivalence de catégories

$$D^+(\varepsilon, T, T^{-1}; X) \longrightarrow D_{inv}^+(\vec{\varepsilon}, X)$$

Preuve (esquisse) : Décrivons un foncteur quasi-inverse.

Le diagramme $\psi \xrightarrow[\downarrow v]{\uparrow u} \phi$ est quasi-isomorphe au diagramme

$$\begin{array}{ccc} [\psi^\bullet + \phi^\bullet \xrightarrow{\delta} \phi^\bullet] & & \text{avec } \begin{cases} \delta(\psi, \varphi) = -u(\psi) + \varphi \\ \bar{u}(\psi, \varphi) = \varphi \\ \bar{v}(\varphi) = (v\varphi, u v\varphi) \end{cases} \\ \bar{u} \downarrow \uparrow \bar{v} & & \\ [\phi^\bullet \longrightarrow 0] & & \end{array}$$

On pose alors $G_0^\bullet = [\psi^\bullet \xrightarrow{-u} \phi^\bullet]$, $G_1^\bullet = [\psi^\bullet \oplus \phi^\bullet \xrightarrow{\delta} \phi^\bullet]$

$\varepsilon : G_0^\bullet \longrightarrow G_1^\bullet$ le morphisme évident, et on définit un automorphisme T de $G_1^\bullet$ par $T = id + \bar{v} \circ \bar{u}$. On vérifie aisément que $T \circ \varepsilon = \varepsilon$ (en fait $\bar{u} \circ \varepsilon = 0$) et que l'on a construit un foncteur quasi-inverse.

En combinant les propositions 6.14 et 6.15, on obtient une description de la catégorie $D_{mon}^+(E)$ des complexes monodromiques en termes de diagrammes $\psi \xrightarrow[\downarrow v]{\uparrow u} \phi$; de manière concrète, pour $G^\bullet \in D_{mon}^+(E)$, $\psi^\bullet = \psi_F(G^\bullet)$ et $\phi^\bullet = \phi_F(G^\bullet)$ où

$F : E = X \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la seconde projection.

Si l'on écrit la transformation $\tilde{\mathcal{F}}$ dans le langage de la catégorie dérivée $D_{\text{inv}}^+(\mathcal{Z}, X)$, on trouve que $\tilde{\mathcal{F}}$ envoie le diagramme

$$\psi^\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{array} \phi^\bullet \text{ sur le diagramme } \phi^\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xleftarrow{-T^{-1} \circ u} \end{array} \psi^\bullet$$

On vérifie aisément que $D_E(G^\bullet)$ est décrit par

$$\begin{array}{ccc} D_X \psi(G^\bullet) [2] & \begin{array}{c} \xrightarrow{D_X(V)} \\ \xleftarrow{D_X(U)} \end{array} & D_X \phi(G^\bullet) [2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_X(T) & & D_X(T) \end{array}$$

Ces considérations permettent de retrouver (dans le cas $E = X \times \mathbb{C}$) la formule d'inversion pour $\mathcal{F}$ et la commutation de $\mathcal{F}$ à la dualité de Verdier.

Dans le cas où E est de rang 1, mais non trivialisé, les objets $(\psi(\text{---}), T)$ et $(\phi(\text{---}), T)$ doivent être remplacés par des complexes monodromiques sur $T_X E$, le fibré normal à X dans E privé de la section nulle. Je renvoie à [V2] pour un traitement détaillé (voir aussi [Ma 1]).

VII) TRANSFORMATION DE FOURIER -MALGRANGE ET MODULES SUR LES ALGÈBRES DE WEYL

On commence par déduire des travaux de Kashiwara -Kawai et de Mebkhout, un théorème de Riemann -Hilbert de nature algébrique.

Soit X une variété algébrique lisse projective complexe. Un $\mathcal{D}_X$ -Module (à gauche) $\mathcal{M}$ holonome est dit à singularités régulières (R.S.) s'il existe une bonne filtration $\{\mathcal{M}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{M}$ satisfaisant la propriété suivante, introduite par Kashiwara -Kawai..

(K-K) tout germe P de section de $\mathcal{S}_X^{(m)}$ tel que $\sigma_m(P)$ s'annule sur $SS(\mathcal{L})$ satisfait : $P \cdot \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+m-1}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Un objet de la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{S}_X)_h$ des complexes de $\mathcal{S}_X$ -modules à cohomologie holonome est dit R.S. si ses faisceaux de cohomologie sont R.S. On note $D^b(\mathcal{S}_X)_{h.r}$ la catégorie dérivée correspondante.

On note X^{an} la variété analytique complexe associée à X ; on utilise les notations $\mathcal{O}_{X^{an}}, \mathcal{S}_{X^{an}}$; pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$ -Module, $\mathcal{M}^{an} = \mathcal{O}_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -Module ; pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{S}_X$ -Module, $\mathcal{M}^{an} = \mathcal{S}_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{S}_X} \mathcal{M} = \mathcal{O}_{X^{an}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{S}_{X^{an}}$ -Module. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{S}_X$ -Module holonome à singularités régulières, il en est de même de $\mathcal{M}^{an}$ d'après [K-K]

Donc si $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{S}_X)_{h.r}$, on a $\mathcal{M}^{an} \in D^b(\mathcal{S}_{X^{an}})_{h.r}$.

Théorème 7.1 : Le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{an}$ induit une équivalence de catégories entre $D^b(\mathcal{S}_X)_{h.r}$ et $D^b(\mathcal{S}_{X^{an}})_{h.r}$.

Preuve : Rappelons que X est projective. On prouve d'abord que le foncteur est pleinement fidèle. Soit $i : X \hookrightarrow P$ une immersion fermée de X dans un espace projectif. Le foncteur $\int_i$ de $D^b(\mathcal{S}_X)$ (resp. $D^b(\mathcal{S}_X)_{h.r}$) vers $D^b(\mathcal{S}_P)$ (resp. $D^b(\mathcal{S}_P)_{h.r}$) est pleinement fidèle [K5]. On peut donc supposer $X = P$. Un argument de dévissage assure qu'il suffit de démontrer que pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des modules holonomes à singularités régulières sur P , on a

$$\mathrm{IRHom}_{\mathcal{S}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{IRHom}_{\mathcal{S}_{X^{an}}}(\mathcal{M}^{an}, \mathcal{N}^{an}).$$

D'après Beilinson - Bernstein [B-B] (dans ce cas, leur démonstration a été notablement simplifiée par T.A. Springer) $\mathcal{M}$ admet une résolution libre globale comme $\mathcal{S}_X$ -Module et $H^i(X, \mathcal{L}) = 0$ pour $i > 0$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_X}(\mathcal{S}_X, \mathcal{L}) = \Gamma(X, \mathcal{L})$

il suffit de montrer que $\Gamma(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X^{\text{an}}, \mathcal{M}^{\text{an}})$. Or, on a $\mathcal{M} = \varinjlim_n \mathcal{M}_n$ (bonne filtration) donc $\Gamma(X, \mathcal{M}) = \varinjlim_n \Gamma(X, \mathcal{M}_n)$ et comme $\mathcal{M}_n$ est $\mathcal{O}_X$ -cohérent, on a $\Gamma(X, \mathcal{M}_n) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X^{\text{an}}, \mathcal{M}_n^{\text{an}})$ d'où $\Gamma(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X^{\text{an}}, \mathcal{M}^{\text{an}})$. On a donc prouvé la pleine fidélité de $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\text{an}}$. Pour prouver que ce foncteur est essentiellement surjectif, un argument de dévissage permet alors de se ramener à prouver qu'un $\mathcal{L}_X^{\text{an}}$ -Module holonome R.S. $\mathcal{M}$ est de la forme $\mathcal{M}^{\text{an}}$. D'après [K-K, chapter V, § 1] il existe une bonne filtration globale $\{\tilde{\mathcal{M}}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$. Chaque $\tilde{\mathcal{M}}_n$ est un $\mathcal{O}_X^{\text{an}}$ -Module cohérent, donc d'après Serre [GAGA] est uniquement de la forme $\mathcal{M}_n^{\text{an}}$, où $\mathcal{M}_n$ est un $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent. On pose donc $\mathcal{M} = \varinjlim_n \mathcal{M}_n$. On voit aisément que $\mathcal{M}$ est un sous- $\mathcal{L}_X^{\text{an}}$ -Module de $\tilde{\mathcal{M}}$ (pour tout n , $\mathcal{L}_X^{\text{an}}(1) \cdot \mathcal{M}_n$ est un sous $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent de $\tilde{\mathcal{M}}$, donc est contenu dans $\mathcal{M}_{n+1}$). Ceci prouve le théorème.

Pour $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre, on a des foncteurs

$$\int_f^b: D^b(\mathcal{D}_X)_{\text{coh}} \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_Y)_{\text{coh}} \quad \text{et} \quad \int_f^{\text{an}, b}: D^b(\mathcal{D}_{X^{\text{an}}})_{\text{coh}} \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_{Y^{\text{an}}})_{\text{coh}}$$

(voir [K5]).

Proposition 7.2 : Pour $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)_{\text{coh}}$, on a un isomorphisme naturel entre $\int_f^{\text{an}} \mathcal{M}^{\text{an}}$ et $(\int_f \mathcal{M})^{\text{an}}$.

Preuve : Le cas où f est une immersion fermée est facile. Traitons le cas

où $f = \text{pr}_2: X = \mathbb{P}^n \times Y \rightarrow Y$. On a $\int_f \mathcal{M} = \text{IRf}_*(\text{DR}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{M}))$

où $\text{DR}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{M})$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\mathcal{M} \rightarrow f^{-1}(\Omega_Y^1) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{M} \rightarrow \dots \rightarrow f^{-1}(\Omega_Y^n) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{M}.$$

Il en résulte que $(\int_f \mathcal{M})^{\text{an}}$ s'obtient en appliquant IRf_* au complexe simple associé au complexe double

$$f^{-1}(\mathcal{O}_{Y^{\text{an}}}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{M} \rightarrow f^{-1}(\Omega_{Y^{\text{an}}}^1) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{M} \rightarrow \dots$$

Comme $\int_f^{\text{an}} (\mathcal{M}^{\text{an}})$ est obtenu en appliquant IRf_* au complexe simple déduit du complexe double

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times Y}^{\text{an}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times Y}} \mathcal{M}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times Y}^{\text{an}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times Y}} (f^{-1}(\Omega_Y^1) \otimes \mathcal{M}^\bullet)$$

il suffit d'appliquer le théorème de Grauert-Remmert [G - R] .

Corollaire 7.3 : Si $\mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{E}_X)_{h.r.}$, on a $\int_f \mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{E}_Y)_{h.r.}$.

Preuve : Si $\mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{E}_X)_{h.r.}$, on a $\mathcal{M}^{\bullet, \text{an}} \in D^b(\mathcal{E}_{X^{\text{an}}})_{h.r.}$ donc d'après

[K - K, theorem 6.21] $\int_f (\mathcal{M}^{\bullet, \text{an}}) \in D^b(\mathcal{E}_{Y^{\text{an}}})_{h.r.}$ d'où

$$(\int_f \mathcal{M}^\bullet)^{\text{an}} \in D^b(\mathcal{E}_{Y^{\text{an}}})_{h.r.} \quad \text{et} \quad \int_f \mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{E}_Y)_{h.r.}$$

Pour $f: X \longrightarrow Y$ un morphisme entre variétés algébriques, on dispose de $\mathbb{L}f^+_*: D^b(\mathcal{E}_Y) \longrightarrow D^b(\mathcal{E}_X)$ et de son avatar analytique $\mathbb{L}(f^{\text{an}})^*$. On sait que $\mathbb{L}(f^{\text{an}})^*$ envoie $D^b(\mathcal{E}_Y)_{h.r.}$ dans $D^b(\mathcal{E}_X)_{h.r.}$ [Me 3 , K-K, § 5.4] On en déduit la

Proposition 7.4 : Pour $\mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{E}_Y)_{h.r.}$, on a $\mathbb{L}f^*(\mathcal{M}^\bullet) \in D^b(\mathcal{E}_X)_{h.r.}$ et $(\mathbb{L}f^*(\mathcal{M}^\bullet))^{\text{an}} = \mathbb{L}(f^{\text{an}})^*(\mathcal{M}^{\bullet, \text{an}})$.

Nous sommes dès lors en position de définir la notion de $\mathcal{E}_X$ -Module holonome R.S, pour X une variété algébrique quasi-projective .

Si $j: X \hookrightarrow \bar{X}$ est une compactification lisse, telle que $\bar{X}-X$ soit un diviseur, et $\mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{E}_X)_h$ on considère $\mathbb{R}j_*(\mathcal{M}^\bullet) \in D^b(\mathcal{E}_X)_h$.

Lemme 7.5 : Si $\mathbb{R}j_*(\mathcal{M}^\bullet)$ est à singularités régulières, pour toute compactification lisse $j_1: X \hookrightarrow \bar{X}_1$, il en est de même de $\mathbb{R}j_{1,*}(\mathcal{M}^\bullet)$.

Preuve : Un argument classique, utilisant [H] , permet de supposer qu'on est dans un des deux cas

(a) On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{X}_1 \\ & \nearrow j_1 & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \end{array}$$

(b) On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{X} \\ & \nearrow j & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{j_1} & \bar{X}_1 \end{array}$$

Comme $R^i j_* (\mathcal{M}^\bullet) = j_* (\underline{H}^i(\mathcal{M}^\bullet)) = \mathbb{R} j_* (\underline{H}^i(\mathcal{M}^\bullet))$, on peut de toute façon supposer que $\mathcal{M}^\bullet$ est un $\mathcal{E}_X$ -Module holonome, placé en degré 0.

Dans le cas (a), on a un morphisme naturel $\pi^* j_* (\mathcal{M}) \longrightarrow j_{1,*} (\mathcal{M})$.

Comme $j_* (\mathcal{M})$ est un $j_* (\mathcal{O}_X)$ -Module, et comme $\pi^* j_* (\mathcal{O}_X) = j_{1,*} (\mathcal{O}_{\bar{X}})$ on voit que c'est un isomorphisme. Si $j_* (\mathcal{M})$ est R.S., $j_{1,*} (\mathcal{M})$ est R.S. d'après 7.4.

Dans le cas (b), on a, par adjonction, un morphisme naturel

$\int_{\pi} j_* (\mathcal{M}) \longrightarrow \pi^* j_* (\mathcal{M}) = j_{1,*} (\mathcal{M})$ d'où un morphisme $\underline{H}^0 (\int_{\pi} j_* (\mathcal{M})) \longrightarrow j_{1,*} (\mathcal{M})$ qui est un isomorphisme sur X .

Il nous suffit de prouver que c'est un isomorphisme partout ; en appliquant 7.3, on obtiendra alors 7.5. Le problème étant local sur $\bar{X}_1$, on suppose $Y_1 = \bar{X}_1 - X$ défini par une équation f . Il suffit de prouver que la multiplication par f induit un isomorphisme sur $\int_{\pi} j_* (\mathcal{M})$. Factorisant π en $k: \bar{X} \hookrightarrow \bar{X} \times \bar{X}_1$ suivi de pr_2 , on voit qu'il suffit de montrer que f induit un isomorphisme sur $\int_k j_* (\mathcal{M})$ (ici f est considérée comme section de $\pi^{-1}(\mathcal{O}_{\bar{X}_1}) \subset \mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}_1}$; le point est que f commute à l'action des opérateurs différentiels sur $\bar{X}$). Or $\int_k j_* (\mathcal{M})$ admet une bonne filtration dont les sous-quotients sont localement isomorphes à des puissances de $j_* (\mathcal{M})$, comme $\mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}_1}$ -Modules. Il suffit donc d'établir que f (toujours vu comme section de $\pi^{-1}(\mathcal{O}_{\bar{X}_1})$) agit bijectivement sur $j_* (\mathcal{M})$; or $j_* (\mathcal{M})$ est annulé par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ du graphe de π ; il existe une section g de $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ telle que $g-f \in \mathcal{I}$. Alors g est une équation de $\bar{X}-X$, donc opère bijecti-

vement sur $j_*(\mathcal{M})$, c.q.f.d.

Définition 7.6 : $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)_h$ est dit à singularités régulières si $IRj_*(\mathcal{M})$ l'est pour une (donc, pour toute) compactification $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ où $\bar{X}$ est lisse et $\bar{X}-X$ est un diviseur. D'où une catégorie dérivée $D^b(\mathcal{D}_X)_{h.r.}$.

Proposition 7.7 : Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre variétés algébriques quasi-projectives non-singulières.

- (i) Si $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)_{h.r.}$ et si f est propre, $\int_f \mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_Y)_{h.r.}$
- (ii) Si $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_Y)_{h.r.}$, $IRf^*(\mathcal{N}) \in D^b(\mathcal{D}_X)_{h.r.}$.

Preuve : On décompose la preuve dans (i) en deux cas :

- (a) f est une immersion fermée ; (b) $f = pr_2 : \mathbb{P}^n \times Y \rightarrow Y$.

Dans le cas (a), prenant une compactification à la Hironaka $Y \hookrightarrow \bar{Y}$, soit $\bar{X}_1$ l'adhérence de X dans $\bar{Y}_1$. On peut, d'après Hironaka [H]

trouver une compactification lisse à la Hironaka $\bar{Y}$ de Y , dominant $\bar{Y}'$ et telle que le transformé strict $\bar{X}$ de X' dans $\bar{Y}$ soit lisse, et que $\bar{X}-X$ soit un diviseur à croisements normaux. On a alors un diagramme.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ Y & \xrightarrow{j_1} & \bar{Y} \end{array}$$

On démontre facilement que $IRj_{1,*}(\int_f \mathcal{M}) = \int_{\bar{f}}(IRj_* \mathcal{M})$. Puisque $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)_{h.r.}$ par définition $IRj_* \mathcal{M}$ est R.S., donc $\int_{\bar{f}}(IRj_* \mathcal{M})$ est R.S., donc aussi $\int_f \mathcal{M}$.

Le cas (b) se traite facilement à l'aide du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \times \bar{Y} \\ \downarrow pr_2 & & \downarrow pr_2 \\ Y & \longrightarrow & \bar{Y} \end{array}$$

On décompose même (ii) en trois cas.

- (a) est une immersion ouverte
- (b) f est une immersion fermée
- (c) $f = \text{pr}_2: \mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y$.

Traisons d'abord le cas (a). Il résulte des définitions que l'on peut supposer Y projective. Soit $\mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{G}_Y)_{\text{h.r.}}$; on doit prouver $\mathbb{L}f^*\mathcal{M}^\bullet \in D^b(\mathcal{G}_X)_{\text{h.r.}}$. Puisque $H^i(\mathbb{L}f^*\mathcal{M}^\bullet) = f^*(H^i(\mathcal{M}^\bullet))$, on peut supposer que $\mathcal{M}^\bullet$ est un module holonome R.S. placé en degré 0, disons $\mathcal{M}^\bullet = \mathcal{M}$. On a alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underline{H}_{Y-X}^0(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f_* f^*} \mathcal{M} \longrightarrow \underline{H}_{Y-X}^1(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

et $R^i f_* (f^* \mathcal{M}) = 0$ pour $i > 0$. On a $[\underline{H}_{Y-X}^i(\mathcal{M})]^{\text{an}} = \underline{H}_{[Y-X]}^i(\mathcal{M}^{\text{an}})$

(cf. [M 1, Chapitre 3]). Comme $\mathcal{M}^{\text{an}}$ est holonome R.S., il en est de même de $\underline{H}_{[Y-X]}^i(\mathcal{M}^{\text{an}})$ (voir [Me 1], [Me 3] ou [K-K, Theorem 5.4.1]). Il en résulte donc que $f_* f^* \mathcal{M}$ est R.S., ce qui prouve que $f^* \mathcal{M}$ est R.S.

Traisons par exemple le cas (b). On considère à nouveau le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ Y & \xrightarrow{j_1} & Y \end{array}$$

$\mathcal{M}^\bullet$ étant R.S. sur Y , $\text{IR}j_{1,*} \mathcal{M}^\bullet$ est R.S. donc aussi $\mathbb{L}f^*(\text{IR}j_{1,*} \mathcal{M}^\bullet)$ d'après 7.4. Sa restriction $\mathbb{L}f^* \mathcal{N}^\bullet$ à X est donc R.S.

Proposition 7.8 : Pour X quasi-projective lisse, le foncteur $\mathcal{M}^\bullet \longmapsto \mathcal{M}^{\bullet, \text{an}}$ induit une équivalence de catégories entre $D^b(\mathcal{G}_X)_{\text{h.r.}}$ et la sous-catégorie triangulée de $D^b(\mathcal{G}_{\bar{X}}^{\text{an}})_{\text{h.r.}}$ formée des $\tilde{\mathcal{M}}^\bullet$ tels que $\text{DR}(\tilde{\mathcal{M}}^\bullet)$ soit à cohomologie algébriquement constructible.

Preuve : Soit $j: X \longrightarrow \bar{X}$ une compactification à la Hironaka.

Pour $\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{N}^\bullet \in D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{h.r.}})$, on a $\text{Hom}_{\bar{X}}(\text{IR}j_*(\mathcal{M}^\bullet), \text{IR}j_*(\mathcal{N}^\bullet)) = \text{Hom}_X(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{N}^\bullet)$.

Donc $\text{IR}j: D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{h.r.}}) \hookrightarrow D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{h.r.}})$ est pleinement fidèle.

Comme le foncteur d'analytisation, de $D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{h.r.}})$ vers $D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}})^{\text{h.r.}}$, est pleinement fidèle en vertu de 7.1, la pleine fidélité dans le cas de X résultera, par dévissage, du lemme suivant :

Lemme 7.9 : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des Modules holonomes sur $\bar{X}^{\text{an}}$, tels que

$$H^0_{[\bar{X}-X]}(\mathcal{F}) = H^0_{[\bar{X}-X]}(\mathcal{G}) = H^1_{[\bar{X}-X]}(\mathcal{F}) = H^1_{[\bar{X}-X]}(\mathcal{G}) = 0$$

$$\text{Alors } \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{X^{\text{an}}}}(\mathcal{F}/_X, \mathcal{G}/_X)$$

Preuve du lemme : soit $K^\bullet = D R(\mathcal{F}), L^\bullet = D R(\mathcal{G})$. Les hypothèses entraînent que $K^\bullet = \text{IR}j_*j^*K^\bullet$ et $L^\bullet = \text{IR}j_*j^*L^\bullet = \text{IR}j_*j^*L^\bullet$ (voir [Me 3]).

$$\text{On a } \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}}}(K^\bullet, L^\bullet)$$

$$\text{et } \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{X^{\text{an}}}}(\mathcal{F}/_X, \mathcal{G}/_X) = \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{X^{\text{an}}}}(j^*K^\bullet, j^*L^\bullet)$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}}}(K^\bullet, L^\bullet) &= \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}}}(K^\bullet, \text{IR}j_*j^*L^\bullet) \\ &= \text{IRHom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}}}(j^*K^\bullet, j^*L^\bullet). \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Pour établir la surjectivité essentielle du foncteur, on note que si $\mathcal{M}^\bullet$ dans $D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}})^{\text{h.r.}}$ est tel que $DR(\tilde{\mathcal{M}}^\bullet)$ est algébriquement constructible, il existe $\tilde{\mathcal{N}}^\bullet \in D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{an}})^{\text{h.r.}}$ tel que $DR(\tilde{\mathcal{N}}^\bullet) = \text{IR}j_*j^*DR(\tilde{\mathcal{M}}^\bullet)$. On a $\tilde{\mathcal{N}}^\bullet = \mathcal{N}^{\text{an}}$ pour $\mathcal{N}^\bullet$ dans $D^b(\mathcal{D}_{\bar{X}}^{\text{h.r.}})$ d'après 7.1 et $\mathcal{M}^\bullet = j^*(\mathcal{N}^\bullet)$ est donc R. S. et d'analytisé égal à $\tilde{\mathcal{M}}^\bullet$, ce qui démontre la proposition.

On note $D_C^b(X) \subset D_C^b(X^{\text{an}})$ la catégorie dérivée des complexes de faisceaux à cohomologie bornée et algébriquement constructible.

Lorsque X est une variété affine, notant $D(X) = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ l'algèbre des opérateurs différentiels (globaux) sur X , une variante d'un théorème bien connu de Serre [F.A.C.] fournit une équivalence de catégories de

de la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules quasi-cohérents vers la catégorie des $D(X)$ -modules, les deux foncteurs quasi-inverses étant

$$\mathcal{M} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{M}) \quad \text{et} \quad M \longmapsto \mathcal{D}_X \otimes_{D(X)} M = \mathcal{O}_X \otimes_{R(X)} M$$

où $R(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

En un sens évident, bonnes filtrations de M et de $\mathcal{M}$ se correspondent. (par $M_n = \Gamma(X, \mathcal{M}_n)$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{O}_X \otimes_{R(X)} M_n$). Un $D(X)$ -module holonome est à singularités régulières s'il admet une bonne filtration globale $\{M_n\}$ satisfaisant la propriété (K-K). Les foncteurs plus haut induisent une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules holonomes R.S. et celle des $D(X)$ -modules holonomes R.S.

Nous aurons besoin d'une version relative de cette remarque.

Proposition 7.10 : Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme affine de variétés algébriques quasi-projectives lisses. Le faisceau d'algèbres $f_*(\mathcal{D}_X)$ sur Y est cohérent, et est un $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent. Le foncteur $\mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{D}_X \otimes_{f^{-1}f_*(\mathcal{D}_X)} f^{-1}f_*(\mathcal{M})$ induit une équivalence entre la catégorie des $f_*(\mathcal{D}_X)$ -modules quasi-cohérents (resp. cohérents, resp. holonomes, resp. holonomes R.S.) et la catégorie des $\mathcal{D}_X$ -modules quasi-cohérents (resp. cohérents, resp. holonomes, resp. holonomes R.S.). Un foncteur quasi-inverse est fourni par $\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow f_*\tilde{\mathcal{M}}$. Bonnes filtrations de $\tilde{\mathcal{M}}$ et de $\mathcal{M} = f_*(\tilde{\mathcal{M}})$ se correspondent via $\mathcal{M}_n = f_*(\tilde{\mathcal{M}}_n)$.

Remarque : Un $f_*(\mathcal{D}_X)$ -module holonome $\mathcal{M}$ est dit R.S. s'il admet une bonne filtration $\{\mathcal{M}_n\}$ satisfaisant la propriété (K-K).

Sorite 7.11 : Si X est une variété algébrique lisse, on a une équivalence de catégories $D^b(\mathcal{D}_X)_{h.r} \xrightarrow{\sim} D^b_C(X)$ définie par $\mathcal{M} \mapsto DR(\mathcal{M}^{an})$. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme (X, Y lisses) le foncteur $Rf_* : D^b_C(X) \rightarrow D^b_C(Y)$ correspond au foncteur $\mathcal{M} \rightarrow Rf_* \left(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \right)$.

Dans le cas où f est propre, cela résulte essentiellement de 7.2.

Dans le cas où f est une immersion ouverte (ou même un morphisme étale), cela résulte du fait que pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$ -module holonome R.S., on a

$$DR([f_* \mathcal{M}]^{\text{an}}) = \mathbb{R}f_* (DR(\mathcal{M}^{\text{an}})) \text{ (cf. la démonstration de 7.8).}$$

On est maintenant en position de comparer la transformation de Fourier topologique du § 6 à la transformation de Fourier formelle si familière. Soit donc $\tau : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel algébrique sur la variété algébrique lisse X . Dans la catégorie dérivée $D_C^b(E) = D_C^b(E^{\text{an}})$, on considère la sous-catégorie triangulée $D_{C, \text{mon}}^b(E)$ formée des complexes monodromiques. On note $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ la catégorie des faisceaux pervers monodromiques.

Proposition 7.12 : La catégorie $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ est équivalente à la catégorie des

$\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -modules holonomes R.S. sur lesquels le champ de vecteurs d'Euler eu

et $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ opère de manière localement finie (i.e. pour v une section locale

de ce module, les $\text{eu}^n(v)$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie). Le

foncteur des $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -modules de cette espèce vers $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ est

$$\mathcal{M} \longmapsto DR(\mathcal{D}_{E^{\text{an}}} \otimes_{\tau^{-1} \tau_*(\mathcal{D}_E)} \tau^{-1} \tau_*(\mathcal{M})).$$

Preuve : Il résulte de 7.10 et 7.11 que le ~~s~~dit foncteur fournit une équiva-

lence de catégories entre la catégorie des $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -modules holonomes R.S. et

$\mathcal{M}(E)$. Supposons que eu opère de manière localement finie sur le $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -

module holonome R.S. $\mathcal{M}$. Alors pour toute section locale v de $\mathcal{M}$, on a une

relation du type $(\text{eu})^n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\text{eu})^i(v) = 0$. Il en résulte que eu s'annule

sur la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, donc sur celle de $\tilde{\mathcal{M}}^{\text{an}}$ (notation de 7.10).

D'après le lemme 4.7), $DR(\tilde{\mathcal{M}}^{\text{an}})$ est alors monodromique. Réciproquement si $K^* \in \mathcal{M}_{\text{mon}}^{\text{an}}(E)$,

on a $\theta^* K^* \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* K^*$ où $\theta : \mathbb{C} \times E \longrightarrow E : \theta(\lambda, y) = \exp(\lambda) \cdot y$ d'après

6.10. On a $SS(\text{pr}_2^* K^*) = T_{\mathbb{C}}^* \mathbb{C} \times SS(K^*) \subset T^*(\mathbb{C} \times E)$ et

$$SS(\theta^* K^*) = \{(\lambda, y; \mu, \eta) \in T^*(\mathbb{C} \times E) \text{ tq } \mu = - \sum_{i=1}^n y_i \eta_i\} \quad \text{si } (y_i)_{1 \leq i \leq n}$$

est un système de coordonnées sur les fibres de E , et $\eta_i = \sigma_1(\frac{\partial}{\partial y_i})$. Puisque $SS(\text{pr}_2^* K') = SS(\theta^* K')$ on a $\sum_{i=1}^n y_i \eta_i = 0$ sur $SS(K')$, i.e. eu s'annule sur $SS(K')$. Soit alors $\mathcal{M}$ le $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -module holonome R.S. correspondant à K' ; eu s'annule sur $SS(\mathcal{M})$. Soit $\{\mathcal{M}_n\}$ la bonne filtration de $\mathcal{M}$ canonique de $[K-K]$; eu stabilise chaque $\mathcal{M}_n$. Quitte à se localiser sur X (pour la topologie étale) on supposera $E = \mathbb{A}^n \times X$; soit alors $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ une compactification lisse de X , telle que $\bar{X} - X$ soit un diviseur; on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\tilde{j}} & \bar{E} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \bar{\tau} \\ X & \xleftarrow{j} & \bar{X} \end{array}$$

où $\bar{E} = \mathbb{A}^n \times \bar{X}$.

Par l'équivalence de catégories 7.11, $j_*(\mathcal{M})$ est le $\bar{\tau}_*(\mathcal{D}_{\bar{E}})$ -module correspondant à $\mathbb{R}\tilde{\mathcal{Y}}_*(K')$, qui est visiblement monodromique. La filtration canonique de $\mathcal{M}$ étant la restriction à E de la filtration canonique de $j_*(\mathcal{M})$, on est ramené à prouver la proposition dans le cas où X est propre. Alors $\mathcal{M}_n$ étant $\mathcal{O}_X$ -cohérent, $\text{End}_X(\mathcal{M}_n)$ est une algèbre de dimension finie, donc il existe un polynôme non nul P tel que $P(\underline{eu})$ induit l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n$, ce qui signifie que eu opère de manière localement finie sur chaque $\mathcal{M}_n$, c.q.f.d.

La proposition 6.11 nous permettra de ramener la détermination de $\mathcal{F}$ (ou de $\tilde{\mathcal{F}}$) au cas où le rang de E sur X est égal à 1, ce que nous supposons désormais. Soit $\mathcal{M}$ un $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -module satisfaisant les hypothèses de 7.12. On a une décomposition $\mathcal{M} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} \mathcal{M}_\alpha$, où $\mathcal{M}_\alpha = \{u \in \mathcal{M} \text{ tq } (\underline{eu} - \alpha)^n \cdot u = 0 \text{ pour } n \text{ convenable}\}$. Cette décomposition est stabilisée par le centralisateur de eu dans $\tau_*(\mathcal{D}_E)$. On supposera pour simplifier $E = \mathbb{A}^1 \times X$; alors $\tau_*(\mathcal{D}_E) = D(\mathbb{A}^1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X = \mathbb{C}[x, \frac{\partial}{\partial x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$, $\underline{eu} = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ et le centralisateur

de $\underline{eu}$ est $\mathbb{C} \left[x, \frac{\partial}{\partial x} \right] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{A}^1$ la projection. Si K^* est le faisceau pervers monodromique sur E correspondant à $\mathcal{M}$ au sens de 7.12,

$\psi(K^*)[-1] = \psi f^*(K^*)[-1]$ est un faisceau pervers sur X . Kashiwara a annoncé un procédé pour calculer le $\mathcal{D}_X$ -module holonome R.S. correspondant (que nous transférons sans vergogne à notre situation algébrique) ([K3], voir

aussi [Ma 1, théorème 3.4]). On considère le $\tau_* \mathcal{D}_E[s]$ -module

$\tau_* \mathcal{D}_E[s]. (\mathcal{M} \otimes x^s)$ comme dans [K5]. On a aussi une action de t , par $t(P(s) \otimes m \otimes x^s) = P(s+1) \otimes m \otimes x^{s+1}$, telle que $[t, s] = t$. On doit alors choisir un sous $\tau_* \mathcal{D}_E[s, t]$ -module $\mathcal{N}$ de $\mathbb{C}[s] \otimes \mathcal{M} \otimes t^s$ tel que

- (i) pour u une section de $\mathbb{C}[s] \otimes \mathcal{M} \otimes x^s$, $t^n u$ est une section de $\mathcal{N}$ pour n assez grand
- (ii) $\mathcal{N}$ est un $\tau_* \mathcal{D}_E$ -module cohérent
- (iii) deux valeurs propres distinctes de $s \in \text{End}(\mathcal{N}/t.\mathcal{N})$ ne diffèrent pas d'un entier.

Alors $\mathcal{N}/t.\mathcal{N}$ est le $\tau_* \mathcal{D}_E$ -module holonome R.S. qui représente $\psi(K^*)[-1]$ vu comme faisceau pervers sur E . L'automorphisme de monodromie T de $\psi(K^*)[-1]$ correspond à $\exp(-2\pi i s) \in \text{End}_{\tau_* \mathcal{D}_E}(\mathcal{N}/t.\mathcal{N})$

Avant d'introduire notre choix de $\mathcal{N}$, notons le

Lemme 7.13 : $x : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha+1}$ est bijectif pour $\alpha \neq -1$,
 $\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha-1}$ est bijectif pour $\alpha \neq 0$.

On prend alors $\mathcal{N} = \tau_* \mathcal{D}_E. \left(\sum_{\text{Re}(\alpha) > -1} \mathcal{M}_\alpha \otimes x^s \right)$. s. $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ parce que pour $m \in \mathcal{M}_\alpha$, on a : $(1+s).(m \otimes x^s) = \left(\frac{\partial}{\partial x} x\right)m \otimes x^s$ où $\left(\frac{\partial}{\partial x} x\right)m \in \mathcal{M}_\alpha$. De plus $t.\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ parce que $x. \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}_{\alpha+1}$; la condition (i) est clairement vérifiée par une section u de $\mathcal{M} \otimes x^s$; par ailleurs l'ensemble des u satisfaisant (i) est évidemment un $\tau_* \mathcal{D}_E[s]$ -module, donc (i) est vérifiée. Pour établir (ii), on

déduit du lemme 7.14 que $\mathcal{N}$ est le $\tau_* (\mathcal{D}_E)$ -module engendré par les $\mathcal{M}_\alpha \otimes x^s$, pour $0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1$. Or on voit facilement que chaque $\mathcal{M}_\alpha$ est un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent et que $\{\alpha \in \mathbb{C}, 0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1, \text{ t.q. } \mathcal{M}_\alpha \neq 0\}$ est fini. Il en résulte immédiatement que $\mathcal{N}$ est $\mathcal{D}_X$ -cohérent. Le $\tau_* \mathcal{D}_E$ -module cohérent $\mathcal{M}(\mathcal{N})$ est à support dans $X = X \times \{0\}$; les éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{N})$ annulés par x forment un $\mathcal{D}_X$ -module cohérent (de fait, holonome R.S.) qui correspond au faisceau pervers

$\psi(K')[-1]$ sur X , via l'équivalence de catégories 7.11. Ce $\mathcal{D}_X$ -module n'est autre que $\sum_{0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1} \mathcal{M}_\alpha$; on oublie ici le symbole $\otimes x^s$, devenu inutile; l'action de s sur chaque $\mathcal{M}_\alpha$ n'est autre que celle de $x \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, ce qui vérifie (iii), et montre que $\psi(K')[-1]$ correspond au $\mathcal{D}_X$ -module $\sum_{0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1} \mathcal{M}_\alpha$, l'automorphisme T de $\psi(K')[-1]$ correspondant à $\exp(-2\pi i x \cdot \frac{\partial}{\partial x})$.

Je réfère alors [Ma 1, § 6] pour la démonstration du résultat suivant :

Proposition 7.14 : $\psi(K')[-1]$ correspond au $\mathcal{D}_X$ -module holonome
 $\sum_{-1 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -2} \mathcal{M}_\alpha$, l'automorphisme T étant égal à $\exp(-2\pi i x \cdot \frac{\partial}{\partial x})$.

Plus précisément, le diagramme $\psi(K')[-1] \xrightleftharpoons[v]{u} \psi(K')[-1]$ correspond au diagramme

$$\sum_{0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1} \mathcal{M}_\alpha \xrightleftharpoons[v]{u} \sum_{-1 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -2} \mathcal{M}_\alpha$$

avec $u = -\frac{\partial}{\partial x}$, $v = -g(-2\pi i x \cdot \frac{\partial}{\partial x}) \cdot x$, où g est la série entière telle que
 $y \cdot g(y) = \exp(y) - 1$.

Cette expression de v , naturelle dans le contexte des $\mathcal{D}$ -modules, peut être transformée de la manière suivante

Lemme 7.15 : Le diagramme $\mathcal{M}_\alpha \xrightleftharpoons[v]{u} \mathcal{M}_{\alpha-1}$, pour $0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1$, est iso-
morphe au diagramme $\mathcal{M}_\alpha \xrightleftharpoons[-x]{u} \mathcal{M}_{\alpha-1}$.

Preuve : Comme $0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1$, on a $g(\alpha) \neq 0$, donc $g(-2\pi i x \cdot \frac{\partial}{\partial x})$ est inversible sur $\mathcal{M}_\alpha$, ce qui prouve le lemme.

On touche enfin au but !

Définition 7.16 : Soit $\tau : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel sur la variété algébrique

$X, \pi : E' \rightarrow X$ le fibré dual. Soit $\mathcal{F} : \tau_* (\mathcal{D}_E) \xrightarrow{\sim} \pi_* (\mathcal{D}_{E'})$ l'unique isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_X$ -algèbres tel que

(i) pour σ' une section locale de E' , et g la fonction sur E , homogène de degré 1 sur les fibres de τ , correspondant à σ' ; $\mathcal{F}(g)$ est le champ de vecteurs horizontal sur E' , invariant par translation, tangent à l'image de $X \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\tilde{\sigma}'} E$ où $\tilde{\sigma}'(x, \lambda) = \lambda \cdot \sigma'(x)$ et coïncidant sur cette image avec $d\tilde{\sigma}'(\frac{\partial}{\partial \lambda})$

(ii) pour σ une section locale de E , g' la fonction correspondante sur E' - g' est l'image par $\mathcal{F}$ du champ de vecteurs décrit comme en (i) par $X \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\tilde{\sigma}} E$.

Lorsque $E = X \times \mathbb{A}^n$, $\tau_* (\mathcal{D}_E) = \mathcal{D}_X \otimes D(\mathbb{A}^n)$, $\pi_* (\mathcal{D}_{E'}) = \mathcal{D}_X \otimes D((\mathbb{A}^n)')$ on a $\mathcal{F} = \operatorname{Id} \otimes \mathcal{F}$ où, dénotant $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées linéaires sur $\mathbb{A}^n$, $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ les coordonnées duales sur $(\mathbb{A}^n)'$, on a $\mathcal{F}(x_i) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = -\xi_i$

La transformation de Fourier formelle est un foncteur, des $\tau_* (\mathcal{D}_E)$ -modules vers les $\pi_* (\mathcal{D}_{E'})$ -modules, obtenu par transport de structure à l'aide de l'isomorphisme $\mathcal{F}$.

Remarque 7.17 : $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ est l'automorphisme de $\tau_* (\mathcal{D}_E)$ induit par a_E , la transformation antipodale de E .

Proposition 7.18 : Lorsque le rang E est égal à 1, $\mathcal{F}$ envoie un module holonome R.S. sur $\tau_* (\mathcal{D}_E)$ satisfaisant 7.12 sur un module holonome R.S. $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ sur $\pi_* (\mathcal{D}_{E'})$ satisfaisant 7.12. Si $\mathcal{M}$ correspond à $K' \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ alors $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ correspond à $\tilde{\mathcal{F}}(K') \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E')$.

Preuve : Lorsque $E = X \times \mathbb{A}^1$, cela résulte du fait que $\mathcal{F}(\underline{eu}_E) = \mathcal{F}(x, \frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \xi = -\underline{eu}_E, -1$. On a ainsi $\mathcal{F}(\mathcal{M})_\alpha \simeq \mathcal{M}_{-1-\alpha}$, l'opération de s sur le premier membre correspondant à celle de $-1-s$ sur le deuxième membre. Comme on l'a vu plus haut, pour $0 > \operatorname{Re}(\alpha) \geq -2$, $\mathcal{M}_\alpha$ est un $\mathcal{D}_X$ -module holonome R.S. C'est en fait un $\mathcal{D}_X \otimes \mathbb{C}[\underline{eu}]$ -module. Je dis que le $\pi_*(\mathcal{D}_E)$ -module holonome $\pi_*(\mathcal{D}_E) \otimes_{\mathcal{D}_X \otimes \mathbb{C}[\underline{eu}]} \mathcal{M}_\alpha$ est aussi R.S.

Il est facile de voir que $\mathbb{C}[\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}]$ est libre (à droite) sur $\mathbb{C}[\underline{eu}] = \mathbb{C}[\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}]$ de base $\{\xi^k, (\frac{\partial}{\partial \xi})^k\}$, donc $\pi_*(\mathcal{D}_E)$ est plat comme $\mathcal{D}_X[\underline{eu}]$ -module à droite; on peut donc supposer que, par dévissage, $\mathcal{M}_\alpha$ est annulé par $x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \alpha$, donc par $\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + 1 + \alpha$. Dans ce cas, on a affaire à $\mathcal{M}_\alpha \otimes D(\mathbb{A}^1) \cdot \xi^{-1-\alpha}$ qui est clairement R.S. Comme $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ a une présentation de longueur finie par des $\pi_*(\mathcal{D}_E)$ -modules de ce type, il est R.S. (on utilise le fait que $\mathcal{F}\mathcal{M}$ est engendré par les $\mathcal{M}_\alpha$ pour $0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -2$, avec les relations fournies par $\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_{\alpha-1}$ pour $0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -1$ et par $x : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_{\alpha+1}$ pour $-1 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -2$).

La proposition résulte alors de la description de "Fourier topologique vectoriel" donnée au § 6, ainsi que de 7.13, 7.14 et 7.15.

Dans le cas général, on considère $\mathcal{M}_\alpha$ comme un module sur le commutant de $\underline{eu}$ dans $\pi_*(\mathcal{D}_E)$, correspondant à un faisceau pervers monodromique sur $E-X$, sur lequel $T - \exp(2i\pi\alpha)$ est nilpotent. On renvoie à [v2] pour plus de détails.

Notons que la preuve de 7.18 a utilisé un procédé de reconstruction de $\mathcal{M}$ à partir des $\mathcal{M}_\alpha$ ($0 \geq \operatorname{Re}(\alpha) > -2$) donc en fait à partir de $\psi \xrightleftharpoons[V]{U} \emptyset$. On déduit d'ailleurs aisément des Propositions 6.14 et 6.15 le résultat suivant.

Proposition 7.19: Soit $E = X \times \mathbb{A}^1$. Pour $K' \in D_{c, \text{mon}}^b(E)$, K' est pervers si et seulement si $\psi(K')[-1]$ et $\emptyset(K')[-1]$ sont pervers. Le foncteur associant à K' le diagramme $\psi(K')[-1] \xrightleftharpoons[V]{u} \emptyset(K')[-1]$ induit une équivalence entre la catégorie

$\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ et la catégorie des diagrammes $A' \xrightleftharpoons[u]{u} B'$ où $A', B' \in \mathcal{M}(X)$, $\text{Id} + u \circ v$ et $\text{Id} + v \circ u$ sont des isomorphismes.

Ce fait a été observé par de nombreuses personnes, sous diverses formes : dans le contexte des équations à une variable (à singularité régulière) par Pham ; dans le contexte des faisceaux pervers par Malgrange [Ma 4] et par Deligne [D] (indépendamment).

7.18 admet l'évident

Corollaire 7.20 : $\tilde{\mathcal{F}}$ envoie faisceaux monodromiques pervers sur E vers faisceaux monodromiques pervers sur E' , lorsque $E \rightarrow X$ est de rang 1.

Comme on l'a déjà annoncé, la comparaison entre transformations de Fourier "topologique" et "formelle" utilisera, pour un fibré de rang arbitraire, la proposition 6.11, que nous rappelons. Pour $\bar{w}_{\mathbb{C}} : E \times E' \longrightarrow \mathbb{C} \times E'$, l'application $\bar{w}_{\mathbb{C}}(x, \xi) = (\langle x, \xi \rangle, \xi)$, on a, pour $G' \in D_{\text{mon}}^+(E)$

$$\mathcal{F}_X(G') = \mathcal{F}_{E', (\mathbb{R}\bar{w}_{\mathbb{C}}, ! \text{pr}_1^* G')} |_{\{1\} \times E'}$$

On a alors la

Proposition 7.21 : Le morphisme naturel

$$\mathcal{F}_{E', (\mathbb{R}\bar{w}_{\mathbb{C}}, ! \text{pr}_1^* G')} |_{\{1\} \times E'} \longrightarrow \mathcal{F}_{E', (\mathbb{R}\bar{w}_{\mathbb{C}}, * \text{pr}_1^* G')} |_{\{1\} \times E'}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Cela résulte de la proposition 4.8, de la commutation de $\mathcal{F}_E$ avec changements de base et du fait que si K' est localement constant sur une droite, $\mathcal{F}(K')$ est supporté à l'origine de la droite duale.

Comme au § 4, on en déduit le

Corollaire 7.22 : Les foncteurs $\tilde{\mathcal{F}} \circ D_E$ et $D_{E'} \circ \tilde{\mathcal{F}} : D_{C, \text{mon}}^b(E) \longrightarrow D_{C, \text{mon}}^b(E')$ sont naturellement isomorphes.

Notons aussi le

Corollaire 7.23 : Si $G' \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$, $\tilde{\mathcal{F}}(G')$ est pervers.

Preuve : Notons d'abord que $\tilde{\mathcal{F}}$ préserve la constructibilité : on l'a vu dans le cas où E est de rang 1 (§ 6 ou § 7) et pr_1^* comme $\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C}, !}$ préservent complexes algébriquement constructibles d'après [V1, théorème 2.3.1] .

Si $G' \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$, $\text{pr}_1^*(G') \in D_C^b(E \times E')^{\leq r}$ où r est le rang de E . Alors, le morphisme $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ étant affine, on a $\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C}, !} \text{pr}_1^* G' \in D_C^b(\mathbb{A}^1 \times E')^{\leq r}$ et d'après le corollaire 7.20, son image par $\mathcal{F}_{E'} = \tilde{\mathcal{F}}_{E'}[-1]$ est dans $D_C^b(\mathbb{A}^1 \times E')^{\leq 1+r}$. Sa restriction à $\{1\} \times E'$ est alors dans $D_C^b(E')^{\leq r}$. On en déduit que $\mathcal{F}_X$ envoie $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ dans $D_C^b(E')^{\leq r}$, donc $\tilde{\mathcal{F}}_X$ envoie $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ dans $D_C^b(E')^{\leq 0}$. Comme $\tilde{\mathcal{F}}$ commute à la dualité de Verdier, il envoie $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ dans $D_C^b(E')^{\leq 0} \cap D_C^b(E')^{\leq 0} = D_C^b(E')^0$ (on a utilisé les notations et la proposition de [Br 3]).

Pour décrire $\tilde{\mathcal{F}}$ en termes de $\mathcal{D}$ -modules, on utilise $\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C}, *}$ plutôt que $\mathbb{R} \bar{\omega}_{\mathbb{C}, !}$. On factorise $\bar{\omega}_{\mathbb{C}}$ en $E \times E' \xrightarrow{X} \mathbb{C} \times E \times E' \xrightarrow{X} E' \times \mathbb{C}$. De plus, pour alléger l'exposé, on supposera donnée une trivialisation $E = \mathbb{A}^n \times X$ et on choisira des coordonnées $(x_1, \dots, x_r)$ sur $\mathbb{A}^n$, $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ étant les coordonnées duales sur $(\mathbb{A}^n)^\vee$. Si le $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -module holonome R.S. $\mathcal{M}$ correspond à $G' \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$, alors le $\tau_*(\mathcal{D}_{\mathbb{C} \times E \times E'})$ -module $H_\Gamma^1(p_2^* \mathcal{M})$ correspond à $i_* \text{pr}_1^* G'[r]$ où $\Gamma = i(E \times E')$, et p_2 est la projection $\mathbb{C} \times E \times E' \xrightarrow{X} E$. Les sections de $H_\Gamma^1(p_2^* \mathcal{M})$ sont du type

$$\sum \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i [p_i(\underline{\xi}) \otimes m_i \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle)] \quad \text{où } p_i(\underline{\xi}) \in R((\mathbb{A}^n)^*) = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_r]$$

m_i est une section de M et t est la coordonnée sur $\mathbb{A}^1$.

D'après 7.11, $\mathbb{R}p_* (i_* pr_1^*[r])$ correspond à $\mathbb{R}p_* (DR_{|E}^1 H_{\Gamma}^1(p_2^*\mathcal{M}))$ au prix d'un scandaleux abus de notation). Comme p est un morphisme affine, ceci n'est autre que $p_*(DR_{|E}^1 H_{\Gamma}^1(p_2^*\mathcal{M}))$. La cohomologie en degrés $\neq 0$ de ce complexe de De Rham relatif nous chaut fort peu, puisqu'au bout du compte, d'après 7.23, on doit trouver un $\pi_*(\mathcal{D}_{E,})$ -module en degré 0. Or donc, on est ramené à calculer $p_*(H_{\Gamma}^1(p_2^*\mathcal{M}) / \sum_{i=0}^r \frac{\partial}{\partial x_i} H_{\Gamma}^1(p_2^*\mathcal{M}))$. La fin des opérations consiste à remplacer t par $\frac{\partial}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ par $-\tau$ et à diviser le résultat par $\tau - 1$ (on utilise ici le fait que les 2 transformations de Fourier se correspondent dans le cas de $\mathbb{C} \times E' \longrightarrow E'$). Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (P(\underline{x}) \otimes m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle)) &= P(\underline{x}) \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle) \\ &\quad - \xi_i P(\underline{x}) \otimes m \otimes \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle) \end{aligned}$$

on a $P(\underline{x}) \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle) \equiv \xi_i P(\underline{x}) \otimes m \otimes \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle)$ modulo l'image de $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Comme $\frac{\partial}{\partial t} = -\tau$ et qu'on a divisé par $\tau - 1$, on obtient dans notre $\pi_*(\mathcal{D}_{E,})$ -module l'égalité $P(\underline{x}) \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle) = -\xi_i P(\underline{x}) \otimes m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle)$.

Ceci montre d'abord que comme faisceau, le $\pi_*(\mathcal{D}_{E,})$ -module cherché est isomorphe à $\mathcal{M}$ par $m \longmapsto 1 \otimes m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle)$ et ensuite que $\frac{\partial}{\partial x_i} m$ a pour image $-\xi_i (1 \otimes m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle))$. Que devient l'action de x_i ?

On a $1 \otimes x_i m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle) \equiv 1 \otimes x_i m \otimes (-\frac{\partial}{\partial t}) \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle) \pmod{\tau - 1}$ et ceci n'est autre (ô miracle) que $\frac{\partial}{\partial \xi_i} (1 \otimes m \otimes \delta(t - \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle))$. On a ainsi établi le

Théorème 7.24 : Pour $G^* \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$, correspondant au $\tau_*(\mathcal{D}_E)$ -module holonome $R.S.\mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{F}}(G^*) \in \mathcal{M}_{\text{mon}}(E')$ correspond naturellement à $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ (en particulier $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est à singularités régulières).

En d'autres termes, on a obtenu la compatibilité de la transformation de Fourier topologique vectorielle du § 6 et la transformation de Fourier formelle de tout un chacun. Ceci éclaire par exemple la formule $\tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}} = a_E^*$, ainsi que la commutation à la dualité de Verdier, l'invariance par changement de base, etc... C'est Malgrange qui a le premier suggéré une telle relation entre les deux transformations homonymes.

Il n'est bien sûr pas vrai que $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ soit à singularités régulières dès que $\mathcal{M}$ l'est. L'hypothèse que l'action de eu sur $\mathcal{M}$ est localement finie est donc essentielle.

Corollaire 7.25 (Malgrange) : Supposons $E = \mathbb{A}^r \times X$, et identifions $T^*E = \mathbb{A}^r \times (\mathbb{A}^r)' \times T^*X$ à $T^*E' = (\mathbb{A}^r)' \times \mathbb{A}^r \times T^*X$. Si $\mathcal{M}$ est un $\tau_*(\mathcal{Q}_E)$ module holonome R.S. satisfaisant la condition de 7.12, les cycles caractéristiques de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ se correspondent par cette identification.

Preuve : On peut supposer $\mathcal{M}$ engendré par $m \in \mathcal{M}_\alpha$, de sorte que $\text{Ch}(\mathcal{M})$ est le cycle algébrique correspondant à $\text{gr}(\mathcal{I}_E)$, où $\mathcal{I}_E$ est l'annulateur de m . On a une décomposition $\tau_*(\mathcal{Q}_E) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \tau_*(\mathcal{L}_E)_i$ où $\tau_*(\mathcal{L}_E)_i$ est formé des $P \in \tau_*(\mathcal{L}_E)$ tels que $[\text{eu}, P] = iP$. Comme $m \in \mathcal{M}_\alpha$, on a $\mathcal{I}_E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}_{E,i}$ où $\mathcal{I}_{E,i} = \mathcal{I}_E \cap \tau_*(\mathcal{L}_E)_i$. Soit $\mathcal{I}_E$ l'annulateur de m , vu comme section de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$; on a $\mathcal{I}_{E,i} = \mathcal{F}(\mathcal{I}_E)$; pour $P \in \mathcal{I}_{E,i}$ d'ordre m , on a $\sigma_m(P) = \sum_k Q_k \otimes R_k$, où Q_k est une fonction homogène sur $T^*(\mathbb{A}^n)$ de degré k , R_k est une fonction homogène sur $T^*(X)$ de degré $m-k$. Comme $P \in \mathcal{I}_{E,i}$, on voit que Q_k est homogène de degré $k+i$ en x (vu que $Q_k(\lambda_x, \lambda^{-1}\xi) = \lambda^i Q_k(x, \xi)$). Il en résulte que $\mathcal{F}(P)$ est un opérateur d'ordre $m+i$ et $\sigma_{m+i} \mathcal{F}(P)$ correspond à $\sigma_m(P)$ via $T^*E \xrightarrow{\sim} T^*E'$, d'où le corollaire.

Remarque : Je ne connais pas de preuve topologique de ce corollaire, je puis seulement prouver le résultat plus faible, concernant les variétés caractéristiques.

Remarquons que le théorème 7.24, et la formule d'inversion pour $\mathcal{F}$ impliquent le

Corollaire 7.26 : $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{M}_{\text{mon}}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_{\text{mon}}(E')$ est une équivalence de catégories.

En particulier, si G^* est un objet simple de $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$, $\mathcal{F}(G^*)$ est un objet simple de $\mathcal{M}_{\text{mon}}(E')$. La détermination de $\mathcal{F}(G^*)$ est rarement facile; le corollaire 7.25 peut la simplifier dans certains cas. Notons que $\mathcal{F}$ a des propriétés très similaires de à la "dualité projective" étudiée au § 3. Ce n'est pas un hasard, comme nous allons le montrer.

Théorème 7.27 : Soit E un espace vectoriel (de dimension finie), $P = \mathbb{P}(E)$ l'espace projectif quotient de $E - \{0\}$ par $\mathbb{G}_m$, $\tilde{E}$ l'éclatement de l'origine dans E de sorte qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}(E) = P \\ \pi \downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

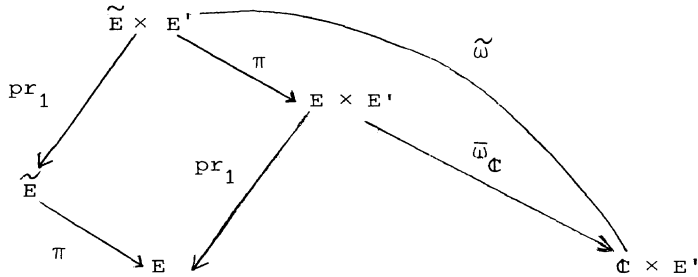
On introduit de même le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}' & \xrightarrow{q'} & \mathbb{P}(E') = \mathbb{P}^V. \\ \pi' \downarrow & & \\ E' & & \end{array}$$

Alors pour $K^* \in D_C^b \mathbb{P}(E)$,

on a un isomorphisme naturel entre la restriction à $E' - \{0\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R} \pi_* q^* K^*)$ et la restriction à $E' - \{0\}$ de $q^* \Phi(K^*)$, où Φ est la transformation (de Radon) étudiée au § 3.

Preuve : On considère le diagramme



Compte tenu de 6.11 et du fait que pr_1 est lisse, on a donc :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R}\pi_* q^* K^*) = \mathcal{F}_{E'}(\mathbb{R}\tilde{\omega}_! \text{pr}_1^* q^* K^*)_{\{1\} \times E'}[r]$$

Un procédé commode pour calculer la restriction à $\{1\} \times E'$ de $\mathcal{F}_{E'}(G^*)$, où G^* est un exemple constructible monodromique sur $\mathbb{C} \times E'$, consiste à restreindre G^* à $\mathbb{R}_+ \times E'$ puis à calculer $\mathbb{R}p_{2,!}(G^*|_{\mathbb{R}_+ \times E'})$ où $p_2: \mathbb{R}_+ \times E' \rightarrow E'$ est la seconde projection. Soit donc $X \subset \tilde{E} \times E'$ l'image inverse de $\mathbb{R}_+ \times (E' - \{0\})$, $i: X \hookrightarrow \tilde{E} \times (E' - \{0\})$, U le complémentaire de X dans $\tilde{E} \times (E' - \{0\})$, $j: U \hookrightarrow \tilde{E} \times (E' - \{0\})$ l'inclusion.

$$\text{On a } \mathcal{F}(\mathbb{R}\pi_* q^* K^*)_{\{1\} \times E' - \{0\}} = \mathbb{R}p_{2,!}(\mathbb{R}j_!(j^*[\text{pr}_1^* q^* K^*])_{\tilde{E} \times E' - \{0\}})[r].$$

Notant $\text{pr}_2: \tilde{E} \times (E' - \{0\}) \rightarrow E' - \{0\}$, on a donc un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}\text{pr}_2! & \mathbb{R}j_!(j^*[\text{pr}_1^* q^* K^*])_{\tilde{E} \times E' - \{0\}}[r] \\ & \nearrow +1 & \searrow \\ \tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R}\pi_* q^* K^*)_{\{1\} \times (E' - \{0\})} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{R}\text{pr}_2! ([\text{pr}_1^* q^* K^*]_{\tilde{E} \times (E' - \{0\})})[r] \end{array}$$

Remarquons maintenant que $\mathbb{R}\text{pr}_2! ([\text{pr}_1^* q^* K^*]_{\tilde{E} \times (E' - \{0\})})$ est constant sur

$$\begin{aligned}
 E' - \{0\} \text{ , de fibre } \mathbb{R}\Gamma_c(\tilde{E}, q^* K^*) &= \mathbb{R}\Gamma_c(P, \mathbb{R}q_! q^* K^*) \\
 &= \mathbb{R}\Gamma_c(P, K^*) [-2]
 \end{aligned}$$

puisque $\tilde{E} \xrightarrow{q} P$ est une morphisme lisse, dont les fibres sont des droites affines.

Considérons ensuite la projection naturelle $U \rightarrow P \times (E' - \{0\})$ où $\tilde{pr}_2 = pr_2 \circ j$.

L'image de cette projection est le complémentaire de la variété d'incidence Z ; la projection est lisse, de fibre typique $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{En vertu du diagramme cartésien} & \tilde{Z} & \xrightarrow{\quad} P \times (E' - \{0\}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & Z & \xrightarrow{i} P \times P^V
 \end{array}$$

on obtient alors, en notant $k : U \hookrightarrow P \times P^V$ l'inclusion du complémentaire de Z , après des manipulations élémentaires :

$$\mathbb{R}pr_{2,!} \circ \mathbb{R}j_! (j^* [pr_1^* q^* K^*]_{|E' - \{0\}}) = q'^* \mathbb{R}p_{2,*} k_! k^* p_1^* K^* [-2]$$

et le morphisme " $\mathbb{R}\Gamma_c(P, K^*)$ " $= q'^* \mathbb{R}p_{2,*} p_1^* K^* \longleftarrow q'^* \mathbb{R}p_{2,*} k_! k^* p_1^* K^*$ étant celui qu'on pense, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R}\pi_* q^* K^*)|_{\{1\} \times (E' - \{0\})} &= q'^* \mathbb{R}p_{2,*} p_1^* K^* [r-2]|_{E' - \{0\}} \\
 &= q'^* \Phi(K^*)|_{E' - \{0\}}
 \end{aligned}$$

avec les notations du § 3, c.q.f.d. (avec mes excuses!).

Amplification 7.28 : On démontrerait de même l'analogue "relatif" de 7.27, E étant un fibré vectoriel sur X , P le fibré $\mathbb{P}(E)$ sur X , etc...

Remarques 7.29 :

(1) $K^* \longmapsto \underline{H}^0 \mathbb{R}\pi_* q^* K^* [1]$ est un foncteur pleinement fidèle de $\mathcal{A}(P)$ (quotient de $\mathcal{M}(P)$ par les faisceaux constants, cf. § 3) dans le quotient de

$\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)$ par les faisceaux constants et ceux concentrés à l'origine. Les résultats sur $\mathcal{F}$ permettraient alors de retrouver ceux du § 3 (équivalence de catégories entre $\mathcal{A}(P)$ et $\mathcal{A}(P^V)$, etc...) attendu que le théorème 7.27 implique que la transformation de Radon est la restriction à $\mathcal{A}(P)$ de la transformation de Fourier :

$$\mathcal{M}_{\text{mon}}(E)/\text{constants} + \text{supportés en } 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{\text{mon}}(E')/\text{constants} + \text{supportés en } 0$$

Comme nous le verrons au § 9, la seule méthode connue pour établir l'invertibilité de la "transformation de Radon" (de P vers P^V) en caractéristique p consiste à la déduire des propriétés de la transformation de Fourier (au sens de Deligne).

(2) En termes de $\mathcal{D}$ -Modules, et en négligeant tout ce qui est concentré à l'origine de E , la construction $K^* \longmapsto R\pi_* q^* K^*[1]$ s'interprète ainsi. K^* correspond à un $D(P)$ -module N . Dans $D(E)$, notons $D(E)_0$ la sous-algèbre des opérateurs de degré 0, i.e. qui commutent au champ d'Euler $\underline{eu}$. On a alors $D(P) = D(E)_0 / (\underline{eu})$, de sorte qu'on peut voir en N un $D(E)_0$ -module.

Alors le $D(E)$ -module $D(E)_0 \otimes N$ est holonome R.S. et correspond à $R\pi_* q^* K^*[1]$ (en méprisant l'origine). On sait (théorème 3.25 et brouillles circumvoisines) que la transformation de Radon est décrite par le $(D(P^V), D(P))$ -bimodule $\Gamma(P^V, \mathcal{D}_{P^V} \otimes_{\mathcal{O}_{P^V}} (\Omega_{P^V}^{r-1})^{\otimes -1}) = M$

$$\text{On a } D(E') \otimes_{D(E')_0} M \xrightarrow{\sim} \Gamma(E', \mathcal{D}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} (\Omega_{E'}^r)^{\otimes -1})$$

$$P \otimes m \longmapsto P \otimes (m \otimes \underline{eu}_{E'})$$

La section $\bigwedge_{i=1}^r (\frac{\partial}{\partial \xi_i})$ de $(\Omega_{E'}^r)^{\otimes -1}$ permet d'identifier $\Gamma(E', \mathcal{D}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} (\Omega_{E'}^r)^{\otimes -1})$ à $D(E')$, et le considérer comme un $D(E')$ -module à droite, donc comme un $D(E)$ -module à droite, en utilisant $\mathcal{F} : D(E) \xrightarrow{\sim} D(E')$. Le $D(E)$ -module obtenu est

isomorphe à $M \otimes_{D(E)} D(E)$, comme le prouverait un calcul stupide. Pour N un $D(E)$ -module, on a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D(E) \otimes_{D(E)} N) &= D(E') \otimes_{D(E)} (D(E) \otimes_{D(E)} N) = (D(E') \otimes_{D(E')} M) \otimes_{D(E)} (D(E) \otimes_{D(E)} N) \\ &= (D(E') \otimes_{D(E')} M) \otimes_{D(E)} N = D(E') \otimes_{D(E')} (M \otimes_{D(E)} N) \end{aligned}$$

(le lecteur qui n'aurait pas bien compris est prié de faire semblant, comme l'auteur).

VIII) UN LEMME TECHNIQUE SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER FORMELLE.

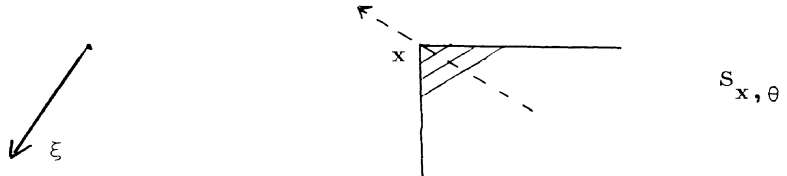
Soit E un espace vectoriel complexe, de dual E' , $\mathcal{F}: D(E) \rightarrow D(E')$ l'isomorphisme défini en 7.16. On rappelle que si M est un $D(E)$ -module, on note $\mathcal{F}(M)$ le $D(E')$ -module obtenu au moyen de cet isomorphisme. Comme l'a prouvé Bernstein [B], si M est holonome, il en est de même de $\mathcal{F}(M)$. Toutefois, le fait que M soit à singularités régulières n'implique pas que $\mathcal{F}(M)$ le soit (considérer par exemple $M = \mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}] / (x-1)$); seule l'hypothèse que l'action du champ de vecteurs d'Euler $\underline{eu}$ est localement finie sur M nous a permis de nous assurer que $\mathcal{F}(M)$ est R.S (cf. théorème 7.24).

Pour M holonome R.S sur E , soit K^* le faisceau pervers sur E correspondant, au sens du § 7 ($K^* = DR(\mathcal{A}_E^{an})$) ; $\mathcal{F}(M)$ n'étant pas forcément R.S.

Toutefois, on peut lui associer un faisceau pervers $L^* = DR(\mathcal{F}(\mathcal{A}_E^{an}))$, qui bien entendu ne dépend que de K^* . Grâce à l'utilisation de la "transformation de Laplace", Malgrange a donné la description suivante de L^* , dans le cas où E est de dimension 1 :

Théorème 8.1 (Malgrange, non publié, voir toutefois [Ma 3], [Ma 4]) :

L^* est un faisceau pervers monodromique sur E' ; $L_o^* = R\Gamma_c(E, K^*)$ et pour $\xi \neq 0$, $L_\xi^* = R\Gamma_{S_\xi}(K^*[1])$, où S_ξ est la famille de supports fermés de E , engendrée par les secteurs $S_{x,\theta} = \{y \in E \text{ t. q. } \text{Arg}(\xi(y-x)) \leq \theta\}$, où $x \in E$ et $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$



La monodromie T de L^* est celle qu'on pense, et la flèche de spécialisation $L_o^* = R\Gamma_c(K^*) \rightarrow L_\xi^* = R\Gamma_{S_\xi}(K^*)$ est celle induite par inclusion de la famille des

compacts dans E , dans S_{ξ} .

Remarques 8.2 : (1) Cet énoncé n'est qu'un petit morceau des résultats obtenus par Malgrange, qui est capable de décrire $\mathfrak{F}(M)$ lorsque M est régulier à distance finie, et est d'irrégularité de Katz > 1 au point à l'infini.

Dans sa terminologie, les "microsolutions globales de M " décrivent les solutions de $\mathfrak{F}(M)$. Le terme "microsolutions globales" est justifié par le fait que les microsolutions de M en un point x (i.e. les solutions à valeurs dans $C_{\{x\}}^{\mathbb{R}}|_E$) s'obtiennent en considérant la cohomologie du complexe $\text{Sol}(\mathcal{M}^{\text{an}})$ à support dans des secteurs d'ouverture $> \pi$ et de direction donnée. Dans le théorème 8.1, on fait subir à ces secteurs des translations arbitraires : au lieu d'être microlocalisé (i.e. localisé en x et en ξ), on s'est délocalisé (ou globalisé) en la variable x , mais on reste local en ξ .

(2) Dans le cas où K^* est monodromique, on vérifie facilement que cette définition redonne la "transformation de Fourier topologique vectorielle" du § 6.

Corollaire 8.3 : Pour $\xi \in E' - \{0\}$, on a $H^i(L_{\xi}^*) = 0$ pour $i \neq -1$, et la dimension de $H^{-1}(L_{\xi}^*)$ est égale au "nombre total de cycles évanescents pour K^* ", défini par

$$\dim.\text{tot.}\Phi(K^*) = \sum_{x \in E} \dim H^{-1}(\Phi K^*)_x = \sum_{x \in E} [\chi(K_x^*) - \chi(K_{\eta}^*)] ,$$

où ΦK^* est calculé vis-à-vis de $\text{Id} : E \rightarrow E = \mathbb{C}$ et $\chi(-)$ dénote une caractéristique d'Euler, η étant un point général de E (tel que K^* est localement constant dans un voisinage de $\eta)$.

Preuve : Soit Σ l'ensemble fini de points de E au voisinage desquels K^* n'est pas localement constant, et soit $S_{x,\theta}$ un secteur du type 8.1, contenant Σ en son intérieur. Considérons le triangle distingué

$$\begin{array}{ccc}
 L_{\xi}^{\bullet} & \longrightarrow & \mathbb{R}\Gamma(E, K^{\bullet})[1] \\
 \nearrow +1 & & \searrow \\
 & \mathbb{R}\Gamma(E-S_{x,\theta}, K^{\bullet})[1] &
 \end{array}$$

La restriction à $E - S_{x,\theta}$ de $K^{\bullet}$ est un faisceau localement constant, placé en degré -1 , et de rang égal à $-\chi(K_{\eta}^{\bullet}) = \dim \underline{H}^1(K^{\bullet})_{\eta}$. Comme $E - S_{x,\theta}$ est contractile, on a $H^i(E-S_{x,\theta}, K^{\bullet}) = 0$ pour $i \neq -1$ et la dimension de $H^{-1}(E-S_{x,\theta}, K^{\bullet})$ est égale à $-\chi(K_{\eta}^{\bullet})$, donc $\chi(\mathbb{R}\Gamma(E-S_{x,\theta}, K^{\bullet})) = \chi(K_{\eta}^{\bullet})$.

On calcule $\chi(\mathbb{R}\Gamma(E, K^{\bullet}))$ par la célèbre formule d'Euler-Poincaré sur une courbe, qui lui attribue la valeur $\chi(K_{\eta}^{\bullet}) + \dim.\text{tot.}\Phi(K^{\bullet})$. On obtient

$$\begin{aligned}
 \dim \underline{H}^{-1}(L_{\xi}^{\bullet}) &= -\chi(L_{\xi}^{\bullet}) = \chi(\mathbb{R}\Gamma(E, K^{\bullet})) - \chi(\mathbb{R}\Gamma(E - S_{x,\theta}, K^{\bullet})) \\
 &= \dim.\text{tot.}\Phi(K^{\bullet}) .
 \end{aligned}$$

Traduction 8.4 : $\mathfrak{F}(M)|_{E-\{0\}}$ est un fibré vectoriel à connection (intégrable), de rang égal à $\dim.\text{tot.}\Phi(K^{\bullet})$, où $K^{\bullet}$ correspond à M .

On peut donner du corollaire 8.3 une démonstration purement algébrique, indépendante du théorème 8.1 ; en fait, on prouvera 8.4. Par dévissage en M , on se ramène à étudier deux cas (on identifie E à $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$)

(a) M est à support ponctuel ; ce cas est trivial ;

(b) M est égal à $\Gamma(\mathbb{P}^1 - \{\infty\} - S, \mathfrak{F})$, où $\mathfrak{F}$ est (le faisceau des germes de sections) d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ muni d'une connection méromorphe ∇ telle que (i) ∇ est holomorphe en dehors de $\{\infty\} \cup S$, où S est un ensemble fini de points de $\mathbb{A}^1$, choisi minimal.

(ii) ∇ est à pôles d'ordre ≤ 1 aux points de S et en ∞ (i.e.

$\nabla : \mathfrak{F} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log(S \cup \{\infty\})) \otimes \mathfrak{F}$ dans la terminologie de Deligne).

Le rang de $\mathfrak{F}(M)|_{E-\{0\}}$ est égal à la dimension de $\mathfrak{F}(M)/(\xi-1)\mathfrak{F}(M)$ ou encore à celle de $M/(\frac{d}{dx} + 1)M$. Le théorème 8.1 implique que $\frac{d}{dx} + 1$ opère injectivement

sur M ; cela se voit aisément, car dans le cas contraire on aurait un morphisme non nul de $\mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}]/\mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}] \cdot (\frac{d}{dx} + 1)$ vers M , ce qui est impossible, le premier module étant simple et à singularité irrégulière à l'infini. On doit donc calculer l'indice du complexe $M \xrightarrow{d/dx + 1} M$. Pour cela, on construit une suite $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k$ de sous- $\mathbb{C}[d/dx]$ -modules M_k de M , tels que le complexe $M_k \xrightarrow{d/dx + 1} M_k$ soit à indice, et d'indice indépendant de k , et que M soit la réunion des M_k . On vérifiera que

$M_k / (\frac{d}{dx} + 1)M_k$ s'envoie bijectivement sur $M_{k+1} / (\frac{d}{dx} + 1)M_{k+1}$, et on déduira que l'indice de $M \xrightarrow{d/dx + 1} M$ est égal à celui de $M_k \xrightarrow{d/dx + 1} M_k$.

On pose $M_k = \Gamma(\mathbb{P}^1 - S, \mathfrak{F}(k(\infty)))$; si $t = \frac{1}{x}$ est une coordonnée locale en ∞ , on a $\frac{d}{dx} = -t^2 \frac{d}{dt}$; d'après (b), (ii), $t \cdot \frac{d}{dt}$ préserve $\mathfrak{F}$, donc $\mathfrak{F}(k(\infty))$, et il en est de même de $t^2 \cdot \frac{d}{dt}$; donc M_k est un sous- $\mathbb{C}[d/dx]$ -module de M et en fait, on a $\frac{d}{dx}(M_k) \subset M_{k-1}$ pour $k \geq 1$. Filtrons ensuite chaque M_k par les $M_k(\ell) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathfrak{F}(k(\infty) + \ell \cdot S))$. On a, d'après (b), (ii) et (i) : $\frac{d}{dx}M_k(\ell) \subset M_k(\ell+1)$ et chaque $M_k(\ell)$ est de dimension finie. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_k(\ell) \longrightarrow M_k(\ell+1) \longrightarrow \Gamma(S, \mathfrak{F}(k(\infty) + \ell \cdot S) \otimes_{\mathcal{O}_S}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathfrak{F}(k(\infty) + \ell \cdot S)) \longrightarrow 0$$

Il existe ℓ_0 tel que pour $\ell \geq \ell_0$, on ait $H^1(\mathbb{P}^1, \mathfrak{F}(k(\infty) + \ell \cdot S)) = 0$. De plus, pour ℓ assez grand, la flèche induite par $\frac{d}{dx} + 1$ (ou par $\frac{d}{dx}$, cela revient au même), de $M_k(\ell+1) \subset M_k(\ell)$ vers $M_k(\ell+2) \subset M_k(\ell+1)$ est bijective, en vertu de la suite exacte plus haut. Cela signifie que le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} M_k(\ell) & \xrightarrow{d/dx + 1} & M_k(\ell+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_k(\ell+1) & \xrightarrow{d/dx + 1} & M_k(\ell+2) \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme. Le complexe $M_k \xrightarrow{d/dx + 1} M_k$ est donc à indice, et son indice est celui de $M_k(\ell) \xrightarrow{d/dx + 1} M_k(\ell+1)$ pour $\ell \gg 0$, à savoir $\dim M_k(\ell+1) - \dim M_k(\ell) = |S| \cdot \text{rang}(\mathfrak{F})$.

On doit encore vérifier que l'inclusion du complexe $M_k \xrightarrow{d/dx + 1} M_k$ dans le complexe $M_{k+1} \xrightarrow{d/dx + 1} M_{k+1}$ est un quasi-isomorphisme. Vu l'injectivité de $\frac{d}{dx} + 1$, il faut voir que si $m \in M_k$ est égal à $(\frac{d}{dx} + 1)m_1$, pour $m_1 \in M_{k+1}$ alors $m_1 \in M_k$ (en effet, on sait que $M_k \mid (\frac{d}{dx} + 1)M_k$ et $M_{k+1} \mid (\frac{d}{dx} + 1)M_{k+1}$ sont de même dimension). Or $m = (\frac{d}{dx} + 1)m_1 \in M_k$ et $\frac{d}{dx}(m_1) \in M_k$ puisque $m_1 \in M_{k+1}$, donc $m_1 = m - \frac{d}{dx}(m_1) \in M_k$.

On a donc prouvé que le conoyau de $\frac{d}{dx} - 1$ sur M est de dimension égale à $|S| \cdot \text{rang}(\mathcal{F})$. Comme $M = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{M})$ où le $\mathbb{P}^1$ -Module holonome $R.S.\mathcal{M}$ a une restriction à $\mathbb{P}^1 - \{\infty\} - S$ qui est un fibré vectoriel à connection intégrable, et est égal à $j_* j^* \mathcal{M}$, où j est l'inclusion de $\mathbb{P}^1 - (\{\infty\} \cup S)$, on a $DR(\mathcal{M}^{\text{an}}) = Rj_* K[1]$, où K est un système local sur $\mathbb{P}^1 - (\{\infty\} \cup S)$, de rang égal à $\text{rang}(\mathcal{F})$. Le faisceau $\Phi(Rj_* K)|_{\mathbb{A}^1}$ est concentré en S , et son rang en un point de S est égal à $\text{rang}(\mathcal{F})$.

On a donc $\dim.\text{tot.}\Phi DR(\mathcal{M}^{\text{an}}) = |S| \cdot \text{rang}(\mathcal{F})$, ce qui conclut la preuve algébrique du corollaire 8.3.

Une fois démontré 8.3 ou son équivalent 8.4, on prouve la généralisation de 8.4 au cas où E est de dimension arbitraire ; on appelle rang générique de $\mathcal{F}(M)$ le rang de $\mathcal{F}(M)|_U$, lorsque cette restriction de $\mathcal{F}(M)$ à un ouvert U de E' est un fibré vectoriel à connection intégrable.

Proposition 8.5 : Soit M un $D(E)$ -module holonome régulier $R.S.$, correspondant à $K^* \in \mathcal{M}(E)$. Il existe un ouvert U de E' tel que, pour ξ parcourant U , $\dim.\text{tot.}\Phi(R\xi_! K^*)$ est égal au rang générique de $\mathcal{F}(M)$.

Corollaire 8.6 : Pour $\xi \in U$, le rang générique de $\mathcal{F}(M)$ est égal à $\chi(R\Gamma_c(E, K^*)) - \chi(R\Gamma_c(\xi^{-1}(\lambda), K^*|_{\xi^{-1}(\lambda)}))$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ général.

Pour déduire le corollaire de la proposition, on observe que $R\Gamma_c(E, K^*)$ est égal à $R\Gamma_c(\mathbb{C}, R\xi_! K^*)$ et que $R\Gamma_c(\xi^{-1}(\lambda), K^*|_{\xi^{-1}(\lambda)})$ est la fibre en λ de $R\xi_! K^*$.

et on applique la formule d'Euler-Poincaré à $R\xi_! K^*$.

Preuve de la proposition : La démonstration du théorème 7.24 prouve que

$$\mathcal{D}_{E', D(E')} \otimes \mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_{E'} \left(\int_{\omega_{\mathbb{C}}}^0 \text{pr}_1^* \mathcal{M} \right) \otimes \mathcal{O}_{\{1\} \times E'}, \quad \text{où } \mathcal{M} = \mathcal{D}_{E, D(E)} M \text{ (on note}$$

$\int_{\omega_{\mathbb{C}}}^0 (-)$ le faisceau de cohomologie en degré 0 de

$$\int_{\omega_{\mathbb{C}}}^0 (-) = \mathbb{R}\overline{\omega}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_{\mathbb{C} \times E', -E \times E'} \otimes -). \text{ Le } \mathcal{D}_{\mathbb{C} \times E'}\text{-Module holonome } R.S \int_{\omega_{\mathbb{C}}}^0 \text{pr}_1^* \mathcal{M}$$

correspond à $H_{\mu}^0(\mathbb{R}\overline{\omega}_{\mathbb{C},*}(\text{pr}_1^* K^*)[r])$ où $r = \dim(E)$. Le rang générique du transformé de Fourier de $\int_{\omega_{\mathbb{C}}}^0 \text{pr}_1^* \mathcal{M}$, restreint à $\{1\} \times E'$, peut se calculer comme le

le rang générique de $\mathcal{F}([\int_{\omega_{\mathbb{C}}}^0 \text{pr}_1^* \mathcal{M}] \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \{\xi\}}])$ pour ξ dans un ouvert dense

U de E' . Il résulte de la proposition 7.21 qu'on peut remplacer

$\mathbb{R}\overline{\omega}_{\mathbb{C},*}(\text{pr}_1^* K^*)[r]$ par $\mathbb{R}\overline{\omega}_{\mathbb{C},!}(\text{pr}_1^* K^*)[r]$ sans changer la restriction à $\{1\} \times E'$

du transformé de Fourier. Finalement, le rang générique de $\mathcal{F}(M)$, est égal, en vertu du corollaire 8.3 (ou de 8.4) à

$$\dim.\text{tot. } \Phi(H_{\mu}^0(\mathbb{R}\overline{\omega}_{\mathbb{C},!}(\text{pr}_1^* K^*)[r]_{\mathbb{C} \times \{\xi\}})) \quad \text{pour } \xi \in U,$$

donc à $\dim.\text{tot. } \Phi(H_{\mu}^0(\mathbb{R}\xi_!(K^*)))$. Comme pour $i \neq 0$, $H_{\mu}^i \mathbb{R}\overline{\omega}_{\mathbb{C},!}(\text{pr}_1^* K^*)$ est constant sur $\mathbb{C} \times \{\xi\}$ (puisque après tout $\mathcal{F}(M)$ a seulement de la cohomologie en degré 0), quitte à rétrécir U , on a $\dim.\text{tot. } \Phi(H_{\mu}^i \mathbb{R}\xi_!(K^*)) = 0$ pour $i \neq 0$, d'où résulte la proposition.

Remarque 8.7 : La constante $\dim.\text{tot. } \Phi(\mathbb{R}\xi_! K^*)$ (pour ξ général) intervient dans la majoration uniforme des sommes trigonométriques, qui fait l'objet du § 10. La proposition 8.5 donne un procédé de calcul de cette constante, qu'il serait intéressant de rendre aussi efficace que possible. Notons que si $K^* = \mathbb{C}_V[\dim V]$, où $V \subset \mathbb{C}^n$ est l'hypersurface lisse d'équation

$f(\underline{x}) = x_1 \dots x_n - 1 = 0$, on a

$M = D(E) \cdot \delta(f) = D(E)/D(E) \cdot f + \sum_{1 \leq i, j \leq n} D(E) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$, du simple fait que $V = F^{-1}(0)$ est lisse, donc ici

$$M = D(E)/D(E) \cdot f + \sum_{1 \leq i, j \leq n} D(E) \cdot \left\{ (x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_j} - (x_1 \dots \widehat{x_j} \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$$

dont on vérifie facilement qu'il est égal à

$$D(E)/D(E) \cdot f + \sum_{2 \leq j \leq n} D(E) \cdot \left(x_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

(en utilisant le fait que $(f, x_1 \dots \widehat{x_i} \dots \widehat{x_j} \dots x_n) = R(E)$).

Donc $\mathfrak{F}(M) = D(E)/I$, où I est l'idéal à gauche engendré par $\frac{\partial}{\partial \xi_1} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_n} - 1$ et par les $\xi_j \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \xi_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1}$ (pour $2 \leq j \leq n$). Il est facile de voir que $\text{gr}(I)$ est engendré par les symboles des générateurs de I qu'on a exhibés. Le rang générique de $\mathfrak{F}(M)$ est égal, pour $\underline{\xi}$ général, à la multiplicité d'intersection en 0 des hypersurfaces $x_1 \dots x_n = 0$, $\xi_i \cdot x_i - \xi_1 \cdot x_1 = 0$ ($2 \leq j \leq n$), qui est égale au produit des degrés, c'est-à-dire à n .

Le calcul similaire lorsque $F = X_1^{d_1} + X_2^{d_2} + \dots + X_n^{d_n}$ est un peu plus difficile (il faut commencer par trouver des générateurs du gradué de l'idéal I) et conduit, lorsque $d_1 \geq d_2 \dots \geq d_n$, à la valeur du rang générique de $\mathfrak{F}(M)$, à savoir $d_1 \cdot (d_2 - 1) \dots (d_n - 1)$.

Remarque 8.8 : L étant défini au début du numéro, il résulte de 8.1 et de la méthode de démonstration de 8.5 que pour $\xi \in U$, L_{ξ}^* est égal à $R\Gamma_T(E, K^*)$ où T est la famille de supports image inverse, pour $\xi: E \rightarrow \mathbb{C}$, de la famille de supports S introduite en 8.1 (où on prend $\xi = 1$, de sorte que les $S_{x, \theta}$ sont des secteurs de bissectrice horizontale). Notons que sur un fermé F de T , on a une majoration $|e^{\langle x, \xi \rangle}| \leq K \cdot e^{-C|x|}$. Comme l'a observé Deligne, cela semble indiquer que $\mathfrak{F}$ devait s'interpréter en termes de cohomologie "à croissance".

IX) LA TRANSFORMATION DE FOURIER-DELIGNE (d'après Katz et Laumon [Ka-La]).

Sur les fibrés vectoriels en caractéristique p , l'analogue de la "transformation de Fourier formelle" est la transformation de Fourier-Deligne. Je ne sais pas à quelle date cette transformation a été inventée par Deligne. Il l'a mentionnée dans un cours à l'I.H.E.S. en 1980-81 ; on observera aussi qu'elle joue un rôle géométrique important, quoiqu'implicite, dans la construction géométrique par Springer des représentations des groupes de Weyl ([S1]), sujet sur lequel nous nous étendrons au § 11.

Il est toutefois probable que cette transformation devait attendre la découverte (par Deligne, Beilinson et Bernstein) de faisceaux pervers, avant d'affirmer toutes ses potentialités. Au printemps 1982, Malgrange a exposé à Paris ses idées sur la "transformation de Fourier vectorielle" et dès lors Laumon s'est employé à défricher de manière analogue les propriétés (bien) cachées de la transformation de Fourier-Deligne. En collaboration avec Katz, il en a déduit des résultats remarquables sur les sommes trigonométriques. Presque tous les résultats qui suivent sont empruntés à leur futur article [Ka-La], où on renvoie pour toute(s) démonstration(s).

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, et ℓ un nombre premier, $\ell \neq p$. Soit S un schéma de type fini sur k , $E \xrightarrow{\tau} S$ un fibré vectoriel sur S et $E' \xrightarrow{\pi} S$ le fibré vectoriel dual. On note

$$\begin{array}{ccc} & E \times_S E' & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ E & & E' \end{array}$$

les deux projections $\mu : E \times_S E' \rightarrow A_S^1$ la flèche d'évaluation.

Choisissons un homomorphisme non trivial $\psi : \mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Soit $h : A_S^1 = S[t] \rightarrow A_S^1 = S[x]$ le revêtement d'Artin-Schreier

défini par $t^p - t = x$. Le groupe de Galois de ce revêtement, isomorphe à $\mathbb{F}_p$, opère sur le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau lisse $h_*(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, A_S^1)$. On note $\mathcal{L}_\psi$ le sous-faisceau de $h_*(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, A_S^1)$ sur lequel $\mathbb{F}_p^{-1}$ opère par le caractère ψ^{-1} : c'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau lisse de rang 1 sur A_S^1 .

Définition 9.1 : La transformation de Fourier-Deligne (pour le fibré E, relativement au caractère ψ) est le foncteur $\mathfrak{F}: D_c^d(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_c^b(E', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tel que $\mathfrak{F}(K^*) = \mathbb{R} \operatorname{pr}_{2,!} (p_1^* K^* \otimes^{\mathbb{L}} \mu^* \mathcal{L}_\psi)[r]$, où r est la dimension relative de E.

Remarque : Pour être cohérent avec les notations du § 6, on devrait noter ce foncteur $\tilde{\mathfrak{F}}$ plutôt que $\mathfrak{F}$; on s'en dispensera.

Exemple 9.2 : Soit $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q)$, où q est une puissance de p. A tout objet K^* de $D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ associons la fonction $\chi_{K^*}: E(\mathbb{F}_q) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ définie par $\chi_{K^*}(x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F_{x^*}^* H^i(K^*)_{\overline{x}})$. Calculons $\chi_{\mathfrak{F}(K^*)}(\xi)$ pour $\xi' \in E'(\mathbb{F}_q)$. Le "théorème de changement de base propre", appliqué à $\mathbb{R} \operatorname{pr}_{2,!}$ et la formule des traces de Lefschetz, montrent que

$$\begin{aligned} \chi_{\mathfrak{F}(K^*)}(\xi) &= (-1)^r \cdot \sum_{x \in E(\mathbb{F}_q)} \chi_{K^*}(x) \cdot \operatorname{Tr}(F_{(\underline{x}, \underline{\xi})}^*, [\mu^* \mathcal{L}_\psi](x, \xi)) \\ &= (-1)^r \cdot \sum_{x \in E(\mathbb{F}_q)} \chi_{K^*}(x) \cdot \operatorname{Tr}(F_{\langle x, \xi \rangle}^*, (\mathcal{L}_\psi)_{\langle x, \xi \rangle}) \end{aligned}$$

où $\langle x, \xi \rangle = \mu(x, \xi) \in A^1(\mathbb{F}_q)$. Un calcul élémentaire [Ka, § 3.5] montre alors que

$$\chi_{\mathfrak{F}(K^*)}(\xi) = (-1)^r \cdot \sum_{x \in E(\mathbb{F}_q)} \chi_{K^*}(x) \cdot \psi(\operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_q | \mathbb{F}_p}(\langle x, \xi \rangle))$$

donc, à un signe près, $\chi_{\mathfrak{F}(K^*)}$ est la transformé de Fourier, au sens ordinaire, de χ_{K^*} . Ce fait est bien entendu à la base des applications de $\mathfrak{F}$ à l'étude des sommes trigonométriques.

On a une "formule d'inversion" tout à fait analogue à celle du théorème 6.5

Proposition 9.3 : Notons $\mathcal{F}' : D_c^d(E', \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la transformation de Fourier (-Deligne) pour le fibré E' , relative au caractère ψ . Si $a : E \rightarrow E$ est la transformation antipodale, on a un isomorphisme naturel, pour K' dans $D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$:

$$\mathcal{F}' \circ \mathcal{F}(K') \simeq a_* a^* K'(-r) \quad .$$

La démonstration est standard, à partir des faits suivants :

- (a) si $A_S^1 \times A_S^1 \xrightarrow{\Sigma} A_S^1$ est la loi d'addition, on a canoniquement $\Sigma^* \mathbb{L}_\psi = \mathbb{L}_\psi \boxtimes \mathbb{L}_\psi$ (ceci est à comparer au fait que e^x est un caractère de $\mathbb{C}$, donc pour $\Sigma = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Sigma^*(\mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}] \mid \mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}] \cdot (\frac{d'}{dx} - 1))$ est le $\mathbb{C}[x_1, x_2, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$ -module $\mathbb{C}[x_1, \frac{\partial}{\partial x_1}] / (-\frac{\partial}{\partial x_1}) \boxtimes \mathbb{C}[x_2, \frac{\partial}{\partial x_2}] / (\frac{\partial}{\partial x_2} - 1)$;
- (b) Pour $\xi : A_k^n \rightarrow A_k^1$ une forme linéaire non nulle, on a $R\Gamma_c(A_k^n, \xi^* \mathbb{L}_\psi) = 0$ où k est algébriquement clos de caractéristique p (cf. [SGA 4 1/2, Sommes trigonométriques, théorème 2.7]).

On a maintenant l'analogie suivant du théorème 6.1 :

Proposition 9.4 [Ka-La] : 1) La transformation de Fourier-Deligne commute aux changements de base,

2) Soit $u : E \rightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur S , $t_u : F' \rightarrow E'$ le morphisme transposé. Pour $K' \in D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ on a canoniquement

$$\mathcal{F}(Ru_! K') = (t_u)^* \mathcal{F}(K') [rg F - rg E] \quad .$$

Corollaire 9.5 : Soit $\overline{w} : E \times_S E' \rightarrow A_S^1 \times_S E'$ où $\overline{w} = (\mu, pr_2)$ ($\overline{w}(x, \xi) = (\langle x, \xi \rangle, \xi)$). On a alors, pour $K' \in D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, $\mathcal{F}_S(K') = \mathcal{F}_E(R\overline{w}_! pr_1^* K') / \{1\} \times E' [rg E - 1]$.

La démonstration 9.4 est ici très facile (théorème de changement de base propre) et 9.5 s'en déduit formellement, comme 6.2 se déduit formellement de 6.1. Introduisant le produit de convolution dans $D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, comme au § 6, on a le

Corollaire 9.6 : Pour F^*, G^* dans $D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a :

$$\mathfrak{F}(F^* * G^*) = \mathfrak{F}(G^*) \otimes^{\mathbb{L}} \mathfrak{F}(F^*)[+ \operatorname{rg} E] .$$

Corollaire 9.7 : Avec les notations de l'énoncé 2) de 9.4, pour

$H^* \in D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a $\mathfrak{F}(u^* H^*) = \mathbf{R}(t_u)_! (\mathfrak{F}(H^*))$.

Poursuivant l'analogie, la proposition 7.21 a pour pendant le théorème suivant, dû à Laumon

Théorème 9.8 [Ka-La] : Le morphisme naturel

$$\mathbf{R} \operatorname{pr}_{2,!} (\operatorname{pr}_1^* K^* \otimes^{\mathbb{L}} \mu^* \mathcal{F}_\psi) \longrightarrow \mathbf{R} \operatorname{pr}_{2,*} (\operatorname{pr}_1^* K^* \otimes^{\mathbb{L}} \mu^* \mathcal{F}_\psi)$$

est un isomorphisme, pour tout $K^* \in D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

On renvoie à loc. cit. pour la démonstration, qui consiste à démontrer que pour $\overline{E}$ la compactification projective de E , et $j: E \times E' \rightarrow \overline{E} \times E'$ l'inclusion, le faisceau $j_!(\mu^* \mathcal{F}_\psi)$ est localement acyclique relativement à la projection $\operatorname{pr}_1: \overline{E} \times E' \rightarrow \overline{E}$. A titre de curiosité, signalons la démonstration suivante lorsque le rang du fibré $E \rightarrow S$ est égal à 1 ; dans ce cas, il s'agit de montrer la nullité de $\psi(j_!(\mu^* \mathcal{F}_\psi))$ (ψ étant pris relativement à $U \times E' \xrightarrow{\operatorname{pr}_1} U \xrightarrow{\sim} A^1$, où $U = \overline{E} - \{0\}$ est identifié à A^1 , et est muni de la coordonnée $t = 1/x$). Comme $j_!(\mu^* \mathcal{F}_\psi)[2]$ est pervers, $\underline{\psi} = \psi(j_!(\mu^* \mathcal{F}_\psi))[1]$ est

pervers, donc $\underline{\psi}$ a au plus de la cohomologie en degrés 0 et 1. On voit facilement que la restriction de $\underline{H}^0(\underline{\psi})$ à $E' - \{0\}$ est nulle, sa fibre en $x \in E' - \{0\}$ étant la limite inductive des groupes $H^0(V \times_{\overline{\eta}} \mu^* \mathbb{Z}_{\psi})$ (par abus de langage), où V parcourt les voisinages étales de $(0, x)$ dans $U \times E' - \{0\}$, $\overline{\eta}$ étant un point générique géométrique de l'hensélisé strict de U en 0 . Dans nos coordonnées locales, on a $\mu(t, \xi) = \xi/t$ et la fonction ξ/t sur $V \times_{\overline{\eta}} \mu^* \mathbb{Z}_{\psi}$ n'est pas de la forme $g^P - g + \text{Cte}$, parce que revêtement d'Artin-Schreier ainsi défini de $U \times E'$ est horriblement ramifié le long de $\{0\} \times E'$. Il en résulte que $H^0(V \times_{\overline{\eta}} \mu^* \mathbb{Z}_{\psi}) = 0$, donc $\underline{H}^0(\underline{\psi})|_{E' - \{0\}} = 0$; comme $\underline{\psi}[1]$ est pervers, $\underline{H}^0(\underline{\psi})$ n'a pas de section non nulle à support ponctuel, donc est nul. La perversité de $\underline{\psi}[1]$ implique que $\underline{H}^1(\underline{\psi})$ est à support ponctuel. Si $T_{\xi} : E' \rightarrow E'$ est la translation par $\xi \in E'(k)$, on a $(\text{Id} \times T_{\xi})^*(\mu^* \mathbb{Z}_{\psi}) = \mu^* \mathbb{Z}_{\psi} \otimes \text{pr}_1^* \xi^*(\mathbb{Z}_{\psi})$; comme la tensorisation par un faisceau lisse provenant de la base, n'affecte pas la dimension des cycles évanescents, on voit que le support de $\underline{H}^1(\underline{\psi})$ est invariant par translations (dans E'). Comme il est de dimension 0, il est donc vide.

Cet argument ne se généralise pas aux dimensions > 1 , faute d'une théorie suffisamment efficace des cycles évanescents. L'argument de Laumon est fondé sur un calcul local, valable en toute dimension.

Remarque : Ci-dessus, la lettre ψ désigne le caractère $\mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^*$, et la lettre $\underline{\psi}$ soulignée le complexe des cycles évanescents pour $j_! (\mu^* \mathbb{Z}_{\psi})$.

Corollaire 9.9 : Si $D : D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ dénote le foncteur "dual de Verdier", on a un isomorphisme canonique, pour $K' \in D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$,

$$D(\mathcal{F}K') = \mathcal{F}(DK')(r) \quad ,$$

où r est le rang du fibré E .

Corollaire 9.10 : Supposons que k est un corps fini. Si $K' \in D_c^b(E, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ est mixte de poids $\leq m$ (resp. mixte de poids $\geq m$, resp. pur de poids m), $\mathcal{F}(K')$ est mixte de poids $\leq m+r$ (resp. de poids $\geq m+r$, resp. pur de poids $m+r$).

Preuve : Si K^* est mixte de poids $\leq m$, $\mathrm{pr}_1^* K^*$ est mixte de poids $\leq m$ (évident) et $\mathbf{Rpr}_{2,!}(\mathrm{pr}_1^* K^* \otimes \mu^* \mathcal{L}_{\downarrow})$ est mixte de poids $\leq m$ d'après [Weil II, 6.2.3], donc $\mathfrak{F}K^*$ est mixte de poids $\leq m+r$.

Si K^* est mixte de poids $\geq m$, $\mathrm{pr}_1^* K^*$ est mixte de poids $\geq m$ (puisque pr_1 est lisse), donc aussi $\mathbf{Rpr}_{2,*}(\mathrm{pr}_1^* K^* \otimes \mu^* \mathcal{L}_{\downarrow})$ par la version duale du théorème de Deligne cité plus haut. On applique 9.8 et on trouve que $\mathfrak{F}(K^*)$ est mixte de poids $\geq m+r$.

Corollaire 9.11 : (a) Si K^* est pervers, $\mathfrak{F}(K^*)$ est pervers ;

(b) $\mathfrak{F}$ induit une équivalence de catégories entre faisceaux pervers sur E et faisceaux pervers sur E' . En particulier, si K^* est un faisceau pervers simple, il en est de même de $\mathfrak{F}(K^*)$.

On utilisera au § 11 l'analogue (évident) de la proposition 6.8.

Proposition 9.12 : Soit $f: T \rightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini, soit $E \times_T \xrightarrow{\tau} T$ le fibré image inverse de $E \rightarrow S$, $\mathrm{pr}_1: E \times_T \rightarrow E$ la projection. Pour $G^* \in D_c^b(E \times_T, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$, on a des isomorphismes naturels :

$$\mathbf{Rpr}_{1,!}(\mathfrak{F}_T G^*) = \mathfrak{F}_S(\mathbf{Rpr}_{1,!}(G^*)) \text{ et } \mathbf{Rpr}_{1,*}(\mathfrak{F}_T G^*) = \mathfrak{F}_S(\mathbf{Rpr}_{1,*} G^*).$$

On terminera ce numéro par l'analogue du théorème 7.27.

Théorème 9.13 : Soit $E \xrightarrow{\tau} S$ un fibré vectoriel, $P = \mathbb{P}(E) \rightarrow S$ le fibré projectif associé (quotient de $E \rightarrow S$ par $\mathbb{G}_m$), $\tilde{E}$ l'éclatement de la section nulle de E , de sorte qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{q} & P \\ \pi \downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

On introduit de même le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}' & \xrightarrow{q'} & P^V \\ \pi' \downarrow & & \\ E' & & \end{array}$$

Alors, pour $K' \in D_C^b(P, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a un isomorphisme naturel entre la restriction à $E' - S$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}\pi_* q'^* K')$ et la restriction à $E' - S$ de $q'^* \Phi(K')(-1)$, où $\Phi(K') = \mathbb{R}p'_{2,*}(p'_1{}^* K')[r-2]$ est le "transformé de Radon de K' " (notations des § 2 et 3 pour p'_1 et p'_2).

Démonstration : On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \tilde{E} \times E' & & & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \tilde{\text{pr}}_2 & & \\ \tilde{E} & & E \times E' & & \\ \pi \searrow & \swarrow \text{pr}_1 & & \searrow \text{pr}_2 & \\ & E & & & E' \end{array}$$

π (dashed arrow from $\tilde{E} \times E'$ to $E \times E'$)

qui montre que $\mathcal{F}(K') = \mathbb{R}\tilde{\text{pr}}_{2,!}(\text{pr}_1^* q'^* K' \otimes \pi^* \mu^* \mathcal{L}_\psi)[r]$.

Factorisons $\tilde{\text{pr}}_2$ en $\tilde{E} \times E' \xrightarrow{q \times \text{Id}} P \times E' \xrightarrow{\tilde{p}_2} E'$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(q \times \text{Id})_! (\text{pr}_1^* q'^* K' \otimes \pi^* \mu^* \mathcal{L}_\psi) &= \mathbb{R}(q \times \text{Id})_! ((q \times \text{Id})^* \text{pr}_1^* K' \otimes \pi^* \mu^* \mathcal{L}_\psi) \\ &= \text{pr}_1^* K' \otimes \coprod \mathbb{R}(q \times \text{Id})_! (\pi^* \mu^* \mathcal{L}_\psi), \end{aligned}$$

où pr_1 est la projection $P \times E' \rightarrow P$. La fibre de $\mathbb{R}(q \times \text{Id})_! (\pi^* \mu^* \mathcal{L}_\psi)$ en $(x \bmod \mathfrak{G}_m, \xi) \in P \times E'$ est $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathcal{L}, (\xi|_{\mathcal{L}})^* \mathcal{L}_\psi)$, où $\mathcal{L} \subset \tilde{E}$ est la droite correspondant à $x \bmod \mathfrak{G}_m$, i.e. " $\mathcal{L} = A^1 \cdot x$ ". Deux cas sont possibles

- si $\langle x, \xi \rangle \neq 0$, on a $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathcal{L}, (\xi|_{\mathcal{L}})^* \mathcal{L}_\psi) = 0$

- si $\langle x, \xi \rangle = 0$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R}\Gamma_c(\ell, (\xi|_\ell)^* \mathcal{L}_\downarrow) = \overline{\mathcal{Q}}_\ell(-1)[-2]. \text{ On en déduit que}$$

$$\mathfrak{F}(K^*) = \widetilde{\mathbb{R}p}_{2,!} (pr_1^* K^* \otimes^{\mathbb{H}} \overline{\mathcal{Q}}_{\ell, \widetilde{Z}})(-1)[r-2] \text{ où } \widetilde{Z} \subset P \times E' \text{ est la variété d'incidence,}$$

$\widetilde{Z} = \{(x, \xi) \text{ tq } \langle x, \xi \rangle = 0\}$, et on note (indûment) $\overline{\mathcal{Q}}_{\ell, \widetilde{Z}}$ le prolongement par zéro à $P \times E'$ du faisceau constant sur $\widetilde{Z}$.

On considère ensuite le diagramme, dont le carré de droite est cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{Z}|_{E'-S} & \xrightarrow{\widetilde{p}_2} & E'-S \\ & \swarrow pr_1 & \downarrow & & \downarrow q' \\ P & \xleftarrow{p'_1} & Z & \xrightarrow{p'_2} & P^v \end{array}$$

$$\text{On a } \mathfrak{F}(K^*)|_{E'-S} = \widetilde{\mathbb{R}p}_{2,!} (\widetilde{p}_1^* q'^* K^*)(-1)[r-2]$$

$$= q'^* \mathbb{R}p_{2,!} (p_1^* K^*)|_{E'-S}(-1)[(-2)]$$

$$= q'^* \Phi(K^*)|_{E'-S}(-1) \text{ par définition de } \Phi(K^*) .$$

Remarque 9.14 : A la base de cette démonstration, moins maladroite que celle du théorème 7.27, il y a le calcul suivant, pour lequel on prend $S = \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$.

Si F est une fonction sur $P(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\overline{\mathcal{Q}}_\ell$, on note $\Phi(F)$ la fonction

$$\text{sur } P^v(\mathbb{F}_q) \text{ à valeurs dans } \overline{\mathcal{Q}}_\ell, \text{ telle que } \Phi(F)(h) = \sum_{\substack{\ell \in P(\mathbb{F}_q) \\ t.q. \ell \subset h}} F(\ell) \text{ pour}$$

$h \in P^v(\mathbb{F}_q)$, ($h \in P^v$ est un hyperplan de E , et $\ell \in P$ une droite de E).

A F on associe la fonction $\widetilde{F}: E(\mathbb{F}_q) \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}_\ell$ telle que $\widetilde{F}(x) = F(A^1.x)$ pour $x \neq 0$

$$\text{et } \widetilde{F}(0) = \sum_{\ell \in P(\mathbb{F}_q)} F(\ell) \text{ si } (F = \chi_{K^*} \text{ comme en 9.2, } \widetilde{F} = \chi_{\mathbb{R}\pi_{*q}^* K^*}).$$

Calculons la transformée de Fourier (au sens ordinaire) de $\widetilde{F}$ au point

$\xi \in E'(\mathbb{F}_q)$, $\xi \neq 0$. On trouve :

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathfrak{F}}F)(\xi) &= \sum_{x \in E(\mathbb{F}_q)} \tilde{F}(x) \cdot \psi(\langle x, \xi \rangle) \\
 &= \tilde{F}(0) + \sum_{\substack{x \in E(\mathbb{F}_q), x=0 \\ \langle x, \xi \rangle = 0}} \tilde{F}(x) + \sum_{\substack{x \in E(\mathbb{F}_q) \\ \langle x, \xi \rangle \neq 0}} \tilde{F}(x) \cdot \psi(\langle x, \xi \rangle) \\
 &= \sum_{\ell \in P(\mathbb{F}_q)} F(\ell) + \sum_{\substack{\ell \in P(\mathbb{F}_q) \\ (\ell, q'(\xi)) \in Z}} (q-1)F(\ell) + \sum_{\substack{\ell \in P(\mathbb{F}_q) \\ (\ell, q'(\xi)) \notin Z}} [-F(\ell)]
 \end{aligned}$$

(on utilise la formule $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \psi(\lambda) = -1$), donc

$$(\tilde{\mathfrak{F}}F)(\xi) = q \cdot \sum_{\substack{\ell \in P(\mathbb{F}_q) \\ (\ell, q'(\xi)) \in Z}} F(\ell) = q \cdot \Phi(F)(q'(\xi)) \quad .$$

Corollaire 9.15 : Soit $\Phi : D_C^b(P, \overline{\mathcal{Q}}_\ell) \rightarrow D_C^b(P^\vee, \overline{\mathcal{Q}}_\ell)$ comme au § 3 et comme ci-dessus

- (i) si $K^* \in D_C^b(P, \overline{\mathcal{Q}}_\ell)$ est pervers, $H_\mu^i(\Phi(K^*))$ provient de S (i.e. de la forme $\pi^* F^*$, pour $F^* \in D_C^b(S, \overline{\mathcal{Q}}_\ell)$), pour $i \neq 0$;
- (ii) le foncteur $K^* \rightarrow H_\mu^0(\Phi(K^*))$ induit une équivalence entre le quotient de la catégorie des $\overline{\mathcal{Q}}_\ell$ -faisceaux pervers sur P par la sous-catégorie des faisceaux pervers qui proviennent de la base (S), et le quotient de la catégorie des faisceaux pervers sur $P^\vee$ par la sous-catégorie des faisceaux pervers qui proviennent de la base.

Preuve : (i) Si K^* est pervers, $\mathbb{R}\pi_{*q}^* K^*[1]$ est pervers sur $E' - \{0\}$, i.e. pour $i \neq 1$, $H_\mu^i(\mathbb{R}\pi_{*q}^* K^*)$ est concentré sur le section nulle de S , donc $\mathfrak{F}(H_\mu^i(\mathbb{R}\pi_{*q}^* K^*))$ provient de la base d'après 9.4. On a $\mathfrak{F}(H_\mu^i(\text{---})) = H_\mu^i(\mathfrak{F}(\text{---}))$ d'après le corollaire 9.11. D'après le théorème 9.13, pour $i \neq 1$, $H_\mu^i(q'^* \Phi(K^*)) = q'^* H_\mu^{i-1}(\Phi(K^*))$ provient de la base, d'où (i).

(ii) résulte de (i) et de la formule d'inversion pour $\mathfrak{F}$, compte-tenu du fait que $\mathbb{R}\pi_{*q}^*$ est pleinement fidèle ; détails au lecteur.

Ce théorème est l'analogue de 3.23 (mais l'analogie entre les démonstrations reste à imaginer). Notons qu'aux § 3, 4, 7 et 9 on a donné des énoncés de ce type (les deux derniers utilisant une transformation de Fourier). On n'a malheureusement pas encore pu donner un sens précis à l'impression (renforcée par la comparaison entre les § 7 et 9) que toutes les transformations de Fourier existantes sont compatibles. La préservation de la pureté par Fourier-Deligne devrait avoir un analogue (en théorie de Hodge ?) pour la transformation de Fourier formelle.

X) ESTIMATION UNIFORME DE SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES.

On étudiera des sommes trigonométriques du type suivant. On se donne un espace affine E de dimension r sur $\mathbb{F}_q$ (muni d'une origine), ainsi qu'un faisceau pervers $K^* \in \mathcal{M}(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui est pur de poids m . Pour $\mathbb{F}_q^n$ une extension finie de $\mathbb{F}_q$, et $\xi \in E'(\mathbb{F}_q)$, on considère la somme trigonométrique

$$S_{K^*}(\psi, n; \xi) = \sum_{x \in E(\mathbb{F}_q^n)} \chi_{K^*, n}(x) \cdot \psi(\text{Tr}_{\mathbb{F}_q^n | \mathbb{F}_q} \langle x, \xi \rangle) .$$

Comme au § 9, $\psi: \mathbb{F}_p \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ est un caractère non trivial, et

$\chi_{K^*, n}(x) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F_x^* H^i(K^*) \frac{1}{x})$. En d'autres termes, $S_{K^*}(\psi, n; \xi)$ est la valeur en ξ de la transformée de Fourier de $\chi_{K^*, n}: E(\mathbb{F}_q^n) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

Exemple 10.1 : $V \subset E$ est une sous-variété lisse, K^* est le prolongement par zéro de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell, V[\dim V]$, qui est pervers et pur de poids $\dim V$. Alors

$$S_{K^*}(\psi, n; \xi) = (-1)^{\dim(V)} \sum_{x \in V(\mathbb{F}_q^n)} \psi(\text{Tr}_{\mathbb{F}_q^n | \mathbb{F}_p} \langle x, \xi \rangle) .$$

Si V a pour équation $x_1 \cdots x_r = 1$, par exemple, on obtient une somme de Kloosterman généralisée (cf. [SGA 4 1/2, Sommes trigonométriques, § 7]).

On déduit aisément du § 9 l'estimation "générique" suivante de

$$S_{K^*}(\psi, n; \xi) .$$

Proposition 10.2 : Si $K^* \in \mathcal{M}(E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est pervers et pur de poids m , il existe un ouvert U de E' sur lequel $\mathfrak{F}(K^*)$ est un faisceau lisse, pur de poids m , placé en degré $-r$. Soit N le rang de ce faisceau lisse. Alors pour $\xi \in E'(\mathbb{F}_q^n)$, $\xi \in U$, on a :

$$|S_{K^*}(\psi, n; \xi)| \leq N \cdot q^{nm/2} .$$

Preuve : D'après 9.10 et 9.11, $\mathcal{F}(K^*)$ est pervers et pur de poids $m+r$. Il existe un ouvert U de E' sur lequel $\mathcal{F}(K^*)$ est égal à $G[r]$, où G est un faisceau lisse ; comme $G[r]$ est pur de poids $m+r$, G est pur de poids m , donc pour $\xi \in E'(\mathbb{F}_q^n)$, $\xi \in U$, on a $|\chi_G(\xi)| \leq N \cdot q^{nm/2}$. Or $\chi_G(\xi) = (-1)^r \chi_{\mathcal{F}(K^*)}(\xi)$ est égal à $S_{K^*}(\psi, n; \xi)$, d'après 9.2.

Bien entendu, la description précise de U , dans chaque cas concret, est une tâche délicate (voir par exemple [La 1]). La variante suivante de 10.2 mérite d'être signalée.

Proposition 10.3 : Avec les notations de 10.2, supposons de plus que le faisceau pervers K^* est géométriquement irréductible, et que le "rang générique" N de $\mathcal{F}(K^*)$ est non nul. Si W est un ouvert de E' tel que la cohomologie de $\mathcal{F}(K^*)|_W$ est concentrée en degré $-r$, pour tout $\xi \in E'(\mathbb{F}_q^n)$, $\xi \in W$, on a encore :

$$|S_{K^*}(\psi, n; \xi)| \leq N \cdot q^{\frac{n \cdot m}{2}}$$

Preuve : K^* étant génériquement irréductible, il en est de même de $\mathcal{F}(K^*)$ d'après 9.11. On a donc $\mathcal{F}(K^*) = \underline{IC}^*(E', \mathcal{L})$, où $\mathcal{L}$ est un faisceau lisse irréductible sur un ouvert dense $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}$ pur de poids m , d'après [B.B.D.G.] ou [Br3, §2], compte tenu du fait que le support de $\mathcal{F}(K^*)$ est égal à E' (vu que $N \neq 0$). De la définition même de $\underline{IC}^*(E', \mathcal{L})$ il résulte que

$H^{-r} \underline{IC}^*(E', \mathcal{L}) = j_{*}(\mathcal{L})$, où $j : \mathcal{U} \hookrightarrow E'$ est l'inclusion. On a donc

$\mathcal{F}(K^*)|_W = [j_{*}(\mathcal{L})]_W[r]$. Comme $\mathcal{L}$ est pur de poids m , $\underline{IC}^*(E', \mathcal{L})$ est pur de poids $m+r$, donc mixte de poids $\leq m+r$, donc par définition $j_{*}(\mathcal{L})$ est mixte de poids $\leq m$. La fibre de $j_{*}(\mathcal{L})$ en tout point géométrique est de rang $\leq N$, d'où la proposition.

Application 10.4 : Soit $V \subset E$ l'hypersurface lisse d'équation $x_1 \dots x_r - 1 = 0$.

Admettant que $N \neq 0$ (ce qu'on démontre plus loin pour une caractéristique

"générale) je prétends que $W = \{\xi \in E' \text{ t.q. } \xi_i \neq 0, 1 \leq i \leq r\}$ satisfait l'hypothèse de

10.3 (d'où une majoration des sommes de Kloosterman:

$$\left| \sum_{\substack{\underline{x} \in E(\mathbb{F}_q) \\ x_1 \dots x_r = 1}} \psi(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_r x_r) \right| \leq N \cdot q^{\frac{r-1}{2}}$$

cf. [SGA4¹/2, Sommes trigonométriques, § 7]

L'action sur E du tore T , noyau de l'application produit $\mathbb{G}_m^r \longrightarrow \mathbb{G}_m$, stabilise V , donc K^* est de manière naturelle T -équivariant ; $\mathcal{F}(K^*)$ est alors équivariant pour l'action contragrédiente de T sur E' . On sait qu'il existe une sous-variété Z de E' , de dimension $\leq r-2$, telle que pour $\xi \in E'(\overline{\mathbb{F}}_q) - Z(\overline{\mathbb{F}}_q)$, on a $H^i_{IC}(E', \mathcal{L})_\xi = 0$ pour $i \neq -r$; de plus Z est T -invariante ; comme toute orbite de T dans W est de dimension $r-1$, Z ne rencontre pas W , c.q.f.d.

Pour calculer la constante N , on aura besoin d'hypothèses sur K^* du type "ramification modérée" relatives au complexe $G' = \mathbb{R}\overline{\omega}_! \text{pr}_1^*(K[r-1])$ (notations de 9.5) sur $\mathbb{A}^1 \times E'$. On note $j: \mathbb{A}^1 \times E' \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times E'$ l'inclusion

Définition 10.5 : On dit que K^* est (tomographiquement) génériquement modéré s'il existe un ouvert dense U de E' , et un sous-schéma divisoriel D de $\mathbb{A}^1 \times U$ tels que

- (i) la projection $D \longrightarrow U$ est étale surjective
- (ii) les faisceaux de cohomologie de G^* ont une restriction lisse à $(\mathbb{A}^1 \times U) - D$.
- (iii) la restriction de $H^j(G^*)$ à D est un faisceau lisse
- (iv) $j_!(G^*)$ est modérément ramifié le long de D et du diviseur $\{\infty\} \times U$.

Proposition 10.6 : Si les conditions de 10.5 sont vérifiées, pour tout $\xi \in W(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $H^{-r} \mathcal{F}(K^*)_\xi$ est de dimension égale à $\chi(\mathbb{R}\Gamma_c(E, K^*)) - \chi(\mathbb{R}\Gamma_c(\xi^{-1}(\lambda), K^*))$, pour tout $\lambda \in \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tel que (λ, ξ) ne soit pas un point de D ; cette dimension est constante sur $W(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et égale à la constante N de 10.2 .

Preuve : D'après 9.4(i) (commutation de $\mathcal{F}$ sur un changement de base) on a :

$$\mathcal{F}(K')_{\xi} = \mathcal{F}_{E, (G')}_{(1, \xi)} = \mathcal{F}(G'|_{\mathbb{A}^1 \times \{\xi\}})_1.$$

Des hypothèses impliquent que $G'|_{\mathbb{A}^1 \times \{\xi\}}$ est modérément ramifié (y compris à l'infini). On utilise alors l'analogie suivant de 8.3 et 8.4 :

Lemme 10.7 : Si $H' \in \mathcal{U}(\mathbb{A}^1, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ est modérément ramifié, y compris à l'infini, alors pour $\xi \in \mathbb{A}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $\xi \neq 0$, on a $\underline{H}^i(\mathcal{F}(H'))_{\xi} = 0$ pour $i \neq -1$ et $\underline{H}^{-1}(\mathcal{F}(H'))_{\xi}$ est de dimension égale à $\dim_{\text{tot.}} \emptyset(H') = \sum_{x \in E(\overline{\mathbb{F}}_q)} \dim \underline{H}^{-1}(\emptyset(H'))_x$
 Où $\emptyset(H')$ est calculé vis-à-vis de $\text{Id} : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$.

Preuve du lemme : Par dévissage, on est ramené aux deux cas suivants

(a) H' est à support ponctuel ; ce cas est évident

(b) il existe S fini $\subset \mathbb{A}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$, $\mathcal{G}$ un faisceau lisse sur $V = \mathbb{A}^1 - S$, modérément ramifié sur $\mathbb{P}^1$, tel que $H' = i_*(\mathcal{G})[1]$, où $i : V \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ est l'inclusion. On a $H^0_c(\mathbb{A}^1, i_*(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}_{\psi}) = H^2_c(\mathbb{A}^1, i_*(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}_{\psi}) = 0$ parce que $i_*(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{L}_{\psi}$ est sauvagement ramifié à l'infini. D'où la nullité de $\underline{H}^i(\mathcal{F}(K'))$ pour $i \neq -1$ et $\xi \neq 0$.

Pour calculer la dimension de $\underline{H}^{-1}(\mathcal{F}(K'))_{\xi}$, on peut alors se contenter de calculer

$\chi(\text{IR}\Gamma_c(\mathbb{A}^1, H' \otimes \xi^* \mathcal{L}_{\psi}))$ lorsque H' est plutôt de la forme $i_!(\mathcal{G})[1]$. La formule d'Euler Poincaré sur V donne

$$\begin{aligned} \chi(\text{IR}\Gamma_c(\mathbb{A}^1, H' \otimes \xi^* \mathcal{L}_{\psi})) &= -\chi(\text{IR}\Gamma_c(V, \mathcal{G})) = \text{rg}(\mathcal{G}) \cdot \chi(V) + \text{Sw}_{\infty}(\mathcal{G} \otimes \xi^* \mathcal{L}_{\psi}) \\ &= \text{rg}(\mathcal{G}) \cdot [-1 + \# S] + \text{rg}(\mathcal{G}) = \text{rg}(\mathcal{G}) \cdot (\# S) \\ &= \dim_{\text{tot.}} \emptyset(H'), \text{ car } H' = i_!(\mathcal{G})[1]. \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Il est facile de voir que pour $\xi \in W(\overline{\mathbb{F}}_q)$, on a $\underline{H}^i(\mathcal{F}(K'))_{\xi} = 0$ pour $i \neq -r$; en effet, $\underline{H}^i(\mathcal{F}(K'))_{\xi} = \underline{H}^i(\mathcal{F}(G'))_{(1, \xi)}$ comme on l'a vu plus haut, et il résulte du lemme 10.7 que ceci est encore égal à $\underline{H}^{-1}(\mathcal{F}([E_{\mu}^{i+1} G']_{(1, \xi)}))$ et comme $\underline{H}_{\mu}^{i+1} G'$

vérifie les conditions de 10.5, la dimension de cet espace est constante pour $\xi \in W(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Or elle est génériquement nulle (puisque K^* est pervers) donc elle est nulle sur $W(\overline{\mathbb{F}}_q)$.

Il résulte alors de 10.7 que la dimension de $\underline{H}^{-r}(K^*)_\xi$ est égale à $\dim.\text{tot } \varnothing(\underline{H}_\mu^{1-r}(G^*|_{\mathbb{A}^1 \times \xi}))$, et que $\dim.\text{tot } \varnothing(\underline{H}_\mu^i(G^*|_{\mathbb{A}^1 \times \xi})) = 0$ pour $i \neq 1-r$. Appliquant la formule d'Euler Poincaré à $G^*|_{\mathbb{A}^1 \times \xi}$, on obtient la proposition (comparer à la démonstration de 8.5).

Cette démonstration a repris des idées de [Ka, § 4]

Dans l'esprit de [Ka, § 4.8 et 9] on en déduit un résultat sur l'estimation uniforme (générique) de sommes trigonométriques. On se donne un sous-anneau R de $\mathbb{C}$ qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$, un nombre premier ℓ inversible dans R , un fibré vectoriel E_R sur $\text{Spec}(R)$, de dimension relative r , et un complexe constructible K^* de faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$ -vectoriels sur E_R tel que, pour tout morphisme $R \longrightarrow \mathbb{F}_q$ (où $\mathbb{F}_q$ est un corps fini) l'image inverse $K^* \times_{\mathbb{F}_q}^R$ de K^* à $E_{\mathbb{F}_q}$ soit un faisceau pervers, pur de poids m (en pratique, on étudie $K^* \times_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$; si c'est un faisceau pervers du type $\underline{\mathbb{IC}}^*(V, \mathcal{L})$, où le système local $\mathcal{L}$ a une interprétation géométrique, la condition sera satisfaite quitte à localiser R).

Pour $R \longrightarrow \mathbb{F}_q$, on considère les sommes trigonométriques $S_{K^* \times_{\mathbb{F}_q}^R}(\psi, n; \xi)$ où $\xi \in E^*(\mathbb{F}_q^n)$.

On considère le diagramme sempiternel

$$\begin{array}{ccc} & E_R \times E'_R & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \overline{\omega}_R \\ E_R & & A_R^1 \times E'_R \end{array}$$

et, par abus de notation, le complexe $G^* = \mathbb{R}\overline{\omega}_{R,!}(\text{pr}_1^*(K^*)[r])$ qui est à cohomologie bornée et constructible d'après [SGA 41/2, théorème de finitude en cohomologie ℓ -adique, théorème 1.1]. D'après [Ka, § 4.2] il existe un ouvert dense U de E'_R tel que G^* soit bon sur $A_R^1 \times U_R$, ce qui signifie qu'il existe un diviseur D de

$A_R^1 \times_{U_R} \text{ fini et étale sur } U_R$, tel que

- (ii) les $\underline{H}^j(G^\bullet)|_{\widetilde{U}_R}$ (où $\widetilde{U}_R = (A_R^1 \times_{U_R} U_R) - D$) sont des faisceaux lisses sur $\widetilde{U}_R$;
- (iii) les $\underline{H}^j(G^\bullet)|_D$ sont des faisceaux lisses sur D .

Il est alors standard qu'il existe un localisé R' de R tel que

- (iv) pour $R' \longrightarrow \mathbb{F}_q$, les $\underline{H}^j(G^\bullet \times_{R'} \mathbb{F}_q)$ sont modérément ramifiés (le long de D et le long de $\{\infty\} \times \mathbb{F}_q$).

Dans cette situation, on a alors le résultat suivant :

Théorème 10.8 : Pour tout morphisme $R' \xrightarrow{m} \mathbb{F}_q$ et tout $\xi \in E'(\mathbb{F}_q)$ tel que $\xi \in \widetilde{U}_R$, on a : $|S_{K \times \mathbb{F}_q}(\psi, 1; \xi)| \leq N \cdot q^{\frac{m}{2}}$ où la constante N est égale à $\chi(\mathrm{IR}\Gamma_c(E_{\mathbb{A}}, K^\bullet \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A})) - \chi(\mathrm{IR}\Gamma_c(E_{\mathbb{A}} \cap h, K^\bullet \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}))$ pour h un hyperplan "général" de $E_{\mathbb{A}}$, et est aussi égale au rang générique de $\mathcal{F}(M)$, où M est le $D(E_{\mathbb{A}})$ -Module holonome R.S. correspondant à $K^\bullet \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.

Preuve : Cela résulte facilement de 8.5, 8.6, 10.6 et du fait que les

$\chi(\mathrm{IR}\Gamma_c(E, K^\bullet)), \chi(\mathrm{IR}\Gamma_c(E \cap h, K^\bullet))$ sont "invariants par spécialisation" en vertu des hypothèses faites.

Remarque 10.9 : Ce théorème est dû à Katz et Laumon [Ka - La], hormis le calcul de N comme rang générique de $\mathcal{F}(M)$. Ce point me paraît prometteur à long terme, puisqu'on sait bien qu'une étude fixe des sommes trigonométriques requiert des méthodes cristallines. Une future théorie des "F-Modules holonomes" pourrait trouver ici un terrain d'expérimentation.

Pour $R = \mathbb{Z}$, et $V_{\mathbb{Z}} \subset E'_{\mathbb{Z}}$ d'équation $x_1 \dots x_r - 1 = 0$, on prend pour $K^\bullet$ le prolongement par zéro de $\overline{\mathcal{O}}_{\ell, V_{\mathbb{Z}}} [r-1]$ à $E_{\mathbb{Z}}$.

On peut prendre $U_{\mathbb{Z}}$ le complémentaire dans $E'_{\mathbb{Z}}$ de $\xi_1 \dots \xi_r = 0$; les hypothèses précédant 10.8 doivent être vérifiées (j'avoue que je ne l'ai pas fait). On trouve donc la majoration (due à Deligne, cf. [SGA 41/2, Sommes trigonométriques, §7] des sommes de Kloosterman, d'après 8.7, la constante N de 10.8 est égale à r .

Lorsque $V_{\mathbb{Z}}$ est une "hypersurface diagonale" d'équation $x_1^{d_1} + x_2^{d_2} + \dots + x_r^{d_r} - 1 = 0$ (avec $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$) on trouve, pour p général et $\xi \in E'(\mathbb{F}_q)$ général

$$\left| \sum_{\substack{\underline{x} \in E(\mathbb{F}_q) \\ x_1^{d_1} + x_2^{d_2} + \dots + x_r^{d_r} = 1}} \psi(\langle \underline{x}, \underline{\xi} \rangle) \right| \leq N \cdot q^{\frac{r-1}{2}}$$

où $N = d_1(d_2-1)\dots(d_r-1)d'$ après 8.7. Laumon obtient dans [La 1] un résultat beaucoup plus précis, au prix d'une étude fine de la géométrie de cette hypersurface.

§ 11. REPRÉSENTATIONS DE SPRINGER (DES GROUPES DE WEYL)

La construction originelle par Springer des représentations irréductibles des groupes de Weyl [S1] utilise, comme on l'a déjà remarqué plus haut, la transformation de Fourier-Deligne (au moins implicitement). Comme cette construction est de nature géométrique, on va la rappeler en se plaçant sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. On se donne un groupe algébrique réductif G sur k , d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (vue comme schéma sur k). On se gardera d'identifier $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}'$; on se donne une algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}'$.

comme dans loc. cit., on a une inclusion naturelle $\mathfrak{t}' \subset \mathfrak{g}'$.

On note $\mathfrak{t}'_0 \subset \mathfrak{t}'$ l'ouvert des éléments fortement réguliers ("strongly regular" cf. [loc.cit, § 2]). Soit $A' \in \mathfrak{t}'_0$, et soit $O(A') = G \cdot A'$ son orbite pour l'action adjointe de G . Springer commence par calculer $\mathcal{F}(\mathbb{D}_{\ell,0}(A'))$. Soit $T \subset G$ le centralisateur de $\mathfrak{t}$, B un sous-groupe de Borel de G contenant T , $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de B , $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ le radical unipotent de B , d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. On considère la version suivante de la "résolution simultanée de Grothendieck"

$$\begin{array}{ccc} x = G \times^B (\mathfrak{g} | \mathfrak{n})' & \xrightarrow{q'} & \mathfrak{g}' \\ p' \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{t}' & \longrightarrow & \mathfrak{t}' | w \end{array}$$

Alors q induit un isomorphisme de $p'^{-1}(A')$ sur $O(A')$, donc

$\bar{\Phi}_{\ell, O(A')} \simeq \mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, p'^{-1}(A')})$. On a $(\mathcal{G} | \mathcal{N})' = \mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{G}'$ et $p'^{-1}(A') = G \times^B (A + b^\perp) \subset G \times^B \mathcal{N}^\perp \subset G \times^B \mathcal{G}'$. Notons encore $\bar{\Phi}_{\ell, (A')}$ le prolongement par zéro à $G \times^B \mathcal{G}'$ de ce faisceau. On veut calculer

$\mathcal{F}_{G|B}(\bar{\Phi}_{\ell, p'^{-1}(A')}) = \mathcal{F}_{G|B}(\bar{\Phi}_{\ell, G \times^B (A + b^\perp)})$ qui habitera donc sur le fibré vectoriel

$G \times^B \mathcal{G} = (G|B) \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ dual de $G \times^B \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}'$. Considérons σ une section

locale de $p'^{-1}(A') \hookrightarrow X \longrightarrow G|B$; alors $\bar{\Phi}_{\ell, p'^{-1}(A')}$ est le translaté par

σ de $\bar{\Phi}_{\ell, G \times^B b^\perp}$; on calcule facilement $\mathcal{F}_{G|B} \bar{\Phi}_{\ell, G \times^B b^\perp}$ en utilisant (9.4.2)

pour

$$\begin{array}{ccc} G \times^B b^\perp & \xrightarrow{u} & G \times^B \mathcal{G}' \\ & \searrow & \swarrow \\ & G|B & \end{array}$$

Si $n = \dim(\mathcal{G})$, $r = \dim(t)$, on a $\dim(b) = \frac{n+r}{2}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{G|B}(\bar{\Phi}_{\ell, G \times^B b^\perp}) &= \bar{\Phi}_{\ell, G \times^B b} [\dim(\mathcal{G}) - 2\dim(b^\perp)] (\dim(b) - \dim(\mathcal{G})) \\ &= \bar{\Phi}_{\ell, G \times^B b} [r] \left(\frac{r-n}{2}\right) \end{aligned}$$

A la section σ de $X \longrightarrow G|B$ est associée une fonction (encore notée σ) sur

$G \times^B \mathcal{G}$ (où $G \times^B (\mathcal{G} | \mathcal{N})$), i.e. $\sigma : G \times^B \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{A}^1$. On a alors

$\mathcal{F}_{G|B}(\bar{\Phi}_{\ell, p'^{-1}(A')}) = [\sigma^* \mathcal{L}_\psi]_{|G \times^B b} [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$. On note que $\sigma|_{G \times^B b} = p'^*(A')$,

donc $\sigma^* \mathcal{L}_\psi$ est indépendant de σ . On peut alors calculer $\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, O(A')})$ au

moyen de la proposition 9.12, où $S = \text{Spec}(k)$, $T = G|B$, $E = \mathcal{G}' \longrightarrow \text{Spec}(k)$,

$G' = \bar{\Phi}_{\ell, p'^{-1}(A')}$. On trouve que $\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, O(A')}) = \mathbb{R}q'_* ([A'^* \mathcal{L}_\psi]_{|G \times^B b}) [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$

où $q : G \times^B b \longrightarrow \mathcal{G}$ est un avatar de q , et où A' désigne la fonction

$G \times^B b \xrightarrow{p} t \xrightarrow{A'} \mathbb{A}^1$. Calculons la fibre de $\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, O(A')})$ en un élément $A \in \mathcal{G}$

nilpotent ; alors la restriction à $q^{-1}(A)$ de la fonction A' est nulle, et on a simplement

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, O(A')}) = R\Gamma(\mathcal{B}_{A'}, \bar{\mathcal{Q}}_{\ell}) [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$$

où $\mathcal{B}_A = q^{-1}(A) \subset \mathcal{B}$ est la variété considérée par Springer dans [loc.cit, § 3.2]

Le calcul précédent a été fait pour $A' \in t'_0$ fixé ; il convient de le faire varier, donc de considérer t'_0 comme espace de paramètres. On considère donc l'inclusion $X \times t'_0 \longrightarrow (G|B) \times \mathcal{G}' \times t'_0$ de fibrés vectoriels sur $(G|B) \times t'_0$; dans $X \times t'_0$, on considère l'intersection Γ de $X \times t'_0$ avec le graphe de $p' : X \longrightarrow t'_0$. On considère la fonction $\mu : (G \overset{B}{\times} b) \times t'_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ décrite comme le composé de $(G \overset{B}{\times} b) \times t'_0 \xrightarrow{(p, Id)} t \times t'_0$ et du morphisme d'évaluation (noté μ au § 9) $t \times t'_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1$, la restriction de μ à $(G \overset{B}{\times} b) \times \{A'\}$ est la fonction notée A' plus haut. On a alors

$$\mathcal{F}_{(G|B) \times t'_0}(\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \Gamma}) = (\mu^* \mathcal{L}_{\psi})|_{(G \overset{B}{\times} b) \times t'_0} [r] \left(\frac{r-n}{2}\right).$$

Dans $\mathcal{G}' \times t'_0$, on considère la sous-variété lisse $\mathcal{U} = \{(\xi, A') \text{ t.q. } \xi \in G.A'\}$ de sorte que $\mathcal{U} \cap (\mathcal{G}' \times \{A'\}) = O(A')$. Appliquant 9.12 comme on l'a fait plus haut, on trouve :

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \mathcal{U}}) = \mathbb{R}(q \times Id)_* (\mu^* \mathcal{L}_{\psi}) [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$$

Pour A nilpotent, il résulte du calcul de $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, O(A')})_A$, et de la commutation de $\mathcal{F}$ aux changements de base, que la restriction de $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \mathcal{U}})$ à $\{A\} \times t'_0$ est constante (i.e. ses faisceaux de cohomologie sont des faisceaux constants). Par ailleurs, comme $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}' \times t'_0$ est visiblement invariant par l'action du groupe de Weyl W sur le deuxième facteur, $\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \mathcal{U}}$ est W -equivariant, et il en est de même de $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \mathcal{U}})$. On observe alors que si on a un faisceau constant $\mathcal{G}$, sur t'_0 qui est W -equivariant, on a une action naturelle de W sur $\mathcal{G}_A$, pour $A' \in \mathcal{G}$, parce que

$\mathcal{G}_A = \Gamma(t'_0, \mathcal{G})$. Ceci définit donc une action de W sur $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{B}_A, \bar{\Phi}_\ell)$ et en particulier sur les groupes de cohomologie $H^i(\mathcal{B}_A, \bar{\Phi}_\ell)$. On peut en fait faire un peu mieux (comme Hotta-Springer dans [Ho-S]). On a

$$\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, G})|_{\mathcal{N} \times t'_0} = \mathbb{R}(q \times \text{Id})_* (\bar{\Phi}_{\ell, (G \times^B \mathcal{N}) \times t'_0}) [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$$

où on note encore q le morphisme $G \times^B \mathcal{N} \hookrightarrow G \times^B b \longrightarrow \mathcal{G}$ et on en tire que

$$\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{G}})|_{\mathcal{N} \times t'_0} = \text{pr}_1^* \mathbb{R}q_* (\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{G} \times^B \mathcal{N}}) [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$$

où $\text{pr}_1 : \mathcal{N} \times t'_0 \longrightarrow \mathcal{N}$. En d'autres termes, $\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{G}})|_{\mathcal{N} \times t'_0}$ provient de $\mathcal{N}$; comme $\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{G}})$ est W -équivariant (pour l'action de W sur le second facteur) on obtient une action de W sur $\mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{G}}|_{\mathcal{N} \times t'_0})$ lui-même, ou sur $\mathbb{R}q_* (\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{G} \times^B \mathcal{N}})$

Par ailleurs, on déduit facilement de 9.4 que $\mathcal{F}_{G|B \times t'_0}(\bar{\Phi}_{\ell, (G \times^B \mathcal{N}) \times t'_0})$ est égal à $\bar{\Phi}_{\ell, (G \times^B \mathcal{N}^\perp) \times t'_0} [r] \left(\frac{r-n}{2}\right)$. Projétant sur $\mathcal{G}' \times t'_0$ et appliquant 9.12, on trouve :

$$\mathbb{R}(q' \times \text{Id})_* (\bar{\Phi}_{\ell, X \times t'_0}) = \mathcal{F}_{t'_0}(\mathbb{R}(q \times \text{Id})_* \bar{\Phi}_{\ell, (G \times^B \mathcal{N}) \times t'_0}) [-r] \left(\frac{n-r}{2}\right)$$

d'où une action de W sur $\mathbb{R}(q' \times \text{Id})_* (\bar{\Phi}_{\ell, X \times t'_0})$, qui provient d'une action de W sur $\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X})$, par un argument déjà utilisé.

Proposition 11.1 : Cette action coïncide avec celle définie par Lusztig [S2, §4] c'est l'unique action sur $\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X}) = \text{IC}^*(X, (q'_* \bar{\Phi}_{\ell, X}))|_{\mathcal{G}'_{\text{reg}}} [-n]$ qui prolonge l'action naturelle de W sur $q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X})|_{\mathcal{G}'_{\text{reg}}}$ ($\mathcal{G}'_{\text{reg}} \subset \mathcal{G}'$ dénotant l'ouvert des éléments fortement réguliers).

Preuve : Le morphisme naturel

$$\mathbb{R}(q' \times \text{Id})_* (\bar{\Phi}_{\ell, X \times t'_0}) \longrightarrow \mathbb{R}(q' \times \text{Id})_* (\bar{\Phi}_{\ell, \Gamma})$$

est W -équivariant, parce qu'en lui appliquant $\mathcal{F}$ on obtient le morphisme naturel

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, (G \times_{\mathbb{B}} \mathcal{N}) \times t'_0} \longrightarrow \mu^* \mathcal{L}_{\psi} [2r] \quad (r) \quad (\text{vu que } \mu^* \mathcal{L}_{\psi} \text{ est un faisceau}$$

lisse de codimension r dont la restriction à $(G \times_{\mathbb{B}} \mathcal{N}) \times t'_0$ est le faisceau constant $\bar{\mathcal{Q}}_{\ell}$).

Testons ce morphisme au point $(w(A'), A')$ de $\mathcal{G}' \times t'_0$, où $A' \in t'_0$ et $w \in W$. L'image inverse de $(w(A'), A')$ dans $X \times t'_0$ est l'ensemble des $(\text{Ad}(z).B, \text{Ad}^*(w)(A'), A') \in (G|B) \times \mathcal{G}' \times t'_0$ pour $z \in W$. Le groupe W agit sur cet ensemble, identifié à W , par translations à droite. L'image inverse de $(w(A'), A')$ dans Γ est formée des $z \in W$ tels que $\text{Ad}^*(z^{-1}wA') - A' \in \mathcal{N}$, i.e. de l'unique élément $z = w$. Si maintenant on fait agir $w_1 \in W$ sur $(w(A'), A') \in \mathcal{G}' \times t'_0$ on obtient évidemment $(w(A'), w_1(A'))$ (puisque W agit seulement sur le second facteur) dont l'image inverse dans $X \times t'_0$ est l'ensemble des $(\text{Ad}(z).B, \text{Ad}^*(w)(A'), \text{Ad}^*(w_1)(A'))$ comme plus haut, et l'action de W , considéré comme le groupe de Galois abstrait du revêtement $X \times t'_0 \longrightarrow \mathcal{G}' \times t'_0$ est celle par translations à droite sur W . Par ailleurs, l'action de W sur $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}' \times t'_0$ permet d'identifier la fibre en $(w(A'), A')$ de $(q' \times \text{Id})_* (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \Gamma})$ (de base w) à la fibre en $(w(A'), w_1(A'))$ de $(q' \times \text{Id}) (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \Gamma})$ (de base w, w_1^{-1}).

Elle transmue donc l'action de W sur

$(q' \times \text{Id})_* (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, \Gamma})$ en celle de W par translations à droite sur W , fibre de $X \times t'_0 \longrightarrow \mathcal{G}' \times t'_0$. Cela signifie que l'action de W sur $\mathbb{R}q'_* (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, X})$ coïncide avec celle du lemme au point $w(A')$, donc partout.

Corollaire 11.2 : L'action de W définie par Borho-MacPherson [B-M1,2] sur

$\mathbb{R}p_* (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, G \times_{\mathbb{B}} \mathcal{N}})$ coïncide avec celle définie par Springer.

Remarque : Pour l'action de W de Borho-MacPherson, on suppose que la forme de Killing est non dégénérée et on identifie $\mathcal{G}'$ à $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}^{\perp}$ à $\mathfrak{b}$, $\mathcal{N}$ à $\mathfrak{b}^{\perp}$. Alors $X \xrightarrow{q'} \mathcal{G}'$ devient $X = G \times_{\mathbb{B}} \mathfrak{b} \longrightarrow \mathcal{G}$. L'action de Lusztig de W sur $\mathbb{R}q'_* (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, X})$ permet de définir une action de W sur $\mathbb{R}p_* (\bar{\mathcal{Q}}_{\ell, G \times_{\mathbb{B}} \mathcal{N}})$, en utilisant le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 G \times^B \mathcal{N} & \xleftarrow{\quad} & G \times^B \mathfrak{g} \\
 \downarrow q & & \downarrow q' \\
 \mathcal{N} & \xleftarrow{\quad} & \mathfrak{g}
 \end{array}$$

où $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ est la variété des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

Preuve du corollaire : Ici $\mathfrak{g}$ est muni d'une forme quadratique non-dégénérée $\text{Ad}(G)$ -invariante, donc il en est de même du fibré vectoriel $G \times^B \mathfrak{g}$ sur G/B . L'orthogonal du sous-fibré $G \times^B \mathcal{N}$ est le sous-fibré $G \times^B \mathfrak{b}$. Le transformé de Fourier de $\bar{\Phi}_{\ell, G \times^B \mathfrak{b}}$ s'identifie canoniquement à $i_* i^* \bar{\Phi}_{\ell, G \times^B \mathfrak{b}}[-2\dim \mathfrak{b}]$ ($-\dim \mathfrak{b}$) où $i : G \times^B \mathcal{N} \hookrightarrow G \times^B \mathfrak{b}$; cette identification est donc compatible aux actions de W .

Le point fondamental de la présente approche est qu'on obtient la décomposition de $\mathbb{R}p_* (\bar{\Phi}_{\ell, G \times^B \mathcal{N}})$ en somme directe de complexes d'intersections pour des systèmes locaux sur les orbites nilpotentes (cf. [B-M1]) simplement en remarquant que $\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X})$ admet une telle décomposition, et en appliquant la transformation de Fourier-Deligne $\mathcal{F}$. En effet, l'action de $\pi_1(\mathcal{G}'_{\text{reg}}, A')$ sur la fibre en $A' \in \mathcal{G}'_{\text{reg}}$ du système local, $q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X})$ se factorise par le quotient $W = W(Z_{\mathcal{G}}(A'), \mathcal{G})$ de $\pi_1(\mathcal{G}'_{\text{reg}})$ et la représentation de W s'identifie à la représentation régulière.

Le groupe de Galois du revêtement $q'^{-1}(\mathcal{G}'_{\text{reg}}) \longrightarrow \mathcal{G}'_{\text{reg}}$, isomorphe à W , agit sur cette représentation régulière par translations à droite. On a donc une démonstration en somme directe

$$q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X})|_{\mathcal{G}'_{\text{reg}}} = \bigoplus_{\chi \in \hat{W}} [V_{\chi} \otimes \mathcal{G}_{\chi}]$$

où $\hat{W}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de W (sur le corps $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$), V_{χ} est l'espace de cette représentation π , et $\mathcal{G}_{\chi}$ est

le faisceau lisse sur $\mathcal{J}'_{\text{reg}}$ associée à l'image inverse de χ à $\pi_1(\mathcal{J}'_{\text{reg}}, A')$ (voir plus haut).

$$\begin{aligned} \text{On en déduit : } \mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X}) [n] &= \mathbb{IC}'(\mathcal{J}', q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X})) \\ &= \bigoplus_{\chi \in \hat{W}} [v_{\chi} \otimes \mathbb{IC}'(\mathcal{J}', \mathcal{L}_{\chi})] \end{aligned}$$

l'action de W sur $\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X}) [n]$ correspondant à celle de W sur v_{χ} . Comme annoncé plus haut, il suffit d'appliquer $\mathcal{F}$ à cette décomposition pour obtenir une décomposition isotypique de $\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, G}^B \times \mathcal{N})$. Par ailleurs, on a évidemment

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\ell}[W] &\xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, X}[n])) \text{ d'où par Fourier-Deligne :} \\ \bar{\Phi}_{\ell}[W] &\xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{N}}(\mathbb{R}p'_* (\bar{\Phi}_{\ell, G}^B \times \mathcal{N})) \quad (\text{cf. [B-M1]}), \end{aligned}$$

On a jusqu'ici travaillé sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p . Notons que tout ce qui précède utilise seulement le fait que G est déployé sur k ; en particulier, on obtient la décomposition de Borho-Mac Pherson sur le corps $\mathbb{F}_p$, pour un groupe de Chevalley.

Notons incidemment qu'une lecture superficielle de [B-M1, 2] pouvait faire croire que Borho et Mac Pherson travaillent sur le corps des nombres complexes. Il n'en est rien, puisque le "théorème de décomposition" (cf. [B-B-D-G]) qu'ils utilisent est de nature essentiellement arithmétique, à l'heure actuelle.

Cela dit, l'utilisation de la transformation de Fourier-Malgrange permet d'obtenir (sur $\mathbb{C}$) les résultats de Borho-Mac Pherson de façon rigoureusement analogue à l'esquisse précédente.

Cette approche est essentiellement due à Kashiwara [K 4] [Ho], qui a identifié le $D(\mathcal{G})$ -module holonome correspondant au faisceau pervers $\mathbb{R}q'_* (\mathbb{C}_X)$ [dim $\mathcal{G}$] en termes de la théorie d'Harish-Chandra des "eigendistributions" invariantes.

La comparaison entre les actions de W sur $\mathbb{R}q'_* (\bar{\Phi}_{\ell, G}^B \times \mathcal{N})$ (en caractéristique p) et sur $\mathbb{R}q'_* (\mathbb{C}_G^B \times \mathcal{N})$ (sur le corps $\mathbb{C}$) est à peu près immédiate, puisque dans les deux cas on considère la transformation de Fourier (de Malgrange

ou de Deligne) d'un faisceau pervers monodromique sur $\mathcal{G}'$, et que l'on dispose des théorèmes 7.27 et 9.13 qui, dans ce cas, relient $\mathcal{F}$ à la "transformation de Radon" (ou dualité projective).

Coda 11.3 : Une formule pour la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(\mathbb{F}_q) \subset \mathcal{G}(\mathbb{F}_q)$.

La formule en question m'a été suggérée par Springer. On suppose G déployé sur $\mathbb{F}_q$, et on suppose que q est "bon" (cf. [S1]). On veut évaluer $\mathcal{F}(1_{\mathcal{N}})$ en $\xi \in \mathcal{G}'$, où $1_{\mathcal{N}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{F}_q)$; $\mathcal{F}$ est calculé comme au §9, en utilisant $\psi : \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \bar{\Phi}_\ell^*$. Comme on l'a vu en loc. cit., cette transformée de Fourier est $\chi_{\mathcal{G}(\bar{\Phi}_\ell, \mathcal{N})} \cdot (-1)^n$.

Comme on l'a vu plus haut, on a :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}q_* \bar{\Phi}_{\ell, X}[n]) = \mathbb{R}p_* \bar{\Phi}_{\ell, G} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[n-r] \left(\frac{-n-r}{2} \right)$$

et les décompositions isotypiques, indexées par w^V , se correspondent. D'après [B-M2], pour $\chi = \varepsilon$ (le caractère $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$) le facteur $\underline{IC}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varepsilon)$ correspond au facteur $\underline{IC}^*(\mathcal{N})$ par la correspondance de Borho-Mac Pherson. Des compatibilités entre les diverses correspondances résulte alors que

$\mathcal{F}(\underline{IC}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varepsilon)) = \underline{IC}^*(\mathcal{N})(-r)$. Par ailleurs, on sait que $\underline{IC}^*(\mathcal{N}) = \bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{N}}[\dim \mathcal{N}] = \bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{N}}[n-r]$ c'est-à-dire que $\mathcal{N}$ est rationnellement lisse (Borho-Mac Pherson le prouvent en caractéristique 0, cf. [BM2, §2.3]; leur argument s'applique ici sans changement).

On trouve donc $\mathcal{F}(\underline{IC}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varepsilon)) = \bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{N}}[n-r] \left(\frac{-n-r}{2} \right)$ et en appliquant la formule d'inversion pour $\mathcal{F}$ de 9.3, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{\Phi}_{\ell, \mathcal{N}}[n-r]) &= (\underline{IC}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varepsilon))^{-n} \left(\frac{+n+r}{2} \right) \\ &= \underline{IC}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varepsilon) \left(\frac{r-n}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où finalement $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{N}) = q^{\frac{n-r}{2}} \chi_{\underline{IC}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_\varepsilon)}.$

La représentation V_ε de W associée au caractère ε admet une résolution du type suivant, où P parcourt les sous-groupes paraboliques de G contenant B , et où $r(P)$ dénote le rang de P (si P correspond à un sous-ensemble S de A , on a $r(P) = \text{card}(S)$)

$$0 \longrightarrow \dots \bigoplus_{r(P)=i} \text{Ind}_{W(P)}^W 1 \longrightarrow \dots \bigoplus_{r(P)=1} \text{Ind}_{W(P)}^W 1 \longrightarrow \bar{\Phi}_\ell[W] \longrightarrow V_\varepsilon \longrightarrow 0$$

(où $W(P)$ est engendré par les s_α , pour $\alpha \in S$)

Comme c'est une suite exacte de $\bar{\Phi}_\ell[W]$ -modules, elle est scindée degré par degré. On a donc une suite exacte de $\bar{\Phi}_\ell$ -faisceaux pervers sur $\mathcal{G}'$.

$$0 \longrightarrow \dots \bigoplus_{r(P)=i} \underline{\text{IC}}'(\mathcal{G}', \mathcal{G}_{\text{Ind}_{W(P)}^W 1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\text{IC}}'(\mathcal{G}', \mathcal{G}_{\bar{\Phi}_\ell[W]}) \longrightarrow \underline{\text{IC}}'(\mathcal{G}', \mathcal{G}_\varepsilon) \longrightarrow 0$$

(on a étendu par additivité la définition de $\mathcal{G}_\chi$ à $\mathcal{G}_V$, pour V une représentation de W dans un $\bar{\Phi}_\ell$ -vectoriel de dimension finie).

Il est facile d'identifier $\mathcal{G}_{\text{Ind}_{W(P)}^W 1}$ à l'image directe du faisceau constant $\bar{\Phi}_\ell$ par le morphisme $G \times^P n_P^\perp \xrightarrow{q_P} \mathcal{G}'$ (pour $A \in t'_0$ fixé la fibre en A' s'identifie à $W(W(P))$). Comme on sait ce morphisme "small" au sens de [G-M1], on trouve :

$$\underline{\text{IC}}'(\mathcal{G}', \mathcal{G}_{\text{Ind}_{W(P)}^W 1}) = Rq_{P*}(\bar{\Phi}_{\ell, G \times^P n_P^\perp}).$$

$$\text{On a } \chi_{\underline{\text{IC}}'}(\mathcal{G}', \mathcal{G}_{\text{Ind}_{W(P)}^W 1})^{(X')} = (-1)^n \cdot \left(\sum_{\substack{\text{Ad}(g)P \in G/P(\mathbb{F}_q) \\ X' \in \text{Ad}(g) \cdot \mathcal{O}}} 1 \right)$$

en identifiant $\mathcal{O}$ à $n_P^\perp$.

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \chi_{\underline{\mathrm{IC}}^*(\mathcal{G}, \mathcal{G}_E)}(X') &= \sum_{\substack{P \supset B \\ r(P)=i}} (-1)^{i+n} \# \{ \mathrm{Ad}(g)P \in G/P(\mathbb{F}_q) \text{ t.q. } X' \in \mathrm{Ad}(\mathcal{G}) \cdot \dot{P} \} \\ &= \sum_{\left\{ \begin{array}{l} P \subset G \text{ paraboliques sur } \mathbb{F}_q \\ \text{t.q. } X' \in \mathcal{P} \end{array} \right\}} (-1)^{r(P)+n} \end{aligned}$$

$$\text{et enfin : } \mathcal{F}^{(1)}_{\mathcal{P}}(X') = q^{\frac{n-r}{2}} (-1)^r \sum_{\left\{ \begin{array}{l} P \subset G \text{ parabolique sur } \mathbb{F}_q \\ \text{t.q. } X' \in \mathcal{P} \end{array} \right\}} (-1)^{r(P)}$$

Cette formule était connue (en tout cas de Springer) pour X' semi-simple fortement régulier ; on l'a "prolongé analytiquement" à $\mathcal{G}'$ grâce à la théorie de Goresky-Mac-Pherson-Deligne. C'est là une illustration de ce qu'on pourrait appeler un principe de "prolongement analytique pervers" (dont on trouve, sans doute, d'autres illustrations, non explicitement signalées, ailleurs dans le texte).

RÉFÉRENCES

Sigles

- [SGA 4] , Springer Lecture Notes 269, 270, 305.
- [SGA 4 1/2] , Springer Lecture Notes 569
- [SGA 7], Springer Lecture Notes 288, 340
- [Weil II], P. Deligne, la conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S. 52 (1979), 138-252.

Bibliographie :

- [B] I. N. Bernstein, Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients, *Funct. Anal. Appl.* 5 (1971), 89-101.
- [B.B] A. A. Beilinson et I. N. Bernstein, Localisation des $\mathcal{G}$ -modules, *C. R. A. S.*, t. 292 (5-1-1981) 15-18.
- [B.B.D.] A. A. Beilinson, I. N. Bernstein, P. Deligne , *Faisceaux pervers*, "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers" (Luminy, Juillet 1981), *Astérisque*, Vol. 100.
- [Be] D. Bertrand, Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, *Séminaire Bourbaki* n° 538, juin 1979.
- [B.D.K.] J. L. Brylinski, A. S. Dubson et M. Kashiwara, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale, *C.R.A.S.* t. 292 (26-10-1981).
- [B.M1] W. Borho et R. Mac Pherson, Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes, *C.R.A.S.* t. 292 (27-4-1981), 707-710.
- [B.M2] W. Borho et R. Mac Pherson, Partial resolutions of nilpotent varieties, à paraître dans les *Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et topologie sur les espaces singuliers"* (Luminy, Juillet 1981), dans la collection *Astérisque*.

- [B.K.] J. L. Brylinski et M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Inventiones Math.* 64 (1981), 387-410.
- [Br1,2] J. L. Brylinski, Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge.
 I - à paraître dans les Comptes-Rendus de la conférence de La Rabida (Espagne) de janvier 1981.
 II- à paraître dans les Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers" (Luminy, juillet 1981) dans la collection Astérisque.
- [Br3] J. L. Brylinski, (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki n° 585, février 1982.
- [D] P. Deligne, lettre à Mac Pherson, mars 1982.
- [Du] A. Dubson, note C.R.A.S. à paraître.
- [G.] V. Guillemin, On some results of Gelfand in integral geometry, conférence on "Symposium on global analysis", Durham, juillet 1976.
- [G.G.G] I. M. Gelfand, S. G. Gindikin et M. I. Graev, A problem of integral geometry in $\mathbb{R}P^n$, connected with the integration of differential forms, *Funct. Anal. Appl.* 13 (1980), 64-66.
- [G.H.] S. Gindikin et G. Henkin, Transformation de Radon pour la d'' -cohomologie des domaines q -linéairement concaves, *C.R.A.S.*, t. 287 (11-9-81) 209-212.
- [G.M1] M. Goresky et R. Mac Pherson, Intersection homology theory II, à paraître dans *Inventiones Math.*
- [G.M2] M. Goresky et R. Mac Pherson, Stratified Morse theory, à paraître dans les Proceedings de l'A.M.S. Summer Institute à Arcata, juillet 1981.
- [G.M3] M. Goresky et R. Mac Pherson, Morse theory and intersection homology theory, à paraître dans les Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers" (Luminy Juillet 1981), dans

la collection Astérisque.

- [G.R.] H. Grauert et R. Remmert, Bilder und Urbilder analytischer Garben, Annals of mathematics 68 (1958), 393-443.
- [G.S] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric asymptotics, Mathematical Surveys 14, A.M.S. 1977.
- [G.G.V] I. M. Gelfand, M. I. Graev et N. Ya. Vilenkin, Generalized functions, vol. 5 (1968) New York, Academic Press.
- [H] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I and II, Annals of Math. 79 (1964), 109-326.
- [He] S. Helgason, the Radon transform, Progress in mathematics, vol. 5, Birkhäuser.
- [Ho] R. Hotta, the Weyl group as monodromies and nilpotent orbits- after M. Kashiwara, preprint 1982 (Thoku University).
- [H.S.] R. Hotta et I. A. Springer, A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups. Inventiones Math. 41 (1977), 113-127.
- [K1] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations II, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 10 (1975) 563-579.
- [K2] M. Kashiwara, Systèmes d'équations micro-différentielles, cours à l'Université Paris-Nord, 1976, rédigé par T. M. Fernandes, à paraître dans la collection "Progress in mathematics", Birkhauser.
- [K3] M. Kashiwara, Holonomic systems of linear differential equations with regular singularities and related topics in topology, conférence à l'Université de Tokyo, juillet 1981, à paraître.
- [K4] M. Kashiwara, lettre à Brylinski, octobre 1981.
- [K5] M. Kashiwara, On the holonomic systems of linear differential equations II, Inventiones Math. 49 (1978), 121-135.

- [K-K.] M. Kashiwara et T. Kawai, On the holonomic systems of linear differential equations (systems with regular singularities) III, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 17 (1981), 813-979.
- [K-O] M. Kashiwara et T. Oshima, Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Annals of Math. 106 (1977), 145-200.
- [K-S] M. Kashiwara et P. Schapira, Microlocal study of sheaves I, Prépublication Université de Paris-Nord, 1983.
- [Ka] N. Katz, Sommes exponentielles, cours à Orsay rédigé par G. Laumon, Astérisque 79, (1980).
- [Ka-La] N. Katz et G. Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, Publ. Math. I.H.E.S., à paraître.
- [La1] G. Laumon, Majoration de sommes exponentielles attachés aux hypersurfaces diagonales, prépublication Orsay, 1981.
- [La2] G. Laumon, Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface, à paraître dans les Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et topologie sur les espaces singuliers" (Luminy, juillet 1981), dans la collection Astérisque.
- [Lê] Lê Dũng Tráng, Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques, C.R.A.S. t. 283 (29-1-1979), 283-285.
- [Lê-Me] Lê Dũng Tráng et Z. Mebkhout, à paraître.
- [Lê-Te1] Lê Dũng Tráng et B. Teissier, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, Annals of Math. 114 (1981), 457-491.
- [Lê-Te2] Lê Dũng Tráng et B. Teissier, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II, prépublication de l'Ecole Polytechnique, 1982.
- [Ma1] B. Malgrange, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence, à paraître dans les Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers (Luminy 1981), dans la collection Astérisque.

- [Ma2] B. Malgrange, La classification des connexions irrégulières à une variable, prépublication de l'Institut Fourier, 1982.
- [Ma3] B. Malgrange, Modules microdifférentielles et classes de Gevrey, Math. Anal. and Appl. part B, Adv. in Math. Suppl. Studies, Vol. 7B (1981), 513-530.
- [Ma4] B. Malgrange, lettre à Verdier, datée du 15 mars 1982.
- [Mar] A. Martineau, Equations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France n°95, 1967, p. 109-154.
- [Me1] Z. Mebkhout, thèse d'Etat, Université Paris 7, Février 1979.
- [Me2] Z. Mebkhout, Une équivalence de catégories, à paraître dans Compositio Math.
- [Me3] Z. Mebkhout, Une autre équivalence de catégories, à paraître dans Compositio Math.
- [S1] T. A. Springer, Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups, Inventiones Math. 36 (1976), 173-207.
- [S2] T. A. Springer, Quelques applications de la cohomologie d'intersection, Séminaire Bourbaki n° 589, février 1982.
- [S.K.K.] M. Sato, M. Kashiwara et T. Kawai, Microfunctions and pseudo-differential equations, Proceedings of a conference at Katata, Springer Lecture Notes 287 (1973), 265-529.
- [V1] J. L. Verdier, Classe d'homologie associée à un cycle, Séminaire de l'E.N.S. 74-75, in Astérisque, vol. 36-37.
- [V2] J. L. Verdier, Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée, à paraître dans les Comptes-Rendus de la Conférence "Analyse et Topologie sur les espaces singuliers" (Luminy, juillet 1981) dans la collection Astérisque.

- [V3] J. L. Verdier, Fourier et tomographie, notes manuscrites, avril 1982.
- [V4] J. L. Verdier, Catégories dérivées, Etat 0, dans [SGA41/2].
- [W] R. O. Wells, Complex manifolds and mathematical physics, Bull. A.M.S.
vol. 1, n° 2, 1979, p. 296-336.

J.L.BRYLINSKI
Brown University
Department of Mathematics
PROVIDENCE, Rhode Island 02912
U.S.A.

Institut des Hautes Etudes
Scientifiques
35 route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE