

Astérisque

MARC CHAPERON

**Géométrie différentielle et singularités de
systèmes dynamiques**

Astérisque, tome 138-139 (1986)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__138-139__1_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

138-139

ASTÉRISQUE

1986

**GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
ET
SINGULARITÉS
DE
SYSTÈMES DYNAMIQUES**

Marc CHAPERON

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 58F14, 53-02, 57S20, 58F05, 58F18.

Mots-clés : Singularités - Formes normales - Linéarisations - Actions - Equations différentielles - Hyperbolique - Contact - Symplectique - Equations aux dérivées partielles.

A Elisabeth

Astérix, c'est Madame Bovary.

René Goscinny

INTRODUCTION

Ce texte est issu de deux cours de troisième cycle, donnés en 1981 à l'Ecole Normale supérieure et en 1982 à l'Universidade Federal de São Carlos (Brésil), dans le double but de présenter quelques outils essentiels de la géométrie différentielle et de les mettre en oeuvre pour obtenir des résultats sur les actions de groupes de Lie, eux mêmes appliqués ensuite à certains problèmes de singularités en géométrie différentielle.

Liés entre autres aux noms d'Elie Cartan, Hassler Whitney, Charles Ehresmann et René Thom, ces outils appartiennent à un domaine des mathématiques particulièrement significatif, puisqu'il permet de formaliser notre appréhension de l'espace-temps - et y fait d'ailleurs constamment appel. Supposant connu le chapitre 16 des Elements d'Analyse de Dieudonné, j'ai donc consacré le premier chapitre, le début du chapitre 4 et plusieurs des appendices à des notions et résultats plus ou moins classiques de la géométrie différentielle, présentés sous la forme utile aux mathématiciens plus spécialisés que j'avais en vue.

Celles-ci concernent surtout les points fixes d'actions différentiables de groupes de Lie, et singulièrement leur classification différentiable. La théorie en est encore à ses débuts, et les résultats présentés ici correspondent à peu près - tout en étant beaucoup plus difficiles - à ce que le lemme de Morse représente pour les fonctions différentiables. C'est pourquoi, ne me préoccupant pas trop de raffinements analytiques comme la recherche d'hypothèses (ou de pertes) de différentiabilité minimales, j'ai eu surtout à coeur de présenter des démonstrations aussi simples et géométriques que possible.

Le chapitre 2 occupe dans le cours une position centrale, car y sont introduits le langage, les objets et les outils analytiques récurrents dans toute la suite. Il contient les résultats classiques de la théorie, qui concernent en particulier la classification C^∞ des germes génériques d'actions C^∞ de \mathbb{R} et de \mathbb{Z} , due à Sternberg, et leur classification C^0 , obtenue par Hartman et Grobman.

La simplicité du théorème de Hartman-Grobman repose sur des "miracles" propres

aux (germes d')actions de \mathbb{R} et de \mathbb{Z} , si bien que ses généralisations aux actions de groupes plus gros, dues à l'auteur, supposent pour l'instant une extension préalable des résultats de Sternberg. Le chapitre 3 est donc consacré à la généralisation du théorème de linéarisation de Sternberg aux germes d'actions de groupes abéliens élémentaires. C'est à la fois la partie la plus originale, la plus géométrique et la plus spécialisée du cours. Elle contient entre autres un théorème de prolongement, ultime avatar des résultats analytiques du chapitre 2, qui devrait pouvoir servir à l'étude d'autres problèmes.

Dans le chapitre 4, on se préoccupe de ce que deviennent les résultats précédents lorsqu'on impose aux (germes de) difféomorphismes considérés de préserver une structure de contact ou une forme symplectique (ou encore une forme-volume). L'accent a été mis sur la géométrie de contact en raison de son importance, en particulier dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Enfin, un remords tardif m'a poussé à donner en conclusion un aperçu plus large sur les singularités de systèmes dynamiques.

Les appendices contiennent des compléments parfois importants, supposant en général chez le lecteur plus de connaissances que le texte même du cours.

Chaque chapitre est précédé d'une introduction en précisant le contenu. La bibliographie finale, établie chapitre par chapitre, contient quelques commentaires sur les "sources" du texte.

Il y a au moins quatre raisons pour que cet ouvrage soit d'un accès relativement difficile :

- Il diffère considérablement de la plupart des autres écrits sur les systèmes dynamiques, tant par le contenu que par le style (quant à celui-ci, certains de mes amis mathématiciens sont persuadés que le fait de donner un cours dans l'antre de l'Hydre B. a exercé sur moi une étrange influence).

- Il est conçu pour servir de référence sur une bonne partie des sujets traités, qui sont donc présentés de manière assez générale ; cette généralité n'est jamais gratuite (dans tous les cas, je me suis borné à des énoncés dont j'avais effectivement eu besoin), mais elle nuit parfois à la simplicité de l'exposé.

- Il prétend néanmoins être accessible à des débutants, d'où une "mise à plat" du contenu qui risque de gêner le spécialiste.

- Si les mathématiques qui y sont présentées sont (comme il se doit) localement triviales, il leur arrive d'être globalement très complexes, en particulier dans le chapitre 3 .

Pour toutes ces raisons, le texte proprement dit est précédé d'un "mode d'emploi" destiné à faciliter la tâche des différentes catégories de lecteurs.

INTRODUCTION

Pendant la longue gestation de cet ouvrage, j'ai été membre du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, et hôte temporaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques ; j'ai eu la chance d'y recevoir les conseils d'Alain Chenciner, de Michel Herman et de René Thom. Les remarques d'Ivan Kupka, Robert Moussu et Robert Roussarie (qui m'a communiqué un manuscrit alors inédit) sur les états successifs de ce travail m'ont été précieuses ; j'ai aussi eu de très utiles conversations avec César Camacho, Freddy Dumortier, Bernard Helffer, Nicolas Kuiper, François Laudenbach, Jacob Palis et Shih Weishu. Bien entendu, ce texte doit beaucoup aux très patients auditeurs des cours dont il est issu, en particulier Nicole Desolneux-Moulis, Carlos Arteaga, Daniel Bennequin, Albert Fathi, Rémi Langevin, Roberto Paterlini et Sergio Rodrigues.

Je tiens à les en remercier, et exprime également ma reconnaissance à Chantal Delongas et à Claudine Harmide pour leur excellent (et même, dans le second cas, héroïque) travail de frappe, que viennent compléter les belles illustrations de Marie-Jo Lécuyer.

Marc CHAPERON
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
U.A. du C.N.R.S. n° 169
91128 Palaiseau Cedex

TABLE DES MATIÈRES

	page
- INTRODUCTION.	1
- COMMENT SE FRAYER UN CHEMIN DANS CET OUVRAGE	11
- CHAPITRE I - <u>QUELQUES OUTILS DE LA TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE.</u>	21
<div style="margin-left: 40px;"><u>Introduction</u></div>	
1. GERMES ET JETS.	
(1.1) <u>Germes</u>	21
(1.2) <u>Jets</u>	22
(1.3) <u>Le théorème de prolongement de Whitney</u>	26
2. TRANSVERSALITÉ.	
(2.1) <u>Le théorème de Sard.</u>	37
(2.2) <u>Transversalité</u>	39
(2.3) <u>La topologie fine de Whitney et le théorème de transversalité</u>	40
(2.3.1)	40
(2.3.2) Multijets	45
(2.4) <u>Applications</u>	46
(2.4.1) Fonctions de Morse	46
(2.4.2) Le théorème de plongement de Whitney	50
- CHAPITRE II - <u>GERMES D'ACTIONS ET HYPERBOLICITÉ.</u>	57
<div style="margin-left: 40px;"><u>Introduction.</u></div>	
3. GERMES D'ACTIONS DIFFÉRENTIABLES	
(3.1) <u>Motivations, définitions et premières propriétés</u>	58
(3.1.1) Points fixes non dégénérés des difféomorphismes	58

	page
(3.1.2) Points fixes hyperboliques des difféomorphismes	59
(3.1.3) Flots et germes d'actions différentiables	60
(3.1.4) Jets d'actions, linéarisation des germes d'actions de groupes compacts et actions formelles.	71
(3.2) <u>Le théorème de Hartman-Grobman</u>	76
(3.2.1) Énoncé	76
(3.2.2) Démonstration pour $G = \mathbb{R}$, lorsque le spectre de A est contenu dans $\{\operatorname{Re} z < 0\}$.	79
(3.2.3) Preuve dans le cas général	81
(3.2.4) Théorème de Hartman-Grobman à paramètre	84
4. FONDEMENTS ANALYTIQUES ET PREMIERS RÉSULTATS DE LA CLASSIFICATION C^∞ DES GERMES D'ACTIONS DE GROUPES ABÉLIENS	
(4.1) <u>Premier énoncé du théorème de Sternberg et idée de sa démonstration.</u>	86
(4.2) <u>Un peu d'analyse</u>	89
(4.2.1) Le théorème du point fixe "à tiroir" .	89
(4.2.2) Théorèmes de conjugaison	91
(4.2.3) Conséquences ; démonstration du théorème de Sternberg.	105
(4.2.4) Intégrales premières	115
(4.3) <u>Actions formelles d'un groupe élémentaire G</u>	117
(4.3.1) Représentations linéaires de G en dimension finie.	118
(4.3.2) Représentations formelles de G .	126
(4.4) <u>Germes d'actions différentiables de groupes élémentaires.</u>	136
(4.4.0) Caractérisation	136
(4.4.1) Variétés fortement invariantes.	139
(4.4.2) Mise sous forme normale le long des v.f.i.	143
(4.4.3) Formes normales des germes hyperbo- liques d'actions de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} .	149
(4.4.4) Intégrales premières et centralisateurs	152
(4.4.5) Actions génériques de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} .	157

TABLE DES MATIÈRES

- CHAPITRE III - <u>LINÉARISATION DES GERMES D'ACTIONS DE GROUPES</u> <u>ÉLÉMENTAIRES.</u>	page 159
<u>Introduction</u>	
5. GÉOMÉTRIE DES ORBITES D'UNE ACTION LINÉAIRE σ FAIBLEMENT HYPERBOLIQUE DE \mathbb{R}^r SUR UN ESPACE VECTORIEL E .	
(5.1) <u>Quasi-quotients de E par σ</u>	159
(5.2) <u>Application à l'étude des orbites de σ</u>	165
6. UN THÉORÈME DE LINÉARISATION DIFFÉRENTIABLE.	
(6.1) <u>Partie géométrique de la démonstration.</u>	177
(6.1.1) Encore un peu d'algèbre	177
(6.1.2) Extension de ρ_{j+1}	181
(6.1.3) Ultime réduction du problème.	185
(6.2) <u>Partie analytique de la démonstration</u>	188
(6.2.1) Un théorème de prolongement	188
(6.2.2) Fin de la démonstration du théorème (6.1.3).	192
(6.2.3) Cas de la différentiabilité finie	196
(6.3) <u>Nécessité de l'hyperbolicité faible.</u>	197
- CHAPITRE IV <u>SINGULARITES EN GEOMETRIE DE CONTACT</u>	203
7. INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DE CONTACT	
(7.1) <u>Structures de contact</u>	203
(7.1.1) Structure de contact des espaces de jets	203
(7.1.2) Structures de contact "abstraites".	207
(7.2) <u>Transformations de contact et équations aux dérivées partielles du premier ordre.</u>	215
(7.2.1) Fonctions génératrices.	216
(7.2.2) Hamiltoniens de contact, équations aux dérivées partielles du premier ordre et problèmes différentiels.	220
(7.2.3) Intégrales singulières des équations du premier ordre.	230
(7.3) <u>Propriétés de stabilité des structures de contact et symplectiques.</u>	233

	page
8. VIF DU SUJET.	
(8.1) <u>Un peu d'algèbre linéaire</u>	241
(8.1.1) Structure de contact tangente en un point à une structure de contact	241
(8.1.2) Un théorème spectral	243
(8.2) <u>Classification formelle des germes d'actions de groupes élémentaires conservant une structure de contact ou symplectique.</u>	251
(8.2.1) Le cas symplectique	251
(8.2.2) Cas d'une structure de contact.	260
(8.3) <u>Le théorème de Sternberg en géométrie de contact et en géométrie symplectique</u>	281
(8.3.1) Choix d'un modèle et formulation précisée du théorème	281
a) Cas d'une structure de contact	281
b) Cas d'une forme symplectique	284
(8.3.2) Démonstration du théorème	287
(8.3.3) Les cas génériques	291
(8.4) <u>Intégrales singulières normalement hyperboliques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.</u>	293
(8.5) <u>Linéarisation des germes d'actions de groupes élémentaires conservant une structure de contact.</u>	302
APPENDICE 0 - ISOTOPIES, ISOTOPIES INFINITÉSIMALES, DÉRIVÉE DE LIE ET MÉTHODE DU CHEMIN	307
APPENDICE 1 - DÉRIVÉES SUCCESSIVES D'UNE APPLICATION COMPOSÉE	319
APPENDICE 2 - DÉRIVÉE k-IÈME D'UNE APPLICATION ENTRE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES	321
APPENDICE 3 - COMPLÉMENTS SUR LA TRANSVERSALITÉ	323

TABLE DES MATIÈRES

	page
APPENDICE 4 - COMMENT "BOUCHER LE TROU DE LA DIAGONALE" DANS LES ESPACES DE BIJETS.	331
APPENDICE 5 - TRANSVERSALITÉ ET PROBLÈMES BIEN POSÉS	337
APPENDICE 6 - COMPLÉMENTS D'ANALYSE	341
APPENDICE 7 - COMMENT ÉTENDRE LES RÉSULTATS DU CHAPITRE 3 AU CAS NON SEMI-SIMPLE	365
APPENDICE 8 - COMPLÉMENTS SUR LA LINÉARISATION DES GERMES D'ACTIONS	375
APPENDICE 9 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES IMPLICITES	383
CONCLUSION : SINGULARITÉS DE SYSTÈMES DYNAMIQUES	401
INDEX TERMINOLOGIQUE	425
PRINCIPALES NOTATIONS EMPLOYÉES	428
BIBLIOGRAPHIE	433
ABSTRACT	440

COMMENT SE FRAYER UN CHEMIN DANS CET OUVRAGE.

CADRE CONCEPTUEL.

C'est essentiellement celui de la théorie des singularités ; dans le dernier chapitre viennent s'y adjoindre les systèmes différentiels extérieurs d'Elie Cartan, et, dans les appendices, un peu de géométrie riemannienne.

- Germes (section(1-1)). L'emploi de ce langage nous évite par la suite de fastidieuses périphrases. Nous en utilisons des formes assez subtiles, d'où la définition "bourbachique" en termes de filtres.

Pour ne pas dire de sottises en la matière, il faut appliquer quelques règles simples ; par exemple (Appendice 0, conventions, et (3.1.3), définition d'un germe d'action), une famille (g_t) de germes d'applications continues, dépendant continûment d'un paramètre t , est en fait (et très logiquement) un peu plus que la collection des g_t .

- Jets (section(1-2)). Cette notion est due à Charles Ehresmann ; une bonne partie des mathématiques contenues dans cet ouvrage (entre autres) serait à peu près inexprimable dans un autre langage. Par exemple, le classique théorème de prolongement de Whitney y trouve sa formulation naturelle ((1.3), théorèmes 1, 2 et 3) - nous n'utiliserons en fait qu'un cas particulièrement sympathique de ce résultat ((1.3), théorèmes 4 et 5).

John Mather a introduit la notion voisine de multijet (section (2.3.2)), très utile en théorie des singularités ; dans le cas où $\text{multi}=\text{bi}$, l'appendice 4 décrit une manière de formuler dans ce langage algébrique le raccord entre "strates de conflit" et "strates de bifurcation" (selon la terminologie de René Thom).

- Structure de contact (ou système de Pfaff canonique) des fibrés de jets (section (7.1)). Comme l'a remarqué Elie Cartan (à la suite des travaux de Sophus Lie et de nombreux autres géomètres), elle permet (cf.(7.2.2)) une formulation particulièrement élégante et générale des problèmes liés à la recherche des solutions d'(in) équations aux dérivées partielles. Naturellement, ces problèmes sont en général beaucoup trop difficiles pour qu'une formulation^(*), si bonne soit-elle, suffise

(*) Elie Cartan, loin de s'en tenir là, a obtenu quelques uns des rares résultats vraiment généraux connus sur les équations aux dérivées partielles : voir Dieudonné, *Éléments d'Analyse* tome IV, Chapitre 18.

à les résoudre; les quelques exemples donnés ici et où l'on y parvient ((7.2.2), Appendice 9, (8.3) et (8.4)) montreront cependant au lecteur le très grand intérêt de ce point de vue géométrique - d'autant plus que presque tous ces résultats se traduisent facilement dans le langage "micro-différentiel" introduit par Sato, Kawai, Kashiwara et Hörmander.

PETITES ET GRANDES IDÉES APPARAISSANT FRÉQUEMMENT.

- Transversalité (section 2 et appendice 3). Il s'agit d'une notion-clé dont l'intérêt dépasse de très loin la topologie différentielle et même les mathématiques pures ; étant donné un problème complexe (par exemple l'étude des singularités de systèmes dynamiques !) elle permet entre autres de savoir quelles situations surviennent de manière inévitable, et doivent donc être étudiées en priorité.

En admettant le théorème de Sard (2.1), nous démontrons (2.3.1) le théorème de transversalité de Thom pour les sections d'un fibré général. Des applications très classiques sont données immédiatement ((2.4), (3.1.1) et (3.1.2)), puis dans (7.1.2) et dans l'appendice 9.

Dans l'appendice 3, nous obtenons (dans une version à bord) la forme banachique du théorème de Thom due à Ralph Abraham, ce qui nous fournit deux exemples beaucoup moins classiques : le premier ((A4-4) et (A4-5) illustre l'intérêt de la construction effectuée dans l'appendice 4 ; l'appendice 5 montre, suivant Mauricio Peixoto, que la notion de problème bien posé pour les équations différentielles ordinaires gagne beaucoup à être formulée en termes de transversalité.

- Méthode du chemin (Appendice 0) Cette "petite idée" se trouve à l'origine de quelques-uns des plus grands succès des vingt dernières années en théorie des singularités et en géométrie différentielle. Nous l'utilisons dans l'appendice 0 pour prouver plusieurs résultats classiques (stabilité des formes symplectiques dans leur classe de cohomologie, théorème de Darboux, théorème des jets suffisants) ; dans (7.3), nous obtenons de même une version équivariante du théorème de Gray sur la stabilité des structures de contact.

- Formes normales. Etant donnée une relation d'équivalence, il s'agit de trouver dans chaque classe d'équivalence un élément particulièrement facile à étudier, puis de voir quelles propriétés de cette "forme normale" sont communes à tous les autres éléments de la classe.

De manière précise, on considère ici des objets différentiables définis sur une variété M au voisinage d'une sous-variété N , et, entre eux, deux types d'équivalence pour $0 \leq k \leq \infty$:

(a) L'équivalence C^k , qui consiste à envoyer un objet sur un autre par un C^k -difféomorphisme local φ préservant N .

(b) L'équivalence formelle à l'ordre k , où l'on demande simplement que l'image du premier objet par φ ait un contact d'ordre k avec le second en N .

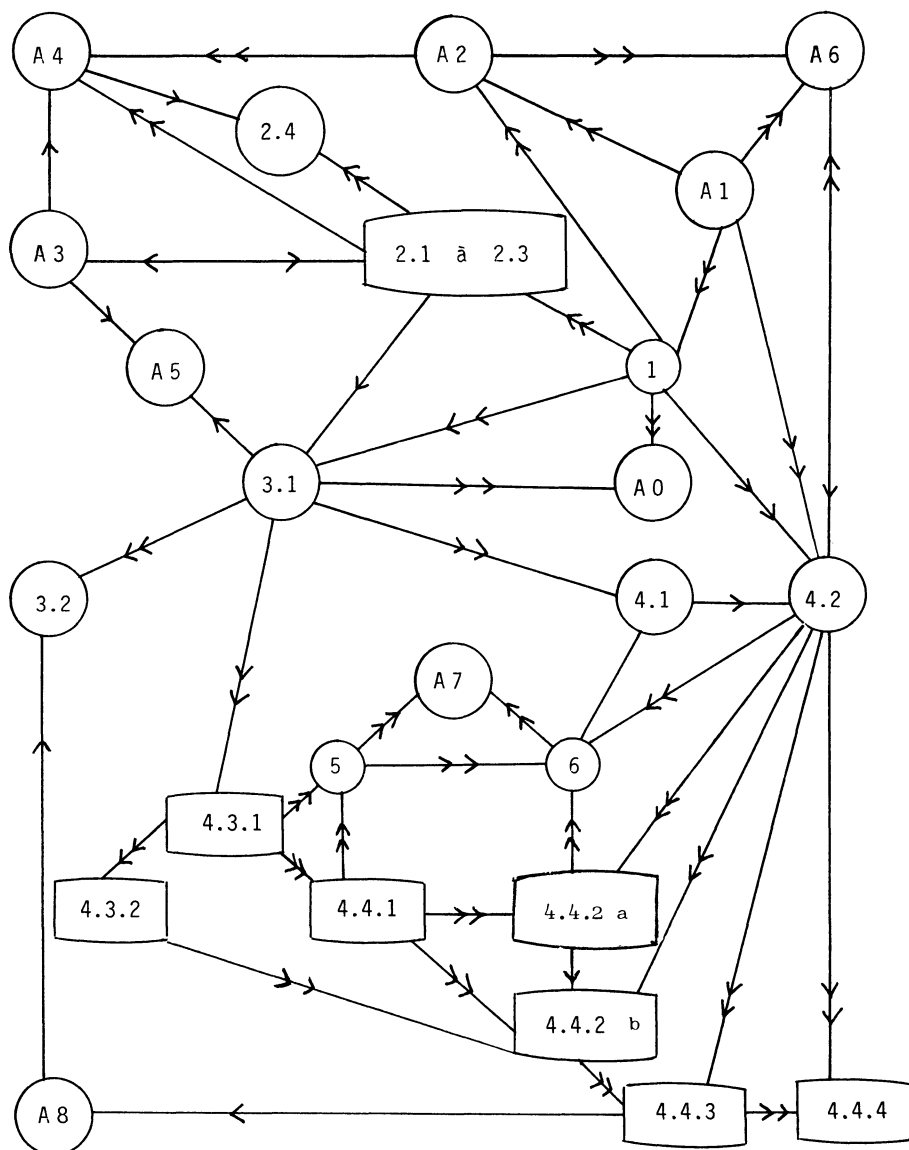
Si N est un point, l'équivalence (b), de nature algébrique, est assez facile à étudier. Un des principaux problèmes que nous considérerons est le suivant (cf. (2.4.1), (3.1.4), (3.2), (4.2), (4.4), 6-, (8.3), (8.4), (8.5) et les appendices 0, 6, 7, 8, 9) : donner une condition sur le jet d'ordre 1 en N des objets (baptisée ici hyperbolicité (faible)) pour que l'équivalence C^k soit une conséquence de l'équivalence formelle à un ordre k' . Bien que cette condition soit "en général" satisfaite, le passage du formel au différentiable est un phénomène beaucoup moins automatique pour les singularités de systèmes dynamiques que pour les singularités d'applications différentiables. Dans les "mauvais" cas qui restent, il est cependant possible (cf. conclusion) d'obtenir énormément d'informations à partir des formes normales pour l'équivalence formelle, d'où notre insistance sur celle-ci ((4.3.2), (8.2) et (8.4)).

Dans ce type de problèmes, il est fréquent que l'on doive établir l'équivalence (formelle ou C^k) entre deux couples d'objets (S, C) et (S', C') , où S, S' sont des objets "simples" (structures symplectiques ou de contact dans (8.2.1), (8.3.2), (8.4) et (8.5), involutions dans l'appendice 9) et C, C' des objets "compliqués" (actions dans 8-, feuilletages dans l'appendice 9). Dans toutes ces situations, nous avons adopté la stratégie suivante : commencer par prouver l'équivalence entre C et C' sans se préoccuper de S et S' , et envoyer ainsi (S, C) sur un couple (S'', C') ; montrer ensuite que S'' et S' sont équivalents par un difféomorphisme (local ou formel) préservant C' .

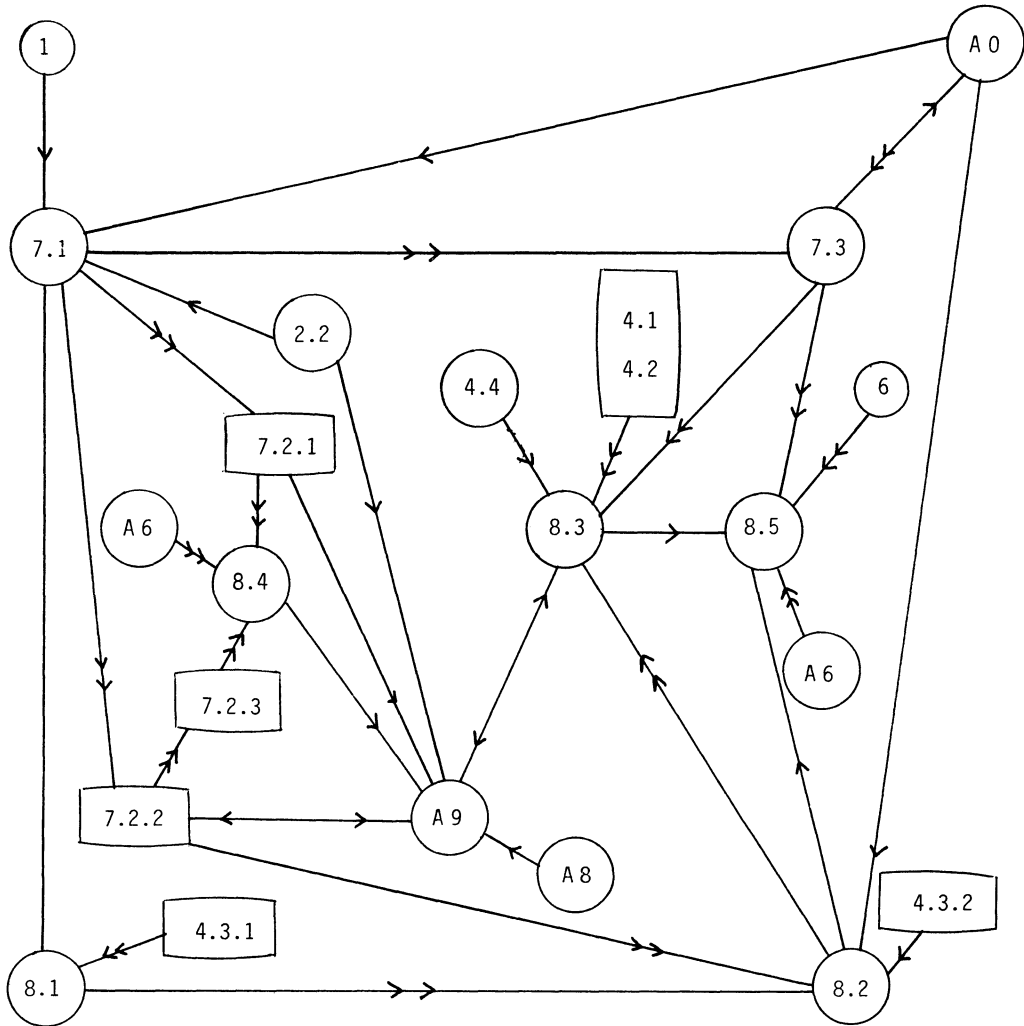
QUELQUES ITINÉRAIRES POSSIBLES.

Les numéros sont ceux de la table des matières, la lettre A signifiant "appendice". Une flèche double $(a) \longleftrightarrow (b)$ indique que a est indispensable à la lecture de b . Une flèche simple $(a) \rightarrow (b)$ exprime que a est utile à la compréhension de b . Une barre $(a) \text{---} (b)$ signifie que a et b sont liés. Par souci de lisibilité, on a parfois écrit $\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \\ \circ \rightarrow \circ \end{array}$ au lieu de $\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \rightarrow \circ \end{array}$ ou (plus rarement) de $\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \searrow \\ \circ \rightarrow \circ \end{array}$.

a) Trois premiers chapitres et appendices attenants.



b) Le chapitre 4 et ses dépendances.



c) Conseils aux lecteurs connaissant peu les sujets traités.

Jusqu'à la fin de (4.2), le mieux est sans doute de suivre l'ordre de la table des matières ; il pourra être utile de lire l'appendice 3 (puis, en consultant éventuellement (3.1.3), l'appendice 5) après (2.1)-(2.3.1), et l'appendice 4 après (2.3.2). Enfin, la section (A0-5) de l'appendice 0, accessible à partir de (3.1.3), est une très belle et très importante généralisation du lemme de Morse (2.4.1), et l'appendice 6 complète substantiellement (4.2).

Après (4.2), le plus simple est évidemment de terminer le chapitre 2 , auquel on pourra adjoindre l'appendice 8 ou retrancher (4.4.4). On peut aussi, solution peu recommandée aux débutants, couper au plus court vers le chapitre 3 ; dans ce cas, il vaudra mieux en première lecture supposer que $G = \mathbb{R}^r$ dans la section 6 (cela ne facilite pas vraiment les démonstrations, mais peut clarifier l'exposé).

Il est également possible, et très instructif, de passer directement de (4.2) (ou même (3.1)) à la section 7 (en omettant éventuellement (7.2.1) et (7.2.3)), que l'appendice 9 illustrera utilement ; on peut alors étudier la théorie des formes normales en lisant (4.3.1)-(8.1), puis (4.3.2)-(8.2), (4.4)-(8.3) et la fin de l'appendice 9 ; on pourra terminer par (8.4), par le chapitre 3 et (8.5), ou directement par la conclusion, qu'il est fortement recommandé de lire.

Enfin il est vivement conseillé de s'intéresser aux exercices disséminés le long du texte, la conclusion étant à elle seule un vaste exercice.

ASPECTS PARTICULIÈREMENT ORIGINAUX DE CE TRAVAIL.

Ce qui suit est plutôt destiné aux "experts", qui pourront consulter aussi les commentaires de la bibliographie.

Le sommet de cet ouvrage (du moins par la nouveauté et la difficulté) est le chapitre 3, qui achève un travail commencé par Freddy Dumortier et Robert Roussarie. Mes principales contributions en la matière sont les suivantes :

- Les notions de germe d'action (3.1.3) et de variété fortement invariante (ou v.f.i., cf.(4.4.1)), qui n'avaient pas été dégagées nettement auparavant.

- Le théorème de linéarisation (ou de mise sous forme normale) d'un germe d'action le long de ses v.f.i. (4.4.2), qui simplifie considérablement le problème (y compris dans le cas, traité par Dumortier et Roussarie, des germes d'actions de \mathbb{R}^2) .

- Le passage des actions de \mathbb{R}^2 à celles d'un groupe élémentaire général ; la principale difficulté était de mieux comprendre la géométrie des orbites d'une action linéaire de \mathbb{R}^r pour $r > 1$ (section 5 et appendice 7).

- La mise au point d'une méthode s'appliquant aussi simplement aux actions de $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^m$, $k > 0$, qu'à celles de \mathbb{R}^m .

- La détermination des hypothèses minimales (cf.(6.3)) nécessaires à la validité du théorème prouvé dans la section 6 et dans l'appendice 7 (même pour les actions de \mathbb{R}^2 , ce résultat améliore donc sensiblement celui de Dumortier et Roussarie).

- La solution du même problème en géométrie de contact (cf.(8.5)).

Cette théorie très spécialisée ne serait certes pas publiée sous la forme d'un cours (*) si elle n'avait pas requis tout un travail de fondements, qui clarifie certains aspects plus classiques et plus "quotidiens" des systèmes dynamiques ; en voici quelques exemples :

- Pour obtenir les résultats du chapitre 3, il fallait vraiment "faire de la géométrie", attitude que nous avons adoptée vis-à-vis du sujet tout entier ; ainsi, dans (3.2), nous montrons que la démonstration analytique "à la Moser" du théorème de Hartman-Grobman n'est au fond pas très différente de sa preuve à base de feuilletages invariants ("λ-lemma" de Palis). De même, ce parti-pris géométrique éclaire singulièrement la méthode introduite par Edward Nelson pour établir le théorème de Sternberg (cf.(4.1)), et permet surtout, dans (8.3), une démonstration particulièrement agréable de ses avatars en géométrie symplectique ou de contact (ce dernier résultat est d'ailleurs en bonne partie nouveau) - la même idée conduit tout aussi simplement, dans (8.5), à l'analogue en géométrie de contact du théorème de la section 6.

- Les principaux résultats analytiques de la théorie sont exposés dans (4.2) et l'appendice 6. Pour les besoins du chapitre 3, on y considère des (germes de) difféomorphismes hyperboliques normalement à une sous-variété compacte Σ non forcément réduite à un point. Les théorèmes 1 et 3 de (4.2.2) (et le théorème 1 de l'appendice 6) sont inspirés de démonstrations antérieures du théorème de Sternberg ; on y utilise un lemme très simple de point fixe "à tiroir" (4.2.1), ce qui rend

(*) Le chapitre 3 n'en contient d'ailleurs qu'une partie ; le reste sera publié dans un article ultérieur.

certainement moins mystérieuse la méthode d'approximations successives employée. Pour être facilement utilisables, tous ces résultats ont été exprimés de manière aussi locale que possible ; c'est en particulier le cas des théorèmes 1 et 2 de (4.2.2) et du théorème 2 de (4.2.3), qui peuvent être considérés comme les résultats essentiels de cette section (les deux derniers sont largement originaux).

- Dans la théorie dont il vient d'être question, lorsque Σ n'est pas une réunion finie de tores, se pose le problème de définir la "dérivée k-ième" d'une application entre variétés riemanniennes. Ce problème est résolu dans l'appendice 2, où je me suis retenu de trop théoriser - bien qu'à ma connaissance un exposé convenable de la question manque à la littérature. La même idée est exploitée dans l'appendice 4, qui me semble introduire une technique très utilisable.

- La théorie des formes normales requiert de l'algèbre ; nous avons systématiquement utilisé à cette fin (cf.(4.3) et (8.2)) des représentations linéaires associées naturellement au problème, d'où un exposé simple et général.

- Si les formes normales formelles en géométrie symplectique (ou isochore) se déduisent facilement (8.2.1) de la théorie générale (4.3.2), il n'en va pas de même en géométrie de contact, où s'introduisent inéluctablement des graduations "tordues" ; notre exposé du sujet (cf.(8.1.1) et (8.2.2)), qui fait apparaître ce phénomène comme très naturel, semble en bonne partie original.

Terminons par les points sans grand rapport avec le chapitre 3 :

- Tant dans l'appendice 4 que dans l'appendice 5 (qui diffère assez sensiblement du point de vue initial de Peixoto), on a besoin d'une version à bord du théorème de transversalité, que je me suis dévoué pour écrire (appendice 3).

- Dans le chapitre 4, la section 7 entend servir l'intérêt général par un exposé point trop abstrait de la géométrie de contact (en un sens assez large), mystérieusement disparue des programmes du second cycle des Universités. Ici et dans l'appendice 9, il est assez difficile (et sans doute assez vain) de démêler l'ancien du nouveau. Les résultats le plus probablement originaux sont la version équivariante du théorème de Gray (7.3) et le théorème de classification topologique

qui termine l'appendice 9.

- La section (8.4), due à l'auteur, fait appel à des techniques assez différentes de celles de (8.2)-(8.3) ; on y utilise en particulier les "fonctions génératrices".

CHAPITRE I - QUELQUES OUTILS DE LA TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE

Les variétés considérées sont banachiques - voir Bourbaki ou l'appendice 3 .

1. GERMES ET JETS

(1.1) Germes

Soient X un ensemble et \mathcal{F} un filtre sur X . Dans $\mathcal{P}(X)$, la relation "il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que $M \cap V = N \cap V$ " entre M et N est une relation d'équivalence ; l'ensemble quotient est appelé l'ensemble des germes suivant \mathcal{F} de parties de X . On vérifie facilement que les opérations de réunion et d'intersection de deux parties de X passent au quotient, et l'on note encore $(\xi, \eta) \mapsto \xi \cup \eta$ et $(\xi, \eta) \mapsto \xi \cap \eta$ les opérations induites sur les germes. Les relations $\xi = \xi \cap \eta$ et $\eta = \xi \cup \eta$ entre deux germes ξ et η suivant \mathcal{F} de parties de X sont équivalentes, et notées $\xi \subset \eta$.

Etant donné un autre ensemble X' , soit Φ l'ensemble des applications à valeurs dans X' , définies sur une partie de X appartenant à \mathcal{F} . Dans Φ , la relation "il existe $V \in \mathcal{F}$ tel que f et g soient définies et coïncident sur V " entre f et g est une relation d'équivalence R , et Φ/R est appelé l'ensemble des germes suivant \mathcal{F} d'applications de X dans X' .

Lorsque \mathcal{F} est le filtre des voisinages d'une partie non vide A d'un espace topologique X , on parle plutôt de germes en A d'ensembles ou d'applications, et l'on note $[f]_A : [X]_A \rightarrow X'$ le germe en A de $f \in \Phi$, c'est à dire sa classe modulo R . Le germe en A de $M \in \mathcal{P}(X)$ est de même noté $[M]_A$, et l'on dit que $[M]_A$ est un germe d'ensemble fermé lorsque $M \cap V$ est fermé dans V pour un $V \in \mathcal{F}$. Si X' désigne un autre espace topologique, un germe γ en A d'application de X dans X' est un germe en A d'application continue lorsqu'il existe une application continue $f \in \Phi$ telle que $\gamma = [f]_A$. La notation $\gamma : [X]_A \rightarrow [X']_A$, a alors un sens pour $A' \supset f(A)$. Quand X et X' sont des variétés différentielles, on parle de même de germes en A de sous variétés et de germes en A d'applications de classe C^r ($0 \leq r \leq \infty$) ou analytiques de X dans X' .

Etant données deux parties A et B d'un espace topologique X , avec $A \not\subset B$, nous aurons à utiliser la notion plus générale de germe en A de partie de $X \setminus B$ et de germe en A d'application (ou d'application continue) de $X \setminus B$ dans X' , \mathcal{F} étant cette fois le filtre sur $X \setminus B$ induit par le filtre des voisinages de A dans X .

Si de plus $[B]_A$ est un germe de fermé de X , on dit qu'un germe γ en A d'application de $X \rightarrow B$ dans un espace topologique X' est un germe d'homéomorphisme lorsqu'il existe un voisinage ouvert V de A dans X tel que $V \rightarrow B$ soit ouvert, et un homéomorphisme f de $V \rightarrow B$ sur un ouvert de X' tel que $\gamma = [f]_A$. Sous les mêmes hypothèses, lorsque X et X' sont des variétés, on peut définir la notion de germe en A d'application C^r ou de germe en A de difféomorphisme C^r (ou analytique) de $X \rightarrow B$ dans X' .

Soit $\gamma = [f]_A$ un germe en $A \subset X$ d'application continue de X dans X' . La restriction $f|_A$ ne dépend que de γ , et l'on peut noter $\gamma(A) = f(A)$. Désignons par γ' un germe en $A' \subset X'$ d'application de X' dans X'' . Si A' contient $\gamma(A)$, et si $\gamma' = [f']_{A'}$, où f' est définie sur un voisinage V' de A' dans X' , alors $V = f^{-1}(V')$ est un voisinage de A dans X , et le germe $[f' \circ (f|_V)]_A$ ne dépend que de γ et de γ' : c'est leur composé, noté $\gamma' \circ \gamma$ ou encore $f' \circ \gamma$.

On vérifie aisément que les germes γ en $A \subset X$ d'homéomorphismes de X dans lui-même vérifiant $\gamma(A) = A$ forment un groupe pour la composition. Il en va de même des germes γ de difféomorphismes C^r ou analytiques de X vérifiant $\gamma(A) = A$ lorsque X est une variété.

Etant données trois parties A, B et C d'un espace topologique X , avec $A \supset B \not\subset C$, et un germe $\gamma = [f]_A$ en A d'application de $X \rightarrow C$ dans X' , le germe $[f]_B$ ne dépend que de γ ; il nous arrivera de le noter $[\gamma]_B$.

Lorsque A est réduit à un point $\{x\}$, on écrit $[f]_x$ au lieu de $[f]_{\{x\}}$, et l'on parle de germes en x .

(1.2) Jets

(1.2.1) Soient E et F deux espaces de Banach, et $\gamma = [f]_x$ un germe en $x \in E$ d'application de classe C^r ($0 \leq r \leq \infty$) de E dans F . Pour tout entier $k \leq r$, le germe $[D^k f]_x$ ne dépend que de γ . On le désigne par $D^k \gamma$, et l'on note $D^k \gamma(x) = D^k f(x)$. Si $\gamma' = [f']_x$ est un autre germe en x d'application de classe C^r de E dans F , on dit que γ et γ' (ou que f et f') ont un contact d'ordre r en x lorsque $D^k \gamma(x) = D^k \gamma'(x)$ pour tout $k \in \{0, \dots, r\}$.

Cette notion est invariante par difféomorphismes C^r de la source et du but : si φ (resp. ψ) est un germe en x (resp. en $\gamma(x)$) de difféomorphisme de E (resp. F) dans un espace de Banach E' (resp. F'), alors les germes $\psi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$

et $\psi \circ \gamma' \circ \varphi^{-1}$ sont bien définis et ont un contact d'ordre r en $\varphi(x)$, d'après l'Appendice 1.

Par conséquent, étant données deux variétés de classe C^r , X et X' , la notion de contact d'ordre r en $x \in X$ entre deux (germes en x d') applications C^r de X dans X' est bien définie. Sur l'ensemble des couples (x, γ) , où γ est un germe en $x \in X$ d'application C^k de X dans X' (k entier $\leq r$), considérons la relation d'équivalence

" $x=x'$ et γ a un contact d'ordre k avec γ' en x "

entre (x, γ) et (x', γ') . Le quotient est l'ensemble $J^k(X, X')$ des jets d'ordre k d'applications de X dans X' , et la classe d'équivalence de $(x, \gamma) = (x, [f]_x)$, notée $j_x^k \gamma$ ou $j_x^k f$, est appelée jet d'ordre k de γ (ou de f) en x .

De la formule de Faa-di Bruno (appendice 1), on déduit la

PROPOSITION. : Soient $X \xrightarrow{f} X'$ et $X' \xrightarrow{f'} X''$ deux applications C^k . Pour tout $x \in X$, le jet $j_x^k (f' \circ f)$ ne dépend que de $j_x^k f$ et de $j_{f(x)}^k f'$, et est noté

$$(j_{f(x)}^k f') \circ (j_x^k f). \blacksquare$$

(1.2.2) Soit maintenant $p : Y \rightarrow X$ une fibration localement triviale de classe C^r ($0 \leq r \leq \infty$). Une section de p au-dessus d'une partie A de X est, rappelons-le, une application f de A dans Y telle que $p \circ f = \text{id}_A$. Lorsque $A = X$, on parle simplement de sections de p (leur ensemble peut être vide : voir n'importe quel cours un peu complet de topologie algébrique, par exemple Spanier).

NOTA. Lorsque p est la fibration triviale $X \times X' \rightarrow X$, une section de p au-dessus de A s'identifie à une application de A dans X' (sa seconde composante). Tout ce que nous allons dire ici s'applique donc à ce cas particulier.

Pour chaque entier $k \leq r$, notons $J^k(p)$ le sous-ensemble de $J^k(X, Y)$ constitué par les jets d'ordre k de (germes de) sections C^k de p .

Soit \mathcal{C} une famille de trivialisations locales de classe C^r

$$\begin{array}{ccc} p^{-1} \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times X' \\ \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_1 \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

de p , possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour chaque $(U, X', \varphi, \Phi) \in \mathcal{C}$, U est un ouvert d'un espace de Banach E et X' une variété C^r .

(ii) $\{\varphi : (U, X', \varphi, \Phi) \in \mathcal{C}\}$ est un atlas de X ,

et, pour chaque $(U, X', \varphi, \Phi) \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{U}_\Phi = (U', \varphi')$ un atlas C^r de X' , où chaque φ' est un difféomorphisme C^r d'un ouvert $\varphi'^{-1}(U')$ de X' sur un ouvert U' d'un espace de Banach E' .

Etant donnés $(U, X', \varphi, \Phi) \in \mathcal{C}$ et $(U', \varphi') \in \mathcal{U}_\Phi$, désignons par $\psi_{\Phi, \varphi'}$ la carte locale C^r de Y donnée par

$$\Phi^{-1}(U \times \varphi'^{-1}(U')) \ni y \mapsto \psi_{\Phi, \varphi'}(y) = (\varphi \circ p(y), \varphi' \circ \text{pr}_2 \circ \Phi(y)) \in U \times U'.$$

LEMME 1. En identifiant chaque jet $j_x^k \gamma$ d'application de U dans U' à

$$(x, (D^j \gamma(x))_{0 \leq j \leq k}), \text{ on identifie } J^k(U, U') \text{ à } U \times U' \times \bigoplus_{0 \leq j \leq k} L_s^j(E, E'),$$

où $L_s^j(E, E')$ désigne l'ensemble des applications j -linéaires continues et symétriques de E dans E' , muni de sa structure standard d'espace de Banach. ■

THÉORÈME 1. Pour chaque entier $k \leq r$, soit π_k l'application de $J^k(p)$ dans Y définie par $\pi_k(j_x^k \gamma) = \gamma(x)$.

(i) Lorsque (U, X', φ, Φ) varie dans \mathcal{C} et (U', φ') dans \mathcal{U}_Φ , les applications

$\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}^k : \pi_k^{-1}(\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}^{-1}(U \times U')) \rightarrow U \times U' \times \bigoplus_{0 \leq j \leq k} L_S^j(E, E')$ données (modulo l'identification définie dans le lemme 1) par $\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}^k(j_x^k \gamma) = j_{\psi(x)}^k (\text{pr}_2 \circ \psi \circ \gamma \circ [\varphi^{-1}]_{\psi(x)})$ forment un atlas de variété C^{r-k} sur $J^k(p)$. La structure de variété ainsi définie ne dépend pas du choix de \mathcal{C} et de $\{\mathcal{U}_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \in \mathcal{C}\}$.

(ii) Pour cette structure, l'application π_k est une C^{r-k} - fibration localement triviale ; de manière précise, étant donnés $\mathfrak{z} \in \mathcal{C}$ et $\varphi' \in \mathcal{U}_{\mathfrak{z}}$, $\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}^k$ est une trivialisation locale de π_k au-dessus de $\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}$. En particulier, π_0 est un C^r - difféomorphisme de $J^0(p)$ sur Y .

(iii) Quel que soit l'entier $\ell \leq k$, l'application $\pi_k^\ell : J^k(p) \rightarrow J^\ell(p)$ définie par $\pi_k^\ell(j_x^k \gamma) = j_x^\ell \gamma$ est une C^{r-k} - fibration localement triviale ; plus précisément, étant donnés $\mathfrak{z} \in \mathcal{C}$ et $\varphi' \in \mathcal{U}_{\mathfrak{z}}$, $\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}^k$ est une trivialisation locale de π_k^ℓ au-dessus de $\psi_{\mathfrak{z}, \varphi'}^\ell$. ■

LEMME 2. Etant donnés un entier $k \leq r$, une C^r -variété X' et un espace de Banach E , soit $J_0^k(E, X')$ la fibre en 0 de la projection $\alpha_k : J^k(E, X') \rightarrow E$ définie par $\alpha_k(j_y^k g) = y$. Pour chaque $y \in E$, désignons par τ_y la translation $E \ni z \mapsto z + y \in E$. L'application

$$J^k(E, X') \ni j_y^k g \mapsto (y, j_0^k(g \circ \tau_y)) \in E \times J_0^k(E, X')$$

est une trivialisation de α_k au-dessus de id_E , qui permet d'identifier $J^k(U, X')$ à $U \times J_0^k(E, X')$ pour chaque ouvert U de E . ■

THÉORÈME 2. Pour chaque entier $k \leq r$, soit $p_k = p \circ \pi_k : J^k(p) \rightarrow X$ l'application $j_x^k \gamma \mapsto x$.

(i) p_k est une C^{r-k} - fibration localement triviale. Plus précisément, pour chaque $(U, X', \psi, \mathfrak{z}) \in \mathcal{C}$, l'application $\mathfrak{z}^k : \pi_k^{-1}(\mathfrak{z}^{-1}(U \times X')) \rightarrow U \times J_0^k(E, X')$ donnée par $\mathfrak{z}^k(j_x^k \gamma) = j_{\psi(x)}^k (\text{pr}_2 \circ \mathfrak{z} \circ \gamma \circ [\varphi^{-1}]_{\psi(x)})$ (modulo l'identification définie dans le lemme 2) est une C^{r-k} -trivialisation de p_k au-dessus de ψ .

(ii) Pour chaque section C^{ℓ} ($k \leq \ell \leq r$) f de p au-dessus d'un ouvert V de
 X , $j^k f$ est une section $C^{\ell-k}$ de p_k au dessus de V . ■

Je laisse au lecteur le soin de prouver que p_k et π_k sont des fibrés vectoriels lorsque c'est le cas de p . En fait, nous montrons dans l'appendice 2 que π_k peut toujours être muni d'une structure de fibré vectoriel, liée au choix de métriques riemanniennes (ou de connexions) sur X et Y .

(1.2.3) Jets d'ordre infini

Les notations étant celles de (1.2.2), on a évidemment $\pi_k^{\ell} \circ \pi_{\ell}^m = \pi_k^m$ quels que soient les entiers $m \leq \ell \leq k \leq r$. En d'autres termes, si $r = \infty$, les π_k^{ℓ} forment un système projectif d'applications C^{∞} , ce qui permet de définir un espace topologique $J^{\infty}(p) = \varprojlim_{k \rightarrow \infty} J^k(p)$, appelé espace des jets d'ordre infini de (germes

de) sections de p , et des projections continues $\pi_{\infty} = \varprojlim \pi_k : J^{\infty}(p) \rightarrow Y$,
 $\pi_{\infty}^{\ell} = \varprojlim \pi_k^{\ell} : J^{\infty}(p) \rightarrow J^{\ell}(p)$ ($\ell \in \mathbb{N}$) et $p_{\infty} = p \circ \pi_{\infty} = \varprojlim p_k : J^{\infty}(p) \rightarrow X$.

Si f est une C^{∞} -section de p au dessus d'un ouvert V de X ,
 $j^{\infty} f = \varprojlim j^k f$ est une section continue de p_{∞} au dessus de V , appelée jet d'ordre infini (ou simplement jet) de f , et l'on note

$$j_x^{\infty} f = j_x^{\infty} [f]_x = (j^{\infty} f)(x) .$$

Le théorème d'E. Borel (cf.1.3) affirme que tout élément z de $J^{\infty}(p)$ est de la forme $j_x^{\infty} \gamma$ pour un germe en $x = p_{\infty}(z)$ de section C^{∞} de p , ce qui justifie l'appellation de $J^{\infty}(p)$, lorsque X est de dimension finie.

(1.3) Le théorème de prolongement de Whitney

Les hypothèses et les notations étant celles de (1.2.2) et de (1.2.3), si A est une partie non vide de X et $\gamma = [f]_A$ un germe en A de section C^k ($0 \leq k \leq r$)

de p , la restriction $(j^k f)|_A$ est une section continue de p_k au-dessus de A , ne dépendant que de γ ; on l'appelle jet d'ordre k de γ (ou de f) en A et on la note

$$j_A^k f = j_A^k \gamma.$$

Etant donnée une section continue f^k de p_k au-dessus de A , il peut être utile de savoir si f^k est de la forme $j_A^k \gamma$ - auquel cas f^k sera dite holonome.

Lorsque A est ouvert, un germe en A de section de p ou de p_k est tout bonnement une section de p ou de p_k au-dessus de A , et une condition nécessaire et suffisante pour que f^k soit de la forme $j_A^k \gamma$ est que la section $\pi_k \circ f^k$ de p au-dessus de A soit de classe C^k et que l'on ait $f^k = j^k(\pi_k \circ f^k)$.

Le théorème de prolongement de Whitney a pour objet le cas nettement plus délicat où A est fermé. Nous en donnerons d'abord une version locale, qui contient l'essentiel de la difficulté :

THÉORÈME 1 (Whitney). Soient E un espace euclidien réel de dimension finie, F un espace de Banach, A une partie fermée de E et $g : A \rightarrow J^r(E, F)$ ($0 \leq r \leq \infty$) une section au-dessus de A de la projection $J^r(E, F) \rightarrow E$. L'espace $J^r(E, F)$ étant identifié à $E \times \prod_{k=0}^r L_s^k(E, F)$, on désigne par g_k ($0 \leq k \leq r$) la composante de g suivant $L_s^k(E, F)$, et l'on note, quels que soient les entiers j et k avec $0 \leq j \leq k \leq r$, et les points x et y dans A ,

$$R_{j,k}(x, y) = g_j(y) - \sum_{\ell=0}^{k-j} g_{j+\ell}(x) \cdot \frac{(y-x)^\ell}{\ell!}.$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe $f : E \rightarrow F$, de classe C^r , telle que $g = j_A^r f$.
- (b) Quel que soit $x_0 \in A$, tous les $R_{j,k}$ vérifient

$$\lim_{\substack{(x,y) \in A \times A \\ x \neq y \\ (x,y) \rightarrow (x_0, x_0)}} \frac{R_{j,k}^{(x,y)}}{|x-y|^{k-j}} = 0 .$$

Il résulte de la formule de Taylor que (a) entraîne (b). La démonstration de la réciproque fait appel à un argument assez subtil de partitions de l'unité, et figure dans Abraham-Robbin- voir aussi Tougeron pour un point de vue un peu différent. ■

REMARQUE. Lorsque A est réduit à un point, le théorème 1, trivial pour r fini (il suffit de choisir f polynomiale), ne l'est pas vraiment pour $r = \infty$: c'est le théorème d'E. Borel, qui affirme que toute série formelle est le développement de Taylor d'une application C^∞ , et dont nous avons déjà parlé dans (1.2.3).

Les démonstrations de (1.2.2) reposent plus ou moins sur la

PROPOSITION 1. Soit

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ Y' & \xrightarrow{\quad} & Y'' \\ p' \downarrow & & \downarrow p'' \\ X' & \xrightarrow{h} & X'' \end{array}$$

un isomorphisme C^r entre deux fibrations C^r localement triviales p' et p'' .

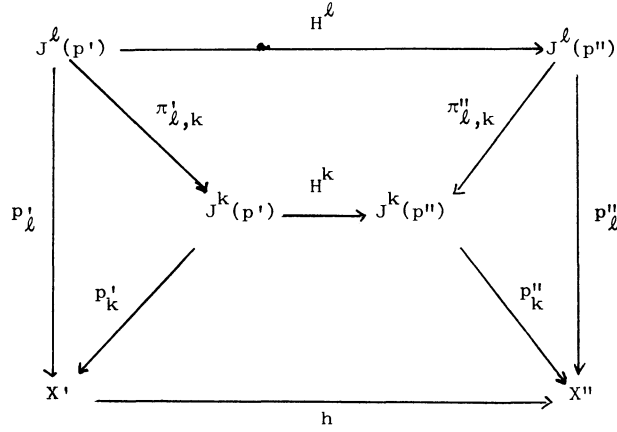
Pour $0 \leq k \leq r$, la formule

$$H^k(j_x^k \gamma) = j_{h(x)}^k (H \circ \gamma \circ [h^{-1}]_{h(x)})$$

définit un C^{r-k} - difféomorphisme

$$H^k : J^k(p') \rightarrow J^k(p''),$$

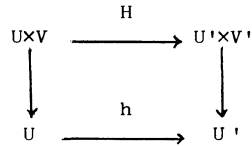
et les diagrammes



commutent pour $0 \leq k \leq l \leq r$. ■

Nous allons maintenant analyser la condition (b) du théorème 1 : nous dirons, les notations et les hypothèses étant celles du théorème 1, que $[g]_{x_0}$ vérifie (b) lorsque la propriété (b) sera satisfaite par g en x_0 (condition qui ne dépend évidemment que de $[g]_{x_0}$).

PROPOSITION 2. Les notations et les hypothèses étant celles du théorème 1, soit U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), soit



un isomorphisme C^r de la fibration triviale $U \times V \rightarrow U$ sur la fibration triviale $U' \times V' \rightarrow U'$, où U' (resp. V') désigne un ouvert d'un espace de Banach E' (resp. F') et soit

$$H^r : J^r(U, V) \rightarrow J^r(U', V')$$

le relevé de H défini dans la proposition 1.

Pour tout point x_0 de $U \cap A$ tel que $\pi_r \circ g(x_0) \in V$, si la condition (b)
est vérifiée par $[g]_{x_0}$, alors le germe

$$H^r \circ [g]_{x_0} \circ [h^{-1}]_{h(U \cap A)}|_{h(x_0)}$$

en $h(x_0)$ de section de $p'_r : J^r(U', V') \rightarrow U'$ au-dessus de $h(U \cap A)$ est bien défini et vérifie aussi (b). ■

DÉFINITION. Les hypothèses et les notations étant celles de (1.2.2)-(1.2.3), si X est de dimension finie, une section g de $J^r(p)$ au-dessus d'un fermé A de X vérifie la condition (W_r) si et seulement si elle possède les propriétés suivantes :

- (i) elle est continue ;
- (ii) pour tout $x_0 \in A$, il existe $(U, X', \varphi, \S) \in \mathcal{C}$ et $(U', \varphi') \in \mathcal{U}_\S$ telles que l'on ait $x_0 \in \varphi^{-1}(U)$, $\pi_r \circ g(x_0) \in \psi_{\S, \varphi}^{-1}(U' \times U')$, et que de plus le germe $\psi_{\S, \varphi}^r \circ g \circ [\varphi^{-1}]_{\varphi(A) \cap U}|_{\varphi(x_0)}$ vérifie (b).

COMMENTAIRES. - D'après la proposition 2, la condition (ii) ne dépend pas du choix de \S et φ' (ni d'ailleurs de celui de \mathcal{C} et (\mathcal{U}_\S)).

- La continuité de g n'est pas une hypothèse supplémentaire, puisqu'elle est impliquée par la propriété (b) du théorème 1 (pour $j=k=0$).

Soit f une section C^r de p au-dessus d'un ouvert V de X . Pour toute partie non vide B de V , le germe $[j^r f]_B$ de section de $J^r(p)$ ne dépend que de $\gamma = [f]_B$: on l'appelle jet d'ordre r de γ , et on le note $j^r \gamma$. Si $C \subset X$ vérifie $B \cap C \neq \emptyset$, les germes $[f]_{C \cap V}|_{B \cap C}$ et $[(j^r f)|_{C \cap V}]_{B \cap C}$ ne dépendent que de γ : ce sont les restrictions de γ et de $j^r \gamma$ à C , notées respectivement $\gamma|_C$ et $(j^r \gamma)|_C$.

Nous allons maintenant énoncer une version "intrinsèque" du théorème de Whitney :

THÉORÈME 2. Les hypothèses et les notations étant celles de (1.2.2)-(1.2.3), on suppose X de dimension finie et séparable. Etant donnée une section g de p_r au-dessus d'un fermé A de X , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) La section g est holonome .
- (b) Elle vérifie la condition (W_r) .

Démonstration. Il est clair que (a), entraîne (b). Réciproquement, sous l'hypothèse (b), g étant continue, il existe deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ d'ouverts relativement compacts de X possédant les propriétés suivantes :

- (i) $\overline{V_n} \subset U_n$ pour tout n et $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} V_n \supset A$.
- (ii) Quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe une trivialisation locale C^r

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_n) & \xrightarrow{\Phi_n} & E_n \times X'_n \\ \downarrow p & & \downarrow pr_1 \\ U_n & \xrightarrow{\varphi_n} & E_n \end{array}$$

de p , où E_n est un espace vectoriel réel de dimension finie et X'_n une variété C^r , et une carte locale C^r

$$\varphi_n'^{-1}(U'_n) \xrightarrow{\varphi'_n} U'_n$$

de X'_n , où U'_n est ouvert dans un espace de Banach E'_n telles que, si

$$\psi_n : \Phi_n^{-1}(E_n \times \varphi_n'^{-1}(U_n')) \rightarrow E_n \times U_n'$$

est définie par

$$\psi_n(y) = (\varphi_n \circ p(y) , \varphi_n' \circ \pi_2 \circ \Phi_n(y)) ,$$

on ait

$$\pi_r \circ g(A \cap U_n) \subset \psi_n^{-1}(E_n \times U_n') .$$

En appliquant le théorème 1 dans la carte ψ_1 , nous obtenons en particulier le

LEMME 1. Il existe un germe γ_1 en $A_1 = A \cap \overline{V}_1$ de section C^r de p , tel que

$$\left(j^r \gamma_1 \right) \Big|_A = [g]_{A_1} . \square$$

Etant donné $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, supposons prouvée l'existence d'un germe γ_n en

$$A_n = A \cap (\overline{V}_1 \cup \dots \cup \overline{V}_n)$$

de section C^r de p , tel que

$$\left(j^r \gamma_n \right) \Big|_A = [g]_{A_n} ,$$

et soit f_n une section C^r de p au-dessus d'un ouvert $\Omega_n \supset A_n$ de X , vérifiant

$$[f_n]_{A_n} = \gamma_n \quad \text{et} \quad \left(j^r f_n \right) \Big|_A = g \Big|_{A \cap \Omega_n} .$$

Comme f_n est continue, il existe un voisinage fermé

$$F_n \subset \Omega_n \cap U_{n+1}$$

de $A_n \cap U_{n+1}$ dans U_{n+1} tel que l'on ait

$$f_n(F_n) \subset \psi_{n+1}^{-1}(E_{n+1} \times U_{n+1}')$$

Soit g_{n+1} la section de p_r au dessus de $F_n \cup (A \cap U_{n+1})$ définie par

$$g_{n+1}|_A = g|_{A \cap U_{n+1}} \quad \text{et} \quad g_{n+1}|_{F_n} = j_{F_n}^r f_n.$$

Il est clair que g_{n+1} vérifie (W_r) . Le théorème 1, appliqué dans la carte ψ_{n+1} , établit donc l'existence d'une C^r -section h_{n+1} de p au-dessus d'un ouvert de U_{n+1} contenant $F_n \cup (A \cap U_{n+1})$, telle que

$$j_{F_n \cup (A \cap U_{n+1})}^r h_{n+1} = g_{n+1}.$$

On vérifie facilement que les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n+1}|_{U_{n+1}} = [h_{n+1}]_{U_n \cap A_{n+1}} \\ \gamma_{n+1}|_{X-\overline{V}_{n+1}} = \gamma_n|_{X-\overline{V}_{n+1}} \end{array} \right.$$

définissent un germe γ_{n+1} en A_{n+1} de section C^r de p tel que

$$j_A^r \gamma_{n+1}|_A = [g]_{A_{n+1}}. \blacksquare$$

EXERCICE. Lorsque les fibres de p sont C^r -difféomorphes à des espaces de Banach montrer que la condition (a) du théorème 2 peut être renforcée en

(a') Il existe une section C^r (globale) f de p telle que $g = j_A^r f$.

Les mêmes méthodes permettent de prouver la généralisation suivante du théorème 2, dont la démonstration est laissée au lecteur :

THÉORÈME 3. Soient $p : Y \rightarrow X$ et $p' : Y' \rightarrow X'$ deux C^r -fibrations localement
triviales ($0 \leq r \leq \infty$), A un fermé de X et g (resp. G) une section de la fibration
 $J^r(X, X') \rightarrow X$ (resp. $J^r(Y, Y') \rightarrow Y$) au-dessus de A (resp. $p^{-1}(A)$). Les propriétés
suivantes sont équivalentes lorsque X et Y sont séparables et de dimension
finie :

(a) Il existe un germe $\gamma : [X]_A \rightarrow X'$ et un germe $\Gamma : [Y]_{p^{-1}(A)} \rightarrow Y'$

d'applications C^r tels que (Γ, γ) soit un germe de morphisme de p dans p'
vérifiant

$$j_{p^{-1}(A)}^r \Gamma = G \text{ et } j_A^r \gamma = g .$$

(b) On a $g \cdot j_{p^{-1}(A)}^r p = (j^r p') \cdot G$ (*), et G (donc g) vérifie (w_r) . ■

Le théorème de Whitney s'applique à des fermés très compliqués, par exemple à des ensembles de Cantor. Dans ce cours, nous ne l'appliquerons en fait qu'à des fermés raisonnables, en un sens que nous allons maintenant définir : nous dirons qu'une partie A d'une variété de dimension finie X est raisonnable lorsqu'elle possèdera la propriété suivante : tout $x \in A$ a une base de voisinages dans A formée de parties compactes et connexes par arcs rectifiables de X , sur lesquelles la distance géodésique (étant donnée une métrique riemannienne sur X) est équivalente à la restriction de la distance riemannienne dans X . Cette définition ne dépend pas du choix de la structure riemannienne de X .

EXEMPLES. Les sous-variétés, les convexes fermés sont raisonnables.

THÉORÈME 4. Les hypothèses et les notations étant celles de (1.2.2)-(1.2.3), on
suppose X de dimension finie. Quel que soit le fermé raisonnable A de X , les
sections holonomes de p_r au-dessus de A forment un fermé de

(*) Où \cdot désigne la composition ponctuelle des jets, c'est-à-dire que, par exemple, $(g \cdot j_{p^{-1}(A)}^r p)(y) = g(p(y)) \circ j_y^r p$ pour tout $y \in p^{-1}(A)$.

$\mathcal{C}^0(A, J^r(p))$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (dont une base est formée, rappelons-le, des $\{f : f(K) \subset U\}$ lorsque K (resp. U) varie parmi les compacts (resp. ouverts) de A (resp. $J^r(p)$)).

Démonstration. On se ramène facilement au cas où A est une partie compacte et connexe par arcs rectifiables d'un espace euclidien E et p la projection $E \times F \rightarrow E$, où E est un espace de Banach. On a alors le

LEMME 2. Pour toute section holonome g au-dessus de A de p_r , on a ,
avec les notations du théorème 1,

$$|R_{j,k}(x,y)| \leq 2\delta(x,y)^{k-j} |g|_k$$

quels que soient x et y dans A et les entiers $j \leq k \leq r$, où δ désigne la
distance géodésique sur A et $|g|_k = \max\{|g_j(x)| : 0 \leq j \leq k \text{ et } x \in A\}$.

Preuve. Soient f un élément de $C^r(E,F)$ vérifiant $j_A^r f = g$, x un point de A , et, quels que soient les entiers $j \leq k \leq r$, $h_{x,k}^j$ l'élément de $C^{r-j}(E,F)$ défini par

$$h_{x,k}^j(y) = D^j f(y) - \sum_{\ell=0}^{k-j} g_{j+\ell}(x) \cdot \frac{(y-x)^\ell}{\ell!}.$$

Pour tout chemin linéaire par morceaux $\gamma : [0,1] \rightarrow E$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, on a, puisque $h_{x,k}^j(x) = 0$,

$$|h_{x,k}^j(y)| = \left| \int_0^1 Dh_{x,k}^j(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq |\gamma| \max \{ |Dh_{x,k}^j(\gamma(t))| : t \in [0,1] \}^{(*)},$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur de γ . Comme $D^\ell h_{x,k}^j(x) = 0$ pour $0 \leq \ell \leq k-j$, on en déduit de proche en proche que

(*) du moins pour $j < r$.

$$\forall \ell \in \{0, \dots, k-j\}, |h_{x,k}^j(y)| \leq |\gamma|^\ell \max \{ |D^\ell h_{x,k}^j(\gamma(t))| : t \in [0,1] \}.$$

Pour $y \in A$, lorsqu'on fait tendre γ vers un chemin rectifiable de x à y dans A , ces inégalités passent à la limite, ce qui donne (en prenant $\ell = k-j$)

$$|R_{j,k}(x,y)| \leq \delta(x,y)^{k-j} \max\{|g_k(z) - g_k(x)| : z \in A\} \leq 2\delta(x,y)^{k-j} \max\{|g_k(z)| : z \in A\}. \quad \square$$

Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que l'on ait $\delta(x,y) \leq C|x-y|$ quels que soient x et y dans A . On déduit donc du lemme 2 que, sur l'espace vectoriel des sections au-dessus de A de p_k vérifiant (w_k) (k entier $\leq r$), la norme $|\cdot|_k$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_k$ donnée par

$$\|g\|_k = |g|_k + \sup\{|R_{j,k}(x,y)| \cdot |x-y|^{j-k} : 0 \leq j \leq k \text{ et } (x,y) \in A \times A \setminus \Delta A\}$$

d'où le résultat cherché. ■

Je laisse au lecteur le soin de prouver (et, s'il le désire, de généraliser) le

THÉOREME 5. Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E , et, pour $1 \leq i \leq n$, soit A_i une boule fermée de centre O dans E_i (pour la structure euclidienne induite). Alors

- (i) $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ est un fermé raisonnable de E ;
- (ii) Etant donné un espace de Banach F , pour qu'une section g de $J^r(E,F) \rightarrow E$ au-dessus de A soit holonome, il faut et il suffit que ce soit le cas de chacune des $g|_{A_i}$.

EXERCICE. Soit A une sous-variété d'une variété X . Etant donnée une variété Y montrer que les sections de $p_r : J^r(X, Y) \rightarrow X$ au dessus de A qui satisfont (w_r) sont simplement celles pour lesquelles $\rho_A \circ g = j^r(\pi_0 \circ g)$, où π_0 et ρ_A sont donnés par $\pi_0(j_x^r f) = f(x)$ et $\rho_A(j_x^r f) = j_x^r(f|_A)$, et satisfaisant en outre des conditions similaires que l'on explicitera.

2. TRANSVERSALITÉ

(2.1) Le théorème de Sard

Soient X et Y deux variétés C^r ($1 \leq r \leq \infty$), et $C^k(X, Y)$ ($0 \leq k \leq r$) l'ensemble des applications C^k de X dans Y . Rappelons que $f \in C^1(X, Y)$ est une submersion en $x \in X$ (resp. une submersion) si et seulement si l'application linéaire tangente $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ est surjective et a un noyau facteur direct (i.e. admettant un supplémentaire fermé) dans $T_x X$ (resp. si et seulement si f est une submersion en tout point de X).

Lorsque f n'est pas une submersion en $x \in X$, on dit que x est un point critique de f , et $f(x)$ une valeur critique de f .

PROPOSITION 1. Les points critiques d'un élément f de $C^1(X, Y)$ forment un fermé. ■

Un point y de Y qui n'est pas valeur critique de f (c'est à dire tel que f soit une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$) est appelé valeur régulière de f .

EXEMPLE. Pour $\dim Y > \dim X < \infty$, un point y de Y est valeur régulière de f si et seulement si il n'est pas valeur de f , i.e. n'appartient pas à $f(X)$.

THÉOREME 1 (Sard). Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et f une application C^r de U dans \mathbb{R}^p . Pour $r > \max\{0, n-p\}$, l'ensemble des valeurs critiques de f est de

mesure (de Lebesgue) nulle. ■

Ce résultat est prouvé dans Abraham-Robbin et dans Tougeron ; le cas difficile est celui où n est plus grand que p .

Rappelons qu'un espace de Baire est un espace topologique X tel que toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X soit dense dans X . Une partie de X est alors dite résiduelle lorsqu'elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Je renvoie à Dieudonné (t. 2, (12.16.1)) pour la démonstration (facile) du classique

THÉORÈME 2 (Baire). Soit E un espace topologique dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un espace métrique complet. Alors E est un espace de Baire. ■

En particulier, une variété est un espace de Baire.

THÉORÈME 3. Soient X et Y deux variétés C^r de dimensions respectives n et p , avec X séparable. Pour $r > \max\{0, n-p\}$, l'ensemble des valeurs régulières de tout élément f de $C^r(X, Y)$ est résiduel dans Y .

Démonstration. Soit C l'ensemble des points critiques de f , et soient $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ deux recouvrements de X vérifiant

$$\forall j \in \mathbb{N}, V_j = \overset{o}{V}_j \subset \overline{V}_j \text{ compact} \subset U_j = \overset{o}{U}_j$$

et tels que, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, il existe une carte $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X et une carte $\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^p$ de Y vérifiant $f(U_j) \subset U_j'$. Comme C est fermé, $f(C \cap \overline{V}_j)$ est compact pour chaque $j \in \mathbb{N}$, et, puisque son image par ψ_j est de mesure nulle d'après le théorème de Sard (appliqué dans les cartes φ_j et ψ_j), il est d'intérieur vide. On en déduit que $Y \setminus f(C \cap \overline{V}_j)$ est un ouvert dense, et donc que

$$Y \setminus f(C) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} (Y \setminus f(C \cap \overline{V}_j))$$

est résiduel. ■

(2.2) Transversalité

Rappelons qu'une sous-variété C^r d'une variété Y est une partie Z de Y telle que tout $y \in Z$ possède dans Y un voisinage ouvert U ayant la propriété suivante : il existe un C^r -difféomorphisme h de U sur $U_1 \times U_2$, où U_1 et U_2 sont ouverts dans des espaces de Banach, tel que $h(y) = (0,0)$ et $h(Z \cap U) = U_1 \times \{0\}$. On déduit facilement du théorème d'inversion locale que, pour toute valeur régulière y d'un élément f de $C^r(X,Y)$, où X est une variété, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^r de X . La codimension de (la composante connexe de y dans) Z est la dimension de U_2 .

Lorsque X et Y sont de dimension finie, on dit que $f \in C^1(X,Y)$ est transverse en $A \subset X$ à une sous-variété Z de Y sur $C \subset Z$ si et seulement si, pour tout $x \in A$, on a soit $f(x) \notin C$, soit $f(x) \in C$ et $T_x f(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y$. Cela se note $f \pitchfork_A^C Z$.

Lorsque A (resp. C) est égal à X (resp. Z) toute entière, on omet "en A " (resp. "sur C "), et l'on note

$$f \pitchfork^C Z \text{ (resp. } f \pitchfork_A Z \text{)}.$$

Si $A = X$ et $C = Z$, on dit donc que f est transverse à Z , ce qui s'écrit $f \pitchfork Z$.

La condition $f \pitchfork_x Z$ équivaut à

- (c) pour tout ouvert $V \ni f(x)$ et toute submersion $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que $V \cap Z = g^{-1}(0)$, $g \circ f \Big|_{f^{-1}(V)}$ est une submersion en x ,

ou encore à

(c') il existe un ouvert $V \ni f(x)$ et une submersion $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que $V \cap Z = g^{-1}(0)$ et que $g \circ f|_{f^{-1}(V)}$ soit une submersion en x .

D'où la

PROPOSITION 1. Si $f \in C^r(X, Y)$ est transverse à une sous-variété Z connexe et C^r ($r \geq 1$) de Y , alors ou bien $f^{-1}(Z) = \emptyset$, ou bien $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété C^r de X , de même codimension que Z . ■

PROPOSITION 2 (théorème de transversalité, version élémentaire). Soient A, X et Y trois variétés C^r de dimension finie, Z une sous-variété C^r de Y , de codimension q , et $\rho : A \times X \rightarrow Y$ une application C^r , transverse à Z .

Si A et X sont séparables et X de dimension n , alors, pour $r > \max\{0, n-q\}$, l'ensemble $\mathcal{C}_{\rho, Z}$ des $a \in A$ tels que

$$\rho_a : x \mapsto \rho(a, x)$$

soit transverse à Z est résiduel.

Démonstration. D'après la proposition 1, $\rho^{-1}(Z)$ est une sous-variété C^r de $A \times X$, de codimension q , et la restriction g à $\rho^{-1}(Z)$ de la projection $\text{pr}_1 : A \times X \rightarrow A$ est donc de classe C^r . Notre assertion est donc une conséquence immédiate du théorème 3 de (2.1), grâce au résultat suivant, dont la démonstration est laissée en exercice :

LEMME. $\mathcal{C}_{\rho, Z}$ est l'ensemble des valeurs régulières de g . ■

(2.3) La topologie fine de Whitney et le théorème de transversalité de Thom

(2.3.1) Soit $p : Y \rightarrow X$ une fibration C^r ($0 \leq r \leq \infty$) localement triviale. Sur

l'ensemble $C^r(p)$ des sections C^r de p , la topologie fine (ou topologie de Whitney) est celle dont une base est formée des ouverts

$$\mathcal{U}(k,U) = \{f \in C^r(p) \mid j^k f(X) \subset U\} ,$$

k et U variant respectivement parmi les entiers naturels $\leq r$ et les ouverts de $J^k(p)$.

COMMENTAIRES. 1 - En particulier, on définit ainsi une topologie sur $C^r(X,X')$ lorsque X et X' sont des variétés C^r , via l'identification canonique de $C^r(X,X')$ à l'ensemble des sections C^r de la fibration triviale $X \times X' \rightarrow X$.

2 - Si X est compacte, on obtient la topologie C^r ordinaire.

DANS CE QUI SUIT, NOUS NOUS PLACERONS SOUS LES HYPOTHÈSES DU

THÉORÈME 1. Lorsque X et Y sont de dimension finie et X séparable, $C^r(p)$ muni de la topologie fine est un espace de Baire.

Ce résultat est prouvé dans Golubitsky-Guillemin. ■

Voici maintenant une conséquence remarquable du théorème de Sard :

THÉORÈME 2 (Thom). Soient Z une sous-variété C^ℓ de codimension q de $J^k(p)$, C un fermé de Y contenu dans Z et A un fermé de X . Pour

$$\min\{\ell, r-k\} > \max\{0, n-q\} ,$$

où $n = \dim X$, l'ensemble

$$\mathcal{U}_A^C = \{f \in C^r(p) \mid j^k f \not\pitchfork_A^C Z\}$$

est ouvert et dense dans $C^r(p)$ muni de la topologie fine.

Démonstration. Commençons par le plus facile :

LEMME 1. Pour $r > k$, \mathcal{U}_A^C est un ouvert de la topologie fine sur $C^r(p)$.

En effet,

(EXERCICE) si f est un germe en $x \in X$ de section C^{k+1} de p , $T_x(j_x^k f)$ ne dépend que de $j_x^{k+1} f$.

On voit facilement que

$$U = \{z = j_x^{k+1} f \in J^{k+1}(p) \mid x \notin A \text{ ou } f(x) \notin C \text{ ou } T_{j_x^k f} Y = T_x(j_x^k f)(T_x X) + T_{j_x^k f} Z\}$$

est ouvert dans $J^{k+1}(p)$ (son complémentaire est fermé), d'où le lemme 1, puisque

$$\mathcal{U}_A^C = \mathcal{U}(k+1, U) . \square$$

La clef de la démonstration est le résultat suivant (où n, r, q, k et ℓ vérifient l'hypothèse du théorème) :

LEMME 2. Soient f une application C^r d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , W une sous-variété C^ℓ de codimension q de $J^k(U, \mathbb{R}^p)$ et \mathbb{P}_k l'espace vectoriel (de dimension finie) des applications polynomiales $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de degré $\leq k$.

Tout voisinage de 0 dans \mathbb{P}_k contient un élément P tel que

$$j_x^k(f+P) \not\subset W .$$

En effet, on voit aisément que

$$\mathbb{P}_k \times U \ni (P, x) \mapsto j_x^k(f+P)$$

est une submersion, donc en particulier transverse à W , et l'on conclut en utilisant la version élémentaire du théorème de transversalité démontrée dans (2.2). \square

Nous voici armés pour prouver le

LEMME 3. \mathcal{U}_A^C est dense dans $C^r(p)$ pour la topologie fine.

Fixons en effet un élément f_0 de $C^r(p)$. Nous allons montrer que tout voisinage de f_0 rencontre \mathcal{U}_A^C .

Il existe deux recouvrements $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de X par des ouverts relativement compacts, possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour chaque j , on a $\overline{V_j} \subset U_j$, et il existe une trivialisation locale

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_j) & \xrightarrow{\Phi_j} & \mathbb{R}^n \times X' \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U_j & \xrightarrow{\psi_j} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

de classe C^r de p , où X' est une variété C^r , telle que $\psi_j(\overline{V_j})$ soit une boule fermée de centre $0 \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Quel que soit j , il existe une carte locale $\varphi_j' : U_j' \rightarrow \mathbb{R}^p$ de X' , telle que l'on ait

$$f_0(U_j) \subset \Phi_j^{-1}(\mathbb{R}^n \times U_j').$$

Pour chaque j , soit $\overline{V_j'} \supset V_j' \supset \overline{V_j}$ l'image réciproque par φ_j' d'une boule fermée de centre 0 .

EXERCICE. $\mathcal{V} = \{f \in C^r(p) \mid \forall j \in \mathbb{N}, f(\overline{V_j'}) \subset \Phi_j^{-1}(\mathbb{R}^n \times U_j')\}$ est ouvert dans $C^r(p)$.

(il est de forme $\mathcal{U}(0, U)$).

Si

$$K_j = A \cap \overline{V_j}$$

on a

$$\mathcal{U}_A^C = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{K_j}^C.$$

Pour prouver le lemme 3, il suffit évidemment, \mathcal{V} contenant f_0 , de montrer que $\mathcal{U}_A^C \cap \mathcal{V}$ est dense dans \mathcal{V} . Or, \mathcal{V} , étant ouvert dans un espace de Baire, est un espace de Baire ; il nous suffit donc d'établir le résultat suivant :

Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{K_j}^C \cap \mathcal{V}$ est dense dans \mathcal{V} .

Etant donnés $j \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{V}$, soit $\alpha_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ une fonction C^∞ égale à 1 dans un voisinage de $\varphi(\overline{V_j})$ et à 0 dans un voisinage de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi_j(V_j')$.

Désignons par f_j l'application image de $f|_{V_j'}$ dans les cartes $(\varphi_j, \Phi_j, \varphi_j')$, c'est à dire l'élément de

$$C^r(\varphi_j(V_j'), \mathbb{R}^p)$$

défini par

$$f_j = \varphi_j' \circ \text{pr}_2 \circ \Phi_j \circ f \circ \varphi_j^{-1} \Big|_{\varphi_j(V_j')}.$$

Pour chaque $P \in \mathbb{P}_k$, soit f_P l'élément de \mathcal{V} défini par

$$f_P \Big|_{X \setminus V_j'} = f \Big|_{X \setminus V_j'} \quad \text{et} \quad (f_P)_j = f_j + \alpha_j \cdot P,$$

où $(f_P)_j$ est l'image de $f_P \Big|_{V_j'}$ dans les cartes $(\varphi_j, \Phi_j, \varphi_j')$.

Quand P tend vers 0 dans \mathbb{P}_k , on voit facilement que f_P tend vers f dans $C^r(p)$.

De plus, d'après le lemme 2, il existe des P arbitrairement petits dans \mathbb{P}_k tels que f_P soit transverse à Z en K_j .

Il en résulte que $\mathcal{V}_{K_j}^Z \cap \mathcal{V}$, donc $\mathcal{V}_{K_j}^C \cap \mathcal{V}$, est dense dans \mathcal{V} . ■

COMMENTAIRE. Smale et Abraham ont généralisé le théorème élémentaire de transversalité en dimension infinie, ce qui permet de donner une démonstration un peu plus directe - mais plutôt moins simple - du théorème de Thom. Cf. l'Appendice 3.

(2.3.2) Multijets

Les hypothèses et les notations étant les mêmes que précédemment, soit s un entier > 1 ; pour $0 \leq k \leq r$, notons

$$p_k^s : J^k(p)^s \rightarrow X^s$$

l'application donnée par $p_k^s(z_1, \dots, z_s) = (p_k(z_1), \dots, p_k(z_s))$. Si

$${}_s\Delta X = \{(x_1, \dots, x_s) \in X^s : \exists i, j \in \{1, \dots, s\} : i \neq j \text{ et } x_i = x_j\} \text{ et } {}_sX = X \setminus {}_s\Delta X,$$

l'ouvert ${}_sJ^k(p) = (p_k^s)^{-1}({}_sX)$ est par définition l'espace des s -jets d'ordre k

de sections de p . On note ${}_s p_k : {}_sJ^k(p) \rightarrow {}_sX$ la restriction de p_k^s ; à toute section f , de classe C^k , de p au dessus d'un ouvert V de X , on associe la section

$${}_s j^k f : (x_1, \dots, x_s) \rightarrow (j_{x_1}^k f, \dots, j_{x_s}^k f)$$

de ${}_s p_k$ au-dessus de ${}_sV$, appelée s -jet d'ordre k de f .

On doit à J.N. Mather la généralisation suivante du théorème de Thom, dont la démonstration est laissée en exercice :

THÉORÈME. Soient Z une sous-variété C^ℓ de codimension q de ${}_sJ^k(p)$. Pour $\min\{\ell, r-k\} > \max\{0, ns-q\}$, où $n = \dim X$, l'ensemble $\{f \in C^r(p) : {}_s j^k f \notin Z\}$ est

résiduel dans $C^r(p)$ muni de la topologie fine. ■

REMARQUES. 1 - Une erreur courante (cf. certaines de nos références) consiste à affirmer pour $s > 1$ que l'application $f \mapsto j_s^k f$ est continue pour la topologie de Whitney ; par exemple, la seule application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, f(x)^2 + f(x')^2 < \frac{1}{x^2 + x'^2}$$

est $f = 0$.



2 - Cette difficulté n'est pas la seule à laquelle se heurte la généralisation aux multijets de la partie "ouverture" du théorème de transversalité de Thom : l'obstacle essentiel est le "trou" le long de ΔX . Dans l'appendice 4, nous expliquons comment le boucher lorsque $s = 2$.

(2.4) Applications

(2.4.1) Fonctions de Morse

Soient E un espace de Banach, X une variété C^r et $L(TX, E)$ (alias $T^*X \otimes_{\mathbb{R}} E$) le fibré vectoriel de base X dont la fibre au-dessus de $x \in X$ est $L(T_x X, E)$ (alias $(T_x X)^* \otimes_{\mathbb{R}} E$).

A chaque $f \in C^1(X, E)$, associons sa différentielle df , donnée par

$$df(x) = A_{f(x)} \circ T_x f,$$

où $A_{f(x)} : T_{f(x)} E \rightarrow E$ est l'isomorphisme canonique.

C'est évidemment une section de $L(TX, E)$.

L'espace $J^1(X, E)$ s'identifie canoniquement à $E \times L(TX, E)$ par l'application

$$j_x^1 f \mapsto (f(x), df(x)).$$

En particulier, $J^1(X, \mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R} \times T^*X$. Soit Σ la sous variété fermée de $J^1(X, \mathbb{R})$ définie modulo cette identification par

$$\Sigma = \mathbb{R} \times O_{T^*X}^*,$$

où $O_{T^*X}^*$ est le sous-fibré vectoriel de T^*X constitué de tous les zéros des fibres.

Etant donnée $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, un point x de X est critique pour f si et seulement si

$$j_x^1 f \in \Sigma.$$

Lorsque X et f sont C^2 , on dit qu'un point critique x de f est non dégénéré lorsque

$$j_x^1 f \nmid \Sigma.$$

On dit que $f \in C^2(X, \mathbb{R})$ est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

PROPOSITION 1. Si X est de dimension finie et séparable, les fonctions de Morse forment un ouvert dense de la topologie fine sur $C^r(X, \mathbb{R})$ pour $r \geq 2$.

Démonstration. Dire que f est une fonction de Morse équivaut à affirmer que $j^1 f \nmid \Sigma$, et il suffit d'appliquer le théorème de transversalité de Thom. ■

En particulier, si f est une fonction de Morse, $(j^1 f)^{-1}(\Sigma)$ est une sous-variété de dimension 0 de X , c'est-à-dire que les points critiques de f sont isolés. Le résultat suivant, qui précise cette remarque, rend les fonctions de Morse particulièrement maniables :

PROPOSITION 2. Sous les hypothèses de la proposition 1, les propriétés suivantes

sont équivalentes :

- (a) $x \in X$ est un point critique non dégénéré de $f \in C^r(X, \mathbb{R})$ ($2 \leq r \leq \infty$).
- (b) Pour toute carte locale $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ de X avec $x \in U$, $D^2(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
- (c) Il existe sur X un système (x^1, \dots, x^n) de coordonnées locales de classe C^{r-2} , nulles en x , tel que

$$f = f(x) - \sum_{1 \leq p \leq i} (x^p)^2 + \sum_{i < q \leq n} (x^q)^2.$$

L'équivalence entre (a) et (b) est un exercice facile. La condition (b) peut évidemment être remplacée par la condition plus faible "pour une carte locale $\varphi \dots$ ". L'implication de (c) par (b), connue sous le nom de Lemme de Morse, est un cas particulier du

LEMME DE MORSE-PALAIS (à paramètre). Soient H un espace de Hilbert et $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, continue et non dégénérée (i.e. telle que $B^b : x \mapsto (y \mapsto B(x, y))$ soit un isomorphisme de H sur son dual H'). Pour tout espace de Banach Λ et tout germe F en $(0, 0)$ de fonction C^k ($k \geq 2$) sur $H \times \Lambda$ vérifiant $DF_o(0) = 0$ et $D_o^2 F_o(0) = B$ (où $F_\lambda(x) = F(x, \lambda)$), il existe un germe $\Phi : [H \times \Lambda]_{(0,0)} \hookrightarrow C^{k-2}$ -difféomorphisme de la forme $(x, \lambda) \mapsto (h_\lambda(x), \lambda)$ tel que l'on ait

$$\Phi^* F(x, \lambda) = \frac{1}{2} B(x, x) + \varphi(\lambda),$$

où $\varphi : [\Lambda]_o \rightarrow \mathbb{R}$ est un germe C^{k-1} .

Preuve. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un unique germe $\Psi : [\Lambda]_o \rightarrow [\mathbb{R}]_o$ d'application C^{k-1} tel que l'on ait

$$DF_\lambda(\Psi(\lambda)) \equiv 0.$$

Il résulte donc de la formule de Taylor que, si $\varphi(\lambda) = F_\lambda(\Psi(\lambda))$, on a

$$F(x+\psi(\lambda), \lambda) = \psi(\lambda) + C(x, \lambda) \cdot x^2,$$

où $C : [H \times \Lambda]_{(0,0)} \rightarrow [L_S^2(H, \mathbb{R})]_B$ est de classe C^{k-2} . Nous aurons évidemment terminé la démonstration si nous parvenons à écrire $C(x, \lambda) \cdot x^2$ sous la forme $B \cdot (A(x, \lambda)x)^2$, soit $(A(x, \lambda))^* B \cdot x^2$, où A est un germe en $(0,0)$ d'application C^{k-2} de $H \times \Lambda$ dans l'espace de Banach \mathcal{B} des opérateurs B -autoadjoints de H , tel que $A(0,0) = \text{id}_H$. Or, cela résulte évidemment d'une nouvelle application du théorème des fonctions implicites, cette fois-ci à l'équation

$$A^* B - C(x, \lambda) \equiv 0, \quad A \in \mathcal{B} \quad \square$$

Ce lemme admet la généralisation suivante, essentielle en théorie des singularités de fonctions :

THÉORÈME DE RÉDUCTION. Les hypothèses et les notations sont celles du lemme précédent, sauf que B est cette fois simplement une forme bilinéaire continue, symétrique, telle que $B^b(H)$ soit fermé dans H' . Pour tout supplémentaire fermé L de $K = (B^b)^{-1}(0)$ dans H , il existe un germe $\Phi : [L \oplus K \oplus \Lambda]_{(0,0,0)} \hookrightarrow$ de C^{k-2} - difféomorphisme, de la forme $(y, z, \lambda) \mapsto (h_{\lambda, z}(y), z, \lambda)$ tel que

$$\Phi^* F(y, z, \lambda) = \frac{1}{2} B(y, y) + \psi(z, \lambda),$$

où $\psi : [K \oplus \Lambda]_{(0,0)} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^{k-1} et satisfait

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial z}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}(0,0) = 0.$$

Preuve. Il suffit de remplacer dans le lemme H par L , B par $B|_L$ et Λ par $K \oplus \Lambda$. ■

COMMENTAIRE. Si l'on fait agir à droite les (germes de) difféomorphismes de H et à gauche les translations de \mathbb{R} , on obtient sur l'ensemble des (germes de) fonctions C^k sur H une relation d'équivalence (être sur la même orbite). Le

lemme de Morse - Palais est à la fois un résultat de stabilité structurelle (l'orbite d'un germe de fonction de Morse est ouverte, en un sens facile à préciser) et un résultat donnant d'une orbite un représentant particulièrement simple, ou forme normale (une forme bilinéaire continue et symétrique) pour chaque germe de fonctions de Morse.

Ces idées reviendront souvent dans la suite du cours.

Une fonction de Morse f est dite excellente si, quels que soient ses points critiques x et y distincts, on a $f(x) \neq f(y)$.

PROPOSITION 3. Sous les hypothèses de la proposition 1, les fonctions de Morse excellentes forment un ensemble résiduel dans $C^r(X, \mathbb{R})$ pour $r \geq 2$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de transversalité de Thom, version Mather, à la sous-variété Z de $J^1_2(X, \mathbb{R})$ définie par

$$z = (j_x^1 f, j_y^1 g) \in Z \text{ si et seulement si } z \in \Sigma \times \Sigma \\ \text{et } f(x) = g(y). \blacksquare$$

On n'obtient pas de la sorte un ouvert, car Z n'est pas fermée dans $(J^1_2(X, \mathbb{R}))^2$.
En fait,

EXERCICE. Les fonctions de Morse excellentes forment un ouvert de la topologie fine de $C^r(X, \mathbb{R})$ pour $r \geq 2$ -cf. l'Appendice 4 dans le cas compact.

(2.4.2) Le théorème de plongement de Whitney

Soit X une variété séparable de dimension finie n et de classe C^r ($r \geq 1$)
Rappelons qu'une application f de classe C^r de X dans une variété Y de dimension finie p est une immersion en $x \in X$ (resp. une immersion) lorsque $T_x f$ est injective (resp. lorsque f est une immersion en tout point de X).

THÉORÈME 1. Sous les hypothèses précédentes

(i) les immersions C^r de X dans Y forment un ouvert de la topologie fine sur $C^r(X, Y)$;

(ii) Pour $p \geq 2n$ et $r \geq 2$, cet ouvert est dense.

Démonstration. Point (i). L'ensemble Σ des $j_x^1 f \in J^1(X, Y)$ tels que f ne soit pas une immersion en x est fermé (exercice). L'ensemble des immersions C^r de X dans Y n'est autre que

$$\text{Im}^r(X, Y) = \{f \in C^r(X, Y) \mid j_x^1 f(X) \cap \Sigma = \emptyset\},$$

ce qui prouve qu'il est ouvert.

Point (ii). Appelons corang d'une application linéaire $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ le nombre

$$\min \{n, p\} - \text{rang de } A.$$

Je laisse à la sagacité du lecteur la preuve du

LEMME. Soient n et p deux entiers naturels avec $p \geq n$. Alors

(i) L'ensemble des $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (resp. $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$) qui sont de corang c est une sous-variété analytique de codimension $c(p-n+c)$ de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (resp. $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$).

(ii) Si X et Y sont deux variétés C^r ($r \geq 1$) de dimensions respectives n et p (resp. p et n), l'ensemble Σ_c des $j_x^1 f \in J^1(X, Y)$ tels que $T_x f$ soit de corang c est une sous-variété C^{r-1} de $J^1(X, Y)$, de codimension $c(p-n+c)$. \square

Sous les hypothèses du théorème 1 (ii), les propriétés suivantes sont alors évidentes :

$$(a) \quad \Sigma = \bigcup_{1 \leq c \leq n} \Sigma_c.$$

(b) Chaque Σ_c est de codimension $> n$.

D'après le théorème de transversalité de Thom,

$$\bigcap_{1 \leq c \leq n} \{f \in C^r(X, Y) \mid j^1 f \pitchfork \Sigma_c\}$$

est résiduel. Or, il résulte de (a) et de (b) que cet ensemble n'est autre que $\text{Im}^r(X, Y)$. ■

REMARQUES. - $(\Sigma_c)_{1 \leq c \leq n}$ est ce que l'on appelle une stratification du fermé Σ , qui est alors dit stratifié, de strates Σ_c . Sa codimension est la plus petite de celles des Σ_c .

- En utilisant la densité de $C^r(X, Y)$ dans $C^1(X, Y)$ pour $r \geq 1$, on prouve que (ii) est en fait vrai pour $r = 1$.

PROPOSITION 1. Sous les hypothèses du théorème 1, pour $p \geq 2n+1$ et $r \geq 1$, l'ensemble des éléments injectifs de $C^r(X, Y)$ est résiduel.

Démonstration. Les $(j_x^0 f, j_y^0 g)$ tels que $f(x) = g(y)$ forment une sous-variété de codimension p dans $J^0(X, Y)$, et la proposition résulte donc du théorème de transversalité, façon Mather. ■

Rappelons qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite propre lorsqu'elle est continue et que $f^{-1}(K)$ est compact pour toute partie compacte K de Y .

PROPOSITION 2. Soient X et Y deux espaces topologiques. Si Y est localement compact, ou si tout point y a une base dénombrable de voisinages, alors toute application propre de X dans Y est fermée.

Le cas localement compact est classique. L'autre est un exercice simple de

topologie générale (la remarque est due à Palais). ■

LEMME. Pour toute C^r -variété séparable X de dimension finie, il existe une application propre $f \in C^r(X, \mathbb{R})$, $0 \leq r \leq \infty$.

Démonstration. Soit $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts relativement compacts de X , vérifiant

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j = X \quad \text{et} \quad \overline{U_j} \subset U_{j+1},$$

et, pour chaque j , une fonction $u_j \in C^r(X, [0, 1])$ égale à 1 sur $\overline{U_{j+2}} \setminus U_{j+1}$ et à 0 sur $U_j \cup (X \setminus U_{j+3})$. On vérifie sans peine que

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} j u_j$$

est bien définie et répond à la question. ■

COROLLAIRE. Sous les hypothèses du lemme, il existe une métrique d définissant la topologie de X , et telle que X soit complet et que tout fermé borné y soit compact.

Démonstration. Soit δ une métrique définissant la topologie de X (Dieudonné, t.2, (12.4.7)), et soit $f \in C^r(X, \mathbb{R})$ une application propre. Il suffit de définir d par

$$d(x, y) = \delta(x, y) + |f(x) - f(y)|. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 3. Sous les hypothèses du lemme, pour toute variété séparable Y de classe C^r et de dimension finie, l'ensemble des applications C^r et propres de X dans Y est ouvert dans $C^r(X, Y)$. Sauf lorsque Y est compacte sans que X le soit, cet ouvert est non vide.

Démonstration. Soit d une distance sur Y possédant les propriétés énoncées dans le corollaire, et soit U l'ouvert de $J^0(X, Y)$ défini par

$$\pi_o(U) = \{(x,y) \in X \times Y \mid d(y, g_o(x)) < 1\},$$

où $g_o \in C^r(X,Y)$ est propre.

Pour tout élément g de

$$\mathcal{U}(O,U) = \{g \in C^r(X,Y) \mid j_o^0 g(X) \subset U\}$$

et toute boule fermée $B'(y,\rho)$ de centre y et de rayon ρ dans Y , on a évidemment

$$g^{-1}(B'(y,\rho)) \subset g_o^{-1}(B'(y,\rho+1)),$$

ce qui prouve que g est propre, d'où l'ouverture.

Pour prouver l'existence d'une application propre de X dans Y lorsque X et Y ne sont pas compactes, il suffit d'établir celle d'une application propre de \mathbb{R} dans Y et de la composer avec une application propre de X dans \mathbb{R} .

Quand Y est un espace vectoriel, une application propre de \mathbb{R} dans Y est par exemple une injection linéaire.

Sinon, sa construction est laissée en exercice. ■

Rappelons qu'un plongement C^r d'une variété X dans une variété Y ($r \geq 0$) est un $f \in C^r(X,Y)$ tel que $f(X)$ soit une sous-variété de Y et que f définisse un difféomorphisme C^r de X sur $f(X)$. Pour $r \geq 1$, cela implique en particulier que f soit une immersion injective ; dans cet ordre d'idées, on a la classique

PROPOSITION 4. Les immersions injectives et propres sont exactement les plongements d'image fermée et de classe C^1 . ■

En mettant bout à bout les propositions 1, 3 et 4 et le théorème 1, on obtient le

THÉORÈME 2. Soient X et Y deux variétés C^r séparables de dimensions respectives n et p . Pour $r \geq 1$ et $p > 2n$, l'ensemble des plongements propres de X dans Y est résiduel dans l'ouvert de $C^r(X, Y)$ formé de toutes les applications propres. ■

COROLLAIRE. Toute variété C^r ($r \geq 1$) X de dimension n peut être plongée comme sous-variété fermée C^r de \mathbb{R}^{2n+1} . ■

COMMENTAIRE. Le "vrai" théorème de plongement de Whitney, plus difficile, permet de remplacer $2n+1$ par $2n$.

Comme toujours, l'absence de la diagonale dans les multijets nous a joué des tours. Je renvoie donc à Munkres (pages 34-35) et à l'Appendice 4 dans le cas compact pour une démonstration du

THÉORÈME 3. Soient X et Y deux variétés C^r , séparables et de dimension finie. Pour $r \geq 1$, les plongements de X dans Y forment un ouvert de la topologie fine sur $C^r(X, Y)$. ■

COROLLAIRE. Sous les hypothèses du théorème 3, pour $r \geq 1$, les difféomorphismes C^r de X sur Y forment un ouvert $\text{Diff}^r(X, Y)$ de la topologie fine sur $C^r(X, Y)$.

Démonstration. Si $\text{Diff}^r(X, Y)$ n'est pas vide, soit f un de ses éléments. Toute application assez proche de f dans la topologie fine sur $C^0(X, Y)$ enverra les composantes connexes de X dans celles de Y comme f .

On peut donc supposer X et Y connexes. D'après la proposition 2, les éléments de $\text{Diff}^r(X, Y)$ sont exactement les plongements propres de X dans Y (car chacun d'entre eux-ci est à la fois ouvert et fermé, donc surjectif), ce qui permet de conclure par le théorème 3 et la proposition 3. ■

CHAPITRE II - GERMES D'ACTIONS ET HYPERBOLICITÉ

Introduction. Dans (2.4.1), nous avons défini la notion de point critique non dégénéré par la condition de transversalité la plus bête qui soit, et un miracle s'est produit : le lemme de Morse-Palais à paramètre permet de classifier ces points critiques à (germe de) difféomorphisme près, et montre en outre qu'ils sont structurellement stables pour cette classification.

Nous allons maintenant essayer d'appliquer le même traitement aux points fixes d'actions de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} , et voir que la situation est beaucoup moins miraculeuse : pour obtenir un analogue du lemme de Morse-Palais à paramètre, le théorème de Hartman-Grobman à paramètre, il faut à la fois restreindre la catégorie de points fixes considérée (points fixes hyperboliques) et les ambitions de la classification : on doit se contenter d'une classification à (germe d') homéomorphisme près. J'ai beaucoup hésité avant d'inclure dans ce cours la démonstration "à la Moser" du théorème de Hartman-Grobman, qui figure, en raison de sa simplicité, dans presque tous les livres sur les systèmes dynamiques. Si je m'y suis résolu, c'est pour débusquer l'idée géométrique cachée derrière le "miracle" analytique.

L'exposé s'organise comme suit : après avoir introduit la notion de point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme, on rappelle les principales propriétés des flots, ce qui conduit à la définition des germes d'actions différentiables de groupes de Lie, de la C^k -équivalence entre de tels germes, puis des notions formelles correspondantes, et l'on prouve alors le théorème (dû, je crois, à Bochner) sur la linéarisation des germes d'actions différentiables de groupes de Lie compacts. On énonce ensuite le théorème de Hartman-Grobman dans ce langage, et on le démontre, ainsi que sa version "à paramètre". La suite du chapitre est consacrée à la classification C^∞ des germes hyperboliques d'actions C^∞ de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} , et contient en outre une bonne partie des outils et des résultats dont nous nous servirons dans les autres chapitres.

3. GERMES D'ACTIONS DIFFÉRENTIABLES

(3.1) Motivations, définitions et premières propriétés(3.1.1) Points fixes non dégénérés des difféomorphismes

Etant donné un espace de Banach E , nous noterons $gl(E)$ l'espace de ses endomorphismes continus, et $GL(E)$ l'ouvert de $gl(E)$ formé des automorphismes de E . Le spectre $\sigma(A)$ d'un élément A de $gl(E)$ est, rappelons-le, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, si $A_{\mathbb{C}} \in gl(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ désigne le complexifié de A , $A_{\mathbb{C}} - \lambda \text{id}$ n'appartienne pas à $GL(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$. En dimension finie, $\sigma(A)$ est donc l'ensemble des valeurs propres de A .

Soit X une variété C^r ($r \geq 1$), et soit Σ la sous-variété fermée de $J^0(X, X)$ formée de tous les $j_x^0 f$ avec $f(x) = x$. Nous dirons qu'un point fixe x de $f \in \text{Diff}^r(X, X)$ est non dégénéré lorsque $j_x^0 f \not\in \Sigma$.

On déduit immédiatement du théorème de transversalité de Thom la

PROPOSITION 1. Si X est de dimension finie et séparable, les $f \in \text{Diff}^r(X, X)$ dont tous les points fixes sont non dégénérés forment un ouvert dense de $\text{Diff}^r(X, X)$ pour la topologie fine. ■

PROPOSITION 2. Sous les hypothèses de la proposition 1, si x est un point fixe de $f \in \text{Diff}^r(X, X)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) x est non dégénéré
- (ii) $1 \notin \sigma(T_x f)$.

Démonstration. Par l'application notée π_0 dans (1.2.2) $J^0(X, X)$ s'identifie à $X \times X$, Σ à la diagonale et $j_x^0 f$ à $y \mapsto (y, f(y))$. Comme la codimension de Σ est la dimension de X , dire que $j_x^0 f \not\in \Sigma$ revient à dire que

$$T_x(j_x^0 f) \cap T_{j_x^0 f} \Sigma = \{0\},$$

c'est-à-dire (via π_o) que, dans $T_x X$, l'équation

$$(v, T_x f.v) = (v, v)$$

a pour seule solution $v = 0$. ■

(3.1.2) Points fixes hyperboliques des difféomorphismes

Etant donné un espace de Banach E , un élément A de $GL(E)$ est dit hyperbolique lorsque son spectre ne rencontre pas le disque unité.

Si X est une variété C^r ($r \geq 1$) et x un point fixe de $f \in \text{Diff}^r(X, X)$, on dit que x est un point fixe hyperbolique de f lorsque $T_x f \in GL(T_x X)$ est hyperbolique.

L'intérêt de la notion de point fixe hyperbolique est illustré par le résultat suivant, que nous démontrerons dans (6.3).

PROPOSITION 1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit A un automorphisme de E . Si A n'est pas hyperbolique, il existe un germe $h : [E]_o \rightarrow [E]_o$ de difféomorphisme C^∞ , ayant un contact d'ordre infini avec A en 0 , mais tel qu'il n'existe aucun germe d'homéomorphisme $R : [E]_o \rightarrow [E]_o$ vérifiant

$$R \circ h \circ R^{-1} = A \quad . \quad \blacksquare$$

(nous exhiberons même un h encore plus catastrophique que cela).

En revanche, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1 (Hartman - Grobman). Soient X une variété (banachique) C^r ($r \geq 1$) et f un germe de difféomorphisme C^r de X fixant x , tel que $T_x f$ soit hyperbolique. Il existe un germe d'homéomorphisme

$$R : [X]_x \rightarrow [T_x X]_{O_x}$$

tel que

$$R \circ f \circ R^{-1} = [T_x f]_{O_x} . \blacksquare$$

Ce théorème sera prouvé dans la section (3.2). Auparavant, nous allons voir que l'on ne perd pas trop à se restreindre aux points fixes hyperboliques :

THÉORÈME 2. Si X est de dimension finie et séparable, les $f \in \text{Diff}^r(X, X)$ dont tous les points fixes sont hyperboliques forment un ouvert dense de $\text{Diff}^r(X, X)$ pour la topologie fine.

Démonstration. L'ouverture résulte du

LEMME. Si E est un espace de Banach, les automorphismes hyperboliques de E forment un ouvert $HL(E)$ de $GL(E)$, dense si E est de dimension finie. \square

On en déduit en effet de ce lemme que l'ensemble des $j_x^1 f \in J^1(X, X)$ avec $f(x) = x$ et $T_x f \notin HL(T_x X)$ est fermé.

Pour prouver la densité, la méthode la plus simple consiste à partir d'un $f \in \text{Diff}^r(X, X)$ dont tous les points fixes sont non dégénérés, à rendre chacun des dits points fixes hyperbolique par une perturbation arbitrairement petite de f (pour la topologie fine) et à remarquer que, si cette perturbation est assez petite, elle n'ajoute pas de nouveau point fixe à ceux de f .

Une méthode plus instructive consiste à montrer que le fermé de $J^1(X, X)$ formé des $j_x^1 f$ avec $f(x) = x$ et $T_x f \notin HL(T_x X)$ est un ensemble stratifié de codimension strictement plus grande que la dimension de X ; une telle stratification s'obtient soit à la main, soit en appliquant le théorème de Lojasiewicz - Hironaka selon lequel un ensemble sous-analytique peut-être stratifié. \blacksquare

(3.1.3) Flots et germes d'actions différentiables

Rappelons qu'un champ de vecteurs C^r sur une variété X est une section V

de classe C^r du fibré tangent $TX \xrightarrow{\tau_X} X$. Une courbe intégrale de V est une application différentiable $z : J \rightarrow X$, où J est un intervalle ouvert non vide, telle que

$$\forall t \in J, \quad \dot{z}(t) = Dz(t) = V \circ z(t).$$

Un tel z est évidemment de classe C^{r+1} .

PROPOSITION 1. Soient V un champ de vecteurs C^r sur une variété X et h un C^{r+1} - difféomorphisme de X sur une variété X' . Alors

$$h_*V = Th \circ V \circ h^{-1}$$

est un champ de vecteurs C^r sur X' possédant la propriété suivante : pour que $z : J \rightarrow X'$ soit une courbe intégrale de V , il faut et il suffit que $h \circ z$ soit une courbe intégrale de h_*V . ■

Du classique théorème de Cauchy assurant l'existence, l'unicité et la différentiabilité par rapport aux conditions initiales des solutions d'une équation différentielle, nous allons maintenant déduire - cf. Arnold [1] - un résultat de stabilité structurelle :

THÉORÈME 1 (théorème de redressement à paramètre). Soient X et Λ deux variétés et $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de champs de vecteurs sur X telle que $(x, \lambda) \mapsto V_\lambda(x)$ soit de classe C^r ($r \geq 1$). Pour toute C^{r+1} -sous-variété Y de codimension 1 de $X \times \Lambda$ et tout $(x_0, \lambda_0) \in Y$ tel que $(V_{\lambda_0}(x_0), 0) \notin T_{(x_0, \lambda_0)}Y$, il existe un voisinage ouvert U de (x_0, λ_0) dans $X \times \Lambda$, une boule ouverte B de centre 0 dans un espace Banach E , un intervalle ouvert $I \ni 0$ et un $H \in \text{Diff}^r(U, (B \times I) \times \Lambda')$ (où $\Lambda' = \text{pr}_2(U)$), de la forme $(x, \lambda) \mapsto (h_\lambda(x), \lambda)$, tels que

$$(i) \quad h_{\lambda_0}(x_0) = (0, 0) \quad \text{et} \quad H(Y \cap U) = B \times \{0\} \times \Lambda';$$

(ii) $(h_\lambda)_* (V_\lambda|_{U_\lambda})$ soit pour tout $\lambda \in \Lambda'$ le champ constant $(0,1)$ sur
 $B \times I$ (où $U_\lambda = \{x : (x, \lambda) \in U\}$).

Démonstration. En remplaçant Λ par un ouvert contenant λ_0 (encore noté Λ), on se ramène immédiatement, par un C^{r+1} -difféomorphisme local de la forme $(x, \lambda) \rightarrow (f_\lambda(x), \lambda)$, au cas où X est un ouvert de $E \times \mathbb{R}$, $x_0 = (0, 0)$ et $Y = ((E \times \{0\}) \cap X) \times \Lambda$. Soit W le champ de vecteurs $(x, \lambda) \mapsto (V_\lambda(x), 0)$ sur $X \times \Lambda$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une boule ouverte B_1 de centre 0 dans E , un voisinage ouvert Λ_1 de λ_0 dans Λ , un intervalle ouvert $J \ni 0$ et un $\Phi \in C^r(B_1 \times J \times \Lambda_1, X \times \Lambda)$ tels que $t \mapsto \Phi(x, t, \lambda)$ soit pour tout $(x, \lambda) \in B_1 \times \Lambda_1$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t, \lambda) = W \circ \Phi(x, t, \lambda) \text{ pour tout } t \in J \\ \Phi(x, 0, \lambda) = (x, 0, \lambda) \end{cases}$$

L'application Φ est évidemment de la forme $(x, t, \lambda) \mapsto (\varphi_\lambda(x, t), \lambda)$, et l'on a

$$d\varphi_{\lambda_0}(0, 0) = (dx, 0) + V_{\lambda_0}(x_0) dt,$$

c'est-à-dire que, par hypothèse sur $V_{\lambda_0}(x_0)$, $T_{(0, 0, \lambda_0)}\Phi$ est un isomorphisme.

D'après le théorème d'inversion locale, il suffit donc de prendre pour H^{-1} la restriction de Φ à un ouvert $B \times I \times \Lambda'$ suffisamment petit. ■

En particulier, au voisinage de tout point où il ne s'annule pas, un champ de vecteurs C^r est l'image par un C^r -difféomorphisme d'un champ de vecteurs constant sur un espace de Banach.

Nous allons maintenant rappeler les propriétés classiques des courbes intégrales d'un champ de vecteurs, en passant par le

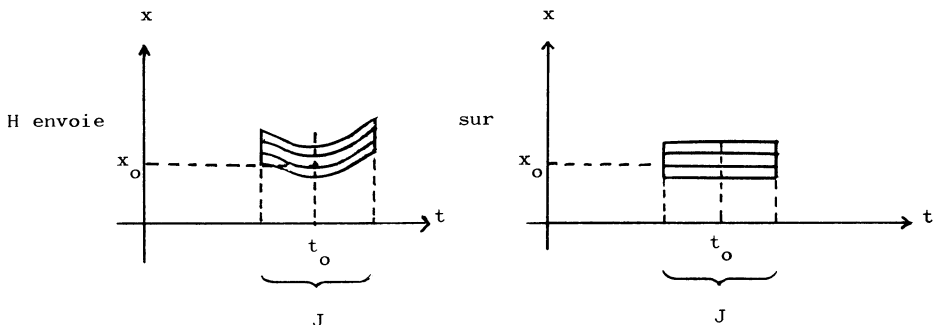
THÉORÈME 2. Soient X une variété, I un intervalle et $(V_t)_{t \in I}$ une famille de champs de vecteurs sur X telle que $(t, x) \mapsto V_t(x)$ soit de classe $C^r (r \geq 1)$. Tout $(t_0, x_0) \in I \times X$ admet alors un voisinage ouvert U tel qu'il existe un intervalle $J \ni t_0$ ouvert dans I et un $H \in \text{Diff}^r(U, U_{t_0} \times J)$ (où $U_{t_0} = \{x : (t_0, x) \in U\}$) de la forme $(t, x) \mapsto (t, h_t(x))$ possédant la propriété suivante : quel que soit $x \in U_{t_0}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = V_t \circ z(t) \text{ pour tout } t \in J \\ z(t_0) = x \end{cases}$$

admet pour unique solution différentiable $z : J \rightarrow X$ l'application $t \mapsto h_t^{-1}(x)$.

En d'autres termes, au sens défini par le théorème, la famille $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de champs de vecteurs sur X donnée par $V_t \equiv 0$ est le modèle local de tous les champs de vecteurs dépendant du temps sur X .

Démonstration. C'est exactement celle du théorème de redressement, grâce à l'astuce (?) consistant à considérer sur $I \times X$ le champ de vecteurs $(t, x) \mapsto (1, V_t(x))$, l'hypersurface Y du théorème 1 étant ici $\{t_0\} \times X$. ■



Rappelons que deux solutions différentiables $z_1 : J_1 \rightarrow X$ et $z_2 : J_2 \rightarrow X$, définies sur des intervalles ouverts, de l'équation

$$z(t) = v_t \circ z(t) \quad (1)$$

qui coïncident en un point de $J_1 \cap J_2$ coïncident sur $J_1 \cap J_2$ (le fermé non vide $\{t : z_1(t) = z_2(t)\}$ de $J_1 \cap J_2$ est ouvert d'après le théorème d'unicité locale de Cauchy, ou, si l'on préfère, d'après le théorème 2). Il en résulte que chaque solution différentiable de (1) définie sur un intervalle ouvert non vide J est la restriction à J d'une unique solution maximale (i.e. une solution différentiable z_m de (1) définie sur un intervalle ouvert J_m et ne pouvant être prolongée en une solution différentiable de (1) définie sur un intervalle ouvert de I contenant strictement J_m)

LEMME 1 . Sous les hypothèses du théorème 2, soit $z : J \rightarrow X$ une solution maximale de (1). Si J admet une borne inférieure (resp. supérieure) $t_0 \notin J$ dans I , l'ensemble $\bigcap_{a > t_0} \{z(t) : t \in J \cap]-\infty, a]\}$ (resp. $\bigcap_{a < t_0} \{z(t) : t \in J \cap [a, \infty[)\}$ est vide.

Démonstration. Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite $(t_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans J , de limite t_0 et telle que $z(t_n)$ tende vers $x_0 \in X$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour n assez grand, $(t_n, z(t_n))$ serait dans un voisinage U de (t_0, x_0) dans $I \times X$ satisfaisant les hypothèses du théorème 2, ce qui contredirait évidemment la maximalité de z . ■
On en déduit le

THÉORÈME 3. Sous les hypothèses du théorème 2, si tous les v_t sont nuls en dehors d'un même compact K de X , les solutions maximales de (1) sont définies sur I tout entier. En outre, si l'on note $t \mapsto \phi_u^t(x)$, $u \in I$, $x \in X$, l'unique solution maximale z de (1) telle que $z(u) = x$, alors, pour tout $(t, u) \in I \times I$, l'application ϕ_u^t est un difféomorphisme de X , d'inverse ϕ_t^u et égal à l'identité en dehors d'un compact. ■

Etant donné un champ de vecteurs V de classe C^r ($r \geq 1$) sur une variété X , nous noterons $t \mapsto \exp t V(x)$ l'unique courbe intégrale maximale de V passant par $x \in X$ pour $t=0$.

PROPOSITION 2. Avec les notations précédentes, pour tout $x \in X$, on a

$$\exp(t+s)V(x) = \exp tV(\exp sV(x))$$

dès que s et $t \in \mathbb{R}$ sont tels que cette égalité ait un sens. ■

COROLLAIRE 1. Si, quel que soit $x \in X$, $\exp tV(x)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors l'application

$$\mathbb{R} \times X \ni (t, x) \mapsto \exp tV(x) \in X$$

est une C^r -action de \mathbb{R} sur X , ce qui signifie qu'elle est de classe C^r et que l'application $t \mapsto \exp tV$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe $\text{Diff}^r(X, X)$. ■

Les hypothèses du corollaire 1 sont en particulier satisfaites si X est compacte, d'après le théorème 3.

REMARQUE. L'application $t \mapsto \exp tV(x)$ est en fait de classe C^{r+1} pour tout $x \in X$, ce qui amène Shub à dire que $(t, x) \mapsto \exp tV(x)$ est une action de classe $C^{r+1, r}$ de \mathbb{R} sur X . L'avantage de cette définition est que, si X est compacte la donnée d'une action de classe $C^{r+1, r}$ de \mathbb{R} sur X équivalut à la donnée d'un C^r -champ de vecteurs sur X .

L'application $(t, x) \mapsto \exp tV(x)$ est le flot engendré par V , et on dit que V est son générateur infinitésimal. Il nous arrivera de parler de flots complets pour désigner les actions différentiables de \mathbb{R} .

COROLLAIRE 2. Soient V et V' deux champs de vecteurs C^r ($r \geq 1$) sur une variété X , tels que $V'-V$ soit à support compact. Alors le flot de V' est complet si et seulement si le flot de V l'est.

Démonstration. Supposons le flot de V complet. Si celui de V' ne l'était pas, alors il existerait $x \in X$ tel que $t \mapsto \exp tV'(x)$ ne soit défini que sur un intervalle ouvert $J \neq \mathbb{R}$. D'après le Lemme 1, il existerait $t_0 \in J$ tel que

$\exp tV'(x) \notin \text{supp}(V-V')$ pour tout $t \in J$ vérifiant $t > t_0$, ou pour tout $t \in J$ vérifiant $t < t_0$. Pour de tels t , on aurait donc $\exp tV'(x) = \exp(t-t_0)V(\exp t_0 V'(x))$, ce qui contredirait le lemme 1 lorsque t atteindrait la borne supérieure de J dans le premier cas, sa borne inférieure dans le second cas. ■

Sur une variété non compacte X , le flot engendré par un C^r -champ de vecteurs V ($r \geq 1$) n'est en général pas complet (prendre par exemple $X = \mathbb{R}$ et $V(x) = x^2$) ; cependant, nous allons voir maintenant qu'au voisinage d'un point x_0 de $V^{-1}(0)$, V (ou plutôt $[V]_{x_0}$) engendre toujours un germe d'action C^r , c'est à dire l'objet local correspondant aux actions C^r .

PROPOSITION 3. Soient V un champ de vecteurs C^r ($r \geq 1$) sur une variété X , et x_0 un point de $V^{-1}(0)$. Pour tout voisinage ouvert U de x_0 et tout $A > 0$, il existe un voisinage ouvert $\Omega_{U,A}$ de x_0 tel que la restriction à $[-A, A] \times \Omega_{U,A}$ du flot de V soit bien définie et à valeurs dans U .

Ce résultat est évidemment un cas particulier de la

PROPOSITION 4. Sous les hypothèses du théorème 2, pour chaque $t_0 \in I$ et chaque intervalle compact $K \ni t_0$ de I , l'ensemble des $x \in X$ tels que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} z(t) = V_t \circ z(t) \text{ pour tout } t \in K \\ z(t_0) = x \end{cases}$$

admette une solution différentiable $z : K \rightarrow X$ est ouvert.

Démonstration. S'il n'est pas vide, soit x_0 un de ses points, et soit z_0 la solution correspondante. Comme K est compact, il existe une suite croissante $t_{-k} < \dots < t_0 < \dots < t_\ell$ de points de K , et, pour $-k \leq i \leq \ell$, un voisinage ouvert U_i de $(t_i, z_0(t_i))$ satisfaisant les hypothèses du théorème 2, tels que les inter-

valles ouverts $J_i = \text{pr}_1(U_i)$ recouvrent K . Si $k = \ell = 0$, il n'y a rien à prouver. Nous pouvons donc raisonner par récurrence sur $k+\ell$, ce qui ramène le problème au suivant : prouver que, pour $k+\ell > 0$, on peut diminuer $k+\ell$ d'une unité en conservant t_0 dans la suite (t_i) . Soient donc i et j deux éléments distincts de $\{-k, \dots, \ell\}$, tels que $J_i \cap J_j \neq \emptyset$, et soit $u \in J_i \cap J_j$. L'ensemble $\{x \in X : (u, x) \in U_i \cap U_j\} = \Sigma_{i,j}^u$ est ouvert, contient $z_0(u)$, et il est clair que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = V_t \circ z(t) \text{ pour tout } t \in J_i \cup J_j \\ z(u) = x \end{cases}$$

admet une solution différentiable $z_x : J_i \cup J_j \rightarrow X$ quel que soit $x \in \Sigma_{i,j}^u$. On peut donc diminuer $k+\ell$ d'une unité en supprimant t_i (ou t_j) et en remplaçant J_j (ou J_i) par $J_i \cup J_j$ et U_j (ou U_i) par $\bigcup_{\substack{x \in \Sigma_{i,j}^u \\ t \in J_i \cup J_j}} (t, z_x(t))$. ■

Des propositions 2 et 3, on déduit le

COROLLAIRE 3. Sous les hypothèses de la proposition 3, le flot de V définit un homomorphisme $\tilde{\rho}$ de \mathbb{R} dans le groupe $\mathcal{B}_{x_0}^r(X)$ des germes de C^r -difféomorphismes de X fixant x_0 , donné par

$$\tilde{\rho}(t) = [\exp tV]_{x_0},$$

et ne dépendant que du germe de V en x_0 . ■

Il est clair que $\tilde{\rho}$ n'est pas n'importe quel homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans $\mathcal{B}_{x_0}^r(X)$, mais possède au contraire des propriétés de régularité par rapport à $t \in \mathbb{R}$: c'est un germe d'action C^r de \mathbb{R} sur X fixant x_0 , au sens de la

DÉFINITION. Soient G un groupe de Lie^(*), a un point d'une variété X et $\rho : [G \times X]_{G \times \{a\}} \rightarrow [X]_a$ un germe d'application C^r ($r \geq 1$). On dit que ρ est un germe d'action C^r de $G \times X$ sur X fixant a , et l'on note $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$, lorsqu'il existe un ouvert $U \supset G \times \{a\}$ de $G \times X$ et une application $R : U \rightarrow X$ possédant les propriétés suivantes :

- (i) Elle est de classe $C^{r+1, r}$, et $[R]_{G \times \{a\}} = \rho$.
- (ii) L'application $\tilde{\rho} : g \mapsto \rho_g = [R_g]_a$, où $R_g(x) = R(g, x)$, est un homomorphisme de G dans $\mathcal{B}_a^r(X)$.
- (iii) Quels que soient g et $g' \in G$, on a $R_g \circ R_{g'}(x) = R_{gg'}(x)$ dès que les deux membres de cette égalité ont un sens. Quitte à restreindre U , on peut toujours supposer que R_1 est l'identité et que R_g est un difféomorphisme pour tout $g \in G$: cela résulte par exemple du théorème d'inversion locale, appliqué à $(g, x) \mapsto (g, R(g, x))$ en tout $(g_0, a) \in G \times \{a\}$.

Il est clair que $\tilde{\rho}$ ne dépend que de ρ , et non du choix de R .

PROPOSITION 5. Soit $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$ comme ci-dessus.

- (i) Si G est compact, alors, pour tout représentant $R : U \rightarrow X$ de ρ , il existe un ouvert $\omega \ni a$ de X tel que $U \supset G \times \omega$ et que $R|_{G \times \omega}$ soit une $C^{r+1, r}$ -action de G sur ω .

- (ii) Si $G = \mathbb{Z}$, la donnée de ρ équivaut à celle de $\tilde{\rho}$, ou encore à celle de $\tilde{\rho}(1)$, lequel peut être n'importe quel élément de $\mathcal{B}_a^r(X)$.

- (iii) Si $G = \mathbb{R}$, la donnée de ρ équivaut à celle d'un germe β de champ de vecteurs C^r sur X nul en a , appelé générateur infinitésimal de ρ . Plus précisément, le germe $\beta = [V]_a$, où $V(x) = \frac{\partial}{\partial t} R(t, x) \Big|_{t=0}$, ne dépend que de ρ , et non du choix de son représentant R ; inversement, étant donné un germe $\beta = [V]_a$ de

(*) Nous les supposons toujours analytiques.

champ de vecteurs C^r sur X nul en a , le germe ρ en $G \times \{a\}$ du flot de V est bien défini, appartient à $\text{Act}_a^r(\mathbb{R}, X)$, et est l'unique élément de $\text{Act}_a^r(G, X)$ auquel soit associé β .

Démonstration. - Point (i). En restreignant U , nous pouvons supposer R de classe $C^{r+1, r}$ et tel que R_g soit un difféomorphisme C^r pour tout $g \in G$. Nous pouvons alors remplacer U par $G \times \omega_1$, où, si $U_g = \{x : (g, x) \in U\}$,

$$\omega_1 = \bigcap_{g \in G} U_g = X \setminus \text{pr}_2((G \times X) \setminus U)$$

est ouvert parce que la projection $\text{pr}_2 : G \times X \rightarrow X$ est propre, donc fermée. Pour la même raison,

$$\omega_2 = \omega_1 \cap \bigcap_{g \in G} R_g^{-1}(\omega_1)$$

est ouvert, et, les R_g étant des difféomorphismes, c'est donc le cas de

$$\omega = \bigcup_{g \in G} R_g(\omega_2).$$

Soient $y \in \omega_2$ et $x = R_{g''}(y) \in \omega$. Quels que soient $g, g' \in G$, on a $R_{g''}(y) \in \omega_1$, et donc $R_{g'}(x) = R_{g'g''}(y) \in \omega \subset \omega_1$, d'où

$$R_g(R_{g'}(x)) = R_{gg'}(x) = R_{gg'g''}(y) \in \omega,$$

ce qui prouve que $R|_{G \times \omega}$ est une $C^{r+1, r}$ -action de G sur ω .

- Point (ii). Comme \mathbb{Z} est discret, la donnée du germe ρ équivaut à celle des germes $\tilde{\rho}(n)$, laquelle équivaut évidemment à celle de $\tilde{\rho}(1)$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que, pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_a^r(X)$, il existe un unique $\rho \in \text{Act}_a^r(\mathbb{Z}, X)$ tel que $\tilde{\rho}(n) = \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- Point (iii). Il est évident que ρ détermine β . Inversement,

d'après les propositions 2 et 3, β détermine un ρ . L'unicité de celui-ci découle du fait suivant : étant donné un représentant R de ρ satisfaisant les hypothèses de la définition, il existe pour tout $A > 0$ un ouvert ω_a de X tel que l'égalité

$$R_{t'}(R_t(x)) = R_{t+t'}(x)$$

ait un sens et soit vérifiée quels que soient t et $t' \in [-A, A]$ tels que $t+t' \in [-A, A]$ et $x \in \omega$ (même preuve que pour le point (i)). Par conséquent, quels que soient $x \in \omega$ et $t \in]-A, A[$, si V est le champ de vecteurs donné par

$$V(y) = \left. \frac{\partial}{\partial t} R(t, y) \right|_{t=0},$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, x) = \left. \frac{\partial}{\partial t'} R(t', R(t, x)) \right|_{t'=0} = V \circ R(t, x),$$

et donc $R(t, x) = \exp tV(x)$. ■

Etant données deux variétés X et X' , nous noterons $\mathcal{G}_{a, a'}^k(X, X')$ l'ensemble des germes $[X]_a \rightarrow [X']_{a'}$ de C^k -difféomorphismes ($k \geq 0$).

Si G est un groupe de Lie, nous dirons que $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$ et $\rho' \in \text{Act}_{a'}^r(G, X')$ ($r \geq 1$) sont C^k -isomorphes lorsqu'il existera $\varphi \in \mathcal{G}_{a, a'}^k(X, X')$ possédant la propriété suivante : pour tout représentant h de φ et tout représentant R de ρ , l'application R' définie au voisinage de $G \times \{a'\}$ dans $G \times X'$ par $R'(g, h(x)) = h \circ R(g, x)$ vérifie $[R']_{G \times \{a'\}} = \rho'$.

On note alors $\rho' = \varphi_* \rho$ ou $\rho = \varphi^* \rho'$.

PROPOSITION 6. Soient $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$, $\rho' \in \text{Act}_{a'}^r(G, X')$ ($r \geq 1$) et $\varphi \in \mathcal{G}_{a, a'}^k(X, X')$ ($k \geq 0$).

(i) Si $G = \mathbb{Z}$, alors $\rho' = \varphi_* \rho$ si et seulement si $\tilde{\rho}'(1) = \varphi_* \tilde{\rho}(1) \circ \varphi^{-1}$.

(ii) Si $G = \mathbb{R}$, alors $\rho' = \varphi_* \rho$ si et seulement si les générateurs infinitésimaux β et β' de ρ et ρ' vérifient $\beta' = \varphi_* \beta$, au sens de la

DÉFINITION. Soient V un C^r -champ de vecteurs sur une variété X , V' un C^r -champ de vecteurs sur une variété X' et h un élément de $\text{Diff}^k(X, X')$ ($r \geq 1$, $k \geq 0$). Les propriétés suivantes sont équivalentes (exercice!) :

(a) Les courbes intégrales de V' sont exactement les images par h de celles de V .

(b) Quel que soit $x' \in X'$, les germes en $t=0$ des applications $t \mapsto \exp tV'(x')$ et $t \mapsto h \circ \exp tV(h^{-1}(x'))$ sont égaux.

(c) (Pour $k \geq 1$) $h_* V = V'$.

Pour $k = 0$, nous dirons que V' est l'image de V par h , et noterons encore $h_* V = V'$, lorsque (a) ou (b) sera vérifiée.

De même, étant donnés deux germes $\beta : [X]_a \rightarrow TX$ et $\beta' : [X']_a \rightarrow TX'$ de champs de vecteurs C^r et un $\varphi \in \mathcal{D}_{a,a}^k(X, X')$, nous dirons que β' est l'image de β par φ , et nous noterons $\beta' = \varphi_* \beta$, lorsqu'il existera un représentant V de β , un représentant V' de β' et un représentant h de φ tels que $V' = h_* V$.

La preuve de la proposition 6, facile, est laissée au lecteur. ■

(3.1.4) Jets d'actions, linéarisation des germes d'actions de groupes compacts et actions formelles.

Soient X une variété et a un point de X . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{D}_a^k(X)$ le groupe obtenu en munissant l'ensemble $\{j_a^k \varphi : \varphi \in \mathcal{D}_a^k(X)\}$ de la loi de composition $j_a^k \varphi \circ j_a^k \psi = j_a^k(\varphi \circ \psi)$.

Il est clair que $\mathcal{D}_a^1(X)$ s'identifie à $GL(T_a X)$, car tout élément de $GL(T_a X)$ a pour germe en 0 un élément de $\mathcal{D}_0^\infty(T_a X)$ et il existe un germe de difféomorphisme

$$[X]_a \rightarrow [T_a X]_0 \quad \text{"tangent à l'identité" .}$$

Plus généralement, si E est un espace de Banach, $\mathcal{B}_0^k(E)$ s'identifie pour $k > 1$ à

$$GL(E) \times \bigoplus_{1 \leq j \leq k} L_s^j(E, E)$$

par la bijection $j_0^k \varphi \rightarrow (D^j \varphi(0))_{1 \leq j \leq k}$, et la formule de Faa-di Bruno (appendice 1) montre que $\mathcal{B}_0^k(E)$ est un groupe de Lie algébrique.

On en déduit, via des cartes locales, une structure de groupe de Lie algébrique sur $\mathcal{B}_a^k(X)$.

On munit $\mathcal{B}_a^\infty(X) = \varprojlim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{B}_a^k(X)$ de la topologie limite projective. Lorsque X

est de dimension finie, le théorème d'E. Borel permet d'affirmer que

$$\mathcal{B}_a^\infty(X) = \{ j_a^\infty \varphi : \varphi \in \mathcal{B}_a^\infty(X) \}.$$

Pour $k > 1$, $\mathcal{B}_a^k(X)$ présente par rapport à, par exemple, $\text{Diff}^k(X, X)$, l'avantage d'être un "bon" groupe et l'inconvénient de n'agir sur aucun espace "concret" comme X ; suivant une idée familière aux géomètres algébristes, on le fait agir naturellement sur l'algèbre $\mathcal{E}_a^k(X)$ des jets d'ordre k en a de germes $[X]_a \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctions C^k par la formule

$$\mathcal{B}_a^k(X) \times \mathcal{E}_a^k(X) \ni (j_a^k \varphi, j_a^k \gamma) \mapsto j_a^k(\gamma \circ \varphi^{-1}) \in \mathcal{E}_a^k(X).$$

Cette représentation linéaire continue de $\mathcal{B}_a^k(X)$ dans $\mathcal{E}_a^k(X)$ permet de mieux conceptualiser la notion de forme normale, comme nous le verrons dans (4.3.2).

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on associe à tout germe $\rho \in \text{Act}_a^k(G, X)$ l'homomorphisme continu (et donc analytique pour k fini) $\tilde{\rho}^k$ de G dans $\mathcal{B}_a^k(X)$ donné par

$$\tilde{\rho}^k(g) = j_a^k(\rho_g),$$

appelé jet d'ordre k de ρ . Modulo l'identification canonique de \mathcal{J}_a^1 à $GL(T_a X)$, on a

$$\tilde{\rho}^1(g) = T_a(\rho_g) .$$

L'action ρ^1 de G sur $T_a X$ donnée par $\rho^1(g, v) = \tilde{\rho}^1(g).v$ est la partie linéaire de ρ . Nous dirons que ρ est C^r -linéarisable ($r \geq 0$) lorsqu'il sera C^r -isomorphe à $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$.

THÉORÈME. Lorsque G est compact, tout $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$ ($r \geq 1$) est C^r -linéarisable.

Démonstration. Posons $T_a X = E$. Une carte locale nous ramène au cas où $(X, a) = (E, 0)$ et $\tilde{\rho}^1(g) = D(\rho_g)(0)$ pour tout $g \in G$. D'après la proposition 5 (i) de (3.1.3), il existe une $C^{r+1, r}$ -action R de G sur un ouvert $\omega \ni 0$ de E telle que $[R]_{G \times \{0\}} = \rho$.

Soient μ la probabilité de Haar sur G et $h : \omega \rightarrow E$ l'application donnée par

$$h(x) = \int_G \tilde{\rho}^1(g) \cdot R(g^{-1}, x) d\mu(g) .$$

Elle est de classe C^r , et l'on a, quel que soit $k \in \{0, \dots, r\}$

$$D^k h(x) = \int_G \tilde{\rho}^1(g) \cdot \frac{\partial^k}{\partial x^k} R(g^{-1}, x) d\mu(g)$$

pour tout $x \in \omega$, donc en particulier

$$D^1 h(0) = \text{id}_E ,$$

d'où

$$[h]_0 \in \mathcal{B}_0^r(E) .$$

De plus, quel que soit $(g', x) \in G \times \omega$, on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}^1(g') \cdot h(x) &= \int_G \tilde{\rho}^1(g'g) \cdot R(g^{-1}, x) \, d\mu(g) \\
 &= \int_G \tilde{\rho}^1(g'g) \cdot R((g'g)^{-1} g', x) \, d\mu(g'g) \\
 &= \int_G \tilde{\rho}^1(g'') \cdot R(g''^{-1}, R(g', x)) \, d\mu(g'')
 \end{aligned}$$

d'après (successivement) la linéarité de l'intégrale, l'invariance à gauche de la probabilité de Haar et le fait que R est une action, soit

$$\tilde{\rho}^1(g') h(x) = h(R(g', x)) \quad . \quad \blacksquare$$

Je laisse le lecteur à l'âme philosophe méditer sur la signification de ce résultat lorsque $G = SO(3)$.

Un homomorphisme continu de G dans $\check{B}_a^k(X)$ est une action formelle d'ordre k de G sur X (pour $k=\infty$, on parle simplement d'actions formelles). Leur ensemble est noté $\check{\text{Act}}_a^k(G, X)$. Etant donné un point a' d'une variété X' , tout élément $\check{\varphi}^k$ de $\check{B}_{a, a'}^k(X, X') = \{j_a^k \varphi : \varphi \in B_{a, a'}^k(X, X')\}$ définit un isomorphisme $\check{\varphi}_*^k$ de $\check{B}_a^k(X)$ sur $\check{B}_{a'}^k(X')$, donné par $\check{\varphi}_*^k \check{\psi}^k = \check{\varphi}^k \circ \check{\psi}^k \circ (\check{\varphi}^k)^{-1}$, et l'on note encore $\check{\varphi}_*^k$ la bijection de $\check{\text{Act}}_a^k(G, X)$ sur $\check{\text{Act}}_{a'}^k(G, X')$ qui s'en déduit.

On dit que $\check{\rho}^k \in \check{\text{Act}}_a^k(G, X)$ et $\check{\rho}'^k \in \check{\text{Act}}_{a'}^k(G, X')$ sont isomorphes lorsqu'il existe $\check{\varphi}^k \in \check{B}_{a, a'}^k(X, X')$ tel que $\check{\rho}'^k = \check{\varphi}_*^k \check{\rho}^k$. Si $\check{\rho}^k = \tilde{\rho}^k$ et $\check{\rho}'^k = \tilde{\rho}'^k$ pour un $\rho \in \text{Act}_a^k(G, X)$ et un $\rho' \in \text{Act}_{a'}^k(G, X')$, on dit alors que ρ et ρ' sont formellement isomorphes à l'ordre k (ou, si $k=\infty$, formellement isomorphes).

Bien entendu, lorsque ρ et ρ' sont C^k -isomorphes, ils sont formellement isomorphes à l'ordre k . Lorsque $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} et $k=\infty$, le problème de la réciproque sera abordé dans le §4. Dans le même ordre d'idées, le théorème précédent admet évidemment le

COROLLAIRE. Si G est compact, deux germes $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$ et $\rho' \in \text{Act}_a^r(G, X')$ ($r \geq 1$) sont C^r -isomorphes si et seulement si ils sont formellement isomorphes à l'ordre 1. ■

PROPOSITION. Si X est de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) et G compact ou égal à \mathbb{R} ou \mathbb{Z} , alors, quels que soient l'entier $k \in [1, r]$ et $\check{\rho}^k \in \text{Act}_a^k(G, X)$, il existe un germe $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$, analytique si X l'est, tel que $\check{\rho}^k = \check{\rho}^k$. Si X est de dimension finie, tout $\check{\rho}^\infty \in \text{Act}_a^\infty(G, X)$ s'étend de même en un $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, X)$, non nécessairement analytique.

Démonstration. Une carte locale permet de supposer que $(X, a) = (E, 0)$, où E est un espace de Banach, et donc d'identifier $\check{\mathcal{D}}_a^k(X)$ à l'ouvert

$$GL(E) \times \prod_{1 \leq j \leq k} L_s^j(E, E)$$

de l'espace vectoriel topologique (de Banach pour $k < \infty$)

$$\prod_{1 \leq j \leq k} L_s^j(E, E).$$

(i) Cas compact. Nous allons reprendre au niveau formel la démonstration du théorème : pour $1 \leq j \leq k$, soit $\check{\rho}^j$ l'élément de $\check{\text{Act}}_0^j(G, E)$ obtenu en composant $\check{\rho}^k$ et la projection $\check{\mathcal{D}}_0^k(E) \longrightarrow \check{\mathcal{D}}_0^j(E)$. Soit alors ρ^1 l'action linéaire de G sur E définie, modulo l'identification de $\check{\mathcal{D}}_0^1(E)$ à $GL(E)$, par $\rho^1(g, x) = \check{\rho}^1(g) \cdot x$. Il est clair que

$$\check{h}^k = \int_G \left(\overline{[\check{\rho}^1]_{G \times \{0\}}} \right)^k (g) \circ \check{\rho}^k(-g) \, d\mu(g)$$

appartient à $\check{\mathcal{D}}_0^k(E)$ et vérifie

$$\check{h}_*^k \check{\rho}^k = \left(\overline{[\check{\rho}^1]_{G \times \{0\}}} \right)^k.$$

Pour $k < \infty$, il existe un unique germe $h \in \mathcal{D}_0^\infty(E)$ d'application polynomiale de degré k (et donc analytique) tel que $\check{h}^k = \check{j}_0^k h$, et il suffit donc de prendre

$$\rho = h^*[\rho^1]_{G \times \{0\}}.$$

Pour $k = \infty$ et X de dimension finie, on conclut de même par le théorème d'E. Borel.

(ii) Cas où $G = \mathbb{Z}$. Dans chacun des cas étudiés, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_0^\infty(E)$ (polynomial pour $k < \infty$) tel que $\check{\rho}^k(1) = j_0^k \varphi$, et il suffit de définir ρ par $\tilde{\rho}(1) = \varphi$.

(iii) Si $G = \mathbb{R}$, la donnée de $\check{\rho}^k$ équivaut à celle de

$$\check{\rho}^k = \frac{d}{dt} \check{\rho}^k(t) \Big|_{t=0} \left(= \lim_{j \rightarrow k} \frac{d}{dt} \check{\rho}^j(t) \Big|_{t=0} \right),$$

et il existe un germe β de champ de vecteurs C^∞ (polynomial pour $k < \infty$) sur E nul en 0 tel que $\check{\rho}^k = j_0^k \beta$. Il suffit alors de prendre pour ρ le germe d'action de générateur infinitésimal β . ■

Le problème d'extension résolu dans cette proposition semble beaucoup plus délicat lorsque G est un groupe nilpotent (ou même abélien) plus général. Nous y reviendrons dans (4.3.2), corollaire 4.

(3.2) Le théorème de Hartman-Grobman.

(3.2.1) Commençons par en donner un énoncé à la fois plus concis et plus complet :

THÉORÈME 1. Soient X une variété, a un point de X . Si $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , tout $\rho \in \text{Act}_a^1(G, X)$ tel que $\tilde{\rho}^1(1) \in \text{GL}(T_a X)$ soit hyperbolique est C^0 -linéarisable.

REMARQUE. On prouve facilement (cf. Irwin pour la dimension infinie) que, sous les hypothèses du théorème 1, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (a) $\tilde{\rho}^1(1)$ est hyperbolique ;
- (b) $\tilde{\rho}^1(t)$ est hyperbolique pour tout $t \in G^* = G \setminus \{0\}$;
- (c) (Si $G = \mathbb{R}$) le spectre de $A_{\mathbb{C}}$, où $A = \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(t) \Big|_{t=0} \in \mathfrak{gl}(E)$, ne rencontre pas $i\mathbb{R}$.

Soit V un champ de vecteurs C^1 sur une variété X . On dit que $a \in V^{-1}(0)$ est un zéro hyperbolique de V lorsque le spectre de $T_a V \in g^{\mathbb{L}}(T_a X)$ ne rencontre pas $i\mathbb{R}$. Si $\rho \in \text{Act}_a^1(\mathbb{R}, X)$ est le germe du flot de V , cela équivaut donc à dire que $\tilde{\rho}^1(1)$ est hyperbolique. L'équivalent du théorème 2 de (3.1.2) est la

PROPOSITION 1. Si X est de dimension finie et séparable, l'ensemble des champs de vecteurs V de classe C^r ($r \geq 1$) sur X dont tous les zéros sont hyperboliques est ouvert et dense pour la topologie fine. ■

Revenons au théorème 1, en commençant par un contre-exemple :

PROPOSITION 2. L'action de \mathbb{R} (ou de \mathbb{Z}) sur \mathbb{R}^3 donnée par

$$R(t, (x^1, x^2, x^3)) = (e^{t\lambda} x^1, e^{\lambda t} x^2, e^{(1+\lambda)t} (x^3 + t x^1 x^2))$$

avec $\lambda < 0$, a un germe $\rho \in \text{Act}_0^\infty(G, \mathbb{R}^3)$ qui n'est pas C^1 (ni même Lipschitz)-linéarisable. ■

Une démonstration est indiquée dans Irwin. Un résultat de Samovol montre que ce contre-exemple est essentiellement le seul en dimension finie pour des germes d'actions suffisamment différentiables.

Les notations sont désormais celles du théorème 1.

LEMME 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, si X est de classe C^r ($r \geq 1$), il existe une action R de G sur $E = T_a X$ fixant 0 et un germe $\varphi_0 \in \mathcal{A}_{a,0}^r(X, E)$ tels que

$$(i) \varphi_{0*} \rho = [R]_{G \times \{0\}} ;$$

(ii) si $G = \mathbb{Z}$ (resp. \mathbb{R}), alors $\tilde{R}(\pm 1) = L^{\pm 1} + f_{\pm}$ (resp. R est le flot de $A + g$), où $L = \tilde{\rho}^1(1)$ (resp. $A = \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(t)|_{t=0}$) et f_+ et f_- (resp. g) sont lipschitziennes, nulles en 0 , de constante de Lipschitz $\leq \varepsilon$ et à support borné.

De plus, si la topologie de E peut-être définie par une norme $|\cdot|$

de classe C^r en dehors de 0 (en particulier si X est de dimension finie ou hilbertienne), alors R peut être choisie de classe $C^{r+1,r}$.

Preuve. On peut évidemment supposer, via un germe $\varphi_0 \in \mathcal{D}_{a,0}^r(X,E)$, que $(X,a) = (E,0)$ et $\tilde{\rho}^1(t) = D(\tilde{\rho}(t))(0)$ pour tout $t \in G$.

Soit h (resp. V) un représentant de classe C^1 de $\tilde{\rho}(1)$ (resp. $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t)|_{t=0}$) défini au voisinage de 0. Il est clair que, pour tout réel $\alpha > 0$ assez petit, si $B'_{3\alpha} = \{x \in E : |x| \leq 3\alpha\}$, alors

$$f_\alpha = (h-L)|_{B'_{3\alpha}} \quad (\text{resp. } (V-A)|_{B'_{3\alpha}})$$

est lipschitzienne, et que sa constante de Lipschitz $\text{Lip } f_\alpha$ tend vers 0 quand $\alpha \rightarrow 0$.

Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ une fonction telle que $u^{-1}(1) =]-\infty, 1]$ et $u^{-1}(0) = [2, \infty[$, et soit $F_\alpha : E \rightarrow E$ l'application donnée par

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} u(\alpha^{-1}|x|) f_\alpha(x) & \text{pour } |x| \leq 3\alpha \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 3\alpha. \end{cases}$$

Soient x et $y \in E$.

- Si $|x| \leq 3\alpha$ et $|x+y| \leq 3\alpha$, on a

$$\begin{aligned} |F_\alpha(x+y) - F_\alpha(x)| &= |u(\alpha^{-1}|x+y|)(f_\alpha(x+y) - f_\alpha(x)) + \\ &\quad + (u(\alpha^{-1}|x+y|) - u(\alpha^{-1}|x|))f_\alpha(x)| \leq \\ &\leq \text{Lip } f_\alpha (1 + 3 \text{Lip } u) |y|. \end{aligned}$$

- Pour $|x| \geq 2\alpha$ et $|x+y| \geq 2\alpha$, $|F_\alpha(x+y) - F_\alpha(x)| = 0$.

- Pour $|x| < 2\alpha$ et $|x+y| > 3\alpha$ (ou vice versa), on a $|y| > \alpha$,

et donc

$$|F_\alpha(x+y) - F_\alpha(x)| = |u(\alpha^{-1}|x|)f_\alpha(x)| \leq |x| \text{Lip } f_\alpha \leq 2|y| \text{Lip } f_\alpha$$

Si l'on choisit f_+ (resp. g) égal à F_α pour α assez petit, le lemme résulte

donc pour $G = \mathbb{Z}$ du théorème d'inversion locale -en l'occurrence globale-lipschitzien (cf. Shub ou Irwin) ou C^r , et pour $G = \mathbb{R}$ du fait (mêmes références) qu'un champ de vecteurs lipschitzien (globalement) engendre une action de \mathbb{R} . \square

Je renvoie à Irwin pour la démonstration (triviale en dimension finie) du

LEMME 2. Il existe une norme $|\cdot|$ définissant la topologie de E et deux sous-espaces fermés E^+ et E^- de E vérifiant $E = E^+ \oplus E^-$, tels que

- (i) $\tilde{\rho}^1(t) E^+ = E^+$ et $\tilde{\rho}^1(t) E^- = E^-$ pour tout $t \in G$;
- (ii) Si $x \xrightarrow{\pm} x_{\pm}$ désigne la projection de E sur E_{\pm} parallèlement à E_{\mp} , il existe c_+ , $c_- > 0$ tels que

$$|(\tilde{\rho}^1(t)x)_+| \leq e^{-c_+ t} |x_+| \text{ et } |(\tilde{\rho}^1(-t)x)_-| \leq e^{-c_- t} |x_-|$$

quels que soient $t \geq 0$ et $x \in E$. \square

E^+ et E^- sont respectivement les sous-espaces stable et instable de ρ^1 . On les appelle parfois les sous-espaces invariants de ρ^1 , terminologie extrêmement mauvaise (il y a en général bien d'autres sous-espaces vectoriels de E invariants par ρ^1) ; nous proposons donc de les appeler "fortement invariants", pour des raisons que nous préciserons dans (4.4.1).

Pour bien expliquer la signification géométrique de la preuve du théorème 1, nous allons d'abord examiner un cas particulier :

(3.2.2) Démonstration du théorème 1 pour $G = \mathbb{R}$, lorsque le spectre de A est contenu dans $\{\text{Re} z < 0\}$.

On a alors $E = E^+$, et il est possible de choisir R dans le lemme 1 (la norme étant celle du lemme 2) de manière que, pour une certaine constante $C > 0$, on ait

$$|R(t, x)| \leq e^{-Ct} |x|$$

quels que soient $t \geq 0$ et $x \in E$.

Soit S une sphère de centre 0 et de rayon > 0 dans E , et soit Γ le cône obtenu en rajoutant à $\mathbb{R} \times S$ un point à l'infini Σ du côté des (t, ξ) avec $t > 0$. Soit H (resp. H^1) l'application de Γ dans E donnée par

$$\begin{cases} 0 = H(\Sigma) \text{ (resp. } H^1(\Sigma)) \\ H|_{\mathbb{R} \times S} = R|_{\mathbb{R} \times S} \text{ (resp. } H^1|_{\mathbb{R} \times S} = \rho^1|_{\mathbb{R} \times S}) \end{cases}.$$

On prouve facilement (exercice!) que H et H^1 sont des homéomorphismes, et il est clair que l'homéomorphisme $F = H^1 \circ H^{-1}$ est tel que $F_* R = \rho^1$.

De manière équivalente, on peut définir F par le fait que $F|_{E \setminus \{0\}}$ est l'unique solution du "problème de Cauchy"

$$\begin{cases} F(R(t, x)) = \rho^1(t, F(x)) \text{ quel que soit } (t, x) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0\}) \\ F|_S = \text{id}_E|_S \end{cases}.$$

Si S a un rayon assez grand pour contenir $\text{supp } g$ dans son intérieur, une troisième définition, équivalente aux deux précédentes, est

$$F = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_t \text{ au sens de la convergence simple,}$$

où $(F_t)_{t \geq 0}$ est la famille d'homéomorphismes donnée par

$$F_t(x) = \tilde{\rho}^1(t) \circ R(-t, x).$$

En fait, F_t est alors égal à l'identité sur l'extérieur de S pour tout $t \geq 0$, et plus généralement $(F_t|_{E \setminus \{0\}})_{t \geq 0}$ est une famille localement stationnaire : quel que soit $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un ouvert $U \ni x$ de $E \setminus \{0\}$ tel que $F_t|_U = F_{t_0}|_U$ pour tout $t \geq t_0$.

Par conséquent, F est bien définie, aussi différentiable que R sur $E \setminus \{0\}$; de plus, la famille $(F_t^{-1})_{t \geq 0}$ possède évidemment les mêmes

propriétés, et il en résulte que sa limite est égale à F^{-1} , qui est donc aussi différentiable que R sur $E \setminus \{0\}$. Pour prouver ce qui manque encore, à savoir la continuité de F et de F^{-1} en 0 , il suffit donc (en oubliant provisoirement la première démonstration) de prouver que les suites $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(F_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément, ce qui est le cas (nous le prouverons dans un instant). \square

Remarque. Cette manière extrêmement simple de ramener le cas où $G = \mathbb{R}$ à celui où $G = \mathbb{Z}$, qui reviendra souvent dans la suite, ne paraît pas "classique", ce qui a conduit à bien des contorsions inutiles.

(3.2.3) Preuve du théorème 1 dans le cas général.

L'idée la plus naturelle pour généraliser si $G = \mathbb{R}$ la démonstration précédente est, avec les notations du lemme 2, de se donner par exemple le cylindre $Q_+ = \{x \in E : |x_+| = r\}$, avec $r > 0$ assez grand, et de définir $F^{-1}|_{E \setminus E^-}$ par $(F^{-1} - \text{id}_E)|_{Q_+} = 0$ et $F^{-1} \circ \rho^1(t, x) = R(t, F^{-1}(x))$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times (E \setminus E^-)$. Cette idée, qui sera celle de notre démonstration du théorème de Sternberg, ne s'applique pas ici (voir cependant l'appendice 8), et il faut recourir à l'astuce consistant à définir F par

$$\begin{cases} F(x)_+ = x_+ \text{ pour tout } x \in E \text{ vérifiant } |x_+| = r \\ F(x)_- = x_- \text{ pour tout } x \in E \text{ vérifiant } |x_-| = r \end{cases}$$

avec $r > 0$ assez grand.

En fait, l'argument analytique "aveugle" correspondant (cf. Arnold [2], chapitre 3, § 13, Palis, et Pugh) est très simple :

LEMME 3. Soient E^+ et E^- deux espaces de Banach, $L_+ \in GL(E^+)$ une contraction (i.e. $|L_+| < 1$), $L_- \in GL(E^-)$ une dilatation (i.e. $|L_-^{-1}| < 1$), $E = E^+ \times E^-$ muni de la norme $|(x_+, x_-)| = \max\{|x_+|, |x_-|\}$, $L = L_+ \times L_- \in GL(E)$ et $F, F' \in C^0(E, E)$ deux applications bornées et lipschitziennes. Si $\text{Lip } F$ et $\text{Lip } F'$ sont assez petites, alors $H = L + F$ et $H' = L + F'$ sont des homéomorphismes, et il

existe une unique application bornée $G \in C^0(E, E)$ telles que

$$H' \circ (id + G) = (id + G) \circ H.$$

Preuve. La première assertion vient du théorème d'inversion "locale" lipschitzien. L'identité finale s'écrit

$$L \circ G + F' \circ (id + G) = F + G \circ H,$$

soit $G = \tilde{\Phi}(G)$, où, si $F = (F_+, F_-)$, $F' = (F'_+, F'_-)$ et $G = (G_+, G_-)$,

$$\tilde{\Phi}(G) = ((L_+^0 G_+ + F'_+ \circ (id + G) - F_+) H^{-1}, L_-^{-1} (G_- \circ H + F_- - F'_- \circ (id + G))).$$

Soit $C_b^0(E, E)$ l'espace de Banach formé des éléments bornés de $C^0(E, E)$, muni de la norme de la convergence uniforme. Il est évident que $\tilde{\Phi}$ envoie $C_b^0(E, E)$ dans lui-même et en est une contraction stricte (i.e. $Lip \tilde{\Phi} < 1$) pour $Lip F$ et $Lip F'$ assez petites, et on conclut par le théorème du point fixe. \square

Remarque. On ne suppose pas dans le lemme 3 que $F(0) = F'(0) = 0$.

Supposons les hypothèses du lemme 1 (avec ε assez petit) et du lemme 2 vérifiées.

- Si $G = \mathbb{Z}$, il existe d'après le lemme 3 une unique application continue bornée G_1 (resp. G_2): $E \longrightarrow E$ telle que l'on ait

$$\begin{aligned} \tilde{R}(1) \circ (id + G_1) &= (id + G_1) \circ \tilde{\rho}^1(1) \\ (\text{resp. } \tilde{\rho}^1(1) \circ (id + G_2) &= (id + G_2) \circ \tilde{R}(1)), \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \tilde{R}(1) \circ (id + G_2 + G_1 \circ (id + G_2)) = (id + G_2 + G_1 \circ (id + G_2)) \circ \tilde{R}(1)$$

En appliquant de nouveau le lemme 3 avec $H = H' = \tilde{R}(1)$, on en déduit que l'application continue bornée $G_2 + G_1 \circ (id + G_2)$ est nulle, et donc que $(id + G_1) \circ (id + G_2) = id$. Le même raisonnement montre que $(id + G_2) \circ (id + G_1) = id$, et l'on a donc

$$(id + G_2) \circ R = \rho^1.$$

- Si $G = \mathbb{R}$, alors, d'après l'argument précédent, il existe pour tout $t > 0$ une unique application continue bornée G_t telle que $\tilde{\rho}^1(t) \circ (\text{id} + G_t) = (\text{id} + G_t) \circ \tilde{R}(t)$, et $\text{id} + G_t$ est un homéomorphisme. L'unicité des G_t montre alors que l'on a $G_{\frac{p}{q}t} = G_t$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$.

On en déduit, ρ^1 et R étant continues, que $(\text{id} + G_t)_{*} R = \rho^1$ pour tout t , et que $G = G_t$ ne dépend pas de t . ■

EXERCICES : 1. Justifier l'emploi du lemme 3 si $G = \mathbb{R}$.

2. Montrer que l'homéomorphisme obtenu par cette méthode admet la définition géométrique donnée juste avant le lemme 3.

Remarque. La démonstration géométrique donnée au début de (3.2.2) se généralise en la manière suivante de raconter la même construction pour $G = \mathbb{R}$: on commence par découper les cylindres Q_+ et Q_- où $Q_{\pm} = \{x \in E : |x_{\pm}| = r\}$, $r > 0$ assez grand, en feuilles $\{x_+\} \times E_- = F_{x_+}$ et $E_+ \times \{x_-\} = F_{x_-}$ respectivement.

On montre alors que $\{\tilde{R}(t)(F_{x_+}) : t \in \mathbb{R} \text{ et } |x_+| = r\}$ et $\{\tilde{R}(t)(F_{x_-}) : t \in \mathbb{R} \text{ et } |x_-| = r\}$ se prolongent en deux feuilletages C^0 de E tout entier, à feuilles aussi différentiables que R , en ajoutant une feuille W^- au premier et une feuille W^+ au second. Lorsque R est C^k ($k \geq 1$), toute feuille du premier feuilletage est transverse à toute feuille du second, et on repère chaque point de E par le couple formé de la feuille du premier feuilletage et la feuille du second feuilletage qui le contiennent.

Comme le quotient de E par le premier (resp. second) feuilletage est homéomorphe au cône Γ_+ (resp. Γ_-) obtenu en rajoutant à $\mathbb{R} \times S_+$ (resp. $\mathbb{R} \times S_-$) - où $S_{\pm} = \{x \in E_{\pm} : |x| = r\}$ - un point à l'infini du côté des (t, x) avec $t > 0$ (resp. < 0), on associe donc à R un homéomorphisme de E sur

$\Gamma_+ \times \Gamma_-$. En le composant avec l'inverse de l'homéomorphisme associé de même à ρ^1 , on obtient une C^0 -équivalence entre R et ρ^1 .

L'idée de cette preuve à base de feuilletages invariants est due à Palis - et antérieure à la démonstration utilisant le lemme 3. Les feuilles W^+ et W^- ne dépendent pas du choix des deux feuilletages invariants :

Proposition 3 (i) Sous les hypothèses du lemme 1, l'ensemble W^+ (resp. W^-) des $x \in E$ tels que $R(t, x)$ tende vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) est une sous-variété, aussi différentiable que R , de E appelée variété stable (resp. instable) de R en 0.

(ii) Les germes $W_a^+(\rho) = \varphi_0^{-1}([W^+]_0)$ et $W_a^-(\rho) = \varphi_0^{-1}([W^-]_0)$ sont des germes de variétés aussi différentiables que ρ , et ne dépendant que de ρ : on les appelle respectivement variété stable et variété instable de ρ .

(iii) Avec les notations du lemme 2, on a $T_a W_a^+(\rho) = E^+$ et $T_a W_a^-(\rho) = E^-$, et tout germe W en a de sous-variété C^1 de X invariant par ρ et tel que $T_a W = E^+$ (resp. E^-) est égal à $W_a^+(\rho)$ (resp. $W_a^-(\rho)$).

La preuve de ces résultats est très bien exposée dans le livre d'Irwin. En classe C^∞ et en dimension finie, notre démonstration du théorème de Sternberg les impliquera. ■

(3.2.4) Théorème de Hartman-Grobman à paramètre.

Pour l'instruction du lecteur, nous allons l'énoncer dans un langage un peu formel, qu'il ne manquera pas de traduire en langage humain.

Soient G un groupe de Lie, Λ un espace de Banach et a un point d'une variété X . Une C^r -déformation ($r \geq 1$) de $\rho_0 \in \text{Act}_a^r(G, X)$ à paramètre $\lambda \in \Lambda$ est par définition un germe $\rho \in \text{Act}_{(a, 0)}^r(G, X \times \Lambda)$ tel que tout représentant R de ρ soit de la forme $(g, x, \lambda) \longmapsto (R_\lambda(g, x), \lambda)$ dans un voisinage de $G \times \{(a, 0)\}$ et vérifie $[R_0]_{G \times \{a\}} = \rho_0$.

Remarque : On ne suppose donc pas dans cette définition que $R_\lambda(g,a)=a$ quel que soit $g \in G$ pour $\lambda \neq 0$.

La déformation triviale à paramètre $\lambda \in \Lambda$ de ρ_0 est la C^r -déformation dont un représentant est $(g,x,\lambda) \longmapsto (R_0(g,x),\lambda)$, où R_0 désigne un représentant de ρ_0 .

Une C^r -déformation ρ de $\rho_0 \in \text{Act}_a^r(G,X)$ et une C^r -déformation ρ' de $\rho'_0 \in \text{Act}_a^r(G,X')$, toutes deux à paramètre $\lambda \in \Lambda$, sont C^k -isomorphes lorsqu'il existe $h \in \mathcal{D}_{(a,0),(a',0)}^k(X \times \Lambda, X' \times \Lambda)$, ayant un représentant de la forme $(x,\lambda) \longmapsto (h_\lambda(x), \varphi(\lambda))$, tel que $h_* \rho = \rho'$ (et donc $h_0 * \rho_0 = \rho'_0$).

Théorème 2 (Hartman-Grobman à paramètre) Si $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , et si $\rho_0 \in \text{Act}_a^1(G,X)$ est tel que $\tilde{\rho}_0^1(1) \in \text{GL}(T_a X)$ soit hyperbolique, alors toute déformation à paramètre $\lambda \in \Lambda$ de ρ_0 est C^0 -isomorphe à la déformation triviale à paramètre $\lambda \in \Lambda$ de $[\rho^1]_{G \times \{a\}}$.

Idee de la démonstration : Il s'agit vraiment de reprendre "à paramètre λ " la preuve du théorème de Hartman-Grobman : on commence, comme dans le lemme 1, par se ramener à l'aide d'une carte locale au cas où $(X,a) = (E,0)$, puis on montre (même preuve que pour le lemme 1) l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un ouvert $\Lambda_\varepsilon \ni 0$ de Λ et d'une action R de \mathbb{Z} (resp. \mathbb{R}) sur $E \times \Lambda_\varepsilon$, de la forme $(t,(x,\lambda)) \longmapsto (R_\lambda(t,x),\lambda)$, et dont le générateur (resp. le générateur infinitésimal) a pour différence avec celui de $(t,(x,\lambda)) \longmapsto (\rho_0^1(t,x),\lambda)$ une application à support borné, de constante de Lipschitz $\leq \varepsilon$. Pour ε assez petit, on peut alors appliquer le lemme 3 à $H = \tilde{\rho}_0^1(t)$ et $H' = \tilde{R}_\lambda(t)$ pour tout $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$ et $t = 1$ (resp. tout $t > 0$), ce qui permet de prouver comme précédemment l'existence d'un $F_\lambda \in \text{Diff}^0(E,E)$ tel que $F_\lambda * R_\lambda = \rho_0^1$. D'après le théorème du point fixe à paramètre, F_λ dépend continûment de λ . ■

Commentaires : Pour $\Lambda \neq \{0\}$, la raison pour laquelle on doit se contenter ici d'un C^0 -isomorphisme est très simple : un C^1 -isomorphisme impliquerait,

avec les notations de la démonstration précédente, que, pour $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$ assez petit les automorphismes $D(\tilde{R}_\lambda(1))$ ($F_\lambda^{-1}(0)$) et $\tilde{\rho}_0^1(1)$ (resp. $\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_0^1(t)|_{t=0}$ et $D(\frac{d}{dt}\tilde{R}_\lambda(t)|_{t=0})(F_\lambda^{-1}(0))$) de E soient conjugués dans $GL(E)$, et aient donc en particulier le même spectre, ce qui n'a aucune raison d'être en général.

- Le théorème 2 mélange en fait les trois propriétés suivantes :

(a) Le fait que, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un unique germe $\varphi : [\Lambda']_0 \longrightarrow [E]_0$ d'application C^1 tel que, pour tout représentant $\tilde{\varphi}$ de φ , $\tilde{\varphi}(\lambda)$ soit un point fixe de R_λ pour tout λ assez petit.

(b) Le théorème 1, appliqué à chaque R_λ au voisinage de $\tilde{\varphi}(\lambda)$.

(c) Le fait que, pour tout élément hyperbolique A de $GL(E)$, la classe d'équivalence de A pour la relation

" A est équivalent à A' si et seulement si ils sont conjugués dans $\text{Diff}^0(E, E)$ " entre A et $A' \in GL(E)$ est ouverte.

Le point (c) est une propriété des actions linéaires de \mathbb{Z} , et on a une propriété correspondante pour les actions linéaires de \mathbb{R} . En revanche, les actions linéaires de groupes abéliens ou nilpotents plus généraux ne possèdent pas cette propriété (cf. Camacho, Kuiper et Palis pour les actions holomorphes de \mathbb{C}), ce qui rend beaucoup plus délicate la démonstration d'un théorème de linéarisation C^0 pour les germes d'actions de ces groupes (cf. Chaperon pour les germes d'actions holomorphes de \mathbb{C}).

4. FONDEMENTS ANALYTIQUES ET PREMIERS RÉSULTATS DE LA CLASSIFICATION C^∞ DES GERMES D'ACTIONS DE GROUPES ABÉLIENS.

(4.1) Premier énoncé du théorème de Sternberg et idée de sa démonstration.

Pour ne pas lasser d'emblée le lecteur par des trivialités algébriques, nous allons commencer par un énoncé un peu vague, qui sera précisé ultérieurement :

THÉORÈME (Sternberg). Soient $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, X)$ et $\rho' \in \text{Act}_{a'}^\infty(G, X')$ où $X \ni a$ et $X' \ni a'$ sont deux variétés de dimension finie et $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} . Si $\tilde{\rho}^1(1)$ (ou $\tilde{\rho}'^1(1)$) est hyperbolique, alors ρ et ρ' sont C^∞ -isomorphes si et seule-
ment si ils sont formellement isomorphes.

Nous allons donner maintenant une idée de sa démonstration dans le cas particulier où

$$X' = T_a X = E, \quad a' = 0 \in E \text{ et } \rho' = [\rho^1]_{G \times \{0\}}.$$

Si ρ et ρ' sont formellement isomorphes, nous pouvons, via un germe $\varphi_0 \in \mathcal{L}_{a,0}^\infty(X, E)$ (dont l'existence résulte du théorème d'E. Borel), supposer que

$$(X, a) = (E, 0) \text{ et } \tilde{\rho}^\infty = \overline{(\rho^1)^\infty}.$$

Soient E^+ et E^- les sous-espaces stable et instable de ρ^1 . La première étape dans la preuve du théorème de Sternberg est le

LEMME 1. Il existe $\varphi_1 \in \mathcal{L}_0^\infty(E)$ tel que

$$(j_1^\infty \varphi_1^\# \rho) |_{G \times (E^+ \cup E^-)} = (j_1^\infty \rho') |_{G \times (E^+ \cup E^-)}.$$

Le germe φ_1 est obtenu comme suit : on prouve que les suites

$$((j^\infty \tilde{\rho}(-n) \circ \tilde{\rho}'(n)) |_{E^+})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } ((j^\infty \tilde{\rho}(n) \circ \tilde{\rho}'^1(-n)) |_{E^-})_{n \in \mathbb{N}}$$

convergent respectivement vers un germe z^+ en 0 de section de $p_\infty: J^\infty(E, E) \rightarrow E$ au-dessus de E^+ et un germe z^- en 0 de section de p_∞ au-dessus de E^- , en un sens que nous préciserons. On choisit alors φ_1 , grâce aux théorèmes 4 et 5 de (1.3), tel que

$$(j_1^\infty \varphi_1) |_{E^+} = z^+ \text{ et } (j_1^\infty \varphi_1) |_{E^-} = z^-. \quad \square$$

Munissons E d'une norme euclidienne satisfaisant le lemme 2 de (3.2.1) et pour laquelle E^+ et E^- soient orthogonaux. La construction effectuée pour

prouver le lemme 1 de (3.2.1) donne le

LEMME 2. Il existe une C^∞ -action R de G sur E possédant les propriétés suivantes :

$$(i) [R]_{G \times \{0\}} = \varphi_1^* \rho \text{ et } j_{G \times (E^+ \cup E^-)}^\infty R = j_{G \times (E^+ \cup E^-)}^\infty \rho^1.$$

(ii) Pour $G = \mathbb{Z}$ (resp. \mathbb{R}), $\tilde{R}(1) \sim \tilde{\rho}^1(1)$ (resp. $\frac{d}{dt} (\tilde{R}(t) \sim \tilde{\rho}^1(t))|_{t=0}$) est à support compact.

(iii) Il existe $k > 0$ tel que, quels que soient $t \geq 0$ dans G et $x \in E$, on ait $|R(t, x)|_+ \leq e^{-kt} |x|_+$. \square

Le théorème résulte alors immédiatement du

LEMME 3. Pour chaque $t \in G$, soit $H_t = \tilde{R}(t) \circ \tilde{\rho}^1(-t)$. La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens C^∞ (sur tout compact) vers un $H \in \text{Diff}^\infty(E, E)$ tel que $H^* R = \rho^1$. ■

La preuve des lemmes 1 et 3 sera donnée dans (4.2), sous la forme plus générale qui nous servira.

COMMENTAIRE GÉOMÉTRIQUE DU LEMME 3. Il résulte du lemme 2(iii) que les familles $(H_t|_{E \setminus E^-})_{t \geq 0}$ et $(H_t^{-1}|_{E \setminus E^-})_{t \geq 0}$ sont localement stationnaires :

quel que soit $x \in E \setminus E^-$, il existe un ouvert $U \ni x$ de $E \setminus E^-$ et un $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait, pour tout $t \geq n_0$ dans G , $H_t|_U = H_{n_0}|_U$ et $H_t^{-1}|_U = H_{n_0}^{-1}|_U$.

Comme $H_t|_{E^-} = H_t^{-1}|_{E^-} = \text{id}_E|_{E^-}$ pour tout $t \in G$, on déduit de ce qui précède que, quand $t \rightarrow +\infty$, H_t converge simplement vers une application H qui est bijective, d'inverse $H^{-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} H_t^{-1}$, et telle que $H|_{E^-} = \text{id}_E|_{E^-}$, que

$H|_{E \setminus E^-} \in \text{Diff}^\infty(E \setminus E^-, E \setminus E^-)$ et que $j_{E^+ \setminus \{0\}}^\infty (H - \text{id}_E)|_{E \setminus E^-} = 0$.

Enfin, H vérifie évidemment $H^* R = \rho^1$.

Par conséquent, seule la différentiabilité de R le long de E^-

requiert un peu d'Analyse ; pour celle-ci, il suffit bien sûr, comme nous l'avons fait dans l'énoncé du lemme 3, de considérer la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une manière "encore plus géométrique" de décrire H est la suivante:

pour $G = \mathbb{Z}$ (resp. \mathbb{R}), soit r un réel > 0 tel que

$$\text{supp}(\tilde{R}(1) - \tilde{\rho}^1(1)) \subset B_r = \{x \in E : |x_+| < r\}$$

$$(\text{resp. } \text{supp}(\frac{d}{dt}(\tilde{R}(t) - \tilde{\rho}^1(t))|_{t=0}) \subset B_r). \text{ Si } D_r = (\tilde{\rho}^1(-1)B_r) \setminus B_r$$

(resp. $D_r = \{x \in E : |x_+| = r\}$), on montre facilement que $H|_{E \setminus E^-}$ est l'unique solution du "problème de Cauchy"

$$\begin{cases} (H - \text{id}_E)|_{D_r} = 0 \\ \forall t \in G, H \circ \tilde{\rho}^1(t)|_{E \setminus E^-} = \tilde{R}(t) \circ H|_{E \setminus E^-} \end{cases}.$$

La construction de H peut donc être vue de la manière suivante :

1/ On se donne une partie dense U de E , invariante par R et ρ^1 (en l'occurrence $U = E \setminus E^-$, le cas où $E = E^-$ étant réglé par le lemme 1), et l'on définit $H|_U$ par sa restriction à un domaine fondamental de $\rho^1|_{G \times U}$ (en l'occurrence D_r).

2/ On vérifie que H se prolonge correctement à $E \cup U$.

Nous ne procéderons pas autrement pour des G plus généraux.

(4.2) Un peu d'Analyse.

(4.2.1) Le théorème du point fixe "à tiroir".

Etant donné un espace topologique Y et une application $u : Y \rightarrow Y$, nous dirons que $\bar{y} \in Y$ est un (et donc le) point fixe attractif de u lorsque, pour tout $y \in Y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(y) = \bar{y}$. Le théorème du point fixe habituel affirme donc que toute contraction stricte d'un espace métrique complet a un point fixe attractif.

Notre preuve du théorème de Sternberg et de ses généralisations ultérieures ne fait appel à aucun résultat d'Analyse difficile, mais seulement au très élémentaire théorème du point fixe "à tiroir" :

Théorème. Soient Y un espace topologique séparé, Z un espace métrique et $w : Y \times Z \rightarrow Y \times Z$ une application continue, de la forme $(y, z) \mapsto (u(y), v_y(z))$ et possédant les propriétés suivantes :

(i) u a un point fixe attractif $\bar{y} \in Y$.

(ii) Pour tout $y \in Y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \text{Lip}(v_{u^n(y)}) < 1$.

(iii) $v_{\bar{y}}$ a un point fixe \bar{z} (ce qui résulte de (i) et de (ii) si Z est complet).

Alors w admet (\bar{y}, \bar{z}) pour point fixe attractif.

Démonstration. Etant donné $(y, z) \in Y \times Z$, posons $(y_n, z_n) = w^n(y, z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $z_{n+1} = v_{y_n}(z_n)$, d'où, si d désigne la distance de Z ,

$$d(z_{n+1}, \bar{z}) \leq d(v_{y_n}(z_n), v_{y_n}(\bar{z})) + d(v_{y_n}(\bar{z}), \bar{z}).$$

D'après (ii), il existe $k \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait $\text{Lip } v_{y_n} \leq k$ pour tout $n \geq m$, et donc

$$(1) \quad \forall n \geq m, \quad d(z_{n+1}, \bar{z}) \leq k d(z_n, \bar{z}) + d(v_{y_n}(\bar{z}), \bar{z}).$$

Comme v est continue, il résulte de (i) et (iii) que

$d(v_{y_n}(\bar{z}), \bar{z}) = d(v_{y_n}(\bar{z}), v_{\bar{y}}(\bar{z})) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc en particulier que

$$(2) \quad \varepsilon_m = \sup\{d(v_{y_n}(\bar{z}), \bar{z}) : n \geq m\} < \infty.$$

De (1) et (2), on déduit que, pour tout $n \geq m$, on a

$$d(z_{n+1}, \bar{z}) \leq k^{n+1-m} d(z_m, \bar{z}) + \sum_{j=0}^{n-m} k^j \varepsilon_m,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(z_n, \bar{z}) \leq (1-k)^{-1} \varepsilon_m.$$

Le théorème résulte donc de ce que $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$. ■

(4.2.2) Théorèmes de conjugaison.

Nous allons maintenant prouver des résultats qui impliquent les lemmes 1 et 3 de (4.1). Pour éviter de rebuter le lecteur par des détails techniques, nous allons les énoncer sous la forme qui nous servira et les prouver dans le cas particulier qui suffit aux principales applications visées. L'appendice 6 contient à la fois des énoncés plus généraux et leur démonstration, qui n'est guère différente.

Soient I un ensemble fini, $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$ ($m \in \mathbb{N}$), $M = I \times \mathbb{T}^m$ et E un espace de Banach. Désignons par $\pi : \tilde{Q} \longrightarrow Q$ la projection canonique de $\tilde{Q} = I \times \mathbb{R}^m \times E$ sur $Q = M \times E$. Soit $\gamma = [f]_a : [Q]_a \longrightarrow [Q]_a$, un germe d'application C^k ($k \geq 1$). Quels que soient $\tilde{a} \in \pi^{-1}(a)$ et $\tilde{a}' \in \pi^{-1}(a')$, si $\tilde{a} = (j, b) \in I \times (\mathbb{R}^m \times E)$ et $\tilde{a}' = (j', b') \in I \times (\mathbb{R}^m \times E)$, la donnée de

$$[\pi]_{\tilde{a}'}^{-1} \circ \gamma \circ [\pi]_{\tilde{a}} : [\tilde{Q}]_{\tilde{a}} \longrightarrow [\tilde{Q}]_{\tilde{a}'},$$

équivalait à celle de (j, j') et d'un germe $\beta : [\mathbb{R}^m \times E]_b \longrightarrow [\mathbb{R}^m \times E]_{b'}$, d'application C^k . Il est clair que $D^k \beta(b) \in L_S^k(\mathbb{R}^m \times E, \mathbb{R}^m \times E)$ ne dépend pas du choix de \tilde{a} et \tilde{a}' , et l'on note

$$D^k \gamma(a) = D^k f(a) = D^k \beta(b) .$$

L'application $j_a^k f \longmapsto (a, f(a), (D^j f(a))_{1 \leq j \leq k})$ est un difféomorphisme de $J^k(Q, Q)$ sur $Q \times Q \times \prod_{1 \leq j \leq k} L_S^j(\mathbb{R}^m \times E, \mathbb{R}^m \times E)$.

HYPOTHÈSES. - Dans ce qui suit, M désigne

-soit le produit $I \times \mathbb{T}^m$, auquel cas les notations sont celles que nous venons de définir ;

-soit une variété riemannienne compacte arbitraire, auquel cas les notations sont celles de l'appendice 2.

(La première situation correspond au cas particulier de la seconde où l'on munit \mathbb{T}^m de la métrique plate obtenue en relevant la métrique euclidienne

standard de \mathbb{R}^m).

On se donne un espace vectoriel euclidien E , un sous-espace vectoriel F de E , et l'on note $Q = M \times E$, $\Sigma = M \times \{0\} \subset Q$ et $W = M \times F \subset Q$. On munit Q de la structure riemannienne produit (pour laquelle chaque $\{\theta\} \times E$ avec $\theta \in M$ est orthogonal à Σ), et, pour chaque $r > 0$, on désigne par B_r (resp. W_r) l'ensemble $\{(\theta, x) \in Q : |x| \leq r\} = \{y \in Q : d(y, \Sigma) \leq r\}$ (resp. $B_r \cap W$). On note $x \mapsto x_-$ la projection orthogonale de Q sur F , d'où en particulier $|x_-| = d(x, \Sigma)$ pour $x \in W$. Etant donné un réel $r > 0$, un réel β , une partie U de Q contenant W_r et deux applications F et G de U dans Q , nous posons

$$\begin{cases} \bar{\beta} = \max\{0, \beta\} \\ d_{r, \beta}^0(F, G) = \sup\{|x_-|^{-\bar{\beta}} d(F(x), G(x)) : x \in W_r \setminus \Sigma\} \leq \infty. \end{cases}$$

De même, si X est une application de U dans un espace normé,

$$|X|_{r, \beta} = \sup\{|x_-|^{-\bar{\beta}} |X(x)| : x \in W_r \setminus \Sigma\} < \infty,$$

et, étant donné $H : V \rightarrow Q$ avec $B_r \subset V \subset Q$, nous désignerons par $\text{Lip}_r(H)$ la constante de Lipschitz de $H|_{B_r}$.

On se donne un germe $\xi : [W]_\Sigma \rightarrow J^\infty(Q, Q)$ de section holonome de la projection source $J^\infty(Q, Q) \rightarrow Q$, de la forme

$$\xi = [j_{U \cap W}^\infty f]_\Sigma,$$

où U est un voisinage ouvert de Σ dans Q et $f : U \rightarrow Q$ un plongement C^∞ possédant les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} (i) f(U \cap W) = f(U) \cap W \\ (ii) \exists c \in]0, 1[: \forall x \in U \cap W, |x_-| \leq c |f(x)_-| \end{cases}$$

(et donc en particulier $f(\Sigma) = \Sigma$).

On pose

$$\varphi = [f]_\Sigma$$

et

$$(2) \quad \begin{cases} A = f^{-1}|_W, \quad A_-(x) = A(x)_- \quad \text{pour } x \in f(U) \cap W, \\ c_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |A_-|_{r,1}, \quad R = 1 - c_0 \\ K_0 = \sup\{|Df(x)| : x \in \Sigma\} = \lim_{r \rightarrow 0} |Df|_{r,0} \\ L_0 = \sup\{|D(f^{-1})(x)| : x \in \Sigma\} = \lim_{r \rightarrow 0} |D(f^{-1})|_{r,0}. \end{cases}$$

D'après (1) (ii), on a

$$(3) \quad 0 < c_0 \leq c < 1 ;$$

notons $\nu A_- : \Sigma \rightarrow L(F, F)$ la dérivée de A_- normalement à Σ , c'est-à-dire la restriction à Σ de la dérivée partielle

$$W = M \times F \ni (\theta, v) \mapsto \frac{\partial A_-}{\partial v}(\theta, v) \in L(F, F) ;$$

de la formule de Taylor

$$A_-(\theta, v) = A_-(\theta, 0) + \left(\int_0^1 \frac{\partial A_-}{\partial v}(\theta, tv) dt \right) \cdot v ,$$

on déduit que

$$(4) \quad c_0 = \max\{|\nu A_-(x)| : x \in \Sigma\} .$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons

$$(5) \quad \begin{cases} s(k) = \begin{cases} k+1 + \left[\frac{\text{Log } K_0 + k \text{Log } L_0}{-\text{Log } c_0} \right] & \text{pour } \text{Log } K_0 + k \text{Log } L_0 \geq 0 \\ \left[(\text{Log } K_0) / (-\text{Log } L_0) \right] + 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ t(k) = \max\{k, s(k)\} , \end{cases}$$

où $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la partie entière, et

$$(6) \quad s(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(k) , \quad t(\infty) = \infty .$$

Il est clair que c_0 , R , K_0 , L_0 , s et t sont bien définis par ζ (et même par $j_\Sigma^1 f$), indépendamment du choix de f .

Si l'on note $\mathcal{L}_\Sigma^k(Q)$ le groupe des germes $[Q]_\Sigma \curvearrowright$ de C^k -difféomorphismes, on a le

THÉOREME 1. - Soit Ψ un élément de $\mathcal{B}_{\Sigma}^{t(k)}(Q)$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, tel que

$$(i) \quad j_{\Sigma}^{s(k)} \Psi = j_{\Sigma}^{s(k)} f .$$

Quel que soit le représentant g de Ψ , il existe un réel $r_0 > 0$ et une section holonome H de la projection-source $J^k(Q, Q) \rightarrow Q$ au-dessus de W_{r_0} tels que, pour tout $r \in]0, r_0]$, la suite $(j_{W_r}^k (g^n \cdot f^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie, converge uniformément vers $H|_{W_r}$ et ne dépende que de $j_{W_r}^k (f^{-1})$ et de $g|_{B_r}$.

Le germe $\eta = [H]_{\Sigma}$ est donc déterminé par ζ et Ψ indépendamment du choix de f et g . Si $h \in \mathcal{B}_{\Sigma}^k(Q)$ est tel que $\eta = (j^k h)|_W$, on a

$$(ii) \quad j_{\Sigma}^k h = j_{\Sigma}^k \text{id} ;$$

$$(iii) \quad j_W^k (h^{*\Psi}) = j_W^k \varphi ;$$

en particulier, $[W]_{\Sigma}$ est $h^{*\Psi}$ - invariant .

Démonstration lorsque $M = I \times \mathbb{T}^m$. Supposons choisi un représentant g de Ψ , de classe $C^{t(k)}$, et posons, pour tout $r > 0$ assez petit,

$$(7) \quad \begin{cases} (a) & c_r = |A_-|_{r,1} \\ (b) & K_r = \text{Lip}_r(g) = \max\{|Dg(x)| : x \in B_r\} \\ (c) & L_r = |D(f^{-1})|_{r,0} \geq c_r . \end{cases}$$

Le lemme suivant contient toutes les inégalités qui nous serviront :

LEMME 1.- Quels que soient l'entier $j \in [0, k]$ et le réel $\alpha \in [s(j), s(k)]$, il existe $r_j(\alpha) \in]0, 1]$ tel que $A|_{W_{r_j(\alpha)}}$ et $g|_{B_{r_j(\alpha)}}$ soient bien définis, et possédant la propriété suivante : pour tout $r \in]0, r_j(\alpha)]$ et tout $\ell \in \{0, \dots, j\}$, on a

$$(8) \quad \begin{cases} (a) & K_r c_r^{\alpha-\ell} L_r^{\ell} < 1 \\ (b) & R r^{\alpha-1} c_r^{\alpha} + c_r \leq 1 \\ (c) & (K_r + R^{-1} d_{r,\alpha}^0(f, g)) \cdot c_r^{\alpha} < 1 \end{cases}$$

Preuve. Par définition (5) de $s(j)$, on a $K_0 c_0^{\alpha-\ell} L_0^\ell < 1$ pour $0 \leq \ell \leq j$; en outre, si r tend vers 0, le réel $\alpha \in [s(j), s(k)]$ étant fixé, alors $(K_r, c_r, L_r d_{r,\alpha}^0(f,g))$ tend vers $(K_0, c_0, L_0, 0)$ d'après (2), (7) et l'hypothèse (i) du théorème. On en déduit immédiatement (8), car α est au moins égal à $s(j) \geq 1$. \square

NOTATIONS. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, une section F au-dessus de $U \subset Q$ de la fibration $p_i : J^i(Q, Q) \rightarrow Q$ (donnée par $p_i(j_x^i \gamma) = x$) s'identifie à une application de U dans $Q \times \bigoplus_{1 \leq j \leq i} L_S^j(\mathbb{R}^m \times E, \mathbb{R}^m \times E)$, dont nous noterons F^0 la composante suivant Q et F^j ($1 \leq j \leq i$) la composante suivant $L_S^j(\mathbb{R}^m \times E, \mathbb{R}^m \times E)$; étant données deux sections F et G de p_i au-dessus de $U \supset W_r$ ($r > 0$), nous noterons

$$d_{r,\beta}^i(F,G) = \max \{d_{r,\beta}^0(F^0, G^0), \max \{|F^j - G^j|_{r,\beta-j} : 1 \leq j \leq i\}\},$$

et nous appellerons $C_U^0(p_i)$ l'ensemble des sections continues de p_i au-dessus de U .

Voici les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler:

LEMME 2. Quels que soient $i \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 0$,

$$Y_{r,\alpha}^i = \{H \in C_{W_r}^0(p_i) : d_{r,\alpha}^0(H^0, id_Q) \leq R \text{ et } d_{r,\alpha}^i(H, j^i id_Q) < \infty\},$$

muni de la distance $d_{r,\alpha}^i$, est un espace métrique complet. \square

LEMME 3. Quels que soient l'entier $j \in [0, k]$, le réel $\alpha \in [s(j), s(k)]$

et $r \in]0, r_j(\alpha)]$, l'application Φ_0 définie par

$$\Phi_0(H) = g \circ H \circ A|_{W_r}$$

est une contraction stricte de $Y_{r,\alpha}^0$, ne dépendant que de $A|_{W_r}$ et de $g|_{B_r}$.

En particulier, la suite $\Phi_0^n(id_Q|_{W_r}) = g^n \circ f^{-n}|_{W_r}$ converge uniformément.

Preuve. Etant donnés $H \in Y_{r,\alpha}^0$ et $x \in W_r$, on a

$$\begin{aligned} d(H \circ A(x), \Sigma) &\leq d(H \circ A(x), A(x)) + d(A(x), \Sigma) \leq \\ &\leq d_{r,\alpha}^0(H, \text{id}_Q|_{W_r}) \cdot |A(x)_-|^\alpha + |A(x)_-| \leq \\ &\leq R c_r^\alpha |x_-|^\alpha + c_r |x_-| \leq r \end{aligned}$$

par (8)(b), ce qui prouve que $\Phi_o(H) : W_r \longrightarrow Q$ est bien définie et ne dépend que de H , de $A|_{W_r}$ et de $g|_{B_r}$.

Pour tout $H_1 \in Y_{r,\alpha}^1$, on a donc

$$\begin{aligned} d(\Phi_o(H_1)(x), \Phi_o(H)(x)) &\leq K_r d(H_1 \circ A(x), H \circ A(x)) \leq \\ &\leq K_r d_{r,\alpha}(H_1, H) \cdot c_r^\alpha |x_-|^\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$d_{r,\alpha}^0(\Phi_o(H_1), \Phi_o(H)) \leq K_r c_r^\alpha d_{r,\alpha}(H_1, H).$$

Puisqu'on a $K_r c_r^\alpha < 1$ d'après (8) (a), il ne reste donc plus qu'à prouver l'inclusion $\Phi_o(Y_{r,\alpha}^0) \subset Y_{r,\alpha}^0$. Or,

$$\begin{aligned} d(\Phi_o(H)(x), x) &\leq d(\Phi_o(H)(x), \Phi_o(\text{id}_Q|_{W_r})(x)) + d(g \circ A(x), f \circ A(x)) \\ &\leq (K_r d_{r,\alpha}^0(H, \text{id}_Q) + d_{r,\alpha}^0(f, g)) c_r^\alpha |x_-|^\alpha \leq R |x_-|^\alpha \end{aligned}$$

d'après (8)(c). \square

LEMME 4. Quels que soient l'entier $\ell \in [1, k]$, le réel $\alpha \in [s(\ell), s(k)]$,

le réel $r \in]0, r_\ell(\alpha)]$ et $i \in \{1, \dots, \ell\}$, les hypothèses du
théorème du point fixe à tiroir (4.2.1) sont vérifiées par $Y = Y_{r,\alpha}^{i-1}$,

$Y \times Z = Y_{r,\alpha}^i$ et $w = \Phi_i$, où, pour $H \in Y_{r,\alpha}^i$ et $x \in W_r$,

$$\Phi_i(H)(x) = \left(j_{H^0(A(x))}^i g \right) \circ H(A(x)) \circ j_x^i(f^{-1})$$

(le \circ désigne la composition des jets), et l'application $\Phi_i|_{Y_{r,\alpha}^i}$ ne dépend

que de $j_{W_r}^i f^{-1}$ et de $g|_{B_r}$. En particulier, la suite $\Phi_\ell^n(j_{W_r}^\ell \text{id}_Q) = j_{W_r}^\ell (g^n \cdot f^{-n})$ converge uniformément.

Preuve. Pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, soit $Z_{r,\alpha}^j$ l'espace de Banach

$$\{H^j \in C^0(W_r, L_S^j(\mathbb{R}^m \times E, \mathbb{R}^m \times E)) : \|H^j\|_{r,\alpha-j} < \infty\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{r,\alpha-j}$, et soit $Z = Z_{r,\alpha}^i$.

L'identification de $J^i(Q, Q)$ à $J^{i-1}(Q, Q) \times L_S^i(\mathbb{R}^m \times E, \mathbb{R}^m \times E)$ induit une identification de $Y_{r,\alpha}^i$ à $Y \times Z$ donnée par

$$Y_{r,\alpha}^i \ni H \longmapsto (H_{i-1}, H^i - (D^i \text{id}_Q)|_{W_r}) \in Y \times Z$$

où $H_{i-1} = (H^0, \dots, H^{i-1})$ désigne la composée de H avec la projection canonique $J^i(Q, Q) \longrightarrow J^{i-1}(Q, Q)$. Moyennant cette identification, posons, pour chaque $(y, z) \in Y \times Z$,

$$\begin{cases} \Phi_{i-1}(y) = \Phi_i(y, z)_{i-1} \\ \Phi^i(y, z) = \Phi_i(y, z)^i - (D^i \text{id}_Q)|_{W_r}; \end{cases}$$

ces formules ont un sens, car l'argument donné pour $i = 0$ dans la preuve du lemme 3 montre que Φ_i est bien définie sur $Y \times Z$, et n'y dépend que de $j_{W_r}^i(f^{-1})$ et de $g|_{B_r}$; en outre, d'après la formule de Faa-di Bruno (appendice 1), la fonction $\Phi_i(y, z)_{i-1}$ est indépendante de z .

Supposons que Φ_{i-1} soit une application continue de Y dans Y , possédant un point fixe attractif - hypothèse de récurrence vérifiée pour $i = 1$ d'après le lemme 3.

Admettons temporairement que $\Phi^i(Y \times Z) \subset Z$. La formule de Faa-di Bruno montre alors que, pour chaque $H \in Y$,

$$v_H : z \longmapsto \Phi^i(H, z)$$

est une application affine de Z dans lui-même, d'application linéaire associée

$$z \mapsto (x \mapsto Dg(H^0 \circ A(x)) \cdot z(A(x)) \cdot (D(f^{-1})(x))^{\otimes i} \cdot z).$$

La norme de cette application linéaire n'est autre que $\text{Lip}(v_H)$, et l'on a donc

$$\forall H \in Y, \text{Lip}(v_H) \leq K_r c_r^{\alpha-i} L_r^i < 1$$

d'après (7) et (8) (a).

Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe à tiroir à Φ_i , il suffit donc de montrer que Φ^i est une application continue de $Y \times Z$ dans Z . Or, on a le

LEMME 5. - (i) Quels que soient $j \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \dots, m_j \in \mathbb{N}^*$, $\{p_{\ell, q} : 1 \leq \ell \leq j \text{ et } 1 \leq q \leq m_\ell\} \subset \mathbb{N}^*$ vérifiant $\sum_{\ell, q} p_{\ell, q} = i$ et $n \in \{1, \dots, j\}$, on définit une application continue $B : Y_{r, \alpha}^0 \rightarrow L^n(Z_{r, \alpha}^{m_1}, \dots, Z_{r, \alpha}^{m_n}; Z)$ (espace des applications n-linéaires continues de $Z_{r, \alpha}^{m_1} \times \dots \times Z_{r, \alpha}^{m_n}$ dans $Z)$ par

$$B(H^0)(z^{m_1}, \dots, z^{m_n})(x) = D^j g(H^0 \circ A(x)) \cdot \bigotimes_{1 \leq \ell \leq j} H^{m_\ell}(A(x)) \cdot \bigotimes_{1 \leq q \leq m_\ell} D^{p_{\ell, q}}(f^{-1})(x),$$

$$\text{où } H^{m_\ell} = \begin{cases} z^{m_\ell} & \text{pour } 1 \leq \ell \leq n \\ D^{m_\ell} \text{id}_Q & \text{pour } \ell > n. \end{cases}$$

(ii) Quels que soient $j \in \mathbb{N}^*$ et $m_1, \dots, m_j \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\sum m_\ell = i$, on définit une application continue $C : Y_{r, \alpha}^0 \rightarrow Z$ par

$$C(H^0)(x) = (D^j g(H^0 \circ A(x)) - D^j f(A(x))) \cdot \bigotimes_{1 \leq \ell \leq j} D^{m_\ell}(f^{-1})(x).$$

La formule de Faa-di Bruno (Appendice 1), appliquée à Φ^i et à $D^i(f \circ f^{-1})$ (alias $D^i \text{id}$), montre que, pour tout $H \in Y_{r, \alpha}^i$, $\Phi^i(H)$ est la somme de $C(H^0)$ et des $B(H^0)(z^{m_1}, \dots, z^{m_n})$, où $z^m = H^m - (D^m \text{id})|_{W_r}$. Par conséquent, le

lemme 5 implique bien que Φ^i est une application continue de $Y \times Z$ dans Z , d'où le lemme 4 .

Preuve du lemme 5. Point (i) On a, pour tout $x \in W_r$,

$$|B(H_0)(z^{m_1}, \dots, z^{m_n})(x)| < |D^j g|_{r,0} \cdot \prod_{1 \leq \ell \leq n} |z^{m_\ell}|_{r, \alpha - m_\ell} \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq j \\ 1 \leq q \leq m_\ell}} |D^{p_\ell, q} f^{-1}|_{r,0} \cdot |x|_{\sum_{\ell} \overline{\alpha - m_\ell}} ,$$

ce qui prouve que B est à valeurs dans $L^n(Z_{r,\alpha}^{m_1}, \dots, Z_{r,\alpha}^{m_n}; Z)$, car on a évidemment $\overline{\alpha - i} \leq (\overline{\alpha - m_\ell})$ pour $1 \leq \ell \leq n$. La continuité de B vient de ce que $D^j g$ est uniformément continue dans B_r .

Point (ii). Quels que soient u et v dans $Y_{r,\alpha}^0$, on a

$$(9) \quad |(D^j g) \circ u \circ A - (D^j g) \circ v \circ A|_{r, \alpha - i} < \infty ;$$

En effet, ou bien $j < t(k)$, auquel cas $D^j g$ est lipschitzienne, ou bien $j = t(k)$, et alors $i = j = k = t(k) \geq s(k) \geq \alpha$, donc $\overline{\alpha - i} = 0$. En outre, il est clair que $|D^j g \circ u \circ A - D^j g \circ v \circ A|_{r, \alpha - i}$ tend vers 0 quand u tend vers v (parce que $(D^j g)|_{B_r}$ est lipschitzienne dans le premier cas, parce qu'elle est uniformément continue dans le second). Ceci achève de prouver que, si $C(Y_{r,\alpha}^0) \subset Z$, alors C est continue $Y_{r,\alpha}^0 \longrightarrow Z$.

Or, d'après l'hypothèse (i) du théorème, on a

$$|(D^j g) \circ A - (D^j f) \circ A|_{r, s(k) - j} < \infty \text{ et donc, a fortiori,}$$

$$(10) \quad |(D^j g) \circ A - (D^j f) \circ A|_{r, \alpha - i} < \infty ,$$

en vertu des inégalités $i \geq j$ et $\alpha \leq s(k)$. En écrivant

$$(D^j g) \circ H^0 \circ A - (D^j f) \circ A = ((D^j g) \circ H^0 \circ A - ((D^j g) \circ A)) + ((D^j g) \circ A - (D^j f) \circ A) ,$$

on déduit bien de (9) et (10) l'inclusion $C(Y_{r,\alpha}^0) \subset Z$. \square

Il nous reste, si $k = \infty$, à montrer que le domaine sur lequel la suite $(j_{\mathbb{W}}^{\ell} g^n \circ f^n)|_{\mathbb{W}}$ converge uniformément ne diminue pas quand ℓ augmente :

LEMME 6. Pour tout réel $\alpha \in [s(0), s(k)]$ et tout $r \in]0, r_0(\alpha)]$, toutes les suites $(j_{\mathbb{W}_r}^{\ell} (g^n \circ f^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ ($0 \leq \ell \leq k$) convergent uniformément.

Preuve. Il résulte du choix de r que $j_{\mathbb{W}_r}^k (g^n \circ f^{-n})$ est bien définie pour tout n (voir la démonstration des lemmes 3 et 4). Pour tout entier $\ell \leq k$, puisque c_r est < 1 d'après (2), il existe $n_{\ell} \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $A^{n_{\ell}}(\mathbb{W}_r) \subset \mathbb{W}_{r_{\ell}}$, où r_{ℓ} est choisi (par le lemme 4) de manière que $(j_{\mathbb{W}_{r_{\ell}}}^{\ell} (g^n \circ f^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément. On conclut en écrivant, pour tout entier $n \geq n_{\ell}$,

$$j_{\mathbb{W}_r}^{\ell} (g^n \circ f^{-n}) = j_{\mathbb{W}_r}^{\ell} (g^{n_{\ell}} \circ (g^{n-n_{\ell}} \circ f^{n_{\ell}-n}) \circ f^{-n_{\ell}}). \quad \square$$

Il résulte donc du théorème 4 de (1.3) que, pour tout $r \in]0, r_0(\alpha)]$, la limite de $(j_{\mathbb{W}_r}^{\ell} (g^n \circ f^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est le jet d'un germe en \mathbb{W}_r d'application C^k , dont le germe en Σ est tangent à celui de l'identité en tout point de Σ , et appartient donc à $\mathcal{J}_{\Sigma}^k(Q)$ ■

Exercice. Evaluer pour $0 \leq \ell \leq k < \infty$ la différentiabilité de $(j^{\ell} h)|_{\mathbb{W}}$.

Dans ce qui suit, nous désignons par $\delta_{\Sigma}^k(Q)$ l'espace des germes en Σ de champs de vecteurs C^k sur Q tangents à Σ .

Voici un théorème que nous allons utiliser par pure fantaisie pour prouver le Lemme 1 de (4.1) si $G = \mathbb{R}$, mais qui nous sera extrêmement utile par ailleurs :

THEOREME 2. - Sous les hypothèses du théorème 1, soit $\varphi = [f]_{\Sigma}$ - on a donc $\zeta = j_{\mathbb{W}}^{\infty} \varphi$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et tout $z = j_{\mathbb{W}}^{t(k)} \psi$, avec $\psi \in \mathcal{J}_{\Sigma}^{t(k)}(Q)$, si l'on a

$$(11) \quad \begin{cases} (a) & j_{\Sigma}^{s(k)} \Psi = j_{\Sigma}^{s(k)} \text{id}_Q \\ (b) & j_W^k(\varphi^* \Psi) = j_W^k \Psi, \end{cases}$$

alors

$$(12) \quad j_W^k \Psi = j_W^k \text{id}_Q.$$

De même, pour tout $\xi = j_W^{t(k)} \beta$, avec $\beta \in \delta_{\Sigma}^{t(k)}(Q)$, si l'on a

$$(11\text{bis}) \quad \begin{cases} (a) & j_{\Sigma}^{s(k)} \beta = 0 \\ (b) & j_W^k(\varphi^* \beta) = j_W^k \beta, \end{cases}$$

alors

$$(12\text{bis}) \quad j_W^k \beta = 0.$$

COMMENTAIRE.- Un trait subtil de cet énoncé est le suivant : alors que (11)(b) semble dépendre du choix de φ (et non seulement de ζ), (12) montre qu'il n'en est rien.

Démonstration du théorème 2.- Les notations sont celles de la preuve du théorème 1, avec $g = f$.

- Pourquoi (11) implique (12). Soit h un représentant de Ψ . D'après (11)(a), pour tout entier $i \in [0, k]$ et tout $r > 0$ assez petit, $j_{W_r}^i h$ appartient à $Y_{r, s(i)}^i$. D'après (11)(b) et les lemmes 3 et 4, $j_{W_r}^i h$ est donc l'unique point fixe de Φ_i dans $Y_{r, s(i)}^i$, c'est-à-dire $j_{W_r}^i \text{id}_Q$. Pour $k < \infty$, cela termine la démonstration ; si $k = \infty$, on conclut par le même argument que dans le lemme 6.

- Pourquoi (11bis) entraîne (12bis). Soit V un représentant de β . Pour tout $r > 0$ assez petit, tout réel $\alpha > 0$ et tout $x \in W_r$, on a, d'après (11bis)(b),

$$|V(x)| = |Df(A(x)) \cdot V(A(x))| \leq K_r \cdot |V|_{r, \alpha} \cdot c_r^{\alpha} \cdot |x_-|^{\alpha},$$

et donc

$$|V|_{r,\alpha} \leq K_r c_r^\alpha |V|_{r,\alpha} .$$

Si $\alpha = s(0)$, on a $|V|_{r,\alpha} < \infty$ d'après (11bis)(a) et $K_r c_r^\alpha < 1$ pour r assez petit, donc

$$|V|_{r,s(0)} = 0 , \text{ c'est-à-dire } V|_{W_r} = 0 .$$

Etant donné un entier $i \in [1,k]$, supposons donc prouvée l'existence de $r_i > 0$ tel que

$$j_{W_{r_i}}^{i-1} V = 0 .$$

Pour tout $r \in]0, r_i]$ assez petit, tout réel α et tout $x \in W_r$, on a donc, d'après (11bis) (b) et la formule de Faa-di Bruno,

$$D^i V(x) = Df(A(x)) \cdot D^i V(A(x)) \cdot (D(f^{-1})(x))^{\otimes i} ,$$

et donc

$$|D^i V|_{r,\alpha-i} \leq K_r \overline{c_r^{\alpha-i}} L_r^i |D^i V|_{r,\alpha-i} .$$

Si $\alpha = s(i)$, on a $|D^i V|_{r,\alpha-i} < \infty$ d'après (11bis)(a) et $K_r \overline{c_r^{\alpha-i}} L_r^i < 1$

pour r assez petit, donc

$$|D^i V|_{r,s(i)-i} = 0 , \text{ d'où } j_{W_r}^i V = 0 .$$

Cela termine la démonstration (en utilisant l'argument du lemme 6 si $k = \infty$). ■

EXERCICES 1. - Sous les hypothèses du théorème 2, on suppose que $[W]_\Sigma$ est la variété instable de φ en Σ , ce qui signifie qu'il existe $r > 0$ tel que les deux propriétés suivantes soient équivalentes :

(i) $x \in W_r$

(ii) $f^n(x) \in B_r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), \Sigma)^{1/n} < 1$.

Montrer que, si $\gamma : [W]_{\Sigma} \rightarrow [Q]_{\Sigma}$ est un germe de plongement C^1 vérifiant $\varphi \circ \gamma = \gamma \circ \varphi|_W$, alors $\gamma([W]_{\Sigma}) = [W]_{\Sigma}$. Par conséquent, l'ensemble

$$Z = \{j_W^{\infty} h : h \in \mathcal{D}_{\Sigma}^{\infty}(Q) \text{ et } j_W^{\infty}(\varphi^* h) = j_W^{\infty} h\}$$

est un groupe. Si Z_0 désigne le centralisateur de $j_{\Sigma}^{\infty} \varphi$ dans $\{j_{\Sigma}^{\infty} h : h \in \mathcal{D}_{\Sigma}^{\infty}(Q)\}$, montrer que le théorème 2 s'exprime ainsi : le morphisme canonique (restriction) de Z dans Z_0 est injectif.

2.- Prouver que le dit morphisme est un isomorphisme (soient $U \supset \Sigma$ un ouvert de Q et $h : U \rightarrow Q$ un plongement tel que $j_{\Sigma}^{\infty} h \in Z_0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que la suite $(j_W^{\infty}(f^n \circ h \circ f^{-n}))_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément ; la limite est une section holonome S de la projection-source $J^{\infty}(Q, Q) \rightarrow Q$; il est clair que $[S]_{\Sigma}$ appartient à Z et a pour image $j_{\Sigma}^{\infty} h$ par le morphisme canonique $Z \rightarrow Z_0$). Ce résultat rend (4.4.2) beaucoup moins mystérieux.

DANS CE QUI SUIT, ON SUPPOSE QUE $M = I \times \mathbb{T}^n$ (l'appendice 6 (A6.1) est plus général sur ce point, mais plus restrictif par ailleurs).

Désignons par $\tilde{\mathfrak{U}}$ le filtre sur Q engendré par les

$V_r = \{x \in Q : d(x, W) < r\}$ avec $r > 0$, par $[\cdot]_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ les germes suivant $\tilde{\mathfrak{U}}$ et par la notation $\varphi : [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}} \rightarrow [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ les germes $\varphi : [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}} \rightarrow Q$ tels que, quels que soient $U \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et le représentant $f : U \rightarrow Q$ de φ , on ait $f^{-1}(V) \in \tilde{\mathfrak{U}}$

pour tout $V \in \tilde{\mathfrak{U}}$ (et donc en particulier $\varphi(W) \subset W$). Appelons $\mathcal{D}_{\tilde{\mathfrak{U}}}^k(Q)$ le groupe des germes $\varphi : [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}} \rightarrow [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ d'applications C^k ($0 \leq k \leq \infty$) tels qu'il existe un germe $\Psi : [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}} \rightarrow [Q]_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ d'application C^k vérifiant $\varphi \circ \Psi = \Psi \circ \varphi = [\text{id}]_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ (en d'autres termes, pour tout représentant f d'un tel φ , l'image directe et l'image réciproque par f de tout élément de $\tilde{\mathfrak{U}}$ sont dans $\tilde{\mathfrak{U}}$, et il existe un ouvert $U \in \tilde{\mathfrak{U}}$ tel que $f|_U$ soit C^k -difféomorphisme sur $f(U)$).

Nous dirons que deux éléments φ et ψ de $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}^k(Q)$ ($0 \leq k \leq \infty$) sont égaux hors d'un borné lorsque ce sera le cas de deux applications f et g de $U \in \mathfrak{F}$ dans Q vérifiant $[f]_{\mathfrak{F}} = \varphi$ et $[g]_{\mathfrak{F}} = \psi$.

THEOREME 3. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}^{\infty}(Q)$ un germe tel qu'il existe deux ouverts $U \in \mathfrak{F}$ et $U' \in \mathfrak{F}$ et un représentant $f \in \text{Diff}^{\infty}(U, U')$ de φ vérifiant

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, D^k f \text{ et } D^k(f^{-1}) \text{ sont bornées} \\ \exists c \in]0, 1[: \forall x \in U', d(f^{-1}(x), W) \leq c d(x, W). \end{array} \right.$$

Il existe $s: \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}^t(k)$ telle que $s(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{N}^*$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, si $t(k) = \max\{k, s(k)\}$ et si $\psi \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}^{t(k)}$ est égal à φ hors d'un borné et vérifie $j_W^{s(k)} \psi = j_W^{s(k)} \varphi$, alors la suite $(\psi^{+n} \circ \varphi^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens C^k vers un germe $h \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}^k(Q)$, ce qui signifie la chose suivante : quel que soit le représentant g de ψ , il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \in]0, r_0]$, la suite $(j_{V_r}^k g^n \circ f^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie, converge uniformément sur tout compact et ne dépende que de $f^{-1}|_{V_r}$ et $g|_{V_r}$, et l'on a $h = [H_r]_{\mathfrak{F}} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{F}}^k(Q)$, où $H_r = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n \circ f^{-n}|_{V_r}$.

Le germe h vérifie donc

$$(i) \quad j_W^k h = j_W^k \text{id}_Q$$

et

$$(ii) \quad h \circ \varphi = \psi \circ h.$$

Démonstration du théorème 3. C'est celle du théorème 1 ,

la seule différence résidant dans les notations : on désigne ici par x_- la projection orthogonale de $x \in Q$ sur l'orthogonal de F dans E , c'est-à-dire que l'on a $|x_-| = d(x, W)$, et l'on pose $W_r = B_r (= \bar{V}_r) = \{x \in Q : |x_-| \leq r\}$.

Les notations $d_{r, \beta}^0$, $|\cdot|_{r, \beta}$ et Lip_r étant alors définies par les mêmes formules que précédemment, on note $A_-(x) = A(x)_-$,

$$A = f^{-1}, \quad c_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |A|_{r,1}, \quad R = 1 - c_0,$$

$$K_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Lip}_r f = \lim_{r \rightarrow 0} |Df|_{r,0} \quad \text{et} \quad L_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |DA|_{r,0}.$$

Ayant défini s par la même formule qu'antérieurement, on fixe $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et l'on choisit un Ψ vérifiant les hypothèses du théorème 3, un représentant g de Ψ égal à f hors d'un borné, on introduit les notations c_r , K_r et L_r comme précédemment et l'on reprend sans rien y changer la preuve du théorème 1 : du fait que g et f sont égaux hors d'un borné, $K_r - K_0$ et $d_{r,\alpha}^0(f,g)$ ($0 \leq \alpha \leq s(k)$) tendent vers 0 si $r \rightarrow 0$, et les $D^j g|_{W_r}$ sont bornées et lipschitziennes (resp. uniformément continues) pour r assez petit.

Pour voir que $h = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n \circ \varphi^{-n}$ appartient à $M_G^k(Q)$, on montre d'abord que h est un germe $[Q]_{\mathfrak{G}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [Q]_{\mathfrak{G}}$, ce qui est facile ; il ne reste plus alors qu'à remarquer que l'on peut, dans toute la démonstration, échanger les rôles de f et de g , ce qui permet de voir que le germe $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n} \Psi^n : [Q]_{\mathfrak{G}} \rightarrow [Q]_{\mathfrak{G}}$ d'application de classe C^k est égal à h^{-1} . ■

(4.2.3) Conséquences ; preuve du théorème de Sternberg

Commençons par ce qui nous a servi de prétexte (4.1) :

THÉOREME 1. Soit $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, X)$, où $X \ni a$ est une variété de dimension finie et $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} . Si $\tilde{\rho}^1(1)$ est hyperbolique, alors ρ est C^∞ -linéarisable si et seulement si il est formellement isomorphe à $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$.

Démonstration. Si $E = T_a X$, on peut évidemment supposer que $(X, a) = (E, 0)$ et $\tilde{\rho}^\infty = (\tilde{\rho}^1)^\infty$.

Il s'agit alors de prouver les lemmes 1 et 3 de (4.1) . Pour cela, nous allons utiliser les résultats de (4.2.2) avec $Q = E$ et $\Sigma = \{0\}$.

Preuve du lemme 1 de (4.1) . Soient $f = \tilde{\rho}^1(1)$ et g un représentant de $\tilde{\rho}(1)$. Si $W_r^\pm = \{x \in E^\pm : |x| \leq r\}$, le théorème 1 de (4.2.2), appliqué avec $W = E^\pm$, implique l'existence d'un $r > 0$ tel que les suites $(j_{W_r^-}^\infty g^n \circ f^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(j_{W_r^+}^\infty g^{-n} \circ f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément. On déduit donc des théorèmes 4 et 5 de (1.2) qu'il existe $h \in \mathcal{L}_0^\infty(E)$ vérifiant

$$\begin{cases} (j^\infty h)|_{E^+} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (j_{W_r^+}^\infty g^{-n} \circ f^n) \right]_0 \\ (j^\infty h)|_{E^-} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (j_{W_r^-}^\infty g^n \circ f^{-n}) \right]_{E^-} \end{cases},$$

et donc

$$(1) \quad (j^\infty \widetilde{h^{*\rho}(1)})|_{E^+ \cup E^-} = (j^\infty [\tilde{\rho}^1(1)]_0)|_{E^+ \cup E^-},$$

d'où le lemme si $G = \mathbb{Z}$.

Si $G = \mathbb{R}$, soient ξ et ξ' les générateurs infinitésimaux de $[\rho^1]_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ et $h^{*\rho}$ respectivement. On a évidemment $(\widetilde{h^{*\rho}(1)})_{*\xi'} = \xi'$, d'où, d'après (1), en posant $\psi = [\tilde{\rho}^1(1)]_0$,

$$(j^\infty (\psi^{**} \xi' - \xi'))|_{E^+ \cup E^-} = 0.$$

Le théorème 2 de (4.2.2), appliqué avec $\beta = \xi' - \xi$ et, successivement,

$$(\varphi, W) = (\psi, E^-) \text{ et } (\varphi, W) = (\psi^{-1}, E^+), \text{ donne donc}$$

$$(j^\infty \xi')|_{E^+ \cup E^-} = (j^\infty \xi)|_{E^+ \cup E^-},$$

d'où le lemme. \square

Preuve du lemme 3 de (4.1) . D'après le théorème 3 de (4.2.2), appliqué à

$W = E^+$, $\varphi = [\tilde{\rho}^1(1)]_{\tilde{Y}}$ et $\psi = [\mathcal{R}(1)]_{\tilde{Y}}$, il existe $r > 0$ tel que la suite

$(H_n|_{\overline{V}_r})_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens C^∞ . Pour tout $r' > 0$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que

l'on ait $\tilde{\rho}^1(-\ell) \overline{V}_{r'} \subset \overline{V}_r$, d'où l'on déduit que la suite $H_n|_{\overline{V}_{r'}} = \tilde{R}(\ell) \circ (H_{n-\ell}|_{\overline{V}_r}) \circ \tilde{\rho}^1(-\ell)|_{\overline{V}_{r'}}$ converge au sens C^∞ . ■

REMARQUE. La section (A6.5) de l'appendice 6 contient une version "infinitésimale" du théorème 1 de (4.2.2) permettant d'éviter le recours au théorème 2 dans la démonstration précédente. ■

NOTATIONS. Soient M une variété riemannienne compacte, E^+ et E^- deux espaces euclidiens non triviaux, $Q = M \times E^+ \times E^-$ muni de la distance riemannienne produit ; nous noterons

$$W^+ = M \times E^+ \times \{0\} \subset Q, W^- = M \times \{0\} \times E^- \subset Q,$$

$$\Sigma = W^+ \cap W^- = M \times \{0\} \times \{0\} \subset Q,$$

et écrivons chaque $x \in Q$ sous la forme $(x_0, x_+, x_-) \in M \times E^+ \times E^-$. Pour chaque (germe d') application f à valeurs dans Q , nous noterons $f_0(x) = f(x)_0$ et $f_\pm(x) = f(x)_\pm$, et nous désignerons par $\mathcal{A}_\Sigma^k(Q)$ ($0 \leq k \leq \infty$) le groupe des germes $[Q]_\Sigma \ni$ de C^k -difféomorphismes, et identifions parfois Σ à M .

THÉORÈME 2. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_\Sigma^\infty(Q)$ un germe possédant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi([W^+]_\Sigma) = [W^+]_\Sigma \quad \text{et} \quad \varphi([W^-]_\Sigma) = [W^-]_\Sigma \\ \max\left\{\left|\frac{\partial \varphi_+}{\partial x_+}(x)\right| : x \in \Sigma\right\} = c_0^+ < 1 \quad \text{et} \quad \max\left\{\left|\frac{\partial (\varphi^{-1})_-}{\partial x_-}(x)\right| : x \in \Sigma\right\} = c_0^- < 1. \end{array} \right.$$

Alors :

(i) Il existe une application $t : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \ni$ vérifiant $t(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, si $\psi \in \mathcal{A}_\Sigma^{t(k)}(Q)$ vérifie $j_\Sigma^{t(k)} \psi = j_\Sigma^{t(k)} \varphi$, alors ψ soit conjugué à φ dans $\mathcal{A}_\Sigma^k(Q)$. Cela reste vrai si E^+ ou E^- est trivial.

(ii) Il existe une application $s : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \ni$ telle que $s^{-1}(\infty) = \infty$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, si $\psi \in \mathcal{A}_\Sigma^{s(k)}(Q)$ satisfait

$$(j^{s(k)}_\Sigma \psi)|_{W^+} = (j^{s(k)}_\Sigma \varphi)|_{W^+} \quad \text{et} \quad (j^{k}_\Sigma \psi)|_{W^-} = (j^{k}_\Sigma \varphi)|_{W^-}, \quad \text{la propriété suivante}$$

soit vérifiée : quel que soit $h_o \in \mathcal{H}_\Sigma^{s(k)}(Q)$ tel que

$$\begin{cases} (j^{s(k)} h_o^{-1} \circ \varphi \circ h_o)|_{W^+} = (j^{s(k)} \varphi)|_{W^+} \\ (j^k h_o^{-1} \circ \varphi \circ h_o)|_{W^-} = (j^k \varphi)|_{W^-} , \end{cases}$$

tout germe $h : [Q \setminus W^-]_\Sigma \rightarrow Q$ d'application $C^{s(k)}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Psi \circ h = h \circ \varphi|_{Q \setminus W^-} \\ (j^{s(k)} h)|_{W^+} = (j^{s(k)} (h_o|_{Q \setminus W^-}))|_{W^+} \end{cases}$$

se prolonge en un unique germe $\bar{h} : [Q]_\Sigma \rightarrow Q$ d'application continue, qui
appartient à $\mathcal{H}_\Sigma^k(Q)$ et vérifie

$$\begin{cases} \bar{h}^{-1} \circ \Psi \circ \bar{h} = \varphi \\ (j^k \bar{h})|_{W^-} = (j^k h_o)|_{W^-} . \end{cases}$$

Commentaires sur (ii). - D'après l'exercice qui suit la démonstration du théorème 2 de (4.2.2), les germes en Σ des variétés W^+ et W^- sont invariants par h_o ; seul le jet de h_o le long de $W^+ \cup W^-$ intervient donc dans nos hypothèses.

- Pour bien comprendre l'objet de ce résultat, il est conseillé de relire le commentaire géométrique qui termine (4.1).

- Nous verrons dans (4.4) que l'énoncé (ii) permet pour $\Sigma = \{0\}$ et $k = \infty$ de construire toutes les conjugaisons de φ à Ψ dans $\mathcal{H}_\Sigma^\infty(Q)$. D'après (i), ce problème équivaut d'ailleurs à la recherche du centralisateur de φ dans $\mathcal{H}_\Sigma^\infty(Q)$.

- Il est possible de raffiner un peu les choses en prenant pour h un "germe en Σ de germe en $W^+ \setminus W^-$ d'application $C^{s(k)}$ de $Q \setminus W^-$ dans Q " (le filtre qui sert à définir cette notion est le filtre des intersections de voisinages de Σ dans Q et de voisinages de $W^+ \setminus W^-$ dans $Q \setminus W^-$). Dans ce

cas, l'unicité de \bar{h} ne s'obtient pas par simple prolongement continu, mais en utilisant la relation de conjugaison.

Démonstration du théorème 2. Nous allons nous ramener aux théorèmes 1 et 3 de (4.2.2) ; pour pouvoir appliquer ce dernier, il faut étendre φ en un germe de difféomorphisme le long de W^+ (ou de W^-), ce qui va être notre première étape ; dans ce qui suit, nous ferons donc l'inutile (voir l'appendice 6, (A6.2))

Hypothèse supplémentaire. Si $B \in C^\infty(M, GL(E^+ \times E^-))$ est donnée par

$$B(x_0) = \frac{\partial(\varphi_+, \varphi_-)}{\partial(x_+, x_-)}(x_0, 0, 0),$$

il existe $F \in \text{Diff}^\infty(Q)$ possédant les propriétés suivantes :

(a) $F(x) = (\varphi_0(x_0), B(x_0) \cdot (x_+, x_-))$ au voisinage de Σ .

$$(b) \begin{cases} (i) F(W^+) = W^+ \text{ et } F(W^-) = W^- \\ (ii) \begin{cases} \sup\{|x_+|^{-1} \cdot |F(x)_+| : x \in Q \setminus W^-\} < 1 \\ \sup\{|x_-|^{-1} \cdot |F^{-1}(x)_-| : x \in Q \setminus W^+\} < 1 \end{cases} \\ (iii) \text{ Il existe } C \in GL(E^+ \times E^-) \text{ tel que } F(x) = (\varphi_0(x_0), C(x_+, x_-)) \text{ hors d'un compact.} \end{cases}$$

Exercice. Dans nos applications du théorème 2, on aura

$$\forall x \in Q, (\varphi_0(x_0), B(x_0)(x_+, x_-)) = \exp V(x),$$

le champ de vecteurs V vérifiant $(V(x)_+ | x_+) \leq \lambda^+ |x_+|^2$ et $(V(x)_- | x_-) \geq \lambda^- |x_-|^2$ pour tout $x \in Q$, où $(\cdot | \cdot)$ désigne le produit scalaire et $\lambda^+ < 0, \lambda^- > 0$ deux constantes. Montrer qu'en pareil cas notre hypothèse est satisfaite. ■

LEMME 1. Il existe un représentant $f \in \text{Diff}^\infty(Q, Q)$ de φ possédant les propriétés suivantes :

(i) $f(W^+) = W^+$ et $f(W^-) = W^-$.

$$(ii) \begin{cases} \sup \{|x_+|^{-1} |f_+(x)| : x \in Q \setminus W^-\} = c^+ < 1 \\ \sup \{|x_-|^{-1} |f_-^{-1}(x)| : x \in Q \setminus W^+\} = c^- < 1. \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = F(x) \quad \text{hors d'un compact.}$$

Preuve. Soient f' un représentant de φ et $u \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ une fonction telle que

$$u^{-1}(1) =]-\infty, 1] \text{ et } u^{-1}(0) = [2, \infty[.$$

Si l'on munit $C^1(M, M)$ de la topologie fine (qui coïncide avec la topologie compacte ouverte), on montre sans peine que l'application

$$E^+ \times E^- \ni (x_+, x_-) \longmapsto (x_0, \longmapsto f'_0(x_0, x_+, x_-)) \in C^1(M, M)$$

est continue dans un voisinage de $(0, 0)$; l'image réciproque de l'ouvert $\text{Diff}^1(M, M)$ est donc un voisinage ouvert de $(0, 0)$ d'où l'on déduit immédiatement que, pour α assez grand, l'application $\Phi_\alpha : Q \rightarrow$ donnée par

$$\Phi_\alpha(x) = (f'_0(x_0, u(\alpha(|x_+|^2 + |x_-|^2)), (x_+, x_-)), x_+, x_-)$$

est un C^∞ -difféomorphisme.

Un tel α étant fixé, définissons $g_\alpha : M \rightarrow C^\infty(E^+ \times E^-, E^+ \times E^-)$ et $A : M \rightarrow GL(E^+ \times E^-)$ par

$$\begin{cases} g_\alpha(x_0)(x_+, x_-) = (f'_+, f'_-) \circ \Phi_\alpha^{-1}(x_0, x_+, x_-) \\ A(x_0) = D(g_\alpha(x_0)) (0, 0). \end{cases}$$

Pour tout $\beta > 0$, soit $G_{\alpha, \beta} : Q \rightarrow$ l'application donnée par

$$G_{\alpha, \beta} \circ \Phi_\alpha^{-1}(x) = (x_0, (A(x_0) + u(\beta(|x_+|^2 + |x_-|^2))(g_\alpha(x_0) - A(x_0)))(x_+, x_-))$$

Quand $\beta \rightarrow \infty$, on vérifie facilement que $G_{\alpha, \beta} \circ \Phi_\alpha^{-1}$ tend au sens C^1 (pour la topologie fine) vers l'application

$$x \longmapsto (x_0, A(x_0)(x_+, x_-)).$$

Pour β assez grand, $G_{\alpha, \beta}$ appartient donc à $\text{Diff}^\infty(Q, Q)$, et possède en outre

les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [G_{\alpha,\beta}]_{\Sigma} = \varphi, \quad G_{\alpha,\beta}(W^+) = W^+ \text{ et } G_{\alpha,\beta}(W^-) = W^- . \\ \sup \{ |x_+|^{-1} \cdot |G_{\alpha,\beta}(x)_+| : x \in Q \setminus W^- \} < 1 \\ \sup \{ |x_-|^{-1} \cdot |G_{\alpha,\beta}^{-1}(x)_-| : x \in Q \setminus W^+ \} < 1. \end{array} \right.$$

Il suffit donc, α et β étant choisis assez grands, de définir f par

$$f(x) = \begin{cases} G_{\alpha,\beta}(x) & \text{lorsque } |x_+|^2 + |x_-|^2 \text{ est } < \gamma \\ F(x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où γ est un réel > 0 convenable. \square

Preuve du théorème 2(i). Si $W = W^*$, soient s_1 et $s_2 : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \hookrightarrow$ les applications associées respectivement à φ^{-1} par le théorème 1 de (4.2.2) et à $[f]_{\mathfrak{Y}}$ par le théorème 3 de (4.2.2), et soit

$$t = s_1 \circ s_2 .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et tout $\Psi \in \mathcal{D}_{\Sigma}^{t(k)}(Q)$ vérifiant $j_{\Sigma}^{t(k)} \Psi = j_{\Sigma}^{t(k)} \varphi$, le théorème 1 de (4.2.2) implique l'existence d'un $h_1 \in \mathcal{D}_{\Sigma}^{s_2}(Q)$ tel que

$$(j_{W^+}^{s_2(k)} h_1^* \Psi) = (j_{W^+}^{s_2(k)} \varphi) \quad (\text{où l'on a posé } h_1^* \Psi = h_1^{-1} \circ \Psi \circ h_1).$$

Le procédé d'extension décrit dans la preuve du lemme 1, appliqué à $\varphi^{-1} \circ (h_1^* \Psi)$, permet d'obtenir un $e \in \text{Diff}^{s_2(k)}(Q, Q)$ égal à id_Q en dehors d'un compact et vérifiant

$$j_{W^+}^{s_2(k)} e = j_{W^+}^{s_2(k)} \text{id}_Q \quad \text{et} \quad [e]_{\Sigma} = \varphi^{-1} \circ (h_1^* \Psi).$$

D'après le théorème 3 de (4.2.2), il existe $h_2 \in \mathcal{D}_{\Sigma}^k(Q)$ tel que $h_2^*[f \circ e]_{\mathfrak{Y}} = [f]_{\mathfrak{Y}}$, et donc $h^* \Psi = \varphi$, où

$$h = h_1 \circ [h_2]_{\Sigma} \in \mathcal{D}_{\Sigma}^k(Q). \quad \square$$

Exercice. Prouver que $[f]_{\mathfrak{Y}}$ et (donc) $[f \circ e]_{\mathfrak{Y}}$ appartiennent bien à $\mathcal{D}_{\mathfrak{Y}}^{s_2(k)}(Q)$.

Démonstration du théorème 2(ii). Soit $s : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \ni$ l'application associée à $[f]_{\mathfrak{Y}}$ par le théorème 3 de (4.2.2), et soient Ψ , h_0 et h trois germes d'applications $C^{s(k)}$ vérifiant nos hypothèses. Comme $[W^+]_{\Sigma}$ et $[W^-]_{\Sigma}$ sont invariants par h_0 , le germe $h_0^* \Psi$ a les mêmes propriétés que Ψ ; en remplaçant Ψ par $h_0^* \Psi$ et h par $h_0^{-1} \circ h$, nous pouvons donc supposer que

$$(2) \quad h_0 = [id_Q]_{\Sigma}.$$

D'après la preuve du point (i), il existe un $g \in \text{Diff}^{s(k)}(Q, Q)$ représentant Ψ , égal à f en dehors d'un compact et vérifiant

$$(3) \quad j_{W^+}^{s(k)} g = j_{W^+}^{s(k)} f \quad \text{et} \quad j_{W^-}^k g = j_{W^-}^k f.$$

LEMME 2. Il existe un unique germe $h_1 : [Q \setminus W^-]_{W^+} \longrightarrow Q$ d'application $C^{s(k)}$ vérifiant $[h_1]_{\Sigma} = h$ et $g \circ h_1 = h_1 \circ [f]_{W^+}$. De plus, on a $j_{W^+ \setminus \Sigma}^{s(k)} h_1 = j_{W^+ \setminus \Sigma}^{s(k)} id_Q$.

Cela résulte immédiatement du lemme 1(i)-(ii) et de (3). \square

LEMME 3. Il existe un germe $h_2 : [Q]_{W^+} \xrightarrow{\sim} C^{s(k)}$ -difféomorphisme tel que $[h_2]_{\Sigma} = [id_Q]_{\Sigma}$, $j_{W^+}^{s(k)} h_2 = j_{W^+}^{s(k)} id_Q$ et qu'il existe un ouvert borné $B \subset W^+$ pour lequel $[h_2]_{W^+ \setminus B} = [h_1]_{W^+ \setminus B}$.

Preuve. Soit $H_1 : U \setminus W^- \longrightarrow Q$ un représentant de h_1 , où U est un voisinage ouvert de W^+ tel que l'on ait $\{(x_0, x_+, tx_-) : x \in U\} \subset U$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il suffit de prendre $h_2 = [H_2]_{W^+}$, où $H_2 : U \longrightarrow Q$ est défini par

$$H_2(x) = x \text{ pour } |x_+|^2 \leq 1, \quad H_2(x) = H_1(x) \text{ pour } |x_+|^2 \geq 2$$

et, u désignant toujours la même fonction,

$$\begin{cases} H_2(x)_0 = H_1(x_0, x_+, u(3-|x_+|^2)x_-)_0 \\ H_2(x)_{\pm} = x_{\pm} + u(3-|x_+|^2)(H_1(x)_{\pm} - x_{\pm}) \end{cases}$$

pour $1 \leq |x_+|^2 \leq 2$. \square

Exercice. Vérifier que h_2 est bien un germe de difféomorphisme.

LEMME 4. Il existe un germe $\psi_1 \in \mathcal{M}_{\mathfrak{U}}^{s(k)}(Q)$, égal à $\varphi_1 = [f]_{\mathfrak{U}}$ en dehors d'un borné, et tel que $[\psi_1]_{W^+} = h_2^* [g]_{W^+}$.

En effet, le germe $h_2^* [g]_{W^+}$ est égal à $[f]_{W^+}$ en dehors d'un borné. \square

D'après le théorème 3 de (4.2.2), la suite $(\psi_1^n \circ \varphi_1^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens C^k vers un $h' \in \mathcal{M}_{\mathfrak{U}}^k(Q)$ vérifiant (donc) $h' \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ h'$. En outre, il résulte du lemme 1(i)-(ii) et du lemme 4 que h' est égal à $[\text{id}_Q]_{\mathfrak{U}}$ en dehors d'un borné.

LEMME 5. On a $h_2 \circ [h']_{W^+} \Big|_{Q \setminus W^-} = h_1$.

Preuve. La relation $h' \circ \varphi_1 = \psi_1 \circ h'$ implique évidemment que $h' \circ [\varphi_1]_{W^+} = \psi_1 \circ [h']_{W^+}$, c'est-à-dire, d'après le lemme 4,

$$h' \circ [f]_{W^+} = (h_2^* [g]_{W^+}) \circ [h']_{W^+},$$

soit

$$(4) \quad (h_2 \circ [h']_{W^+}) \circ [f]_{W^+} = [g]_{W^+} \circ (h_2 \circ [h']_{W^+}).$$

De plus, puisque $h' = [\text{id}_Q]_{\mathfrak{U}}$ en dehors d'un borné, il résulte du lemme 3 que

$$(5) \quad h_2 \circ [h']_{W^+} = h_1 \text{ en dehors d'un borné.}$$

Or, pour tout borné $B \subset W^+$, le lemme 1(i)-(ii) implique que h_1 est entièrement déterminé par $[h_1]_{W^+ \setminus B}$ et par la relation

$$h_1 \circ [f]_{Q \setminus W^-} \Big|_{W^+} = g \circ h_1,$$

d'où le lemme d'après (4) et (5). \square

Le théorème 2(ii) en résulte avec $\bar{h} = [h_2 \circ [h']_{W^+}]_{\Sigma}$. \blacksquare

Nous allons en déduire le théorème de Sternberg, tel qu'il est énoncé dans (4.1) :

COROLLAIRE. - Soient $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, X)$ et $\rho' \in \text{Act}_{a'}^\infty(G, X')$, où $X \ni a$ et $X' \ni a'$ sont deux variétés de dimension finie et $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} . Si $\tilde{\rho}^1(1)$ est hyperbolique, alors ρ et ρ' sont C^∞ -isomorphes si et seulement si ils sont formellement isomorphes.

Démonstration. D'après le théorème sur l'existence, l'unicité et la différentiabilité des variétés stable et instable d'un germe hyperbolique de difféomorphisme (cf. Irwin ou (4.4.2)), on peut supposer que $\varphi = \tilde{\rho}(1)$ vérifie les hypothèses du théorème 2 (avec $M = \{0\} = \Sigma$). Avec les notations de celui-ci, on peut évidemment se ramener à ce que

$$(X, a) = (X', a') = (Q, 0) \quad \text{et} \quad \hat{\rho}^\infty = \tilde{\rho}'^\infty.$$

Le théorème 2 (i) implique donc que $\tilde{\rho}^{(1)}$ et $\tilde{\rho}'^{(1)}$ sont C^∞ -conjugués dans $\mathcal{D}_0^\infty(Q)$, d'où le corollaire si $G = \mathbb{Z}$. ■

EXERCICE. - Si $G = \mathbb{R}$, prouver le corollaire

1) en se ramenant d'abord ((4.2.2), théorèmes 1 et 2) au cas où les générateurs infinitésimaux ξ et ξ' de ρ et ρ' ont un contact infini en $W^+ \cup W^-$, puis des représentants locaux de ξ et ξ' étant choisis, en définissant le difféomorphisme local φ envoyant l'un sur l'autre comme le seul qui vérifie près de W^+

$$(\varphi - \text{id}_Q)|_{S \times E^-} = 0,$$

où S est une petite sphère de centre 0 dans E^+ (pour voir que φ est C^∞ , utiliser le théorème 2(ii)) ;

2) en établissant la version infinitésimale requise du théorème 2(i) (s'inspirer de (4.1) et utiliser la section (A6.5) de l'appendice 6). ■

REMARQUE. - Une version précisée de ce résultat (et du théorème sur les variétés stables et instables) sera démontrée dans (4.4.2)-(4.4.3), au prix d'un peu d'algèbre.

(4.2.4) Intégrales premières

Les hypothèses et les notations étant celles du début de (4.2.2), posons

$\varphi = [f]_{\Sigma}$ et définissons $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ par

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } L_o < 1 \\ \left[k \left(1 + \frac{\text{Log } L_o}{-\text{Log } c_o} \right) \right] + 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $[.] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la partie entière ; posons $\mu(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(k)$, et soit $\nu : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ la fonction donnée par $\nu(k) = \max\{k, \mu(k)\}$. Commençons par un analogue de (4.2.2), théorème 2 :

THÉORÈME 1. - Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $\alpha : [Q]_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ est un germe de fonction $C^{\nu(k)}$ vérifiant $j_{\Sigma}^{\mu(k)} \alpha = 0$ et $(j^k(\alpha \circ \varphi - \alpha))|_W = 0$, alors $(j^k \alpha)|_W = 0$.

Démonstration.

Etant donné un représentant a de α , soit r un réel > 0 tel que $a|_{B_r}$ soit de classe $C^{\nu(k)}$ et que l'on ait

$$(1) \quad c_r < 1, \quad f^{-1}(W_r) \subset W$$

et

$$(2) \quad j_{W_r}^k (a \circ f^{-1} - a) = 0.$$

Pour tout $x \in W_r$, on a

$$|a(x)| = |a \circ f^{-1}(x)| \leq |a|_{r,1} \cdot c_r \cdot |x_-|,$$

d'où

$$(3) \quad |a|_{r,1} \leq c_r |a|_{r,1}.$$

Comme $a|_{\Sigma} = 0$, on a $|a|_{r,1} < \infty$, et donc $|a|_{r,1} = 0$ d'après (1) et (3), soit $a|_{W_r} = 0$.

Faisons donc l'hypothèse de récurrence que, pour un $\ell \in \mathbb{N} \cap [0, k-1]$ (le cas où $k = 0$ étant réglé),

$$j_{W_r}^\ell a = 0.$$

Pour tout $x \in W_r$, on a donc, d'après (2),

$$D^{\ell+1}a(x) = D^{\ell+1}(a \circ f^{-1}(x)) = D^{\ell+1}a(A(x)). \quad (D(f^{-1})(x))^{\ell+1}.$$

Par conséquent, quels que soient $r' \in]0, r]$ et $\beta \geq \ell + 1$, on a

$$(4) \quad |D^{\ell+1}a|_{r', \beta-\ell-1} \leq c_{r'}^{\beta-\ell-1} L_{r'}^{\ell+1} |D^{\ell+1}a|_{r', \beta-\ell-1}.$$

Pour $\beta \leq \mu(k)$, on a $|D^{\ell+1}a|_{r', \beta-\ell-1} < \infty$, car $j_\Sigma^{\mu(k)} a = 0$.

Par définition de μ , il existe $r' \in]0, r]$ et $\beta \in \mathbb{R} \cap [1, \mu(k)]$ vérifiant

$$c_{r'}^{\beta-\ell-1} L_{r'}^{\ell+1} < 1;$$

on déduit donc de (4) que $|D^{\ell+1}a|_{r', \beta-\ell-1} = 0$, soit $(D^{\ell+1}a)|_{W_{r'}} = 0$.

D'après (1), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $f^{-n}(W_r) \subset W_{r'}$, ce qui prouve que

$$j_{W_r}^{\ell+1} a = j_{W_{r'}}^{\ell+1} (a \circ f^{-n}) = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque. Bien entendu, seuls les jets de φ et de α le long de W interviennent dans cet énoncé.

Voici maintenant l'analogue du théorème 2 de (4.2.3) :

THÉORÈME 2. Sous les hypothèses du théorème 2 de (4.2.3), il existe une application $m : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow$ telle que $m^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la propriété suivante soit vérifiée : quel que soit le germe $\alpha_0 : [0]_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ d'application $C^{m(k)}$ satisfaisant

$$\begin{cases} (j^{m(k)}(\alpha_0 \circ \varphi - \alpha_0))|_{W^+} = 0 \\ (j^k(\alpha_0 \circ \varphi - \alpha_0))|_{W^-} = 0 \end{cases},$$

tout germe $\alpha : [Q \setminus W^-]_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ d'application $C^{m(k)}$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha \circ \varphi|_{Q \setminus W^-} = \alpha \\ (j^{m(k)}(\alpha - (\alpha_0|_{Q \setminus W^-})))|_{W^+} = 0 \end{cases}$$

se prolonge en un unique germe $\bar{\alpha} : [Q]_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ d'application continue, qui est
de classe C^k et vérifie

$$\begin{cases} \bar{\alpha} \circ \varphi = \bar{\alpha} \\ (j^k(\bar{\alpha} - \alpha_0))|_{W^-} = 0. \end{cases}$$

La preuve de ce résultat est donnée dans l'appendice 6, (A6.3). ■

(4.3) Actions formelles des groupes élémentaires.

Dans ce qui suit, G désigne un groupe élémentaire c'est-à-dire un groupe de Lie (analytique) abélien isomorphe à $\mathbb{F} \oplus \mathbb{T}^{\ell} \oplus \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{Z}^m$, où ℓ , k et m sont des entiers naturels et \mathbb{F} un groupe abélien fini.

Nous noterons G_0 le sous-groupe compact maximal de G (isomorphe à $\mathbb{F} \oplus \mathbb{T}^{\ell}$),

$$H = G/G_0$$

et N la composante neutre de H ; comme N est isomorphe à \mathbb{R}^k , elle est canoniquement munie d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension k .

Exercices. 1/ Pour tout sous-groupe fermé S de G , les groupes de Lie S et G/S sont élémentaires.

2/ Un groupe de Lie abélien dont le quotient par sa composante neutre est de type fini (comme \mathbb{Z} -module) est-il élémentaire ?

(4.3.1) Représentations linéaires de G en dimension finie.

On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension finie et, pour tout groupe topologique abélien F, par $L^k(F, E)$ ($k \in \mathbb{N}$) l'espace des applications continues et k-linéaires (sur \mathbb{Z}) de F^k dans E.

PROPOSITION 1. (i) Si F est un espace vectoriel réel, $L^k(F, E)$ est l'espace des applications k-linéaires (sur \mathbb{R}) de F^k dans E.

(ii) Tout élément de $L^k(G, E)$ est de la forme $\text{can}^* A$ pour un unique $A \in L^k(H, E)$, où $\text{can} : G \longrightarrow H$ désigne la surjection canonique et $\text{can}^* A(x_1, \dots, x_k) = A(\text{can } x_1, \dots, \text{can } x_k)$ ■

PROPOSITION 2. Il existe un espace vectoriel réel $G_{\mathbb{R}}$ de dimension finie et un morphisme injectif $j : H \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$ de groupes de Lie, ne dépendant que de G, et possédant la propriété universelle suivante : quels que soient l'espace de Banach B, l'entier k et $A \in L^k(G, B)$, il existe un unique $A_{\mathbb{R}} \in L^k(G_{\mathbb{R}}, B)$ tel que

$$(j \circ \text{can})^* A_{\mathbb{R}} = A.$$

(Si $j' : H \longrightarrow G'_{\mathbb{R}}$ possède les mêmes propriétés, il est clair que

$(j' \circ \text{can})_{\mathbb{R}} \in L(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ est un isomorphisme, et que $j' = (j' \circ \text{can})_{\mathbb{R}} \circ j$.)

Démonstration. Si l'on oublie "ne dépendant que de G", il suffit évidemment de choisir une identification de H à $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^m$ et de prendre pour j l'inclusion de $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^{k+m} .

L'objet "intrinsèque" annoncé est (par exemple) le quotient de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} H$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $\lambda \otimes (\mu x) - (\lambda \mu) \otimes x$ avec $x \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■

Une application de G dans un espace de Banach B est dite polynomiale de degré k lorsqu'elle est de la forme

$$x \longmapsto \sum_{j=0}^k a_j \cdot x^j,$$

où $a_j \in L^j(G, B)$ et $x^j = (x, \dots, x) \in G^j$ pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$.

COROLLAIRE 1. Pour toute application polynomiale $P : G \rightarrow B$, il existe une unique application polynomiale $P_{\mathbb{R}} : G_{\mathbb{R}} \rightarrow B$ telle que $P = P_{\mathbb{R}} \circ j^{\circ}$ can. ■

Nous aurons besoin de quelques rappels d'algèbre élémentaire :

LEMME TRIVIAL. - Soient K un corps commutatif, F un K -espace vectoriel et \mathcal{A} une partie de $\mathcal{M}(F)$ formée d'endomorphismes commutant deux à deux. Quels que soient $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in K$, le sous-espace $F_{\lambda, A} = \text{Ker}(A - \lambda \text{id})$ vérifie
 $B F_{\lambda, A} \subset F_{\lambda, A}$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. ■

PROPOSITION 3 (Lie). - Sous les hypothèses du lemme, si F est de dimension finie et que $K = \mathbb{C}$, alors il existe un vecteur propre commun à tous les $A \in \mathcal{A}$. Un tel vecteur propre existe en fait dans chacun des $F_{\lambda, A} \neq \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. La première assertion est évidente si $\dim F = 1$. Supposons-la vraie pour toutes les dimensions $< \dim F$. Ou bien tous les $A \in \mathcal{A}$ sont des homothéties (cas trivial), ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{A}$ tels que l'on ait $\{0\} \neq F_{\lambda, A} \neq F$; d'après l'hypothèse de récurrence et le lemme, $F_{\lambda, A}$ contient alors un vecteur propre commun à tous les $A \in \mathcal{A}$, d'où la première assertion. La seconde résulte aussitôt de la première et du lemme. ■

Sous les hypothèses de la proposition 3, tout vecteur propre v commun à tous les $A \in \mathcal{A}$ détermine un $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant $Av = \lambda(A)v$ quel que soit $A \in \mathcal{A}$; nous noterons Λ l'ensemble (fini) des tels λ .

COROLLAIRE 2. - Sous les hypothèses précédentes, on a

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda}, \text{ où } F_{\lambda} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A - \lambda(A)\text{id})^m$$

Quel que soit $\lambda \in \Lambda$, on a $A F_{\lambda} \subset F_{\lambda}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et il existe une base $(b_{\lambda}^1, \dots, b_{\lambda}^{d_{\lambda}})$ de F_{λ} où tous les endomorphismes nilpotents $(A - \lambda(A)\text{id})|_{F_{\lambda}}$ de F_{λ} ont une matrice triangulaire. ■

De ce qui précède, on déduit en particulier (Jordan) que tout $A \in \mathfrak{gl}(F)$ s'écrit de manière unique $A = S(A) + N(A)$, où $S(A)$ est diagonalisable, $N(A)$ est nilpotent et $S(A)N(A) = N(A)S(A)$. On dit que $S(A)$ est la partie semi-simple de A . Le corollaire 2 implique évidemment le

COROLLAIRE 3. - Sous les hypothèses de la proposition 3, quels que soient $A, B \in \mathfrak{gl}(F)$ avec $AB = BA$, les endomorphismes $S(A), N(A), S(B), N(B)$ commutent deux à deux. ■

E désignant toujours un espace vectoriel réel de dimension finie, on peut associer à tout $B \in \mathfrak{gl}(E)$ l'endomorphisme B^* de l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$ défini par $B^* \alpha = \alpha \circ B$. Nous dirons que $B \in \mathfrak{gl}(E)$ est semi-simple lorsque B^* est diagonalisable.

COROLLAIRE 4. - Pour tout $B \in \mathfrak{gl}(E)$, il existe un unique $S(B) \in \mathfrak{gl}(E)$, semi-simple, commutant à B , et tel que $N(B) = B - S(B)$ soit nilpotent. Quel que soit $C \in \mathfrak{gl}(E)$ avec $BC = CB$, les endomorphismes $S(B), N(B), S(C), N(C)$ commutent deux à deux.

Démonstration. Si la partie semi-simple $S(B^*)$ de B^* n'était pas de la forme $S(B)^*$ pour un $S(B) \in \mathfrak{gl}(E)$, on aurait $S(B^*) \neq \overline{S(B^*)}$, où $A \mapsto \overline{A}$ est l'involution de $\mathfrak{gl}(L(E, \mathbb{C}))$ définie par $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, $v \in L(E, \mathbb{C})$. Comme $\overline{S(B^*)}$ est semi-simple, commute à B^* , et est tel que $B^* - \overline{S(B^*)} = \overline{B^*} - \overline{S(B^*)} = \overline{N(B^*)}$ soit nilpotent, cela contredirait l'unicité de la décomposition de Jordan de B^* . L'existence de $S(B)$ ainsi prouvée, les autres assertions sont évidentes. ■

Nous dirons que $S(B)$ est la partie semi-simple de $B \in \mathfrak{gl}(E)$.

COROLLAIRE 5.- Soit \mathcal{B} une partie de $\mathfrak{gl}(E)$, formée d'endomorphismes commutant deux à deux. Si F désigne l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$ et si $\mathcal{Q} = \{B^* : B \in \mathcal{B}\}$, associons à \mathcal{Q} l'ensemble fini Λ et les sous-espaces

$F_\lambda \subset F$ du corollaire 2, posons $J = \{ \{ \lambda, \bar{\lambda} \} : \lambda \in \Lambda \}$, et, pour chaque $j \in J$,

$$L_j = \{ v \in E : \forall \lambda \in \Lambda \setminus j, \forall \alpha \in F_\lambda, \alpha(v) = 0 \}.$$

Alors $E = \bigoplus_{j \in J} L_j$. Pour tout $j = \{ \lambda, \bar{\lambda} \} \in J$ et tout $B \in \mathcal{B}$, on a $BL_j \subset L_j$,
et le spectre (du complexifié) de $B|_{L_j}$ est $\{ \lambda(B), \overline{\lambda(B)} \}$. ■

Rappelons le classique

LEMME 2. Soit \mathcal{N} l'ensemble des endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel réel \mathcal{E} . Alors

$$A \longmapsto \text{Log}(\text{id} + A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} A^{n+1}$$

est une bijection de \mathcal{N} sur lui-même, d'inverse

$$A \longmapsto \exp A - \text{id} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \quad . \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 6. - Sous les hypothèses du corollaire 4, pour tout automorphisme B de E , il existe un unique $v(B) \in \mathfrak{gl}(E)$, nilpotent, tel que
 $B = S(B) \exp v(B)$, et $v(B)$ commute à B . ■

Nous dirons que $v(B)$ est la partie nilpotente de B .

Appelons action linéaire de G sur E une action analytique ρ^1 de la forme $\rho^1(g, x) = \tilde{\rho}^1(g)x$, où $\tilde{\rho}^1 : G \rightarrow GL(E)$ est une représentation linéaire de G dans E , c'est-à-dire un morphisme de groupes de Lie. Désignons par $g \mapsto g_{\mathbf{R}}$ le morphisme canonique $G \rightarrow G_{\mathbf{R}}$.

PROPOSITION 4. - Pour tout action linéaire ρ^1 de G sur E , si $\tilde{\sigma}^1(g)$ désigne
pour chaque $g \in G$ la partie semi-simple de $\rho^1(g)$, alors

(a) $\sigma^1 : (g, v) \mapsto \tilde{\sigma}^1(g)v$ est une action linéaire de G sur E , appelée partie
semi-simple de ρ^1 .

(b) Il existe un unique morphisme \tilde{v}^1 de l'algèbre de Lie abélienne $G_{\mathbf{R}}$ dans

$g\ell(E)$ tel que, pour chaque $g \in G$, la partie nilpotente de $\tilde{\rho}^1(g)$ soit $\tilde{v}^1(g_{\mathbf{R}})$, et l'on a

$$V(g, g') \in G \times G_{\mathbf{R}}, \quad \sigma^1(g) v^1(g') = v^1(g') \sigma^1(g).$$

En outre, $\tilde{v}^1(g)$ est nilpotent pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$. Nous dirons que \tilde{v}^1 est la partie nilpotente de ρ^1 .

Démonstration. Appliquons le corollaire 5 à $\mathcal{B} = \tilde{\rho}^1(G)$: les notations étant celles du corollaire 5, la définition même de Λ implique que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \circ \tilde{\rho}^1 : G \rightarrow \mathfrak{L}^*$ est un morphisme de groupes de Lie. Quels que soient $\lambda \in \Lambda$ et $g \in G$, la restriction $\tilde{\sigma}^1(g)^*|_{F_\lambda}$ n'est autre que l'homothétie de F_λ de rapport $\lambda(\tilde{\rho}^1(g))$, d'où (a).

Soit u^1 l'action linéaire de G sur E définie par $\tilde{u}^1(g) = \tilde{\rho}^1(g)\tilde{\sigma}^1(-g)$. Pour prouver (b), il suffit d'appliquer à u^1 le point (ii) du

LEMME 3. - Soit u une action linéaire de G sur un espace vectoriel réel \mathcal{E} de dimension finie, telle que $\tilde{u}(g) \cdot \text{id}$ soit nilpotent pour tout $g \in G$.

Alors

(i) u est algébrique, c'est-à-dire est une application polynomiale de $G \times \mathcal{E}$ dans \mathcal{E} .

(ii) Il existe un unique morphisme v de l'algèbre de Lie abélienne $G_{\mathbf{R}}$ dans $g\ell(\mathcal{E})$ telle que $\tilde{u}(g) = \exp v(g_{\mathbf{R}})$ pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$, et $v(g)$ est nilpotent pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$.

Preuve. Quel que soit $g \in G$, il résulte du lemme 2 que

$$\mathbb{Z} \ni t \longmapsto \tilde{u}(tg) = \exp(t \text{Log } \tilde{u}(g))$$

est polynomiale, et ne peut être bornée que si $u(g) = \text{id}$, d'où

$$u(G_0) = \{\text{id}\}.$$

$H = G/G_0$ étant identifié à son image canonique dans $G_{\mathbf{R}}$, soit (e_1, \dots, e_r)

une base de $G_{\mathbf{R}}$ formée d'éléments de H . Si $v : H \rightarrow GL(\mathcal{E})$ désigne le morphisme continu déduit de \tilde{v} par passage au quotient, le lemme 2 entraîne que le morphisme d'algèbres de Lie $v : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{E})$ donné par $v(e_j) = \text{Log } v(e_j)$, $1 \leq j \leq r$, est seul à vérifier (ii). L'application $G_{\mathbf{R}} \ni \sum t_j e_j \mapsto \exp v(\sum t_j e_j) = \exp \sum t_j v(e_j) \in \mathfrak{gl}(E)$ est évidemment polynomiale, d'où (i). ■

Nous allons maintenant traduire ce qui précède de manière à faciliter la recherche de formes normales dans (4.3.2) :

PROPOSITION 5. - Sous les hypothèses de la proposition 4, il existe
 - un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et, pour chaque $i \in I_n = \{1, \dots, n\}$, un entier $d_i > 0$ et un morphisme de groupes de Lie $a_i : G \rightarrow \mathbb{C}^*$;

- pour chaque $i \in I_n$ et chaque $j \in J_i = \{1, \dots, d_i\}$, un $x_i^j \in L(E, \mathbb{C})$, des applications linéaires $\epsilon_{i,\ell}^j : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ et des applications polynomiales $e_{i,\ell}^j : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq \ell < j$, possédant les propriétés suivantes :

(i) On a $x_i^j(E) = \mathbf{R}$ pour $a_i(G) \subset \mathbf{R}$, et $x_i^j(E) = \mathbb{C}$ sinon.

(ii) Pour $1 \leq i < j \leq n$, on a $a_i \neq a_j \neq \overline{a_i}$.

(iii) $(x_i^j)_{i \in I_n, j \in J_i}$ est un système de coordonnées linéaires complexes sur E , c'est-à-dire que $((\text{Re } x_i^j)_{i \in I_n, j \in J_i}, (\text{Im } x_i^j)_{i \in I_n, j \in J_i}, a_i(G) \not\subset \mathbf{R})$ est un système de coordonnées linéaires (réelles) sur E .

(iv) Quels que soient $i \in I_n$, $j \in J_i$, $g \in G$ et $\gamma \in G_{\mathbf{R}}$, on a

$$\begin{cases} x_i^j \circ \tilde{\sigma}^1(g) = a_i(g) x_i^j \\ x_i^j \circ \tilde{v}^1(\gamma) = \sum_{1 \leq \ell < j} \epsilon_{i,\ell}^j(\gamma) x_i^\ell \\ x_i^j \circ \exp \tilde{v}^1(\gamma) = \sum_{1 \leq \ell < j} e_{i,\ell}^j(\gamma) x_i^\ell + x_i^j \end{cases}$$

Démonstration. Appliquons de nouveau le corollaire 5 à $\mathcal{E} = \tilde{\rho}^1(G)$. Les nota-

tions étant celles du corollaire 5 , on obtient a_1, \dots, a_n en choisissant un seul élément dans $\{\lambda \circ \tilde{\rho}^1, \lambda \circ \tilde{\rho}^1\}$ pour chaque $\{\lambda, \bar{\lambda}\} \in J$. Si l'on applique le corollaire 2 à $F = L(E, \mathbb{C})$ et $\mathcal{Q} = \{B^* : B \in \mathcal{Q}\}$, on obtient une base

$(b_\lambda^\mu)_{\lambda \in \Lambda}^{1 \leq \mu \leq d_\lambda}$ de l'espace vectoriel complexe F , satisfaisant à la conclusion du corollaire 2 , et dont on voit facilement qu'elle peut être choisie de manière que $\{b_\lambda^\mu\} = \{\overline{b_\lambda^\mu}\}$. Pour chaque $i \in I_n$, si λ est l'unique élément de Λ tel que $a_i = \lambda \circ \tilde{\rho}^1$, il suffit alors de prendre $x_i^j = b_\lambda^j$ pour $1 \leq j \leq d_\lambda$ $1 \leq j \leq d_\lambda = d_i$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que ce choix donne bien le résultat annoncé (par exemple, le caractère polynomial des $e_{i,\ell}^j$ résulte du lemme 3(i)). ■

Un système de coordonnées linéaires complexes (x_i^j) sur E vérifiant les conditions (i)-(iv) de la proposition 5 est dit adapté à ρ^1 .

Sous les hypothèses de la proposition 5 , il est clair que l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ d'homomorphismes continus de G dans \mathbb{C}^* est entièrement déterminé par ρ^1 - le seul choix intervenant dans la définition des a_i étant celui entre a_i et \bar{a}_i . Par conséquent, les $\text{Log}|a_i| \in L(G, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$, sont entièrement déterminés par ρ^1 , et il en va donc de même des formes linéaires

$$c_i = (\text{Log}|a_i|)_{\mathbb{R}} \in G'_{\mathbb{R}} = L(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

qui leur sont canoniquement associées d'après le corollaire 1 . Nous dirons que ρ^1 est faiblement hyperbolique si et seulement si

$$\forall I \subset I_n = \{1, \dots, n\} , \quad 0 \in \text{conv}\{c_i : i \in I\} \iff 0 \in \overset{o}{\text{conv}\{c_i : i \in I\}} ,$$

où conv désigne l'enveloppe convexe. De même, ρ^1 est hyperbolique lorsque

$$\forall I \subset I_n , \quad 0 \in \text{aff}\{c_i : i \in I\} \iff \text{aff}\{c_i : i \in I\} = G'_{\mathbb{R}} .$$

où aff désigne l'enveloppe affine.

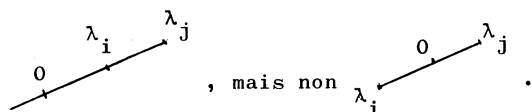
EXEMPLES. - Si G est compact, ρ^1 est toujours hyperbolique

- Si $G = \mathbf{R}$ ou \mathbf{Z} , l'hyperbolicité faible et l'hyperbolicité coïncident avec la notion habituelle (hyperbolicité de $\tilde{\rho}^1(1)$).

- Si $G = \mathbf{C}$ et que ρ^1 est holomorphe (E étant donc complexe), alors $G_{\mathbf{R}}$ s'identifie à G et les c_i aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(t) \big|_{t=0}$, via l'isomorphisme réel

$$\mathbf{C} \ni \lambda \longmapsto (t \longmapsto \operatorname{Re}(\lambda t)) \in \mathbf{C}'.$$

L'hyperbolicité faible de ρ^1 signifie donc que, dans \mathbf{C} , on a peut-être



L'hyperbolicité exclut les deux situations.

(Une caractérisation de l'hyperbolicité faible en termes de topologie des orbites de ρ^1 sera donnée dans (4.4.1)).

EXERCICE (facile). Pour que ρ^1 soit hyperbolique (resp. faiblement hyperbolique), il faut et il suffit que, quel que soit $I \subset I_n$ avec $\# I \leq \dim G_{\mathbf{R}}$, les c_i avec $i \in I$ soient linéairement indépendants (resp. on ait $\operatorname{conv}\{c_i : i \in I\} \not\ni 0$).

On dit que ρ^1 est dans le domaine de Poincaré lorsque $0 \notin \operatorname{conv}\{c_1, \dots, c_n\}$, dans le domaine de Siegel sinon. Si ρ^1 est dans le domaine de Poincaré, elle est donc faiblement hyperbolique. La réciproque est vraie pour $n \leq \dim G_{\mathbf{R}}$.

Toujours sous les hypothèses de la proposition 5, il existe une unique décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ possédant la propriété suivante : quels que soient $g \in G$ et $i \in I_n$, on a $\rho^1(g) E_i = E_i$, et le spectre (du complexifié) de $\rho^1(g)|_{E_i}$ est $\{a_i(g), \overline{a_i(g)}\}$: les E_i ne sont autres que les L_j du corollaire 5, avec $\mathcal{B} = \rho^1(G)$. En termes de systèmes (x_i^j) de coordonnées

adaptées à ρ^1 , on a $E_i = \bigcap_{k \neq i} (x_k^j)^{-1}(0)$.

Nous dirons que ρ^1 est fortement hyperbolique si et seulement si elle est hyperbolique et satisfait en outre

$$\dim E_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } a_i(G) \subset \mathbb{R} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque ρ^1 est fortement hyperbolique, elle est donc semi-simple (c'est-à-dire égale à sa partie semi-simple, définie dans la proposition 4).

(4.3.2) Représentations formelles de G.

Dans ce qui suit, $X \ni b$ désigne une variété de dimension finie et $E = T_b X$.

Le but de ce paragraphe est de montrer que, pour tout $s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, chaque élément $\check{\rho}^s$ de $\check{\text{Act}}_b^s(G, X)$ est isomorphe (cf. (3.1.4)) à un élément particulièrement simple de $\check{\text{Act}}_0^s(G, E)$, appelé forme normale de $\check{\rho}^s$.

Ce but est atteint dans le théorème 4. Bien que l'on puisse y parvenir "à la main", il est plus satisfaisant et en tous cas plus instructif de déduire ce résultat de quelques théorèmes sur la structure des groupes

$$\check{\mathcal{D}}^s = \check{\mathcal{D}}_0^s(E) .$$

Soit

$$\check{\mathcal{E}}^s = \check{\mathcal{E}}_0^s(E)$$

l'algèbre réelle des jets en $0 \in E$ d'applications C^s de E dans \mathbb{R} , le produit γ étant défini par

$$(j_0^s \gamma) \cdot (j_0^s \gamma') = j_0^s(\gamma \gamma') .$$

Nous désignerons par $\check{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}^s$ la complexifiée de $\check{\mathcal{E}}^s$, c'est-à-dire l'algèbre complexe des jets en $0 \in E$ d'applications C^s de E dans \mathbb{C} .

Nous utiliserons systématiquement la représentation de $\check{\mathcal{D}}^s$ dans $\check{\mathcal{E}}^s$ définie par

$$\check{\mathcal{D}}^s \ni \check{\varphi}^s \longmapsto \check{\varphi}_*^s, \quad \text{où } \check{\varphi}_*^s \check{\varphi}^s = \check{\varphi}^s \circ (\check{\varphi}^s)^{-1} \text{ pour tout } \check{\varphi}^s \in \check{\mathcal{E}}^s.$$

Si f est une application polynomiale de degré $\leq s$ définie sur E , nous noterons souvent f au lieu de $j_0^s f$.

THÉORÈME 1. L'application $\check{\varphi}^s \longmapsto \check{\varphi}_*^s$ est un isomorphisme de $\check{\mathcal{D}}^s$ sur le groupe $\text{Aut}(\check{\mathcal{E}}^s)$ des automorphismes de la \mathbb{R} -algèbre $\check{\mathcal{E}}^s$ pour chaque entier $s \geq 1$.

Démonstration. Etant donné $A \in \text{Aut}(\check{\mathcal{E}}^s)$, soit φ l'unique jet d'ordre s en 0 d'application de E dans E défini par

$$(1) \quad \forall z \in j_0^s(L(E, \mathbb{R})), \quad z \circ \varphi = Az.$$

Du fait que $A\mathcal{M}_s^\ell = \mathcal{M}_s^\ell$ pour tout entier $\ell > 0$, l'automorphisme A induit un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_s/\mathcal{M}_s^2$. En d'autres termes, φ appartient à $\check{\mathcal{D}}^s$. L'algèbre réelle $\check{\mathcal{E}}^s$ étant engendrée par $j_0^s(L(E, \mathbb{R}))$, on déduit de (1) que $A = (\varphi^{-1})_*$. ■

Pour chaque $s \in \mathbb{N}^*$ et chaque $\varphi \in \check{\mathcal{D}}^s$, on peut étendre φ_* en un unique automorphisme de la \mathbb{C} -algèbre $\check{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}^s$, encore noté φ_* . Nous dirons que φ est semi-simple si $\check{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}^s$ admet une base (comme \mathbb{C} -espace vectoriel) formée de vecteurs propres de φ_* . Nous noterons φ_ℓ la projection canonique de φ sur $\check{\mathcal{D}}^\ell$ pour $\ell < s$, et $\varphi^1 = j_0^s(\text{can } \varphi_1)$, où $\text{can} : \check{\mathcal{D}}^1 \rightarrow \text{GL}(E)$ désigne l'isomorphisme canonique.

THÉORÈME 2. - Quels que soient l'entier $s > 0$ et l'élément semi-simple φ de $\check{\mathcal{D}}^s$, tous les φ_ℓ et tous les φ_ℓ^1 avec $1 \leq \ell \leq s$ sont semi-simples, et φ est conjugué à φ^1 dans $\check{\mathcal{D}}^s$. En outre, si q est le plus grand entier $\leq s$ tel que $\varphi_q = \varphi_q^1$, l'élément h de $\check{\mathcal{D}}^s$ qui conjugue φ à φ^1 peut être choisi de façon que $h_q = j_0^q \text{id}_E$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}_{\ell, \mathbb{C}}$ l'idéal maximal de $\check{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}^\ell$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$. Du fait que $\mathcal{M}_{s, \mathbb{C}}$ et $\mathcal{M}_{s, \mathbb{C}}^2$ sont φ_* -invariants, il existe évidemment des vecteurs propres

$v_1, \dots, v_n \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s}$ de $\varphi_{\#}$ dont les projections forment une base de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M}_{s, \mathbb{C}} / \mathcal{M}_{s, \mathbb{C}}^2$. Comme $\varphi_{\#}$ est obtenu par complexification d'un automorphisme de \mathcal{E}^s , on peut supposer que $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Si l'on note $v_k^1 = j_o^s(\text{can } v_k)$ pour $1 \leq k \leq s$, où $\text{can} : \mathcal{M}_{s, \mathbb{C}} \longrightarrow L(E, \mathbb{C}) \approx \mathcal{M}_{1, \mathbb{C}}$ désigne la projection canonique, on a donc $\{\bar{v}_1^1, \dots, \bar{v}_n^1\} = \{v_1^1, \dots, v_n^1\}$, et l'on définit un élément h de \mathcal{B}^s par

$$h_{\#} v_k^1 = v_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

En outre, notre hypothèse sur φ permet de supposer que $(v_k^1)_q = (v_k)_q, 1 \leq k \leq n$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont définis par $\varphi_{\#} v_k = \lambda_k v_k, 1 \leq k \leq n$, on a évidemment $h_q = j_o^q \text{id}$ et $\varphi_{\#}^1 v_k^1 = \lambda_k v_k^1, 1 \leq k \leq n$, et donc

$$(\varphi \circ h)_{\#} v_k^1 = \varphi_{\#} v_k = \lambda_k h_{\#} v_k^1 = h_{\#}(\lambda_k v_k^1) = h_{\#} \varphi_{\#}^1 v_k^1, \quad 1 \leq k \leq n,$$

soit $\varphi \circ h = h \circ \varphi^1$, d'où les deux dernières assertions. Les autres sont évidentes. ■

Nous dirons que $\varphi \in \mathcal{B}^{\infty}$ est semi-simple lorsque sa projection canonique $\varphi_s \in \mathcal{B}^s$ sera semi-simple pour tout $s \in \mathbb{N}^*$. Nous noterons comme précédemment $\varphi^1 = j_o^{\infty}(\text{can } \varphi_1)$

COROLLAIRE 1. Pour tout élément semi-simple φ de \mathcal{B}^{∞} , il existe $h \in \mathcal{B}^{\infty}$ vérifiant $h_{\#} \varphi = \varphi^1$, et possédant en outre la propriété suivante : pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi_{\ell} = \varphi_{\ell}^1$, on a $h_{\ell} = j_o^{\ell} \text{id}_E$.

Démonstration. Remarquons que tout $f \in \mathcal{B}^s, s \in \mathbb{N}^*$, est de la forme g_s avec $g \in \mathcal{B}^{\infty}$ (par exemple $g = j_o^{\infty} P$, où P est une application polynomiale de E dans E vérifiant $j_o^s P = f$). D'après le théorème 2, on peut donc construire de proche en proche un intervalle I d'origine 0 dans \mathbb{N} , une suite $(q_k)_{k \in I}$ strictement croissante à valeurs dans \mathbb{N}^* et deux suites $(g^k)_{k \in I}$ et $(h^k)_{k \in I}$ à valeurs dans \mathcal{B}^{∞} possédant les propriétés suivantes :

(i) On a $q_0 = 1, g^0 = h^0 = j_o^{\infty} \text{id}_E$, et, pour tout $k \in I, h^k = g^k \circ \dots \circ g^0$.

- (ii) Quel que soit $k \in I$, on a $(h_{**}^k \varphi)_{q_k} = \varphi_{q_k}^1$ et $g_{q_{k-1}}^k = j_0^{q_k-1} \text{id}_E$.
- (iii) Pour tout $k \in I$, ou bien $h_{**}^k \varphi = \varphi^1$, auquel cas $k+1 \notin I$, ou bien $k+1 \in I$ et $q_{k+1} = \min\{q \in \mathbb{N}^*: (h_{**}^k \varphi)_q \neq \varphi_q^1\}$.

Si I est fini, alors $h = h^{\sup I}$ convient. Sinon, $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{q_k}^k$

est bien défini et possède les propriétés requises. ■

Pour $1 \leq s \leq \infty$, soit δ^s l'algèbre de Lie des jets d'ordre s en 0 de champs de vecteurs C^s sur E nuls en 0 - son crochet étant hérité du crochet de Lie des champs de vecteurs. Pour tout $\xi = j_0^s \xi \in \delta^s$, on définit $\exp \xi \in \mathcal{G}^s$ par $\exp \xi = j_0^s(\exp \xi)$. La version infinitésimale de la représentation $\varphi \mapsto \varphi_{**}$ de \mathcal{G}^s dans \mathcal{E}^s est la représentation $\xi \mapsto \xi_{**}$ de l'algèbre de Lie δ^s dans \mathcal{E}^s donnée par $\xi_{**} \gamma = \frac{d}{dt} ((\exp t\xi)_{**} \gamma)|_{t=0}$; de même, au niveau de l'algèbre de Lie δ^s de \mathcal{G}^s , le théorème 1 s'exprime ainsi (même démonstration) : l'application $\xi \mapsto \xi_{**}$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie δ^s sur l'algèbre de Lie $\text{aut}(\mathcal{E}^s)$ des dérivations de l'algèbre \mathcal{E}^s . Nous dirons que $\xi \in \delta^s$ est nilpotent lorsque, pour tout entier $\ell \leq s$, si $\xi_\ell \in \delta^\ell$ désigne la projection canonique de ξ , alors $\xi_{\ell**}$ est un endomorphisme nilpotent de \mathcal{E}^s (il revient au même -exercice- de dire que l'endomorphisme $\eta \mapsto [\xi_\ell, \eta]$ de δ^s est nilpotent).

THÉORÈME 3. Pour tout $\varphi \in \mathcal{G}^s$, $1 \leq s \leq \infty$, il existe un unique couple $(\sigma, \nu) \in \mathcal{G}^s \times \delta^s$ tel que σ soit semi-simple, ν nilpotent, et que $\varphi = \sigma \circ \exp \nu = (\exp \nu) \circ \sigma$.

Démonstration. Supposons d'abord $s < \infty$. D'après le théorème de Jordan, pour tout $A \in \text{GL}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^s)$, il existe un unique couple $(S, N) \in \text{GL}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^s) \times \mathfrak{gl}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^s)$ tel que S soit diagonalisable, N nilpotent, et que $A = S \circ \exp N = (\exp N) \circ S$. On dit que S est la partie semi-simple de A et N sa partie nilpotente.

LEMME 1. - Tout automorphisme A de la \mathbb{C} -algèbre $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s}$ a pour partie semi-
simple un automorphisme de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s}$.

Preuve. Avec les notations de la démonstration du théorème 1, l'invariance
des $\mathcal{M}_{s, \mathbb{C}}^{\ell}$, $1 < \ell < s$, par A entraîne le fait suivant : il existe des
valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A et des vecteurs

$$(2) \quad v_j \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A - \lambda_j \text{id})^m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dont les images canoniques dans $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s} / \mathcal{M}_{s, \mathbb{C}}^2$ forment une base du \mathbb{C} -espace vecto-
riel $\mathcal{M}_{s, \mathbb{C}} / \mathcal{M}_{s, \mathbb{C}}^2$. En particulier, les $v_1^{p_1} \dots v_n^{p_n}$ avec $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ engen-
drent l'espace vectoriel complexe $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s}$, et le lemme 1 résulte donc du

LEMME 2. - Soient $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{C}$ et $w_1, \dots, w_p \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s}$, vérifiant

$$w_j \in F(\mu_j) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A - \mu_j \text{id})^m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Alors $w_1 \dots w_p \in F(\mu_1 \dots \mu_p)$.

Preuve. Par récurrence sur $(d_1(w_1), \dots, d_p(w_p))$, où

$$d_j(z) = \min\{m \in \mathbb{N} : (A - \mu_j \text{id})^m z = 0\} \quad \text{pour } z \in F(\mu_j).$$

Si l'un des $d_j(w_j)$ (et donc le w_j correspondant) est nul, le lemme est trivial.

Sinon, supposons, que, quels que soient les $z_j \in F(\mu_j)$, $1 \leq j \leq n$, vérifiant
 $d_j(z_j) \leq d_j(w_j)$ pour tout j et $d_j(z_j) < d_j(w_j)$ pour au moins un j , on ait
 $z_1 \dots z_p \in F(\mu_1 \dots \mu_p)$. Du fait que $Aw_j = \mu_j w_j + z_j$ avec $(A - \mu_j \text{id})^{d_j(w_j)-1} z_j = 0$
pour $1 \leq j \leq n$, on a alors bien $A(w_1 \dots w_p) = (\lambda_1 \dots \lambda_p) w_1 \dots w_p + z$ avec
 $z \in F(\mu_1 \dots \mu_p)$. \square

D'après le lemme 1, la partie semi-simple S de $\varphi_{\mathbb{C}}$ est un auto-
morphisme de la \mathbb{C} -algèbre $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\vee s}$. L'unicité de la décomposition de Jordan impose
en fait que S provienne par complexification d'un automorphisme B de $\mathcal{E}^{\vee s}$:

si tel n'était pas le cas, on aurait $\varphi_* = \bar{S} \circ \exp \bar{N} = (\exp \bar{N}) \circ \bar{S}$ et $\bar{S} \neq S$, où N désigne la partie nilpotente de φ_* et $\bar{N}_\gamma = \overline{N_\gamma}$, $\bar{S}_\gamma = \overline{S_\gamma}$ pour $\gamma \in \mathcal{E}^S$. D'après le théorème 1, il existe donc un unique $\sigma \in \mathcal{D}^S$, semi-simple, tel que $B = \sigma_*$. Pour voir que $\sigma^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ \sigma^{-1} \in \mathcal{D}^S$ est de la forme $\exp v$, où $v \in \mathcal{D}^S$ est nilpotent, il suffit d'appliquer à $\exp N$

$$= (\varphi \circ \sigma^{-1})_* \quad \text{le}$$

LEMME 3. Soit N un endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel \mathcal{E}^S . Si $\exp N$ est un automorphisme de l'algèbre réelle \mathcal{E}^S , alors N est une dérivation de \mathcal{E}^S , et donc de la forme v_* pour un unique $v \in \mathcal{D}^S$. \square

Enfin, lorsque $s = \infty$, on obtient pour chaque entier ℓ une décomposition unique $\varphi_\ell = \sigma_\ell \circ \exp v_\ell = (\exp v_\ell) \circ \sigma_\ell$ avec $\sigma_\ell \in \mathcal{D}^\ell$ semi-simple et $v_\ell \in \mathcal{D}^\ell$ nilpotent. Pour $1 \leq m < \ell$, $(\sigma_\ell)_m \in \mathcal{D}^m$ est semi-simple et $(v_\ell)_m \in \mathcal{D}^m$ nilpotent; l'unicité de la décomposition entraîne donc que $(\sigma_\ell)_m = \sigma_m$ et $(v_\ell)_m = v_m$. Par conséquent, $\sigma = \varprojlim_{\ell \rightarrow \infty} \sigma_\ell$ et $v = \varprojlim_{\ell \rightarrow \infty} v_\ell$ fournissent la décomposition cherchée. \blacksquare

Sous les hypothèses du théorème 3, nous dirons que σ est la partie semi-simple de φ et v sa partie nilpotente. Si l'on remplace dans ce qui précède \mathcal{D}^S par $\mathcal{D}_b^S(X)$, \mathcal{E}^S par $\mathcal{E}_b^S(X)$ et \mathcal{D}^S par l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_b^S(X)$ des jets d'ordre s en b de champs de vecteurs sur X nuls en b , on obtient évidemment (en utilisant l'existence d'un $f \in \mathcal{D}_{b,0}^\infty(X,E)$ tangent à l'identité) le

COROLLAIRE 2. Tout élément φ de $\mathcal{D}_b^S(X)$, $1 \leq s \leq \infty$, admet une unique décomposition $\varphi = \sigma \circ \exp v = (\exp v) \circ \sigma$, où $\sigma \in \mathcal{D}_b^S(X)$ est semi-simple et $v \in \mathcal{D}_b^S(X)$ nilpotent. La partie semi-simple σ de φ est linéarisable : il existe $h \in \mathcal{D}_{b,0}^S(X,E)$ tel que $h_* \sigma = \sigma^1$, où $\sigma^1 = j_0^S(\text{can } \sigma_1)$, en désignant par $\text{can} : \mathcal{D}_b^1(X) \rightarrow \text{GL}(E)$ l'identification canonique. \blacksquare

Notons $g \mapsto g_{\mathbb{R}}$ le morphisme canonique (4.3.1) du groupe abélien élémentaire G dans $G_{\mathbb{R}}$. Pour chaque $\check{\rho} \in \text{Act}_b^s(G, X)$, $1 \leq s \leq \infty$, soit $\check{\rho}^1 \in \text{Act}_0^s(G, E)$ la partie linéaire de $\check{\rho}$, définie (avec les notations du corollaire 2) par $\check{\rho}^1(g) = \check{\rho}(g)^1$. Le corollaire 2 est un cas particulier (celui où $G = \mathbb{Z}$) du

THÉORÈME 4. - Pour tout $\check{\rho} \in \text{Act}_b^s(G, X)$, $1 \leq s \leq \infty$, si $\check{\sigma}(g)$ désigne pour chaque $g \in G$ la partie semi-simple de $\check{\rho}(g)$, alors

(i) $\check{\sigma} : g \mapsto \check{\sigma}(g)$ appartient à $\text{Act}_b^s(G, X)$: c'est la partie semi-simple de $\check{\rho}$;

(ii) l'action formelle $\check{\sigma}$ est linéarisable : il existe $\check{h} \in \mathcal{D}_{b,0}^s(X, E)$ tel que $\check{h}_* \check{\sigma} = \check{\rho}^1$;

(iii) Il existe un unique morphisme $\check{\nu}$ de l'algèbre de Lie abélienne $G_{\mathbb{R}}$ dans $\check{\rho}^s$, appelé partie nilpotente de $\check{\rho}$ tel que, pour chaque $g \in G$, la partie nilpotente de $\check{\nu}$ soit $\check{\nu}(g_{\mathbb{R}})$, et l'on a

$$(3) \check{\nu}(g, g') \in G \times G_{\mathbb{R}}, \quad \check{\sigma}(g) \circ \exp \check{\nu}(g') = (\exp \check{\nu}(g')) \circ \check{\sigma}(g).$$

Démonstration. Pour obtenir (i)-(iii), il suffit pour $s < \infty$ d'appliquer à la représentation linéaire $g \mapsto \check{\rho}(g)_*$ de G dans $\check{\rho}_b^s(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le raisonnement qui a permis de prouver la Proposition 4 de (4.3.1). La preuve de (ii) est celle du théorème 2. Si $s = \infty$, le passage à la limite projective ne pose comme précédemment aucun problème. ■

NOTATIONS. Sous l'hypothèse du théorème 4, soit ρ^1 l'action de G sur E définie (avec les notations du corollaire 2) par

$$\rho^1(g, v) = (\text{can } \check{\rho}(g)_1) \cdot v,$$

et soit $(x_i^j)_{i \in I_n}^{j \in J_i}$ un système de coordonnées \mathbb{R} -linéaires complexes sur E

adapté à ρ^1 (cf. (4.3.1), Proposition 5), avec $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{1, \dots, n\}$,

$J_i = \{1, \dots, d_i\}$, $d_i \in \mathbb{N}^*$, pour $1 \leq i \leq n$. Désignons par $a_1, \dots, a_n : G \rightarrow \mathbb{C}^*$

les homomorphismes continus tels que

$$x_i^j \circ \hat{\sigma}^1(g) = a_i(g) x_i^j, \quad i \in I_n, \quad g \in G, \quad j \in J_i$$

par π_i^s , $i \in I_n$, l'ensemble des $(p, q) = ((p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n)) \in (\mathbb{N}^n)^2$ vérifiant

$$\begin{cases} q_j = 0 \text{ pour } a_j(G) \subset \mathbb{R}, \\ s \geq |p| + |q| > 1 \text{ et } a_i = a^p \bar{a}^q, \end{cases}$$

où $|p| = p_1 + \dots + p_n$ et

$$(a^p \bar{a}^q)(g) = a_1(g)^{p_1} \dots a_n(g)^{p_n} \overline{a_1(g)}^{q_1} \dots \overline{a_n(g)}^{q_n}.$$

Si $\mu : (\mathbb{N}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{d_n})^2 \longrightarrow (\mathbb{N}^n)^2$ est donnée par

$$\mu((p_j)_{j \in I_n}, (q_j)_{j \in I_n}) = (|p_j|_{j \in I_n}, |q_j|_{j \in I_n}),$$

on pose

$$p_i^s = \mu^{-1}(\pi_i^s) \quad (i \in I_n).$$

Etant donnés $(p, q) = ((p_j)_{j \in I_n}, (q_j)_{j \in I_n}) \in (\mathbb{N}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{d_n})^2$ et

$z = (z_j)_{j \in I_n} \in \mathbb{C}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{d_n}$, on note

$$|(p, q)| = \sum_{j \in I_n} (|p_j| + |q_j|) \text{ et } z^p \bar{z}^q = \prod_{j \in I_n} z_j^{p_j} \bar{z}_j^{q_j}.$$

Nous allons enfin voir le lien de ce qui précède les formes normales ; afin de simplifier les notations, pour toute application polynomiale $f : E \longrightarrow E$ de degré $\leq s$, nous écrirons f au lieu de $j_0^s f$, et nous pourrions ainsi (par passage de la convention précédente à la limite projective) écrire les jets d'ordre infini comme séries formelles si $s = \infty$.

COROLLAIRE 3. - Sous les hypothèses et avec les conventions précédentes, on a

$$(4) \quad x_i^j \circ \check{h}_* \check{\sigma}(g) = x_i^j \circ \check{\sigma}^1(g) = a_i(g) x_i^j, \quad i \in I_n, \quad j \in J_i, \quad g \in G.$$

Pour chaque $i \in I_n$ et chaque $j \in J_i$, il existe des applications linéaires

$\varepsilon_{i,\ell}^j : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{C} \ (1 \leq \ell < j)$ et $\varphi_{i,p,q}^j : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{C} \ ((p,q) \in P_i^S)$, telles que

$$(5) \quad x_i^j \circ h_{\ast}^{\vee} \vee(v) = \sum_{\ell} \varepsilon_{i,\ell}^j(v) x_i^{\ell} + \sum_{(p,q)} \varphi_{i,p,q}^j(v) x^p \overline{x}^q, \quad v \in G_{\mathbf{R}};$$

il existe donc des applications polynomiales $e_{i,\ell}^j : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ et

$f_{i,p,q}^j : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{C} \ (1 \leq \ell < j, (p,q) \in P_i^S)$ telles que

$$(6) \quad x_i^j \circ (h_{\ast}^{\vee} \exp \vee)(g) = x_i^j + \sum_{\ell} e_{i,\ell}^j(g) x_i^{\ell} + \sum_{(p,q)} f_{i,p,q}^j(g) x^p \overline{x}^q, \quad g \in G_{\mathbf{R}}.$$

Démonstration. (4) vient de ce que \vee^1 est la partie semi-simple de \vee^1 . (5) résulte de (3) et (4). Enfin, (6) résulte de (3), (4) et de (4.3.1), lemme 3. ■

NOTATIONS. Toujours sous les mêmes hypothèses, soit Π_0 l'ensemble des $(p,q) \in (\mathbb{N}^n)^2$ vérifiant $(p,q) \neq 0$, $a^p \overline{a}^q = 1$ et $q_j = 0$ pour a_j réel, et posons $P_i = P_i^{\infty}$ pour $1 \leq i \leq n$.

COROLLAIRE 4. - Si Π_0 est vide (ce qui est le cas quand ρ^1 est dans le domaine de Poincaré), alors P_1, \dots, P_n sont finis, et, pour
 $s \geq \max\{|(p,q)| : (p,q) \in P_1 \cup \dots \cup P_n\}$, l'action formelle \vee_{ρ} est de la forme
 $\vee_{\rho} = \widetilde{\rho}^S$ pour un $\rho \in \text{Act}_b^{\infty}(G, X)$. De manière plus précise, étant donné
 $h \in \mathcal{G}_{b,0}^{\infty}(X, E)$ tel que $j_b^S h = \vee$, on peut définir ρ par

$$h_{\ast}^{\vee} \rho(g) = [\sigma(g) \circ \exp \vee(g_{\mathbf{R}})]_0 = [\exp \vee(g_{\mathbf{R}}) \circ \sigma(g)]_0, \quad g \in G,$$

où, quels que soient $i \in I_n$ et $j \in J_i$,

$$(4\text{bis}) \quad x_i^j \circ \widetilde{\sigma}(g) = a_i^j(g) x_i^j, \quad g \in G$$

$$(5\text{bis}) \quad x_i^j \circ \widetilde{\vee}(v) = \sum_{\ell} \varepsilon_{i,\ell}^j(v) x_i^{\ell} + \sum_{(p,q)} \varphi_{i,p,q}^j(v) x^p \overline{x}^q, \quad v \in G_{\mathbf{R}}.$$

L'application $(g,x) \mapsto (\exp \widetilde{\vee})(g)(x)$ étant une action algébrique de $G_{\mathbf{R}}$ sur
 E d'après (6), $h_{\ast}^{\vee} \rho$ est donc le germe en $G \times \{0\}$ d'une action analytique de
 G sur E .

Démonstration. Seule la première affirmation n'est pas tout à fait évidente.

Soit sur \mathbb{N}^s ($s \in \mathbb{N}^*$) l'ordre défini par $p \leq p'$ si et seulement si $p_j \leq p'_j$ pour tout j .

LEMME 4. Quel que soit $A \subset \mathbb{N}^s$, l'ensemble $\min A$ des éléments de A minimaux pour cet ordre est fini, et tout élément de A est comparable à au moins un élément de $\min A$.

Preuve. Pour $s = 1$, c'est bien connu. Supposons donc le résultat établi pour un $s-1 \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie non vide de \mathbb{N}^s . Si $q_s = \min \{p_s : p \in A\}$ et $A_s = \{p \in A : p_s = q_s\}$ (où $p \mapsto p_j$ désigne la projection de \mathbb{N}^s sur son j -ième facteur), alors, d'après l'hypothèse de récurrence, $B_s = \min A_s$ est fini et minore tous les éléments de A_s . On a évidemment $B_s \subset \min A$, et l'ensemble des éléments de A qui ne sont minorés par aucun élément de B_s est

$$\bigcap_{q \in B_s} \bigcup_{1 \leq j < s} \{p \in A : p_j < q_j\}.$$

Quels que soient $q \in B_s$ et $j < s$, les $p_j < q_j$ forment un ensemble fini, et, pour chacun d'entre eux,

$$C_{p_j} = \{p' \in A : p'_j = p_j\}$$

a par hypothèse un ensemble minimal fini, qui minore tous ses éléments. Il est donc clair que $\min A$ est l'ensemble minimal de l'ensemble fini

$$B_s \cup \bigcup_{q \in B_s} \bigcup_{1 \leq j < s} \bigcup_{p_j < q_j} \min C_{p_j}. \quad \square$$

Le corollaire 6 se déduit alors du très facile

LEMME 5. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tout élément de π_i est la somme d'un élément de l'ensemble fini $\min \pi_i$ et d'un élément de $\pi_0 \cup \{(0,0)\}$. Tout élément de π_0 est la somme d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble fini $\min \pi_0$. ■

EXERCICE. L'ensemble $\text{Hom}(G, \text{GL}(E))$ des représentations linéaires continues de G dans E étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, prouver les faits suivants :

1/ L'ensemble des $\tilde{\rho}^1 \in \text{Hom}(G, \text{GL}(E))$ tels que l'action $\rho^1 : (g, v) \mapsto \tilde{\rho}^1(g) \cdot v$ soit faiblement hyperbolique (resp. hyperbolique, fortement hyperbolique) est ouvert, dense, et a un complémentaire de mesure nulle.

2/ L'ensemble des $\tilde{\rho}^1 \in \text{Hom}(G, \text{GL}(E))$ tels que, pour tout $s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, tout $\rho^s \in \text{Act}_b^s(G, X)$ de partie linéaire ρ^1 soit formellement linéarisable (resp. semi-simple) est dense, résiduel, et a un complémentaire de mesure nulle ; son intersection avec le domaine de Poincaré est ouverte.

3/ Pour tout $\tilde{\rho}^1 \in \text{Hom}(G, \text{GL}(E))$ tel que ρ^1 soit dans le domaine de Poincaré, les ensembles P_1, \dots, P_n associés à ρ^1 peuvent être déterminés à partir des a_i en un nombre fini de pas, uniformément majoré dans un voisinage de $\tilde{\rho}^1$.

(4.4) Germes d'actions différentiables de groupes élémentaires.

HYPOTHESES - Avec les notations de (4.3), on se donne $s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $\rho \in \text{Act}_b^s(G, X)$. A la partie linéaire ρ^1 de ρ , on associe E_1, \dots, E_n , a_1, \dots, a_n et c_1, \dots, c_n comme à la fin de (4.3.1).

(4.4.0) Caractérisation.

Choisissons une identification de G à $G_0 \oplus \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{R}^m$, et soient e_1, \dots, e_{m+k} les éléments de G tels que (e_1, \dots, e_k) et $(e_{k+1}, \dots, e_{k+m})$ soient les bases canoniques de \mathbb{Z}^k et de \mathbb{R}^m respectivement.

Soient $U \subset X$ un ouvert, $h, h' : U \rightarrow X$ deux plongements, ξ, ξ' deux champs de vecteurs sur U et R une action d'un groupe de Lie K sur U . Nous dirons que ξ et ξ' (resp. h et h') commutent si $[\xi, \xi'] = 0$ (resp. si $h(h'(x)) = h'(h(x))$ dès que cela a un sens) ; nous dirons que ξ est invariant par R (resp. h) si $\tilde{R}(g)^* \xi = \xi$, $g \in K$ (resp. si $h^*(x) = \xi(x)$, $x \in U \cap h^{-1}(U)$) ; enfin, h sera dit invariant par R si $R(g, h(x)) = h(R(g, x))$, $g \in K$, $x \in U \cap h^{-1}(U)$.

Nous allons généraliser la proposition 5 de (3.1.3) :

THÉORÈME. - Pour tout $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$, $r \geq 1$, il existe

- (i) un ouvert $U \ni a$ de X ;
- (ii) une $C^{r+1, r}$ -action R_0 de G_0 sur U , fixant a ;
- (iii) des C^r -plongements $H_1, \dots, H_k : (U, a) \longrightarrow (X, a)$ invariants par
 R_0 et commutant deux à deux ;
- (iv) des C^r -champs de vecteurs $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+m}$ sur U , nuls en a ,
invariants par R_0 et par H_1, \dots, H_k et commutant deux à deux

tels que l'on ait $\rho|_{G_0 \times X} = [R_0]_{G_0 \times \{a\}}$, que $\tilde{\rho}(e_j) = [H_j]_a$ pour $1 \leq j \leq k$, et
que $\rho|_{\mathbb{R}e_j \times X}$ ait pour générateur infinitésimal $[\xi_j]_a$ pour $k < j \leq k+m$.

Réciproquement, la donnée de $U, R_0, H_1, \dots, H_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+m}$ véri-
fiant (i)-(iv) détermine de la sorte un unique $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$.

Démonstration. Soit R un représentant de $\rho \in \text{Act}_a^r(G, X)$, tel que

$$(1) \quad R(g+g', x) = R(g, R(g', x)) \text{ dès que cela a un sens.}$$

D'après la proposition 5 de (3.1.3), le domaine de définition de R contient des $G_0 \times U$, où U est un voisinage ouvert arbitrairement petit de a dans X , tels que $R_0 = R|_{G_0 \times U}$ soit une $C^{r+1, r}$ -action. Quitte à restreindre U , on peut supposer que les $H_j = \tilde{R}(e_j)|_U$ sont bien définis et sont des plongements pour $1 \leq j \leq k$ et que les $\xi_j = (\frac{d}{dt} \tilde{R}(te_j)|_{t=0})|_U$ sont bien définis pour $k < j \leq k+m$. D'après (1), les H_i (resp. ξ_j) commutent deux à deux et sont invariants par R_0 (resp. par R_0 et les H_i) : par exemple, on a $R(te_i, x) = (\exp t\xi_i)(x)$ pour $k < i \leq k+m$, $x \in U$ et $t \in \mathbb{R}$ assez petit, d'après (1) et (3.1.3), proposition 5. Pour chaque $x \in U$, étant donnés $i, j \in \mathbb{N}$ avec $k < i \leq j \leq k+m$, on déduit donc de (1) l'existence d'un ouvert convexe $C \ni 0$ de \mathbb{R}^2 tel que $(\exp(-t\xi_i) \circ \exp u\xi_j \circ \exp t\xi_i)(x) = (\exp u\xi_j)(x)$ pour tout

$(t, u) \in C$. En différentiant cette relation par rapport à u en $u = 0$, on obtient $(\exp t \xi_i)^* \xi_j(x) = \xi_j(x)$ pour tout $(t, 0) \in C$; en dérivant cette identité par rapport à t en $t = 0$, on aboutit bien à $[\xi_i, \xi_j](x) = 0$. Les autres relations de commutation se prouvent de même.

Inversement, étant donnés U , les H_i et les ξ_j vérifiant (i)-(iv), posons, lorsque cela a un sens,

$$S(g_0 + \sum_{j=1}^{k+m} t_j e_j, x) = R_0(g_0) \circ H^{t_1} \circ \dots \circ H^{t_k} \circ (\exp t_{k+1} \xi_{k+1}) \circ (\exp t_{k+m} \xi_{k+m})(x).$$

Nous allons prouver qu'il existe un voisinage ouvert V de $G \times \{a\}$ dans $G \times X$ tel que (1) soit vérifiée dès qu'elle a un sens par $R = S|_V$.

Pour $g = (g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{Z}^k$, soit U_g le domaine de définition (ouvert et R_0 -invariant d'après (iii)) de $H^{g_1} \circ \dots \circ H^{g_k}$. D'après la proposition 3 de (3.1.3), pour tout $g \in \mathbb{Z}^k$, tout réel $A > 0$ et tout voisinage R_0 -invariant W ouvert de a dans V_g , il existe un unique voisinage ouvert R_0 -invariant $\varphi_{g,A}(W)$ de a dans W tel que $\exp_x t_j \xi_j$ soit bien défini et appartienne à W pour $|t_j| < A$, $1 \leq j \leq m$ et $x \in \varphi_{g,A}(W)$, et maximal parmi les voisinages possédant ces propriétés.

Posons $V_{g,A} = \varphi_{g,A}^k(V_g)$; il est clair que

$$V = \bigcup_{\substack{g \in \mathbb{Z}^k \\ A > 0}} G_0 \times \{g\} \times]-A, A[{}^m \times V_{g,A}$$

est un voisinage ouvert de $G \times \{a\}$ dans $G \times X$, et que $R = S|_V$ vérifie (1): la seule chose à prouver est que les $\exp t_j \xi_j$ avec $|t_j| < A$ commutent deux à deux dans chaque $V_{g,A}$, et y sont invariants par R_0 et par les H_i , ce qui s'obtient facilement par intégration à partir de (iv). ■

(4.4.1) Variétés fortement invariantes.

Une variété fortement invariante, ou v.f.i. , de ρ (resp. de ρ^1) est un germe W en b de sous-variété de X (resp. un sous-espace vectoriel W_0 de E) tel qu'il existe $g \in G$ pour lequel W (resp. W_0) soit la variété instable de $\tilde{\rho}(g)$ (resp. $\tilde{\rho}^1(g)$).

PROPOSITION 1. Soit $W_0 \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E . Si ρ^1 est faiblement hyperbolique, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) W_0 est une v.f.i. de ρ^1 .
- (ii) Il existe un demi-espace ouvert D de G'_R tel que $0 \in \partial D$ et $W_0 = \bigoplus_{c_i \in D} E_i$.
- (iii) Il existe un demi-espace fermé D' de G'_R tel que $0 \in \partial D'$ et $W_0 = \bigoplus_{c_i \in D'} E_i$.
- (iv) Il existe $g \in G$ tel que $\tilde{\rho}^1(g)$ soit hyperbolique, de variété instable W_0 .

Démonstration. Pour chaque $g \in G$, soit $g_R \in G_R$ l'image de la projection canonique de g sur H . Dire que W_0 est la variété instable de $\tilde{\rho}^1(g)$ équivaut à affirmer que

$$W_0 = \bigoplus_{\langle c_i, g_R \rangle > 0} E_i .$$

Par conséquent, (i) entraîne (ii) - que ρ^1 soit ou non faiblement hyperbolique

Si (ii) est vérifiée, il existe un hyperplan h de ∂D contenant 0 et ne rencontrant pas $\text{conv}(\{c_1, \dots, c_n\} \cap \partial D)$, d'après l'hyperbolicité faible. En faisant éventuellement tourner un peu ∂D autour de h , on obtient donc un demi-espace D' satisfaisant (iii).

Sous l'hypothèse (iii), le même argument permet de supposer que $\partial D'$ ne contient aucun des c_i . De plus, on prouve facilement le

LEMME 1. Les hyperplans $\{ c \in G'_{\mathbb{R}} : \langle c, g_{\mathbb{R}} \rangle = 0 \}$ forment, lorsque g varie dans G , un sous-ensemble dense de la grassmannienne des hyperplans de $G'_{\mathbb{R}}$. \square

Ce lemme permet de supposer en outre que D' est de la forme $\{ c \in G'_{\mathbb{R}} : \langle c, g_{\mathbb{R}} \rangle \geq 0 \}$ pour un $g \in G$. Comme $\partial D'$ ne contient aucun des c_i , $\tilde{\rho}^1(g)$ est alors hyperbolique, de variété instable W_0 .

Enfin, (i) résulte évidemment de (iv). \square

REMARQUES.-Dire que ρ^1 est dans le domaine de Poincaré équivaut à affirmer que E est une v.f.i. de ρ^1 .

- Si G est compact, l'unique v.f.i. de ρ^1 est $\{0\}$. Si $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , les v.f.i. de ρ^1 sont ses sous-espaces stable et instable.

- L'implication de (ii) par (i) entraîne en particulier que les v.f.i. de ρ^1 sont en nombre fini, et effectivement ρ^1 -invariantes. Une explication satisfaisante de ce phénomène sera donnée dans la proposition 3 ci-dessous.

En attendant, voici un

EXERCICE. - Soit ρ^1 une action linéaire de G sur E . Une orbite $\tilde{\rho}^1(G)v$ de ρ^1 , $v \in E$, est dite impropre lorsque $g \mapsto \rho^1(g,v)$ n'est pas une application propre de G dans E . Montrer que ρ^1 est faiblement hyperbolique si et seulement si ses orbites impropres sont exactement celles qui sont contenues dans ses v.f.i., ou encore si et seulement si ses orbites impropres sont exactement celles qui sont adhérentes à l'origine (cette remarque est à la base du contre-exemple 6.3).

Disons qu'un germe $W = [\tilde{W}]_{\mathbf{b}}$ de sous-variété de X est invariant par ρ lorsque, pour un représentant R de ρ , $[R^{-1}(\tilde{W})]_{G \times \{\mathbf{b}\}} = [G \times \tilde{W}]_{G \times \{\mathbf{b}\}}$. Je laisse le lecteur établir la

PROPOSITION 2. - Pour que W soit invariant par ρ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $g \in G$, on a $\tilde{\rho}(g)(W) = W$.

(ii) Pour tout $v \in \mathfrak{g}$, où \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de la composante neutre de G , $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(\exp tv) \big|_{t=0}$ est tangent à W .

Il revient au même, avec les notations de (4.4.0), de dire que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(iii) W est invariant par $\rho|_{G_0 \times X}$.

(iv) $\tilde{\rho}(e_j)(W) = W$ pour $0 \leq j \leq k$.

(v) $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(te_j) \big|_{t=0}$ est tangent à W pour $k < j \leq k+m$. ■

PROPOSITION 3. - Toute v.f.i. W de ρ est invariante par ρ , et son espace tangent $T_b W$ est une v.f.i. de ρ^1 . Inversement, toute v.f.i. W_0 de ρ^1 est l'espace tangent d'un unique germe W en b de sous-variété de X invariant par ρ , et W est une v.f.i. de ρ .

Démonstration. Si W est la variété instable de $\tilde{\rho}(g)$ pour un $g \in G$, alors $T_b W$ est le sous-espace instable de $\tilde{\rho}^1(g)$.

Si W_0 est le sous-espace instable de $\tilde{\rho}^1(g)$ pour un $g \in G$, la variété instable de $\tilde{\rho}(g)$ est le seul germe en b de sous-variété invariant par $\tilde{\rho}(g)$ et tangent à W_0 . Pour tout $g' \in G$, on a évidemment

$$\begin{cases} T_b(\tilde{\rho}(g')(W)) = \tilde{\rho}^1(g')W_0 = W_0 \\ \tilde{\rho}(g)(\tilde{\rho}(g')(W)) = \tilde{\rho}(g')(\tilde{\rho}(g)(W)) = \tilde{\rho}(g')(W) \end{cases}$$

et donc $\rho(g')(W) = W$. Pour achever la démonstration, il suffit d'appliquer à $\xi = \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(\exp tv) \big|_{t=0}$, $v \in \mathfrak{g}$, et à $h = \tilde{\rho}(g)$ le

LEMME. - Soit W la variété instable d'un germe $h : [X]_b \ni$ de C^S -difféomorphisme, et soit ξ un germe en b de C^S -champ de vecteurs sur X , tel que $h^* \xi = \xi$. Si $\xi(b) = 0$, alors ξ est tangent à W .

Preuve. - Soient $U \ni b$ un ouvert de X , $H: U \rightarrow X$ un plongement représentant h , et (φ^t) le flot d'un représentant de ξ . Quitte à restreindre U , on peut supposer que la variété instable W^- de H en b vérifie $W = [W^-]_b$, et que $H(\varphi^t(x)) = \varphi^t(H(x))$ dès que les deux membres ont un sens. D'après la proposition 3 de (3.1.3), il existe un ouvert $V \ni b$ de X tel que pour $|t| < 1$, $\varphi^t|_V$ soit bien défini et $\varphi^t(V) \subset U$; on peut en outre supposer $H^{-1}(V \cap W^-) \subset V \cap W^-$. Par conséquent, pour tout $x \in V \cap W^-$, on a

$$(1) \quad H^{-1}(\varphi^t(x)) = \varphi^t(H^{-1}(x)), \quad |t| < 1.$$

Par définition de la variété instable, $H^{-n}(x)$ tend exponentiellement vers b quand n tend vers l'infini; par conséquent, d'après (1), pour $|t| < 1$, $H^{-n}(\varphi^t(x)) = \varphi^t(H^{-n}(x))$ est défini pour tout entier $n \geq 0$, et tend exponentiellement vers $\varphi^t(b)$ quand n tend vers l'infini. Comme $\varphi^t(b) = b$, on a donc $\varphi^t(x) \in W^-$ pour $|t| < 1$. Il en résulte bien que $\frac{d}{dt} \varphi^t(x)|_{t=0} \in T_x W^-$. ■

(4.4.2 a) Mise sous forme normale de ρ le long de ses v.f.i. : cas d'une linéarisation.

Nous dirons que deux germes σ et σ' d'actions C^k de G sur une variété Y fixant un point c de Y ont un contact d'ordre k en une sous-variété W de Y passant par c lorsqu'on aura $j_W^k \tilde{\sigma}(g) = j_W^k \tilde{\sigma}'(g)$ pour tout g dans G et $j_W^k \frac{d}{dt} (\tilde{\sigma}(tg) \circ \tilde{\sigma}'(-tg)) \Big|_{t=0} = 0$ si g appartient à la composante neutre de G .

THEOREME. - Il existe une application $u : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow$ ne dépendant que de ρ^1 , vérifiant $u(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{N}^*$ et $u(f) \geq f$ pour tout f , et possédant la propriété suivante : quel que soit $f \in u^{-1}([1, \infty])$, si ρ est formellement isomorphe à $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$ à l'ordre $u(f)$, alors il existe $\psi \in \mathcal{D}_{b,0}^f(X, E)$ tel que $\psi_* \rho$ et $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$ aient un contact d'ordre f le long de toutes les v.f.i. de ρ^1 .

Démonstration. Soient W_1, \dots, W_r les v.f.i. de ρ^1 maximales pour l'inclusion ; pour chaque W_i , choisissons g_i de façon que la variété instable de $\tilde{\rho}^1(g_i)$ soit W_i , et appelons t_i l'application t associée à $\zeta = [j_{W_i}^\infty \tilde{\rho}^1(g_i)]_0$ par la formule (5) de (4.2.2) - avec $Q = E$, $\Sigma = \{0\}$ et $W = W_i$, l'espace E étant muni d'une norme euclidienne convenable. La fonction u du théorème est $u(f) = t_o(t_o(f))$, où $t_o = \max \{t_1, \dots, t_r\}$. Si ρ est formellement linéarisable à l'ordre $u(\ell)$, on peut évidemment supposer (ce que nous ferons) que $(X, b) = (E, 0)$ et $\tilde{\rho} u(f) = [\tilde{\rho}^1] u(f)$. Posons $\ell = f$.

D'après (4.2.2) théorème 1, pour $1 \leq i \leq r$, il existe un jet $j_{W_i}^{t_o(\ell)} \varphi_i$, avec $\varphi_i \in \mathcal{D}_0^{t_o(\ell)}(E)$, tel que $j_0^{t_o(\ell)}(\varphi_i - \text{id}) = 0$ et $j_{W_i}^{t_o(\ell)}(\varphi_i^* \tilde{\rho}(g_i) - [\tilde{\rho}^1(g_i)]_0) = 0$. Pour tout g dans G (resp. dans la composante neutre de G), on a donc

$$(1) \quad j_{W_i}^\ell (\varphi_i^* \tilde{\rho}(g) - [\tilde{\rho}^1(g)]_0) = 0 \quad (\text{resp.} \quad j_{W_i}^\ell \frac{d}{dt} (\varphi_i^* \tilde{\rho}(tg) \circ [\tilde{\rho}^1(-tg)]_0) \Big|_{t=0} = 0)$$

d'après (4.2.2) théorème 2, appliqué à $z = j_{W_i}^{t_i(\ell)} (\tilde{\rho}^1(g) \circ \varphi_i^* \tilde{\rho}(-g))$ (resp. $\xi = j_{W_i}^{t_i(\ell)} \frac{d}{dt} (\tilde{\rho}^1(tg) \circ \varphi_i^* \tilde{\rho}(-tg)) \Big|_{t=0}$), ζ étant comme ci-dessus.

Etant donnés $i, j \in \{1, \dots, r\}$, soient $W = W_i \cap W_j$, $\varphi = \varphi_i^* \tilde{\rho}(g_i)$, et t la

fonction associée à $\zeta = j_W^\infty[\rho^1(g_i)]_O$ par la formule (5) de (4.2.2) ; on a $t_O(\ell) \geq t_i(\ell) \geq t(\ell)$, et donc $\psi = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ vérifie $j_O^{t(\ell)}(\psi - \text{id}) = 0$. En outre,

$$\begin{aligned} j_W^\ell(\psi \circ \varphi) &= j_W^\ell(\varphi_i^{-1} \circ \rho^1(-g_i) \circ \varphi_j \circ \varphi) = j_W^\ell(\psi \circ \varphi_j \circ \rho^1(-g_i) \circ \varphi_i \circ \rho^1(g_i)) = \\ &= j_W^\ell(\psi \circ \rho^1(-g_i) \circ [\rho^1(g_i)]_O) = j_W^\ell \psi \end{aligned}$$

d'après (1) et l'invariance de W par ρ^1 . Par conséquent, le théorème 2 de (4.2.2) nous dit que $j_W^\ell(\psi - [\text{id}]_O) = 0$, c'est-à-dire que φ_i et φ_j ont un contact d'ordre ℓ en $W_i \cap W_j$ quels que soient i et j .

D'après (1.3) théorème 5, il existe donc $\psi \in \mathcal{D}_{O,O}^f(E) = \mathcal{D}_{b,O}^f(X,E)$ tel que $j_{W_i}^f(\psi^{-1} - \varphi_i) = 0$ pour tout i , et ψ possède les propriétés requises par l'énoncé du théorème d'après (1) et l'invariance de chaque W_i par ρ^1 . ■

(4.4.2 b) Mise sous forme normale de ρ le long de ses v.f.i. : le cas général.

Soient z un jet d'ordre s en O d'application de E dans un espace de Banach F , et, pour chaque $r \in \mathbb{N} \cap [0, s]$, $z^{(r)}$ l'unique application polynomiale de E dans F de degré r qui ait pour jet d'ordre r en O la projection canonique de z dans $J^r(E, F)$. Etant donné un sous-espace vectoriel W de E , nous dirons que z définit un jet Z en W d'application de E dans F , ce que nous noterons

$$z \sim_W Z,$$

lorsque, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la suite $(j_W^\ell z^{(r)})_{r \in \mathbb{N} \cap [0, s]}$ sera stationnaire à partir d'un certain rang r_ℓ , la section Z de $J^\infty(E, F) \rightarrow E$ étant égale à

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} j_W^\ell z^{(r_\ell)}.$$

Bien entendu, pour $s < \infty$, tout z définit un Z .

Sous les hypothèses du théorème 4 de (4.3.2), on note ρ^1 l'action linéaire de G sur $E = T_b X$ définie juste après la démonstration dudit théorème.

PROPOSITION 1. Sous les hypothèses du théorème 4 de (4.3.2), pour chaque v.f.i. W de ρ^1 et chaque $g \in G$, le jet $\check{h}_*^{\check{\rho}(g)}$ définit un jet $\check{S}(g)$ en W d'application de E dans lui-même, qui possède la propriété suivante : pour tout $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, si $\check{S}^\ell(g)$ désigne la composée avec $\check{S}(g)$ de la projection canonique de $J^\infty(E, E)$ sur $J^\ell(E, E)$, tout germe $\Psi : [E]_0 \hookrightarrow$ d'application C^ℓ tel que $(j^\ell \Psi)|_W = [\check{S}^\ell(g)]_0$ appartient à $\mathcal{D}_0^\ell(E)$ et laisse $[W]_0$ invariant.

Démonstration. Si W est la variété instable de $\tilde{\rho}^1(h)$ pour un $h \in G$, et (x_i^j) un système de coordonnées adapté à ρ^1 , posons

$$\begin{cases} D = \{c \in G_{\mathbb{R}} : \langle c, h_{\mathbb{R}} \rangle > 0\} \\ y = (x_i^j)_{c_i \in D} \text{ et } z = (x_i^j)_{c_i \notin D}. \end{cases}$$

Etant donné $g \in G$, si l'on écrit, quels que soient i et ℓ ,

$$x_i^\ell \circ (\check{\varphi}_*^{\check{\rho}^S} \check{\rho}^S(g)) = \sum_{(\alpha, \beta) \in I_D} Q_{i, \alpha, \beta}^\ell(y, \bar{y}) z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

où

$$I_D = \{(\alpha, \beta) \in (\prod_{c_i \in D} \mathbb{N}^{d_i})^2 : \beta_j = 0 \text{ si } a_j(G) \subset \mathbb{R}\},$$

il s'agit de prouver les deux faits suivants :

- (a) Les $Q_{i, \alpha, \beta}^\ell$ sont des polynômes ;
- (b) Si $c_i \notin D$, alors $Q_{i, 0, 0}^\ell = 0$.

Pour établir (a) il suffit ((4.3.2), corollaire 3) de montrer que si

$(\alpha, \beta) = ((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)) \in (\prod_{i=1}^n \mathbb{N}^{d_i})^2$ vérifie $\alpha_j = \beta_j = 0$ pour $c_j \in D$, les $(p, q) = ((p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n)) \in (\prod_{i=1}^n \mathbb{N}^{d_i})^2$ tels que

$$\begin{cases} p_j = q_j = 0 \text{ si } c_j \notin D \\ (\alpha + p, \beta + q) \in P_i \end{cases}$$

sont en nombre fini. Or, la relation $(\alpha + p, \beta + q) \in P_i$ implique que

$$\sum_{c_j \in D} (|p_j| + |q_j|) < c_j, h_{\mathbf{R}} > = < c_i - \sum_{c_j \notin D} (|\alpha_j| + |\beta_j|) c_j, h_{\mathbf{R}} >,$$

égalité dont le second membre est constant et le premier, par définition de D , minoré par $K|(p, q)|$, où K est une constante > 0 , d'où (a).

Pour prouver (b), il suffit de remarquer que c_i ne peut appartenir au cône convexe de sommet 0 engendré par les $c_j \in D$ que si $c_i = 0$. Par

conséquent, $Q_{i,0,0}^{\ell}$ est constant, et cette constante est évidemment nulle. ■

NOTATIONS. Soient $\check{\rho}$ le jet d'ordre s de ρ , et \check{h} un élément de $\check{\mathcal{D}}_{b,0}^{\check{\rho}}(X, E)$ vérifiant les hypothèses du théorème 4 de (4.3.2) pour ce choix de $\check{\rho}$.

THÉOREME 1. Il existe une application $u : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow$ ne dépendant que de ρ^1 , vérifiant $u(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{N}^*$ et possédant la propriété suivante : quel que soit $f \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ satisfaisant $u(f) \leq s$, il existe $\Psi \in \mathcal{D}_{b,0}^f(X, E)$ tel que, pour toute v.f.i. W de ρ^1 et tout $g \in G$ (resp. dans la composante neutre de G),

$$j_*^f(\Psi_* \check{\rho}(g))|_W = [\check{S}^f(g)]_0 \quad (\text{resp. } (j_*^f \frac{d}{dt} \Psi_* \check{\rho}(tg)|_{t=0})|_W = [\frac{d}{dt} \check{S}^f(tg)|_{t=0}]_0),$$

où $\check{S}^f(g)$ est définie comme dans la proposition 1. (N.B. On a $u(f) \geq f$).

Démonstration. On ne perd rien à supposer que $(X, b) = (E, 0)$ et $\check{h} = j_0^s \text{id}_E$. Soient W_1, \dots, W_r les v.f.i. de ρ^1 maximales pour l'inclusion, et, pour chaque $g \in G$, soient $\check{S}_1(g), \dots, \check{S}_r(g)$ les jets définis par $\check{h}_* \check{\rho}(g) \sim_{W_i} \check{S}_i(g)$.

Pour $1 \leq i \leq r$, soit $g_i \in G$ tel que W_i soit la variété instable de $\tilde{\rho}^1(g_i)$, et soit $t_i : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow$ l'application associée à $\zeta = [\check{S}_i(g_i)]_0$ par le théorème 1 de (4.2.2) - appliqué avec $Q = E$, $\Sigma = \{0\}$ et $W = W_i$, l'espace E étant muni d'une norme euclidienne convenable. La définition de t_i ne dépend que de $\tilde{\rho}^1(g_i)$. La fonction u sera donnée par

$$u(f) = t_0(t_0(f)), \text{ où } t_0 = \max \{t_1, \dots, t_r\} : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow.$$

D'après le théorème 1 de (4.2.2), pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$ et chaque $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ avec $t_o(t_o(\ell) \leq s$, il existe un jet $(j_o^{t_o(\ell)} \varphi_i)|_{W_i}$ avec $\varphi_i \in \mathcal{D}_0^{t_o(\ell)}(E)$, tel que $j_o^{t_o(\ell)}(\varphi_i - \text{id}_E) = 0$ et $(j_o^{t_o(\ell)} \varphi_i^* \tilde{\rho}(g_i))|_{W_i} = [\check{S}_i^{t_o(\ell)}(g_i)]_0$. D'où, pour tout $g \in G$ (resp. dans la composante neutre de G),

$$(1) (j_i^{\ell} \varphi_i^* \tilde{\rho}(g))|_{W_i} = [\check{S}_i^{\ell}(g)]_0 \text{ (resp. } (j_i^{\ell} \frac{d}{dt} \varphi_i^* \tilde{\rho}(tg)|_{t=0})|_{W_i} = [\frac{d}{dt} \check{S}_i^{\ell}(tg)|_{t=0}]_0),$$

d'après (4.2.2), théorème 2, appliqué à $z = \check{S}_i^{t_i(\ell)}(g) \circ (j_i^{t_i(\ell)} \varphi_i^* \tilde{\rho}(-g))|_{W_i}$ (resp.

$$\tilde{s} = [\frac{d}{dt} \check{S}_i^{t_i(\ell)}(tg)|_{t=0}]_0 - (j_i^{t_i(\ell)} \frac{d}{dt} \varphi_i^* \tilde{\rho}(tg)|_{t=0})|_{W_i})$$

Quels que soient $i, j \in \{1, \dots, r\}$, il résulte de (1) et de la dernière assertion de la proposition 1 que

$$[W_j]_0 = \varphi_j^* \tilde{\rho}(g_j) ([W_j]_0) \quad \text{et} \quad [W_i]_0 = \varphi_i^* \tilde{\rho}(g_j) ([W_i]_0)$$

Comme $\check{S}_i(g_j)|_W = \check{S}_j(g_j)|_W$, on en déduit que $W = W_i \cap W_j$ est invariant par $\varphi = \varphi_j^* \tilde{\rho}(g_j)$, et que

$$(2) \quad j_W^{\ell} \varphi = j_W^{\ell} \varphi_i^* \tilde{\rho}(g_j) .$$

Si $t : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction associée à $\zeta = j_W^{\infty} \varphi$ au début de (4.2.2), on a $t_o(\ell) \geq t_j(\ell) \geq t(\ell)$, et donc $\psi = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ vérifie $j_o^{t(\ell)}(\psi - \text{id}) = 0$. En outre, on a $j_W^{\ell}(\varphi^* \psi) = j_W^{\ell}(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i^* \tilde{\rho}(-g_j) \circ \varphi_i \bullet \varphi)$ et donc, d'après (2), $j_W^{\ell}(\varphi^* \psi) = j_W^{\ell} \psi$. On déduit donc de (4.2.2), théorème 2 que $j_W^{\ell}(\psi - \text{id}) = 0$, c'est-à-dire que φ_i et φ_j ont un contact d'ordre ℓ en $W_i \cap W_j$.

Si $\ell = f$, d'après le théorème 5 de (1.3), il existe $\Psi \in \mathcal{L}_0^f(E)$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on ait

$$(j_i^f(\Psi^{-1} - \varphi_i))|_{W_i} = 0 ,$$

et donc, pour tout $g \in G$ (resp. dans la composante neutre de G),

$$(j_i^f \varphi_i^* \tilde{\rho}(g))|_{W_i} = [\check{S}_i^f(g)]_0 \text{ (resp. } (j_i^f \frac{d}{dt} \varphi_i^* \tilde{\rho}(tg)|_{t=0})|_{W_i} = [\frac{d}{dt} \check{S}_i^f(tg)|_{t=0}]_0),$$

d'après (1) et l'invariance de $\varphi_i ([W_i]_0)$ par $\tilde{\rho}(g)$. ■

THÉORÈME 2. Si ρ^1 est dans le domaine de Poincaré et si l'on a

$$s > s_0 = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\langle c_i, g \rangle}{\langle c_j, g \rangle} : (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \right\} : g \in G_{\mathbf{R}} \text{ et } \langle c_i, g \rangle > 0 \forall i \right\},$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(i) \quad s_1 = \max \left(\{ |(p, q)| : (p, q) \in P_1 \cup \dots \cup P_n \} \cup \{1\} \right) \leq s_0.$$

(ii) Si $\tilde{R}(g) : E \rightarrow$ désigne pour chaque $g \in G$ l'unique application polynomiale de degré $\leq s$ satisfaisant $j_0^s \tilde{R}(g) = h_*^s \check{\rho}(g)$, l'application

$R : (g, v) \mapsto \tilde{R}(g)(v)$ est une action analytique de G sur E .

(iii) Le germe ρ est C^s -isomorphe à $[R]_{G \times \{0\}}$.

Par conséquent, pour chaque variété $X' \ni b'$ et chaque $s' \in]s_0, s]$, tout germe $\rho' \in \text{Act}_{b'}^{s'}(G, X')$ formellement isomorphe à ρ à l'ordre s_1 est $C^{s'}$ -isomorphe à ρ .

Démonstration. Les preuves de (i) et (ii), faciles, sont laissées au lecteur.

La seule v.f.i. de ρ^1 maximale pour l'inclusion est E . Pour tout $g \in G$ tel que $\tilde{\rho}^1(g)$ ait E pour variété instable - i.e. $\langle c_i, g \rangle_{\mathbf{R}} > 0$ pour tout i - et tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme euclidienne $|\cdot|$ sur E , de la forme

$$v \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} \lambda_j^i |x_i^j(v)|^2 \right)^{1/2}, \text{ où les } \lambda_j^i \text{ sont des réels } > 0, \text{ telle que, si}$$

$$c_0 = |\tilde{\rho}^1(-g)| \text{ et } K_0 = |\tilde{\rho}^1(g)|, \text{ on ait}$$

$$\left| \frac{\log K_0}{-\log c_0} - \max \left\{ \frac{\langle c_i, g \rangle}{\langle c_j, g \rangle} : (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \right\} \right| \leq \varepsilon.$$

Si, dans le théorème 1 de (4.2.2), on prend $\zeta = [j^\infty \tilde{R}(g)]_0$, l'application t

associée à ζ est donnée, si $\ell(g) = \min \{ \ell \in \mathbb{N}^* : \ell > \frac{\log K_0}{-\log c_0} \}$, par

$$t(j) = \max\{j, \ell(g)\}.$$

En choisissant g et la norme $|\cdot|$ de manière que $\ell(g)$ soit le plus petit entier $> s_0$, on conclut par le même raisonnement que pour le théorème 1. ■

COROLLAIRE. Si ρ^1 est hyperbolique et $n \leq \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}$, alors ρ admet une linéarisation C^s dès que l'on a $s > 1$.

Démonstration. Comme c_1, \dots, c_n sont linéairement indépendants, on a $P_1 = \dots = P_n = \emptyset$, et ρ^1 est dans le domaine de Poincaré. De plus, il existe un hyperplan affine de $G_{\mathbb{R}}$ contenant c_1, \dots, c_n et ne passant pas par 0 ; en d'autres termes, il existe $g \in G_{\mathbb{R}}$ tel que l'on ait $\langle c_1, g \rangle = \dots = \langle c_n, g \rangle > 0$. ■

EXERCICES.1. Ecrire une preuve "autonome" du théorème 2 en ne retenant des théorèmes 1 et 2 de (4.2.2) que ce qui concerne la situation considérée. Montrer en particulier que cette preuve se simplifie beaucoup lorsqu'on l'applique à des germes d'actions holomorphes de $G = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{C} sur une variété holomorphe (dans le domaine de Poincaré en tant qu'actions de \mathbb{R}^2 dans le second cas), et que l'isomorphisme construit entre ρ et $[R]_{G \times \{0\}}$ est alors holomorphe (théorème de Poincaré et Dulac).

2. Si ρ^1 est faiblement hyperbolique et $n \leq \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}}$, alors ρ^1 est dans le domaine de Poincaré ; déduire du théorème 2 la classification C^∞ de tous les $\rho \in \text{Act}_b^\infty(G, X)$ de partie linéaire faiblement hyperbolique lorsque $\dim X < \dim G_{\mathbb{R}}$.

(4.4.3) Formes normales des germes hyperboliques d'actions de \mathbb{R} ou \mathbb{Z}

HYPOTHÈSES. Ce sont les mêmes que dans le reste de (4.4), mais on suppose que $s = \infty$, que $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} et que ρ^1 est hyperbolique, de variétés stable E^+ et instable E^- et dans le domaine de Siegel-le domaine de Poincaré a été étudié dans (4.4.2). On associe à $\tilde{\rho} = \rho^\infty$ l'action ρ^1 , les morphismes a_i et les ensembles π_i et P_i définis après le théorème 4 et avant le corollaire 4 de (4.3.2).

Ainsi, si $G = \mathbb{R}$ et que $\lambda_i = a_i'(0)$ pour $1 \leq i \leq n$ (le spectre du générateur infinitésimal de ρ^1 est donc $\bigcup_i \{\lambda_i, \bar{\lambda}_i\}$), alors π_0 (resp. π_i , $1 \leq i \leq n$) est l'ensemble des $(p, q) \in (\mathbb{N}^n)^2$ vérifiant $|p| + |q| > 0$ (resp. > 1), $\sum(p_j \lambda_j + q_j \bar{\lambda}_j) = 0$ (resp. $= \lambda_i$) et $q_j = 0$ pour $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

NOTATIONS. Soient $A = \prod_{i=1}^n \mathbb{N}^{d_i}$, $p \longmapsto p_i$ la projection de A sur son i -ième facteur \mathbb{N}^{d_i} et $p_i \longmapsto p_i^j$ la projection de \mathbb{N}^{d_i} sur son j -ième facteur. Si A^2 est muni de l'ordre " $(p,q) \leq (r,s)$ si et seulement si $p_i^j \leq r_i^j$ et $q_i^j \leq s_i^j \quad \forall i,j$ ",

il résulte de (4.3.2), lemme 5 que tout élément de P_i ($1 \leq i \leq n$) s'écrit - de manière non forcément unique - comme la somme d'un élément de l'ensemble fini $\min P_i$ et d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble fini $\min P_0$, où $P_0 = \{(p,q) \in A^2 : (|p_1|, \dots, |p_n|), (|q_1|, \dots, |q_n|) \in \pi_0\}$.

Par conséquent, si (x_i^j) est un système de coordonnées adapté à ρ^1 et si

$$\{z_1, \dots, z_\mu, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\mu\} = \{x^p \bar{x}^q : (p,q) \in \min P_0 \text{ et } x^p \bar{x}^q(E) \not\subset \mathbb{R}\}$$

et $\{y_1, \dots, y_\nu\} = \{x^p \bar{x}^q : (p,q) \in \min P_0 \text{ et } x^p \bar{x}^q(E) \subset \mathbb{R}\},$

le théorème 1 de (4.4.2) admet la formulation suivante :

THÉORÈME 1. Si $G = \mathbb{Z}$ (resp. \mathbb{R}), il existe des séries formelles $\bigvee_{i,p,q}^j b_{i,p,q}^j(y,z,\bar{z})$ (resp. $\bigvee_{i,p,q}^j \beta_{i,p,q}^j(y,z,\bar{z})$) avec $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d_i$ et $(p,q) \in \min P_i$ - donc en nombre fini - et un germe $\Psi \in \mathcal{B}_{b,0}^\infty(X,E)$ tels que l'on ait

$$Z \sim_{E^+ \cup E^-} (j^\infty \Psi_* \tilde{\rho}(1))|_{E^+ \cup E^-} \quad (\text{resp. } \zeta \sim_{E^+ \cup E^-} (j^\infty \frac{d}{dt} \Psi_* \tilde{\rho}(t)|_{t=0})|_{E^+ \cup E^-}),$$

où Z (resp. ζ) est le jet en 0 d'application C^∞ de E dans E donné par

$$\forall i,j, x_i^j \circ Z = x_i^j \circ \tilde{\rho}^1(1) + a_i(1) \sum_{(p,q) \in \min P_i} x^p \bar{x}^q \bigvee_{i,p,q}^j b_{i,p,q}^j(y,z,\bar{z})$$

(resp. $x_i^j \circ \zeta = x_i^j \circ L + \sum_{(p,q) \in \min P_i} x^p \bar{x}^q \bigvee_{i,p,q}^j \beta_{i,p,q}^j(y,z,\bar{z})$, où $L = \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(t)|_{t=0}$). ■

Il est évident que $(y,z)|_{E^+ \cup E^-} = 0$. Par conséquent, quels que soient i,j et

$(p,q) \in \min P_i$, si $b_{i,p,q}^j$ (resp. $\beta_{i,p,q}^j$) : $[\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{C}^\mu]_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ est un germe véri-

fiant $j_0^\infty b_{i,p,q}^j = \check{b}_{i,p,q}^j$ (resp. $j_0^\infty \beta_{i,p,q}^j = \check{\beta}_{i,p,q}^j$) , alors $b_{i,p,q}^j \circ (y,z)$

(resp. $\beta_{i,p,q}^j \circ (y,z)$) est un germe $[E]_{E^+ \cup E^-} \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonction C^∞ , et

$j_{E^+ \cup E^-}^\infty b_{i,p,q}^j = \check{b}_{i,p,q}^j (y,z,\bar{z})$ (resp. $j_{E^+ \cup E^-}^\infty \beta_{i,p,q}^j = \check{\beta}_{i,p,q}^j (y,z,\bar{z})$). Du théo-

rème 1 et de (4.2.3), théorème 2(i), on déduit donc le résultat suivant, qui précise beaucoup l'énoncé du théorème de Sternberg donné dans (4.1) :

THÉOREME 2 . Pour tout choix des prolongements $b_{i,p,q}^j$ (resp. $\beta_{i,p,q}^j$) des $\check{b}_{i,p,q}^j$ (resp. $\check{\beta}_{i,p,q}^j$), il existe un germe $\chi \in \mathcal{D}_{b,0}^\infty(X,E)$ tel que $\chi_* \rho = \rho_\infty$, où $\rho_\infty \in \text{Act}_0^\infty(G,E)$ est donné par

$$\forall i,j, \quad x_i^j \circ \tilde{\rho}_\infty(1) = [x_i^j \circ \tilde{\rho}^1(1) + a_i(1) \sum_{(p,q) \in \min P_i} x^p \bar{x}^q b_{i,p,q}^j \circ (y,z)]_0$$

$$(\text{resp. } \frac{d}{dt} x_i^j \circ \tilde{\rho}_\infty(t) \big|_{t=0} = [x_i^j \circ L + \sum_{(p,q) \in \min P_i} x^p \bar{x}^q \beta_{i,p,q}^j \circ (y,z)]_0). \text{ Le}$$

modèle local ρ_∞ ainsi obtenu laisse $[E^+ \cup E^-]_0$ invariant. ■

COROLLAIRE. Si $P_0 = \{\emptyset\}$, les $b_{i,p,q}^j$ (resp. $\beta_{i,p,q}^j$) sont des constantes ; le modèle local ρ_∞ obtenu en prenant $b_{i,p,q}^j = \check{b}_{i,p,q}^j$ (resp. $\beta_{i,p,q}^j = \check{\beta}_{i,p,q}^j$) pour tout (i,j,p,q) dans le théorème 2 est le germe en $G \times \{0\}$ d'une action analytique de G sur E . ■

Dans le même ordre d'idées, on prouve de même le

THÉOREME 3. Quel que soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, il existe des applications polynomiales $p_{i,p,q,\ell}^j$ (resp. $\pi_{i,p,q,\ell}^j$) : $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, avec $1 \leq i \leq n$, $(p,q) \in P_i$ et $1 \leq j \leq d_i$, dont le degré croît avec ℓ , telles que ρ soit C^ℓ -isomorphe au germe ρ_ℓ d'action analytique de G sur E fixant 0 donné par

$$\forall i,j, \quad x_i^j \circ \tilde{\rho}_\ell(1) = [x_i^j \circ \tilde{\rho}^1(1) + a_i(1) \sum_{(p,q) \in \min P_i} x^p \bar{x}^q p_{i,p,q,\ell}^j \circ (y,z)]_0$$

$$\left(\text{resp. } \frac{d}{dt} x_i^j \circ \tilde{\rho}_\ell(t) \right) \Big|_{t=0} = [x_i^j \circ L + \sum_{(p,q) \in \min P_i} x^p \bar{x}^q \pi_{i,p,q,\ell}^j \circ (y,z)]_0 \Big|_0 .$$

EXERCICES 1. Enoncer les résultats que donne notre méthode pour $s < \infty$.

2. Généraliser le tout au cas où G est un groupe élémentaire tel que $\dim G_{\mathbb{R}} = 1$ (utiliser le théorème de (3.1.4), et regarder éventuellement la manière dont on s'y prend dans le chapitre 3).

(4.4.4) Intégrales premières et centralisateurs.

Les hypothèses étant celles de (4.4.2), une intégrale première C^ℓ de ρ est un germe $\alpha : [X]_b \rightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^ℓ tel que $\alpha \circ \tilde{\rho}(g) = \alpha$ pour tout $g \in G$ et $\frac{d}{dt} (\alpha \circ \rho(\exp tv)) \Big|_{t=0} = 0$ pour tout v dans l'algèbre de Lie de la composante neutre de G .

PROPOSITION 1. Pour tout $\rho \in \text{Act}_b^1(G, X)$, toute intégrale première C^0 de ρ est constante sur les v.f.i. de ρ .

Démonstration. Soient $g \in G$ et W la variété instable de $\tilde{\rho}(g)$. Etant donnée une intégrale première continue α de ρ , il existe un représentant Y de W , un représentant $f : Y \hookrightarrow$ de $\tilde{\rho}(-g)|_W$ et un représentant $a : Y \rightarrow \mathbb{R}$ de $\alpha|_W$ tels que l'on ait $a \circ f = a$ et, pour tout $y \in Y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = b$. Comme a est continue en b , on a donc $a(Y) = \{a(b)\}$. ■

Une intégrale première de $\check{\rho} \in \text{Act}_b^s(G, X)$ est un $\check{\alpha} \in \check{\mathcal{E}}_b^s(X)$ tel que $\check{\alpha} \circ \check{\rho}(g) = \check{\alpha}$ pour tout $g \in G$. Lorsque $\check{\rho}$ est le jet d'ordre s d'un $\rho \in \text{Act}_b^s(G, X)$, un tel $\check{\alpha}$ est appelé intégrale première formelle d'ordre s de ρ .

PROPOSITION 2. Les hypothèses et les notations étant celles du corollaire 3 de (4.3.2), toute intégrale première $\check{\alpha}$ de $\check{\rho}$ est de la forme

$$\check{\alpha} = \left(\sum_{\substack{(p,q) \in P_0 \cup \{0,0\} \\ |(p,q)| \leq s}} \alpha_{p,q} x^p \bar{x}^q \right) \circ \check{h} ,$$

où les $\alpha_{p,q}$ sont des constantes complexes et P_0 est défini dans (4.4.3).

Démonstration. Pour $s < \infty$ le jet $\check{h}_* \check{\alpha}$ appartient à

$\bigcap_{g \in G} \{ \check{Y} \in \check{\mathcal{E}}^s : (\check{h}_* \check{\rho}(g)) * \check{Y} = \check{Y} \}$, et donc à

$\bigcap_{g \in G} \{ \check{Y} \in \check{\mathcal{E}}^s : (\check{h}_* \check{\sigma}(g)) * \check{Y} = \check{Y} \}$, dont une base est formée des

$x^p \bar{x}^q$ avec $(p, q) \in P_0 \cup \{0, 0\}$ et $|(p, q)| \leq s$. Si $s = \infty$, on passe à la limite projective. ■

EXERCICE. Une condition nécessaire pour que $\check{\rho}$ ait des intégrales premières non constantes est donc que P_0 soit non vide. Montrer que cette condition est suffisante pour $s < \infty$, mais ne l'est pas, même génériquement, si $s = \infty$.

THÉORÈME 1. Sous les hypothèses de la proposition 2, pour toute v.f.i. W de ρ^1 , le jet $\check{h}_* \check{\alpha}$ définit au sens de (4.4.2) un jet \check{a} en W de fonction sur E tel que, si \check{a}^ℓ désigne pour tout $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la composée avec \check{a} de la projection canonique de $J^\infty(E, \mathbb{R})$ sur $J^\ell(E, \mathbb{R})$, les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) \check{a}^0 est le jet d'une constante.

(ii) Avec les notations de la proposition 1 de (4.4.2), il existe une application $t_0 : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow$ ne dépendant que de ρ^1 , telle que $t_0^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et que $\check{a}^\ell \circ \check{S}^\ell(g) = \check{a}^{\ell}$ quels que soient $\ell \in t_0^{-1}([0, s])$ et $g \in G$, où \circ désigne la composition ponctuelle des jets. (N.B. On a $t_0(\ell) \geq \ell$).

(iii) Il existe une application $t_1 : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow$ ne dépendant que de ρ^1 , telle que $t_1^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et que, pour tout $\ell \in t_1^{-1}([0, s])$, la propriété suivante soit satisfaite : si $a : [E]_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est un germe de fonction $C^{t_1(\ell)}$ vérifiant

$$\begin{cases} j_0^{t_1(\ell)} a = \check{a}^{t_1(\ell)} \\ \forall g \in G, (j^\ell a)|_W \circ [\check{S}^\ell(g)]_0 = (j^\ell a)|_W, \end{cases}$$

alors $(j^\ell a)|_W = [\check{a}^\ell]_0$. (N.B. On a $t_1(\ell) \geq \ell$).

Démonstration. Les deux premiers points sont faciles à établir. Le dernier résulte du théorème 1 de (4.2.4) et de la remarque qui le suit, appliqués à $j_1^{t_1(k)} \varphi|_W = j_1^{t_1(k)}(g_0)$, où $\tilde{\rho}^1(g_0)$ admet W pour variété instable. ■

COROLLAIRE 1. Etant donné $\rho \in \text{Act}_b^S(G, X)$, il existe une application $t_2 : \mathbb{N}U\{\infty\} \rightarrow$ ne dépendant que de ρ^1 , telle que $t_2^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, et possédant la propriété suivante : pour tout $\ell \in t_2^{-1}([0, s])$, si α est une intégrale première $C^{t_2(\ell)}_2$ de ρ , le jet d'ordre ℓ de α en la réunion des v.f.i. de ρ est entièrement déterminé par $j_b^{t_2(\ell)} \alpha$. ■

THÉORÈME 2. Sous les hypothèses de (4.4.3), pour chaque intégrale première formelle $\check{\alpha}$ d'ordre infini de ρ , l'espace affine des intégrales premières α de classe C^∞ de ρ telles que $j_b^\infty \alpha = \check{\alpha}$ est de dimension infinie - et en particulier non vide ! (Voir l'appendice 6, (A6.3), Corollaire, pour une généralisation)

Démonstration. On peut évidemment supposer que $(X, b) = (E, 0)$ et que ρ est de la forme ρ_∞ donnée par le théorème 2 de (4.4.3). Soit $R : (g, v) \mapsto \tilde{R}(g)(v)$ une action C^∞ de G sur E prolongeant ρ et telle que, pour un choix convenable d'une norme euclidienne $|\cdot|$ sur E , il existe (cf. (3.2), lemme 1) des constantes $c_+ < 0$ et $c_- < 0$ telles que l'on ait

$$(1) \quad \forall g \in G \cap [0, \infty], \forall x \in E, \begin{cases} |R(g, x)_+| \leq e^{c_+ g} |x_+| \\ |R(-g, x)_-| \leq e^{-c_- g} |x_-| \end{cases},$$

où x_+ et x_- désignent les projections de $x \in E^+ \oplus E^-$ sur E^+ et E^- respectivement.

D'après le théorème 1 et (1), il existe un unique jet $\check{a}^+ : E^+ \rightarrow J^\infty(E, \mathbb{R})$ de fonction vérifiant $\check{a}^+(0) = \check{a}$ et $\check{a}^+ \circ j_{E^+}^\infty \tilde{R}(g) = \check{a}^+$ pour tout g . Soit $a_1 : [E]_{E^+} \rightarrow \mathbb{R}$ un germe de fonction C^∞ telle que $j_{E^+}^\infty a_1 = \check{a}^+$. Posons

$$B = \{ x \in E : |x_+| \leq 1 \} \text{ et}$$

$$D = \begin{cases} \partial B & \text{si } G = \mathbb{R} \\ B \setminus \tilde{R}(1)(B) & \text{si } G = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Si $G = \mathbb{R}$, il existe d'après (1) un unique germe $a : [E \setminus E^-]_{E^+} \rightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^∞ vérifiant

$$\begin{cases} (a - a_1)|_D = 0 \\ \forall g \in G, \quad a \circ [S(g)|_{E \setminus E^-}]_{E^+} = a. \end{cases}$$

D'après le théorème 2 de 4.2.4, $[a]_0$ se prolonge en une unique intégrale première \bar{a} de classe C^∞ de ρ , vérifiant $j_0^\infty \bar{a} = \check{a}$. Les \bar{a} possédant cette propriété forment un espace de dimension infinie, car l'application $a_1|_D \longmapsto \bar{a}$ est une bijection affine.

- Si $G = \mathbb{Z}$, le théorème de prolongement de Whitney permet de construire un germe $a_2 : [\bar{D}]_{E^+} \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^∞ vérifiant

$$\begin{cases} (j^\infty a_2)|_{\bar{D} \cap E^+} = \check{a}^+|_{\bar{D} \cap E^+} \\ (j^\infty a_2)|_{\partial B} = (j^\infty a_1)|_{\partial B} \\ (j^\infty a_2)|_{\tilde{R}(1)(\partial B)} = (j^\infty a_1 \circ [\tilde{R}(1)]_{E^+})|_{\tilde{R}(1)(\partial B)}. \end{cases}$$

On conclut alors comme précédemment en définissant a par

$$\begin{cases} (a - a_2)|_D = 0 \\ \forall g \in G, \quad a \circ [S(g)|_{E \setminus E^-}]_{E^+} = a. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Exercices - Enoncer et prouver le théorème 2 en différentiabilité finie.

Rappelons que le centralisateur d'une partie A d'un groupe est l'ensemble des éléments du groupe qui commutent à tous les éléments de A .

PROPOSITION 3. Les hypothèses et les notations étant celles du corollaire 3 de (4.3.2), tout élément $\check{\varphi}$ du centralisateur de $\check{\rho}(G)$ dans $\mathcal{D}_b^s(X)$ est tel que

$$\forall i, j, \quad x_i^j \circ \check{h}_{\ast}^{\check{\varphi}} = \sum_{\ell=1}^{d_1} \mu_{i,\ell}^j x_i^\ell + \sum_{\substack{(p,q) \in P_i \\ |(p,q)| \leq s}} \nu_{i,p,q}^j x^p \bar{x}^q,$$

où les $\mu_{i,\ell}^j$ et les $\nu_{i,p,q}^j$ sont des constantes complexes. \blacksquare

THÉOREME 3. Sous les hypothèses de la proposition 3 avec $s = \infty$, pour chaque v.f.i. W de ρ^1 , le jet $\check{h}_* \check{\varphi}$ définit au sens de (4.4.2) un jet \check{H} en W de difféomorphisme $E \curvearrowright$ tel que $\check{H} \circ \check{S}(g) = \check{S}(g) \circ \check{H}$ pour tout g . De plus, si $\varphi \in \mathcal{L}_0^\infty(E)$ vérifie

$$\begin{cases} j_0^\infty \varphi = \check{\varphi} \\ (j^\infty \varphi)|_W \circ [\check{S}(g)]_0 = \check{S}(g) \circ (j^\infty \varphi)|_W \text{ pour tout } g, \end{cases}$$

alors $(j^\infty \varphi)|_W = [\check{H}]_0$.

Démonstration. C'est celle du théorème 1, en remplaçant le théorème 1 de (4.2.4) par le théorème 2 de (4.2.2). ■

EXERCICE. Enoncer et prouver le théorème 3, à la manière du théorème 1, pour $s < \infty$.

THÉOREME 4. Sous les hypothèses du théorème 2 de (4.4.2), le centralisateur \mathcal{L}^ℓ de $\tilde{\rho}(G)$ dans $\mathcal{L}_b^\ell(X)$ est, pour chaque entier $\ell \in]s_0, s]$, égal à \mathcal{L}^s , qui est un groupe de Lie algébrique de dimension finie.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{L}_{b,0}^s(X,E)$ un germe tel que $h_* \rho = [R]_{G \times \{0\}}$. Chaque élément $\check{\varphi}$ du centralisateur de $\widetilde{h_* \rho}^\ell(G)$ dans $\mathcal{L}_0^\ell(E)$ est égal à $j_0^\ell H$ pour une unique application $H : E \curvearrowright$ polynomiale de degré au plus s_1 , et H appartient au centralisateur de $\tilde{R}(G)$ dans $\text{Diff}^\infty(E,E)$. Par conséquent, $\varphi = [H]_0$ appartient à $h_* \mathcal{L}^\ell$; d'après le théorème 2 de (4.2.2), φ est le seul élément de $h_* \mathcal{L}^\ell$ tel que $j_0^\ell \varphi = \check{\varphi}$. ■

THÉOREME 5. Sous les hypothèses de (4.4.3), pour chaque élément $\check{\varphi}$ du centralisateur de $\tilde{\rho}^\infty(G)$ dans $\mathcal{L}_b^\infty(X)$, les éléments φ du centralisateur de $\tilde{\rho}(G)$ dans $\mathcal{L}_b^\infty(X)$ qui vérifient $j_b^\infty \varphi = \check{\varphi}$ forment un ensemble infini (et même "de dimension infinie").

Démonstration. C'est celle du théorème 2, en utilisant le théorème 2 de (4.2.3)

au lieu du théorème 2 de (4.2.4). ■

EXERCICE. Enoncer et prouver le théorème 5 en différentiabilité finie.

(4.4.5) Actions génériques de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} .

Soient X une variété séparable de dimension finie n , D l'espace des difféomorphismes $X \rightarrow X$ de classe C^∞ , et d l'espace des C^∞ -champs de vecteurs sur X . Les espaces D et d étant munis de la topologie de Whitney, nous allons prouver un fait utile :

THÉORÈME. Il existe un résiduel R (resp. r) de D (resp. d) tel que, pour tout $f \in R$ (resp. tout $\xi \in r$) et tout $a \in X$ avec $f(a) = a$ (resp. $\xi(a) = 0$), les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

- (i) L'automorphisme $T_a f$ (resp. $\exp d\xi(a)$) de $T_a X$ est hyperbolique, et le spectre $\sigma(T_a f)$ (resp. $\sigma(d\xi(a))$) est formé de valeurs propres simples.
- (ii) Le germe $[f]_a$ (resp. $[\xi]_a$) est C^∞ -linéarisable.

Démonstration. Nous allons traiter le cas des difféomorphismes, l'autre étant tout à fait semblable. Posons $J^1 = J^1(X, X)$, et soit

$$\Sigma = \{j_a^1 f \in J^1 : f(a) = a \text{ et } (\# \sigma(T_a f) < n \text{ ou } 0 \in \sigma(T_a f))\}$$

Dire que $j_a^1 f \in \Sigma$ revient à affirmer que le produit du déterminant de $T_a f$ par le discriminant de son polynome caractéristique est nul. Il résulte donc de la stratification de Whitney des ensembles algébriques que le fermé Σ est un stratifié de codimension $n + 1$ de J^1 .

Considérons la sous-variété M de codimension n de J^1 définie par

$$M = \{j_a^1 f \in J^1 \setminus \Sigma : f(a) = a\}.$$

Sur M , l'application $j_a^1 f \xrightarrow{s} \sigma(T_a f)$ est à valeurs dans l'ensemble A des parties de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ qui possèdent exactement n éléments et sont invariantes par conjugaison complexe. On munit A d'une structure de variété analytique de la manière suivante : l'ensemble A des $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ vérifiant $\#\{a_1, \dots, a_n\} = n$ et $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ est une sous-variété de \mathbb{C}^n , sur la-

quelle le groupe symétrique S_n agit librement par permutation des indices. On identifie A à l'espace des orbites de cette action.

Pour cette structure de variété analytique, l'application $s : M \rightarrow A$ est une submersion. Désignons par $\pi : A \rightarrow A$ la projection canonique. Pour chaque $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}$ avec $|p| > 1$, soit $A_p = \pi(A_p)$, où A_p est la sous-variété de A formée des (a_1, \dots, a_n) avec $a_1 = a^p$. Bien entendu, A_p est une sous-variété immergée, et non plongée, de A . Cela dit, comme A_p est une vraie sous-variété et π un revêtement fini, le théorème de transversalité de Thom (convenablement aménagé) permet d'affirmer que l'ensemble V_p des $f \in C^\infty(X, X)$ tels que $j^1 f$ soit transverse à $s^{-1}(A_p)$ est un résiduel. Or, $s^{-1}(A_p)$ étant une sous-variété (immergée) de codimension $n + 1$ de J^1 , le résiduel V_p est exactement l'ensemble des f tels que $j^1 f(X) \cap s^{-1}(A_p) = \emptyset$. Soit U l'ouvert dense de $C^\infty(X, X)$ formé des f vérifiant $j^1 f \nparallel \Sigma$, c'est-à-dire $j^1 f(X) \cap \Sigma = \emptyset$. L'ensemble $R = D \cap U \cap \bigcap_p V_p$ est l'intersection de l'ouvert D et du résiduel $U \cap \bigcap_p V_p$. C'est donc un résiduel de D . Pour tout point fixe a d'un $f \in R$, les propriétés (i) et (ii) du théorème sont satisfaites ; en effet, le spectre $\sigma(T_a f)$ est formé de valeurs propres simples parcequ'on a $f \in U$, et $T_a f$ est hyperbolique (exercice) parce qu'on a $f \in \bigcap_p V_p$; pour la même raison, $[f]_a$ est formellement linéarisable, ce qui permet de déduire (ii) du théorème de Sternberg. ■

REMARQUE. En travaillant un peu plus, on voit que, pour tout entier $k > 0$, il existe un ouvert dense R_k (resp. r_k) de D (resp. d) tel que, pour tout $f \in R_k$ (resp. $\xi \in r_k$), l'énoncé du théorème soit vrai lorsqu'on y remplace C^∞ -linéarisable par C^k -linéarisable.

CHAPITRE III. LINÉARISATION DES GERMES D'ACTIONS DE GROUPES ÉLÉMENTAIRES

Elementary, my dear Watson.

Conan Doyle

Introduction. Nous allons expliquer maintenant comment généraliser le théorème de Sternberg aux germes d'actions de groupes élémentaires généraux. Pour éviter d'ensevelir le lecteur sous des détails techniques, nous traiterons uniquement dans ce chapitre de la linéarisation des germes dont le jet est semi-simple. Dans le domaine de Siegel, la géométrie des orbites de la partie linéaire d'un tel germe est relativement compliquée, et nous commencerons donc pour nous y frayer un chemin. Nous utiliserons ensuite les méthodes de (4.2) pour obtenir le résultat cherché et en prouver l'optimalité en un sens que nous préciserons.

Le cas non semi-simple est traité dans l'appendice 7 .

5. GÉOMETRIE DES ORBITES D'UNE ACTION LINÉAIRE FAIBLEMENT HYPERBOLIQUE DE \mathbb{R}^r .

Dans cette section, on se donne un espace vectoriel réel $G_{\mathbb{R}}$ de dimension $r < \infty$, et une représentation linéaire continue $\tilde{\sigma}$ du groupe $G_{\mathbb{R}}$ dans un espace vectoriel réel E de dimension finie. On désigne par σ l'action de $G_{\mathbb{R}}$ sur E donnée par $\sigma(g, x) = \tilde{\sigma}(g)x$, que l'on suppose faiblement hyperbolique. En outre, on fait l'hypothèse que, pour tout $g \in G_{\mathbb{R}}$, l'automorphisme ${}^t \tilde{\sigma}(g) : c \longmapsto c \circ \tilde{\sigma}(g)$ de l'espace vectoriel complexe $I_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{C})$ est diagonalisable.

(5.1) Quasi-quotients de E par σ .

Commençons par traduire les résultats de (4.3.1) :

PROPOSITION 1. Il existe une unique décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ et des ap-
plications \mathbb{R} -linéaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $G_{\mathbb{R}}$ dans \mathbb{C} possédant les propriétés suivan-
tes :

(i) Pour chaque i , E_i est un espace vectoriel sur \mathbb{R} si $\alpha_i(G) \subset \mathbb{R}$, sur \mathbb{C}
sinon, et

$$\forall (x, g) \in E_i \times G_{\mathbb{R}}, \quad \sigma(g, x) = e^{\alpha_i(g)} x.$$

(ii) Pour $i \neq j$, on a $\alpha_i \neq \alpha_j \neq \overline{\alpha_i}$. ■

Les formes linéaires c_1, \dots, c_n associées à σ dans (4.3.1) sont données par

$$c_i = \operatorname{Re} \alpha_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

On note

$$\begin{cases} I_n = \{1, \dots, n\} \\ \forall I \subset I_n, \quad E_I = \bigoplus_{i \in I} E_i, \end{cases}$$

et on désigne par $x \mapsto x_i$ la projection de $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ sur son i -ième fac-
teur.

Sur chaque E_i , on se donne un produit scalaire hermitien $(\cdot | \cdot)$, et
l'on munit E de la norme $|\cdot|$ définie par le produit scalaire euclidien

$$x \cdot y = \sum_{i \in I_n} \operatorname{Re} (x_i | y_i).$$

Pour étudier les orbites de σ , nous allons utiliser l'application F de E dans
 $G_{\mathbb{R}}^1$ définie par

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_n} |x_i|^2 c_i.$$

EXEMPLE. Si $G_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et que les α_i sont réels, le champ de vecteurs $\frac{d}{dt} \gamma(t) \big|_{t=0}$
est (moyennant l'identification canonique de \mathbb{R} à \mathbb{R}') le gradient de F , laquelle
croît donc strictement le long des orbites de σ autres que $\{0\}$. Si E^+ et E^-
désignent les sous-espaces stable et instable de σ , supposés non triviaux,

alors, pour tout $b > 0$ (resp. < 0), toute orbite de σ qui n'est pas contenue dans E^+ (resp. E^-) coupe $F^{-1}(b)$ transversalement, en un point et un seul. En d'autres termes, $F^{-1}(b)$ est difféomorphe à l'espace des orbites de $\sigma|_{\mathbb{R} \times (E \setminus E^+)}$ (resp. $\sigma|_{\mathbb{R} \times (E \setminus E^-)}$). Bien entendu, il serait plus simple d'utiliser le cylindre $\sum_{c_i > 0} |x_i|^2 = 1$ (resp. $\sum_{c_i < 0} |x_i|^2 = 1$) au lieu de l'hyperboloïde $F^{-1}(b)$, mais cette possibilité disparaît pour $r > 1$, alors que l'usage de F convient, nous allons le voir, à tous les cas.

NOTATIONS. - Pour tout $x \in E$, on pose $J(x) = \{i \in I_n : x_i \neq 0\}$.

- Pour chaque $I \subset I_n$, on appelle respectivement V_I et C_I le sous-espace vectoriel et le cône convexe de sommet 0 dans $G'_{\mathbb{R}}$ engendrés par $\{c_i\}_{i \in I}$.

PROPOSITION 2. Les points critiques de F sont les $x \in E$ tels que

$$V_{J(x)} \neq G'_{\mathbb{R}}.$$

Démonstration. Etant donné $x \in E$, on a

$$DF(x) \cdot y = \sum_{i \in I_n} \operatorname{Re}(x_i | y_i) c_i = \sum_{i \in J(x)} \operatorname{Re}(x_i | y_i) c_i$$

pour tout $y \in E$. Quel que soit $c = \sum_{i \in J(x)} \lambda_i c_i \in V_{J(x)}$,

$$y = \sum_{i \in J(x)} \lambda_i \frac{x_i}{|x_i|^2} \in E \text{ est tel que } DF(x) \cdot y = c. \blacksquare$$

PROPOSITION 3. Pour tout $b \in G'_{\mathbb{R}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) b est une valeur régulière de F .
- (ii) Pour tout $I \subset I_n$, si $b \in C_I$, alors $V_I = G'_{\mathbb{R}}$.
- (iii) Pour tout $I \subset I_n$, si $b \in C_I$, alors $b \in \overset{\circ}{C}_I$.
- (iv) Quel que soit $I \subset I_n$, b est une valeur régulière de $F|_{E_I}$.

Démonstration. Pour tout point critique x de F , $b = F(x)$ appartient à $C_{J(x)}$, et, d'après la proposition 2, on a $V_{J(x)} \neq G'_{\mathbb{R}}$, ce qui prouve que (ii) entraîne (i).

Réciproquement, si $b \in C_I$ pour un $I \subset I_n$, il existe évidemment $x \in E$ tel que $J(x) \subset I$ et $F(x) = b$. Si $V_I \neq G'_R$, a fortiori $V_{J(x)} \neq G'_R$, ce qui prouve que (i) entraîne (ii).

L'équivalence entre (i) et (iv) résulte immédiatement de celle entre (i) et (ii).

Si $\overset{\circ}{C}_I$ est non vide, on a $V_I = G'_R$, ce qui prouve que (iii) implique (ii). La réciproque vient de ce que, pour tout $I \subset I_n$, $\overset{\circ}{C}_I$ est la réunion d'un nombre fini de C_J tels que $J \subset I$ et $V_J \neq G'_R$. ■

PROPOSITION 4. Quelle que soit la v.f.i. W de σ , $F|_W$ est propre.

Démonstration. Il existe $g \in G_R$ tel que $W = E_I$, où $I = \{i \in I_n : \langle c_i, g \rangle > 0\}$. Par conséquent, $x \mapsto \langle F(x), g \rangle^{1/2}$ est une norme euclidienne sur W , d'où il résulte que tout $B \subset W$ tel que $F(B)$ soit borné est borné. ■

THÉOREME 1. Quel que soit $x \in E$ vérifiant $V_{J(x)} = G'_R$, l'application

$$G_R \ni g \longmapsto F(\sigma(g, x)) \in G'_R$$

est une (sub) immersion injective, d'image $\overset{\circ}{C}_{J(x)}$.

Démonstration. (i) C'est une immersion injective : posons

$$\Psi_x(g) = F(\sigma(g, x)). \text{ On a}$$

$$\Psi_x(g) = \frac{1}{2} \sum_{i \in J(x)} |x_i|^2 e^{2c_i(g)} c_i,$$

et donc, pour chaque $c \in G'_R$,

$$\Psi_x(g) - c = D f_{x,c}(g),$$

où

$$f_{x,c}(g) = \frac{1}{4} |\sigma(g, x)|^2 - \langle c, g \rangle.$$

Comme $D^2 f_{x,c}(g) = \sum_{i \in J(x)} |x_i|^2 e^{2c_i(g)} c_i \otimes c_i$ est définie positive pour tout $g \in G_R$ d'après l'hypothèse sur x , il est clair que Ψ_x est une (sub) immersion ;

de plus, la fonction $f_{x,c} : G_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe pour tout $c \in G'_{\mathbb{R}}$, et a donc au plus un point critique, qui est la solution éventuelle de $\Psi_x(g)=c$, d'où l'injectivité. \square

(ii) L'image de Ψ_x est $\overset{\circ}{C}_{J(x)}$: cette image est ouverte d'après (i) et incluse dans $C_{J(x)}$ par définition de F , et il suffit donc de prouver que

$$\partial(\Psi_x(G_{\mathbb{R}})) \subset \partial C_{J(x)}.$$

Soit donc $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $G_{\mathbb{R}}$, telle que $\Psi_x(g_k)$ converge vers un point c de $\partial(\Psi_x(G_{\mathbb{R}}))$. Quitte à remplacer (g_k) par une sous-suite, on peut supposer que g_k tend vers l'infini (car c ne serait pas un point frontière si (g_k) était bornée), et, étant donnée une norme $g \longmapsto |g|$ sur $G_{\mathbb{R}}$, que $\frac{g_k}{|g_k|}$ tend vers une limite $g \in G_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ (car la sphère unité de $G_{\mathbb{R}}$ est compacte).

Par définition de Ψ_x , on peut écrire

$$\Psi_x(g_k) = \sum_{i \in J(x)} |x_i|^2 e^{2|g_k|} < c_i, \quad g + \left(\frac{g_k}{|g_k|} - g\right) > c_i,$$

d'où en particulier $c \in C_I$, où $I = \{i \in J(x) : < c_i, g > \geq 0\}$. De plus, en écrivant que $< \Psi_x(g_k), g >$ ne tend pas vers $+\infty$, on obtient

$$\forall i \in J(x), \quad < c_i, g > \leq 0,$$

d'où $C_I \subset \partial C_{J(x)}$. \blacksquare

Nous noterons \mathcal{V} la réunion des v.f.i. de σ .

COROLLAIRE 1. Pour que $x \in E$ appartienne à \mathcal{V} , il faut et il suffit que l'on ait $F(\tilde{\sigma}(G_{\mathbb{R}})_x) \neq G'_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. D'après la proposition 1 de (4.4.1), x appartient à \mathcal{V} si et seulement si il existe un demi-espace fermé D de $G'_{\mathbb{R}}$ vérifiant $\partial D \ni 0$ et contenant $C_{J(x)}$. Par conséquent, comme $F(\tilde{\sigma}(G_{\mathbb{R}})_x) \subset C_{J(x)}$, la condition est nécessaire. Réciproquement, si $F(\tilde{\sigma}(G_{\mathbb{R}})_x) \neq G'_{\mathbb{R}}$, deux cas se présentent :

- Pour $V_{J(x)} \neq G'_{\mathbb{R}}$, n'importe quel D vérifiant $V_{J(x)} \subset \partial D$ contient $C_{J(x)}$, d'où $x \in \mathcal{V}$.

- Sinon, d'après le théorème 1, $F(\widetilde{\sigma}(G_{\mathbb{R}})x) = \overset{\circ}{C}_{J(x)}$, et $C_{J(x)}$ est donc un cône convexe fermé de sommet 0, d'intérieur non vide et distinct de $G'_{\mathbb{R}}$, donc contenu dans un D . ■

Soit, pour chaque $b \in G'_{\mathbb{R}}$, $\hat{\mathcal{V}}_b$ la réunion des v.f.i. de σ sur lesquelles F ne prend pas la valeur b .

COROLLAIRE 2. Pour toute valeur régulière b de F , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $x \in \hat{\mathcal{V}}_b$.
- (ii) $b \notin \overset{\circ}{C}_{J(x)}$.

Démonstration. Si (i) est vérifiée, b n'appartient évidemment pas à $F(\widetilde{\sigma}(G_{\mathbb{R}})x)$, lequel est égal à $\overset{\circ}{C}_{J(x)}$ dès que celui-ci est non vide, d'où (ii).

Réciproquement, si (ii) est satisfaite, il résulte de la proposition 3(iii) que $C_{J(x)}$ ne contient pas b , et peut donc en être séparé par un hyperplan de $G'_{\mathbb{R}}$ passant par l'origine, d'où (i) par (4.4.1), proposition 1. ■

Pour tout $b \in G'_{\mathbb{R}}$, soient $E_b = E \setminus \hat{\mathcal{V}}_b$ et $Q_b = F^{-1}(b)$.

COROLLAIRE 3. Pour toute valeur régulière b de F , Q_b est un quotient de E_b par σ , en ce sens que toute orbite de σ qui n'est pas contenue dans $\hat{\mathcal{V}}_b$ coupe Q_b transversalement, en un point et un seul (Q_b est donc difféomorphe à l'espace des orbites de $\sigma|_{G \times_{\mathbb{R}} E_b}$).

Cela résulte immédiatement du théorème 1 et du corollaire 2. ■

COMMENTAIRE. pour $r > 0$, l'espace des orbites de σ est un ensemble stratifié non séparé. Bien que la structure de cet ensemble stratifié soit à l'évidence

intéressante, nous allons dans ce qui suit éviter d'aborder de front son étude. Il n'est pas trop difficile de prouver que, si $U_0 \subset E$ est maximal (pour l'inclusion) parmi les $U \subset E$ tels que $\sigma(G \times U) = U$ et que l'espace des orbites de $\sigma|_{G \times U}$ soit une variété (analytique) séparée, alors U_0 est de la forme E_b pour une valeur régulière b de F . Comme U_0 est alors un "très gros" ouvert dense (son complémentaire est une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts), il n'est pas déraisonnable de baptiser Q_b "quasi-quotient" de E par σ .

(5.2.) Application à l'étude des orbites de σ

PROPOSITION 1. Presque toute suite $\{0\} = H_0 \subset \dots \subset H_r = G_{\mathbb{R}}$ de sous-espaces vectoriels de $G_{\mathbb{R}}$ tels que $\dim_{\mathbb{R}} H_j = j$ pour tout j possède la propriété suivante : pour chaque $j \in \{0, \dots, r\}$, si $\pi_j : H'_r \longrightarrow H'_j$ désigne la surjection canonique $c \longmapsto c|_{H_j}$, alors quel que soit $I \subset I_n$, $\pi_j|_{V_I}$ est de rang maximum. Etant donnée une telle suite (H_j) , l'action $\sigma_j = \sigma|_{H_j \times E}$ est faiblement hyperbolique pour tout j .

Démonstration. On prouve sans peine que l'ensemble des hyperplans H_{r-1} de $G_{\mathbb{R}}$ tels que la projection $\pi_{r-1} : G'_{\mathbb{R}} \longrightarrow H'_{r-1}$ possède la propriété souhaitée a un complémentaire fermé et de mesure nulle dans la grassmannienne des hyperplans de $G_{\mathbb{R}}$. Pour chaque choix d'un tel H_{r-1} , l'ensemble des hyperplans H_{r-2} de H_{r-1} tels que la projection $\pi_{r-2}^{r-1} : H'_{r-1} \longrightarrow H'_r$ ait la même propriété (en remplaçant σ par σ_{r-1}) est lui aussi un ouvert de mesure pleine. On conclut donc de proche en proche en donnant un sens précis à "presque toute suite". ■

DANS CE QUI SUIT, ON SE FIXE UNE SUITE (H_j) SATISFAISANT LES HYPOTHÈSES DE LA PROPOSITION 1.

PROPOSITION 2. L'ensemble des $b \in G'_{\mathbb{R}}$ tels que $b_j = \pi_j(b)$ soit une valeur régulière de $F_j = \pi_j \circ F : E \longrightarrow H'_j$ pour tout j est le complémentaire d'un fermé de mesure nulle dans $G'_{\mathbb{R}}$. ■

DANS LA SUITE, ON SUPPOSE FIXE UN $b \in G'_{\mathbb{R}}$ SATISFAISANT LES HYPOTHÈSES DE LA PROPOSITION 2 .

NOTATIONS. Soit $\xi : G_{\mathbb{R}} \longrightarrow g^{\mathbb{L}}(E)$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie donné par $\xi(g) = \frac{d}{dt} \sigma(tg)|_{t=0}$. Pour chaque $j \in \{0, \dots, r\}$, les résultats de (5.1) restent valides si l'on y remplace σ par σ_j et F par F_j , et nous noterons \mathcal{V}_j la réunion des v.f.i. de $\sigma_j = \sigma|_{H_j \times E}$, $Q_{b_j} = F_j^{-1}(b_j)$, $\hat{\mathcal{V}}_{b_j}$ la réunion des v.f.i. de σ_j qui ne rencontrent pas Q_{b_j} et $E_{b_j} = E \setminus \hat{\mathcal{V}}_{b_j}$.

Du corollaire 3 de (5.1), on déduit facilement la

PROPOSITION 3. Quel que soit j , l'application $\varphi_{b_j} : Q_{b_j} \times H_j \longrightarrow E_{b_j}$ définie par $\varphi_{b_j}(x, g) = \tilde{\sigma}_j(g)x$ est un difféomorphisme analytique. Etant donné un choix quelconque de $u \in H_{j+1} \setminus H_j$ (pour $j < r$), on a

$\forall (x, g, g', t) \in Q_{b_j} \times H_j \times H_j \times \mathbb{R}$, $(\varphi_{b_j}^* \sigma(tu + g'))(x, g) = (\tilde{\Phi}_{b_j}^t(x), g + g' + \int_0^t g_{b_j} \circ \tilde{\Phi}_{b_j}^s(x) ds)$,
où $(\tilde{\Phi}_{b_j}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot sur Q_{b_j} dont le générateur infinitésimal en chaque $x \in Q_{b_j}$ est la projection de $\xi(u)x$ sur $T_x Q_{b_j}$ parallèlement à l'espace tangent $\xi(H_j)x$ à l'orbite $\sigma_j(H_j)x$, l'application (analytique) $g_{b_j} : Q_{b_j} \longrightarrow H_j$ étant définie par $\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_{b_j}^t(x)|_{t=0} = \xi(u - g_{b_j}(x))x$ pour tout $x \in Q_{b_j}$. ■

COMMENTAIRES. - Le flot $\tilde{\Phi}_{b_j}^t$ est donc complet, et les orbites $\tilde{\Phi}_{b_j}^{\mathbb{R}}(x)$ sont exactement les intersections avec Q_{b_j} des orbites de $\sigma_{j+1}|_{H_{j+1} \times E_{b_j}}$.

- La bonne manière de voir les choses est de considérer

$(t, x) \longmapsto \tilde{\Phi}_{b_j}^t(x)$, via la base de H_{j+1}/H_j définie par u , comme l'action de H_{j+1}/H_j sur l'espace des orbites de $\sigma_j|_{H_j \times E_{b_j}}$ canoniquement associée à σ_{j+1} .

EXERCICE. Dessiner les orbites de σ_1 , de $(\tilde{\Phi}_{b_1}^t)$ et de σ lorsque $G_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ et

$E = \mathbb{R}^3$, en envisageant tous les cas possibles (domaine de Siegel ou domaine de Poincaré avec des α_i plus ou moins réelles et nombreuses).

DANS CE QUI SUIT, $j \in \{0, \dots, r-1\}$ ET $u \in H_{j+1} \setminus H_j$ SONT FIXÉS, LES NOTATIONS SONT CELLES DE LA PROPOSITION 3, ET L'ON POSE $c = b_j$. LES RÉSULTATS DE (5.1) SERONT APPLIQUÉS EN Y REMPLACANT (σ, F) PAR (σ_j, F_j) .

PROPOSITION 4. Pour toute v.f.i. W de σ_j , $W \cap Q_c$ est une sous-variété compacte de Q_c , invariante par le flot Φ_c^t .

Démonstration. Comme W est invariante par σ_{j+1} , $W \cap Q_c$ l'est par (Φ_c^t) d'après la proposition 3. C'est une sous-variété d'après (5.1), Proposition 3(iv), compacte d'après (5.1), Proposition 4. ■

Soit K_j l'ensemble des $I \subset I_n$ possédant les deux propriétés suivantes:

- (i) $\dim V_I = j$
- (ii) $I = \{i \in I_n : c_i \in V_I\}$

EXERCICE. Si σ_{j+1} est hyperbolique, alors $I \in K_j$ si et seulement si $\# I = j$.

NOTATION. On pose $V_{j,I} = \pi_j(V_I)$ et $C_{j,I} = \pi_j(C_I)$ pour $I \subset I_n$.

PROPOSITION 5. Pour tout $I \in K_j$, il existe un unique $g_I \in H_j$ tel que
 $V_{j+1,I} = \{\gamma \in H'_{j+1} : \langle \gamma, u - g_I \rangle = 0\}.$

Démonstration. L'unicité est claire. L'existence vient de notre hypothèse sur la suite $H_0 \subset \dots \subset H_r$, qui implique que $V_{j,I} = H'_j$ et que l'application $\gamma \mapsto \gamma|_{H_j}$ soit un isomorphisme de $V_{j+1,I}$ sur H'_j , d'où il résulte que l'orthogonal de $V_{j+1,I}$ dans H_{j+1} n'est pas contenu dans H_j . ■

Soit \mathfrak{J}_c la partie de K_j formée des I tels que $c \in C_{j,I}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\Sigma_{c,I} = Q_c \cap E_I \neq \emptyset.$$

Pour chaque $I \in \mathfrak{J}_c$, nous appellerons $E_{c,I}$ l'ouvert σ -invariant de E donné par

$$E_{c,I} = \{x \in E : c \in C_{j, I \cap J(x)}\}$$

et $Q_{c,I}$ la sous-variété fermée de E , contenue dans $E_{c,I}$ et définie par

$$Q_{c,I} = \{x \in E : F_j(x_I) = c\},$$

où, si

$$\hat{I} = I_n \setminus I,$$

x_I désigne la projection de x sur E_I parallèlement à E_I^\perp .

PROPOSITION 6. On a

$$E_c = \bigcup_{I \in \mathfrak{J}_c} E_{c,I},$$

et, pour chaque $I \in \mathfrak{J}_c$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\Sigma_{c,I}$ est une sous-variété compacte de Q_c , invariante par le flot Φ_c^t et contenue dans \mathcal{V}_j .

(ii) L'isomorphisme canonique de $E = E_I \oplus E_I^\perp$ sur $E_I \times E_I^\perp$ identifie $Q_{c,I}$ à $\Sigma_{c,I} \times E_I^\perp$ et $E_{c,I}$ à $(E_c \cap E_I) \times E_I^\perp$.

(iii) $Q_{c,I}$ est un quotient de $E_{c,I}$ par σ_j au sens de (5.1), corollaire 3, et l'image $(\Phi_{c,I}^t)$ du flot (Φ_c^t) par le difféomorphisme canonique du quotient $Q_c \cap E_{c,I}$ de $E_{c,I}$ par σ_j sur son quotient $Q_{c,I}$ est telle que

$$\frac{d}{dt} \Phi_{c,I}^t |_{t=0} = \xi(u - g_I) |_{Q_{c,I}}.$$

Démonstration. Si $j = 0$, toutes nos affirmations sont triviales.

Sinon, pour tout $x \in \hat{\mathcal{V}}_c$, il résulte de (5.1), corollaire 2 et proposition 3(iii) que $c \notin C_{j, J(x)}$, d'où

$$\bigcup_{I \in \mathfrak{J}_c} E_{c,I} \subset E_c.$$

Réciproquement, quel que soit $x \in E_c$, on a $c \in \overset{\circ}{C}_{j,J(x)}$ d'après (5.1), corollaire 2, et il existe donc $J \subset J(x)$ avec $\# J = j$, tel que $c \in \overset{\circ}{C}_{j,J}$, d'où en particulier $\dim V_J = j$. Si $I \in \mathcal{K}_j$ est défini par $V_I = V_J$, alors I appartient à \mathcal{J}_c et x à $E_{c,I}$, ce qui prouve notre première affirmation.

- Point (i). Le même argument que pour la proposition 4 montre que $\Sigma_{c,I}$ est une sous-variété fermée, invariante par Φ_c^t . D'après la proposition 4, $\mathcal{V}_j \cap Q_c$ est compact, et il ne nous reste plus qu'à établir qu'il contient $\Sigma_{c,I}$.

Comme σ_{j+1} est faiblement hyperbolique, on a $C_{j+1,I} \neq V_{j+1,I}$, d'où $C_{j,I} \neq V_{j,I} = H'_j$, car l'application $\gamma \mapsto \gamma|_{H_j}$ est un isomorphisme de $V_{j+1,I}$ sur H'_j . On conclut par (5.1), corollaire 1.

- Point (ii). La seule assertion non triviale est l'inclusion $E_I \cap E_c \subset E_I \cap E_{c,I}$. Or, pour tout $x \in E_I \cap E_c$, on a $c \in C_{j,J(x)}$ d'après (5.1), corollaire 2, d'où le résultat cherché puisque $J(x) = I \cap J(x)$.

- Point (iii). Moyennant l'identification (ii), quels que soient $g \in H_r$ et $(y,z) \in (E_I \cap E_c) \times E_I^\wedge$, on a

$$\tilde{\sigma}(g)(y,z) = (\tilde{\sigma}(g)y, \tilde{\sigma}(g)z) \in (E_I \cap E_c) \times E_I^\wedge.$$

Comme $\Sigma_{c,I}$ est évidemment un quotient de $E_I \cap E_c$ par σ_j , il en résulte que $Q_{c,I} = \Sigma_{c,I} \times E_I^\wedge$ est un quotient de $E_{c,I}$ par σ_j .

Il est "fonctoriellement" évident que le générateur infinitésimal de $\Phi_{c,I}^t$ s'obtient, en chaque $x \in Q_{c,I}$, en projetant $\xi(u)x$ sur $T_x Q_{c,I}$, parallèlement à $T_x(\sigma(H_j)x) = \xi(H_j)x$. Il suffit donc de vérifier que $\xi(u-g_I)x$ est tangent à $Q_{c,I}$, c'est-à-dire que $\xi(u-g_I)x_I$ est tangent à $\Sigma_{c,I}$. Or (proposition 5)

$$DF_j(x_I) \cdot \xi(u-g_I)x_I = \sum_{i \in I} \langle c_i, u-g_I \rangle |x_i|^2 \pi_j(c_i) = 0. \quad \blacksquare$$

REMARQUE. Comme les restrictions de Φ_c^t et $\Phi_{c,I}^t$ à $\Sigma_{c,I}$ coïncident, nous venons de prouver que $g_c(\Sigma_{c,I}) = \{g_I\}$.

Pour chaque $I \in \mathcal{K}_j$, soient I^+ , I^- , I_0^+ et I_0^- les parties de I_n définies par

$$I^\pm = \{i \in I_n : \pm < c_i, u-g_I > < 0\} \text{ et } I_0^\pm = I \cup I^\pm.$$

DÉFINITION. Une action R de $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} sur une variété Q est dite simplement hyperbolique normalement à une sous-variété compacte Σ de Q lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Σ est R -invariante

(ii) Etant donné un choix (quelconque) d'une distance riemannienne d sur Q , les ensembles W^+ et W^- définis par

$$W^\pm = \{x \in Q : \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \text{Log } d(R(\pm t, x), \Sigma) < 0\}$$

sont des sous-variétés de Q , appelées respectivement variété stable et variété instable de R en Σ , et vérifient

$$\begin{cases} W^+ \cap W^- = \Sigma \\ \forall x \in \Sigma, T_x W^+ + T_x W^- = T_x Q. \end{cases}$$

(La définition de W^+ et W^- ne dépend évidemment pas du choix de d).

THÉORÈME 1. (i) Quel que soit $I \in \mathcal{J}_c$, le flot (Φ_c^t) est simplement hyperbolique normalement à $\Sigma_{c,I}$, de variétés stable $W_{c,I}^+$ et instable $W_{c,I}^-$ données par
 $W_{c,I}^\pm = E_{c,I} \cap Q \cap E_{I_0}^\pm$ Plus précisément, quels que soient $x \in Q_{c,I}$ et $t > 0$,
on a, avec les notations de la proposition 6,

$$\begin{cases} |x_{I^+}| e^{\Lambda_I^+ t} \leq |\Phi_{c,I}^t(x)_{I^+}| \leq |x_{I^+}| e^{\lambda_I^+ t} \\ |x_{I^-}| e^{\Lambda_I^- t} \leq |\Phi_{c,I}^{-t}(x)_{I^-}| \leq |x_{I^-}| e^{\lambda_I^- t}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \lambda_{I^\pm} = \max \{ \pm \langle c_i, u - g_I \rangle : i \in I^\pm \} < 0 \\ \Lambda_{I^\pm} = \min \{ \pm \langle c_i, u - g_I \rangle : i \in I^\pm \} < 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \bigcup_{I \in \mathfrak{J}_c} (W_{c,I}^+ \cup W_{c,I}^-) = \mathcal{V}_{j+1} \cap Q_c .$$

Démonstration. Point (i). Comme $E_{c,I}$ et $E_{I_0^\pm}$ sont σ -invariants, il suffit de

prouver l'assertion sur $(\Phi_{c,I}^t)$. D'après la proposition 6(iii), on a

$$\Phi_{c,I}^t(x)_{I^+} = \sigma(t(u - g_I), x_{I^+}), \text{ et donc}$$

$$|\Phi_{c,I}^t(x)_{I^+}|^2 = \sum_{i \in I^+} |x_i|^2 e^{2\langle c_i, u - g_I \rangle t},$$

d'où le résultat cherché, le cas de I^- se traitant de même.

Point(ii). L'inclusion du membre de gauche dans celui de droite est claire car, pour tout $I \in \mathcal{K}_j$, $E_{I_0^+}$ et $E_{I_0^-}$ sont des v.f.i. de σ_{j+1} d'après (4.4.1), proposition 1.

Inversement, étant donné $x \in \mathcal{V}_{j+1} \cap Q_c$, deux cas sont possibles :

- si $\dim V_{J(x)} \leq j$, alors $\dim V_{J(x)} = j$ d'après (5.1), proposition 3, et $x \in \Sigma_{c,I}$, où $I \in \mathfrak{J}_c$ est défini par $V_I = V_{J(x)}$.

- sinon, on a le

LEMME 1. Si $\pi : H_{j+1}^! \longrightarrow H_j^!$ est défini par $\pi(\gamma) = \gamma|_{H_h}$, alors

$$\pi^{-1}(c) \cap \partial C_{j+1}, J(x) \neq \emptyset .$$

Par conséquent, il existe $K \subset J(x)$ tel que $\dim V_K = j$ et que

$$\pi^{-1}(c) \cap C_{j+1,K} \neq \emptyset \text{ et } C_{j+1,K} \subset \partial C_{j+1,J(x)} .$$

Preuve. Comme $\partial C_{j+1,J(x)}$ est une réunion de tels cônes $C_{j+1,K}$, les deux assertions du lemme sont équivalentes.

En raison de (5.1), corollaire 1 et théorème 1, on a $C_{j+1, J(x)} \not\subset H_{j+1}^1$. Si le lemme n'était pas vérifié, $\pi^{-1}(0)$ serait inclus dans $\partial C_{j+1, J(x)}$, et il existerait donc $L \subset J(x)$ avec $\dim V_L = j$ et $C_{j+1, L} \subset \partial C_{j+1, J(x)}$, tel que $C_{j+1, L}$ contienne une des deux demi-droites d'origine 0 contenues dans $\pi^{-1}(0)$. Par suite, on aurait $\pi^{-1}(0) \subset V_{j+1, L}$, d'où il résulterait que $\pi|_{V_{j+1, L}}$, et donc $\pi_j|_{V_L}$, ne serait pas de rang maximum, contrairement à notre hypothèse sur la suite $H_0 \subset \dots \subset H_r$. \square

Si K vérifie la conclusion du lemme 1, soit $I \supset K$ l'élément de \mathcal{K}_j défini par $V_I = V_K$. Comme c appartient à $C_{j, K}$, on a $I \in \mathcal{J}_c$, et on déduit de l'inclusion $C_{j, K} \subset C_{j, I \cap J(x)}$ que x appartient à $E_{c, I}$. Enfin, $V_{j+1, I}$ étant un hyperplan d'appui de $C_{j+1, J(x)}$, x appartient à $E_{I_0^+}$ ou à $E_{I_0^-}$. \blacksquare

Au passage nous avons prouvé la

PROPOSITION 7. Les $\Sigma_{c, I}$ avec $I \in \mathcal{J}_c$ sont deux à deux disjointes. Pour que $x \in Q_c$ appartienne à $\Sigma_c = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_c} \Sigma_{c, I}$, il faut et il suffit que $\dim V_{J(x)} \leq j$.
On a alors $\dim V_{J(x)} = j$, et x appartient à $\Sigma_{c, I}$, où $I \in \mathcal{J}_c$ est défini par $V_I = V_{J(x)}$. \blacksquare

THÉOREME 2. La fonction $f_c : Q_c \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_c(x) = \langle F(x), u \rangle$$

possède les propriétés suivantes :

- (i) L'ensemble de ses points critiques est Σ_c , et $f_c(\Sigma_{c, I}) = \{\langle c, g_I \rangle\}$ pour tout $I \in \mathcal{J}_c$.
- (ii) Quel que soit $x \in Q_c \setminus \Sigma_c$, la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{x} f_c \circ \Phi_c^t(x) \in \mathbb{R}$$

est strictement croissante.

(iii) Pour que Ψ_x soit bornée supérieurement (resp. inférieurement), il faut et il suffit que x appartienne à $W_{c,I}^+$ (resp. $W_{c,I}^-$) pour un $I \in \mathfrak{I}_c$.

Démonstration. Point (i). Le lieu critique de f_c est l'intersection avec Q_c de celui de F_{j+1} , car c est une valeur régulière de F_j . Notre première assertion résulte donc de (5.1), proposition 2, et de la proposition 7.

Etant donné $x \in \Sigma_{c,I}$, on a bien

$$f_c(x) = \sum_{i \in I} \langle c_i, u - g_I \rangle |x_i|^2 + \langle F_j(x), g_I \rangle = \langle c, g_I \rangle.$$

Point (ii). Si $x^t = \Phi_c^t(x)$, on a

$$D\Psi_x(t) = \langle DF(x^t), \xi(u - g_c(x^t))x^t, u \rangle.$$

Comme $\xi(u - g_c(x^t))x^t$ est tangent à $Q_c = F_j^{-1}(c)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} D\Psi_x(t) &= \langle DF(x^t), \xi(u - g_c(x^t))x^t, u - g_c(x^t) \rangle = \\ &= \sum_{i \in J(x^t)} |x_i^t|^2 c_i(u - g_c(x^t))^2. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3, on a $J(x^t) = J(x)$. Comme x n'appartient pas à Σ_c , on a, d'après la proposition 7, $V_{j+1, J(x)} = H_{j+1}^1$. Par conséquent, puisque $u - g_c(x^t)$ ne peut pas être nul, l'un au moins des $c_i(u - g_c(x^t))$ est non nul, d'où $D\Psi_x(t) > 0$.

Point (iii). Comme $\{x^t\}_{t \in \mathbb{R}} = Q_c \cap \widetilde{\sigma}(H_{j+1})x$, il résulte de (5.1), corollaire 1, que, si Ψ_x est bornée supérieurement ou inférieurement, alors $x \in \mathcal{V}_{j+1}$. De plus, la proposition 4 de (5.1) entraîne que $f_c|_{\mathcal{V}_{j+1} \cap Q_c}$ est propre. Par conséquent, si Ψ_x est bornée (par exemple) supérieurement, il existe une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{R} et tendant vers $+\infty$, telle que $(x^{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ait une limite $y \in Q_c$. D'après la première affirmation de la proposition 6, il existe $I \in \mathfrak{I}_c$ tel que $y \in E_{c,I}$, d'où l'on déduit immédiatement (en utilisant la "carte" $Q_{c,I}$) que $y \in \Sigma_{c,I}$ et donc $x \in W_{c,I}^+$. ■

EXERCICE. Si σ_{j+1} est hyperbolique, montrer que, pour chaque $I \in \mathfrak{J}_c$, il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in]0, \infty[^I$ tel que

$$\Sigma_{c,I} = \{x \in E_I : \forall i \in I, |x_i| = \lambda_i\}.$$

(En particulier, dans le cas "générique" où σ_{j+1} est fortement hyperbolique, chaque $\Sigma_{c,I}$ est une réunion finie de tores.)

En déduire qu'il est possible d'utiliser les

$$\{x \in E : \forall i \in I, |x_i| = 1\}$$

à la place des $Q_{c,I}$, et que $E_{c,I} = \{x \in E : \forall i \in I, x_i \neq 0\}$.

Ce qui suit constitue une première étape, suffisant à nos besoins, dans le passage des "quasi-quotients" au véritable espace des orbites de σ (ou de σ_j).

PROPOSITION 8. Pour chaque $j \in \{0, \dots, r\}$, chaque valeur régulière c de F_j et chaque v.f.i. W de σ_j , si l'on pose

$$\forall x \in E, d(x, W) = \inf \{|x-y| : y \in W\},$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Lorsque $W \subset \hat{\mathcal{V}}_c$, on a $\inf \{d(x, W) : x \in Q_c\} > 0$.

(ii) Sinon, les ensembles $B_k = \{x \in Q_c : d(x, W) < 2^{-k}\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ forment une base du filtre des voisinages de $W \cap Q_c$ dans Q_c .

Démonstration. Soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $B'_k = \{x \in Q_c : d(x, W) \leq 2^{-k}\}$.

Etant donné $g \in H_j$ tel que W soit la variété instable de $\sigma(g)$, posons

$I = \{i \in I_n : \langle c_i, g \rangle > 0\}$. De l'identité

$$\forall x \in Q_c, \quad \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \langle c_i, g \rangle = 2 \langle c, g \rangle - \sum_{i \in \hat{I}} |x_i|^2 < \langle c_i, g \rangle,$$

on déduit que les B'_k sont compacts, d'où, puisque

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B'_k = W \cap Q_c ,$$

le résultat cherché. ■

THÉOREME 3. Pour chaque $j \in \{0, \dots, r\}$ et chaque valeur régulière c de F_j , si U_0 est un voisinage ouvert du compact $\mathcal{V}_j \cap Q_c$ dans Q_c , alors $U = \hat{\mathcal{V}}_c \cup \sigma(H_j)U_0$ est un voisinage ouvert de \mathcal{V}_j dans E .

Démonstration. D'après la proposition 3, $U \cap E_c$ est ouvert, et il résulte de (5.1), corollaire 3, et de l'invariance de \mathcal{V}_j par σ_j que $U \cap E_c$ contient $\mathcal{V}_j \cap E_c$.

Par conséquent, U contient \mathcal{V}_j , et notre problème est de prouver qu'il est ouvert, c'est-à-dire que, pour toute suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , de limite $x \in U$, tous les x^k sont dans U à partir d'un certain rang. Etant donnée une telle suite, seul le cas où x appartient à $\hat{\mathcal{V}}_c$ pose problème, d'après la proposition 3. De plus, les $x^k \in \hat{\mathcal{V}}_c$ étant dans U , nous sommes ramenés à prouver le

LEMME 2. Quelle que soit la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E_c , de limite $x \in \hat{\mathcal{V}}_c$, tous les x^k sont dans U à partir d'un certain rang.

Preuve. D'après la proposition 3, on peut écrire de manière unique

$$x^k = \sigma(g_k)y^k \text{ avec } g_k \in H_j \text{ et } y^k \in Q_c$$

pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit donc de prouver que $y^k \in U_0$ à partir d'un certain rang.

Supposons le contraire. Alors, quitte à extraire une sous-suite de (y^k) , nous pouvons faire l'hypothèse suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, y^k \in Q_c \setminus U_0 .$$

Nous allons voir que c'est impossible :

- Si (g_k) était bornée, alors, pour chaque $i \in I_n$, $|x_i^k| = |y_i^k| e^{<c_i, g_k>}$ tendrait vers 0 si et seulement si c'était le cas de y_i^k , ce qui est contraire à la proposition 8.

- Sinon, en remplaçant (x^k) par une sous-suite, on pourrait supposer que, étant donnée une norme quelconque sur H_j ,

$$|g_k| \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \left| \frac{g_k}{|g_k|} \right| \rightarrow g \in H_j \setminus \{0\} \quad \text{quand} \quad k \rightarrow \infty$$

Comme $|x_i^k| = |y_i^k| e^{<c_i, g_k>}$ et $|g_k| < c_i, g + \left(\frac{g_k}{|g_k|} - g \right) >$ pour tout $i \in I_n$,

il en résulterait que

$$\forall i \in I = \{i \in I_n : <c_i, g> > 0\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |y_i^k| = 0.$$

En d'autres termes, $d(y^k, E_{\hat{I}})$ tendrait vers 0. Comme $E_{\hat{I}}$ est une v.f.i. de σ_j d'après (4.4.1), proposition 1, on déduirait donc de la proposition 8 que le voisinage U_0 de $Q_c \cap E_{\hat{I}}$ contiendrait tous les y^k à partir d'un certain rang. ■

EXERCICE. Donner du théorème 3 (et du corollaire 3 de (5.1)) une démonstration "plus géométrique" en procédant par récurrence, à l'aide des propriétés des flots $(\tilde{\Phi}_{b_\ell}^t)$ ($0 \leq \ell < j$).

6. UN THÉORÈME DE LINÉARISATION DIFFÉRENTIABLE.

Dans ce qui suit, on désigne par G un groupe élémentaire, par $X \ni b$ une variété de dimension finie et par $\tilde{\rho}^1$ une représentation linéaire de G dans $E = T_b X$. A l'action ρ^1 de G sur E donnée par $\rho^1(g, x) = \tilde{\rho}^1(g)x$, on associe la décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ et des homomorphismes a_1, \dots, a_n , c_1, \dots, c_n comme dans (4.3.1). Nos hypothèses sont les suivantes :

- (i) L'action ρ^1 est faiblement hyperbolique, dans le domaine de Siegel.
- (ii) Pour $a_i(G) \not\subset \mathbb{R}$, la structure d'espace vectoriel réel de E_i provient d'une structure d'espace vectoriel complexe, et l'on a

$$\forall i \in I_n, \forall (g, x) \in G \times E_i, \rho^1(g, x) = a_i(g)x.$$

Le but de ce paragraphe est la démonstration du

THÉORÈME. Il existe une application $s : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \hookrightarrow$ telle que $s^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, la propriété suivante soit vérifiée : si $\rho \in \text{Act}_b^{s(\ell)}(G, X)$, de partie linéaire ρ^1 , est formellement linéarisable (à l'ordre $s(\ell)$), alors ρ est C^ℓ -linéarisable.

En particulier, pour $\ell = \infty$, ρ est linéarisable C^∞ si et seulement si elle l'est formellement.

Nous verrons dans l'appendice 7 comment se passer de l'hypothèse de semi-simplicité (ii), et, dans (6.3), que l'hyperbolicité faible est indispensable.

(6.1) Partie géométrique de la démonstration.

Dans ce qui suit, avec les notations de (4.3.1), on identifie H au sous-groupe fermé $j(H)$ de $G_{\mathbb{R}}$, et l'on se fixe une section de la projection canonique $G \longrightarrow H$, c'est-à-dire une identification

$$G = G_o \oplus H.$$

(6.1.1) Encore un peu d'algèbre.

Comme H est isomorphe à $\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{R}^m$, il est clair que, pour chaque $i \in I_n = \{1, \dots, n\}$ vérifiant $a_i(G) \not\subset \mathbb{R}$, il existe $\alpha_i \in L(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$ tel que l'on ait

$$\forall g \in H, a_i(g) = e^{\alpha_i(g)}.$$

Si l'on pose

$$\alpha_i = c_i \text{ pour tout } i \in I_n \text{ avec } a_i(G) \subset \mathbb{R},$$

soit $\tilde{\sigma}$ la représentation linéaire continue de $G_{\mathbb{R}}$ dans E donnée par

$$\forall i \in I_n, \forall (g, x) \in G_{\mathbb{R}} \times E, (\tilde{\sigma}(g)x)_i = e^{\alpha_i(g)} x_i.$$

La propriété suivante est évidente :

PROPOSITION 1. On a $\tilde{\sigma}|_{2H} = \tilde{\rho}^1|_{2H}$. ■

Dans la suite, on désigne par σ l'action de $G_{\mathbb{R}}$ sur E donnée par $\sigma(g, x) = \tilde{\sigma}(g)x$.

On a évidemment

$$(1) \quad \forall i \in I_n, \text{Log}|e^{\alpha_i(g)}| = \langle c_i, g \rangle \text{ pour tout } g,$$

et σ est donc faiblement hyperbolique. On applique à σ tout ce qui a été fait dans 5- , la seule différence étant que E_1, \dots, E_n sont ici les sous-espaces associés à ρ^1 par la proposition 3 de (4.3.1), et que l'on peut donc très bien avoir $\alpha_i = \alpha_j$ pour $i \neq j$. Je laisse le lecteur s'assurer que cela n'a aucune importance.

PROPOSITION 2. Il existe une suite $\{0\} = K_0 \subset \dots \subset K_r = H$ de sous-groupes fermés de H possédant les propriétés suivantes :

$$(i) \quad \begin{cases} K_j/K_{j-1} \simeq \mathbb{Z} \text{ et } K_j \simeq \mathbb{Z}^j \text{ pour } 1 \leq j \leq k \\ K_j/K_{j-1} \simeq \mathbb{R} \text{ et } K_j \simeq \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{R}^{j-k} \text{ pour } k < j \leq r \end{cases}$$

(ii) Si H_j désigne pour $0 \leq j \leq r$ le sous-espace vectoriel de $G_{\mathbb{R}}$ engendré par K_j , la suite (H_j) satisfait les hypothèses de (5.2), proposition 1.

En particulier, si $G_j = G_0 \oplus K_j$ ($0 \leq j \leq r$), les actions $\sigma|_{H_j \times E}$ et $\rho^1|_{G_j \times E}$ sont faiblement hyperboliques pour tout j .

Démonstration. Supposons construite une suite $K_\ell \subset \dots \subset K_r = H$ vérifiant (i) et (ii) pour $\ell \leq j \leq r$ (hypothèse trivialement satisfaite si $\ell = r$). Le problème est de construire $K_{\ell-1}$.

LEMME 1. Si la composante neutre N_ℓ de K_ℓ est non triviale (i.e. pour $\ell > k$),

alors, pour tout $c \in H_\ell^1$ non orthogonal à N_ℓ , le noyau $K_{\ell-1}$ de $c|_{K_\ell}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{R}^{\ell-k-1}$, et $K_\ell/K_{\ell-1}$, à \mathbb{R} .

Preuve. La composante neutre $N_{\ell-1} = N_\ell \cap K_{\ell-1}$ de $K_{\ell-1}$ est un hyperplan de N_ℓ . Si $u \in N_\ell$ vérifie $\langle c, u \rangle = 1$, on a

$$\forall g \in K_\ell, g = (g - \langle c, g \rangle u) + \langle c, g \rangle u,$$

et donc $K_\ell = K_{\ell-1} \oplus \mathbb{R}u$. De plus, étant donnée une décomposition $K_\ell = N_\ell \oplus M$, où M est un sous-groupe fermé de K_ℓ isomorphe à \mathbb{Z}^k , l'application

$$N_{\ell-1} \oplus M \ni g \longmapsto g - \langle c, g \rangle u \in K_{\ell-1}$$

est un isomorphisme. \square

Les $C \in H_\ell^1$ non orthogonaux à N_ℓ formant un ouvert dense, il suffit donc pour $\ell > k$ de choisir c dans l'intersection de celui-ci avec l'ouvert dense (cf. (5.2), proposition 1) réunion des $H_{\ell-1}^\perp$ tels que la suite $H_{\ell-1} \subset \dots \subset H_r = G_{\mathbb{R}}$ satisfasse (ii).

LEMME 2. Pour $\ell \leq k$, si (e_1, \dots, e_ℓ) est une base du \mathbb{Z} -module libre K_ℓ , les hyperplans $H_{\ell-1} = \text{Ker } c$, où $c \in H_\ell^1$ est tel que $\langle c, e_1 \rangle, \dots, \langle c, e_\ell \rangle$ soient entiers et premiers entre eux, forment un ensemble dense dans la grassmannienne des hyperplans de H_ℓ . Pour chacun d'entre eux, $K_{\ell-1} = H_{\ell-1} \cap K_\ell$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{\ell-1}$ et $K_\ell/K_{\ell-1}$ à \mathbb{Z} .

Preuve. La première assertion vient de ce que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . Pour montrer la seconde, introduisons un $u \in K_\ell$ tel que $\langle c, u \rangle = 1$. Il est alors clair (cf. la preuve du lemme 1) que $K_\ell = K_{\ell-1} \oplus \mathbb{Z}u$. Comme K_ℓ est libre de dimension ℓ et $K_{\ell-1}$ libre de type fini, $K_{\ell-1}$ est de dimension $\ell-1$. \square

Pour $\ell \leq k$, il suffit donc de choisir $H_{\ell-1} = \text{Ker } c$ dans l'intersection de l'ensemble dense défini par le lemme 2 et de l'ouvert dense réunion des $H_{\ell-1}$ tels que la suite $H_{\ell-1} \subset \dots \subset H_r = G_{\mathbb{R}}$ satisfasse (ii).

D'après la proposition 1 de (5.2), $\sigma|_{H_j \times E}$ est faiblement hyperbolique pour tout j , et il résulte de (1) que c'est donc le cas de $\rho^1|_{G_j \times E}$. ■

ON SE FIXE DÉSORMAIS UNE SUITE $G_0 \subset \dots \subset G_r = G$ SATISFAISANT LES HYPOTHÈSES DE LA PROPOSITION 2 ET UN $\rho \in \text{Act}_b^\infty(G, X)$ DE PARTIE LINÉAIRE ρ^1 , FORMELLEMENT ISOMORPHE A $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$.

(Nous nous préoccuperons du cas de la différentiabilité finie en fin de démonstration).

D'après le théorème (4.4.2 a), on peut supposer (ce que nous ferons) que

$$(2) \quad (X, b) = (E, 0)$$

et que, pour toute v.f.i. W de ρ^1 et tout $g \in G$ (resp. dans la composante neutre de G), on a

$$(3) \quad (j^\infty \tilde{\rho}(g))|_W = [j_W^\infty \tilde{\rho}^1(g)]_0$$

$$(\text{resp. } (j^\infty \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(tg)|_{t=0})|_W = [j_W^\infty \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(tg)|_{t=0}]_0) .$$

Pour linéariser ρ , nous allons procéder comme suit : si $\rho_j = \rho|_{G_j \times E}$ ($0 \leq j \leq r$) et si \mathcal{V} désigne la réunion des v.f.i. de ρ^1 (qui sont celles de σ), nous allons montrer par récurrence sur j le

THÉOREME j ($0 \leq j \leq r$). Il existe $\varphi_j \in \mathcal{L}_0^\infty(E)$ tel que $\varphi_j^* \rho_j = [\rho_j^1]_{G_j \times \{0\}}$ et $(j^\infty(\varphi_j - [\text{id}_E]_0))|_{\mathcal{V}} = 0$.

(Cette dernière condition est destinée à assurer que $\varphi_j^* \rho$ vérifie (3).)

Preuve du théorème 0. Soit R_0 une action de G_0 sur un ouvert $U \ni 0$ de E , représentant ρ_0 . Si N_0 désigne la composante neutre de G_0 , l'algèbre de Lie de N_0 est un espace vectoriel de dimension finie et G_0/N_0 un \mathbb{Z} -module de type fini. Par conséquent, il résulte de (3) que, quitte à restreindre un peu U , on peut

supposer que

$$j_{\mathcal{V} \cap U}^{\infty}(\tilde{R}(g) - \tilde{\rho}^1(g)) = 0 \text{ pour tout } g \in G_0.$$

Le théorème 0 se déduit donc immédiatement de la preuve du théorème (3.1.4). ■

DANS TOUTE LA SUITE, ON SUPPOSE LE THÉORÈME j PROUVÉ POUR UN $j \in \{0, \dots, r-1\}$.

En remplaçant ρ par $\varphi_j^* \rho$, on peut donc supposer, ce que nous ferons désormais, que

$$(4) \quad \rho_j = [\rho_j^1]_{G_j \times \{0\}}.$$

(6.1.2) Extension de ρ_{j+1}

Comme dans la preuve du théorème de Sternberg donnée dans (4.1), nous allons prolonger ρ_{j+1} en une action C^∞ de G_{j+1} sur E . Si l'on se fixe $u \in K_{j+1} \setminus K_j$ (dans la composante neutre de H pour $j \geq k$), il existe une boule ouverte ω de centre 0 dans E (pour la norme euclidienne introduite dans (5.1)), et, pour $j < k$ (resp. $\geq k$), un plongement h de ω dans E (resp. un champ de vecteurs η sur ω), de classe C^∞ , possédant les propriétés suivantes (cf. (4.4.0), théorème) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad [h]_0 = \tilde{\rho}(u) \quad (\text{resp. } [\eta]_0 = \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(tu)|_{t=0}) ; \\ (ii) \quad j_{\mathcal{V} \cap \omega}^{\infty}(h - \tilde{\rho}^1(u)) = 0 \quad (\text{resp. } j_{\mathcal{V} \cap \omega}^{\infty}(\eta - \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(tu)|_{t=0}) = 0) ; \\ (iii) \quad \forall g \in G_j, (\tilde{\rho}^1(g))^* h - h|_{\omega \cap \tilde{\rho}^1(-g)\omega} = 0 \\ \quad \quad \quad (\text{resp. } (\tilde{\rho}^1(g))^* \eta - \eta|_{\omega \cap \tilde{\rho}^1(-g)\omega} = 0) . \end{array} \right.$$

PROPOSITION 1. Il existe une unique extension, encore notée h (resp. η), de h (resp. η) à $\Omega = \tilde{\rho}^1(G_j)\omega$, telle que $(\tilde{\rho}^1(g))^* h - h|_{\Omega} = 0$ (resp. $(\tilde{\rho}^1(g)\eta - \eta)|_{\Omega} = 0$) pour tout $g \in G_j$.

L'ouvert Ω est un voisinage de la réunion \mathcal{V}_j des v.f.i. de ρ_j^1 , l'application h (resp. η) est de classe C^∞ , et

$$j_{\mathcal{V} \cap \Omega}^{\infty}(h - \tilde{\rho}^1(u)) = 0 \quad (\text{resp. } j_{\mathcal{V} \cap \Omega}^{\infty}(\eta - \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(tu)|_{t=0}) = 0). \quad \blacksquare$$

DANS CE QUI SUIT, LES NOTATIONS SONT CELLES DE 5- , ET UNE VALEUR RÉGULIÈRE $b_j = c$ DE F_j SATISFAISANT (5.2), PROPOSITION 1 EST FIXÉE.

PROPOSITION 2. Pour tout voisinage ouvert U_o du compact $\mathcal{V}_j \cap Q_c$ dans $\Omega \cap Q_c$, il existe une fonction $\theta_o \in C^\infty(Q_c, [0,1])$ à support compact contenu dans U_o , égale à 1 dans un voisinage de \mathcal{V}_j , et telle que $\theta_o(x)$ ne dépende que de $|x_1|^2, \dots, |x_n|^2$. Etant donnée une telle fonction, si $U = \hat{\mathcal{V}}_c \cup \tilde{\sigma}(H_j)U_o$, il existe une unique extension continue $\theta : U \longrightarrow [0,1]$ de θ_o vérifiant

$$\forall g \in H_j, \theta \circ \tilde{\sigma}(g) = \theta.$$

L'application θ est de classe C^∞ , égale à 1 dans un voisinage de \mathcal{V}_j , et $\theta(x)$ ne dépend que de $|x_1|^2, \dots, |x_n|^2$. En particulier, on a

$$\forall g \in G_j, \theta \circ \tilde{\rho}^1(g) = \theta.$$

Démonstration. Soit $v : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ une fonction C^∞ telle que

$$v^{-1}(1) =]-\infty, 1] \text{ et } v^{-1}(0) = [2, \infty[.$$

Désignons par W_1, \dots, W_m les v.f.i. de σ_j (ou de ρ_j^1) maximales pour l'inclusion. Il résulte de (5.2), proposition 8, que, si le réel $s > 0$ est assez grand, la fonction θ_o donnée par

$$(6) \quad \theta_o(x) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq m} v(s d(x, W_i)^2)}{\sum_{1 \leq i \leq m} v(s d(x, W_i)^2) + \prod_{1 \leq i \leq m} v(3-s d(x, W_i)^2)}$$

possède les propriétés requises. L'existence, l'unicité et la différentiabilité de $\theta|_{E_c}$ viennent de ce que Q_c est un quotient de E_c par σ_j . De plus, d'après (5.2), théorème 3, $\hat{\mathcal{V}}_c \cup (\theta|_{E_c})^{-1}(1) = \hat{\mathcal{V}}_c \cup \tilde{\sigma}(H_j)\theta_o^{-1}(1)$ est un voisinage de \mathcal{V}_j dans E , ce qui prouve que $\theta|_{E_c}$ se prolonge en une unique fonction $\theta \in C^\infty(E, [0,1])$, égale à 1 dans ce voisinage.

Enfin, pour tout $x \in E$, $\theta(x)$ ne dépend que de $|x_1|^2, \dots, |x_n|^2$: si $x \in \hat{\mathcal{V}}_c$, c'est évident d'après (5.1), corollaire 2. Sinon, on a

$\theta(x) = \theta_0(\sigma(-\gamma(x), x))$, où $\gamma(x) \in H_j$ est défini par $\sigma(-\gamma(x), x) \in Q_c$, c'est-à-dire par

$$\sum_{i \in I_n} |x_i|^2 e^{-2\langle c_i, \gamma(x) \rangle} c_i = 2c ;$$

notre affirmation sur θ résulte donc de ce que $\gamma(x)$, comme $\theta_0(x)$, ne dépend que de $|x_1|^2, \dots, |x_n|^2$. Quels que soient $g \in G_j$, $x \in E$ et $i \in I_n$, on a

$$|\rho^1(g, x)_i|^2 = |\sigma(g_{\mathbb{R}}, x)_i|^2 ,$$

où $g_{\mathbb{R}} \in H_j$ désigne l'image canonique de g , et donc

$$\theta(\rho^1(g, x)) = \theta(\sigma(g_{\mathbb{R}}, x)) = \theta(x) . \blacksquare$$

THÉOREME 1. On peut choisir θ_0 dans la proposition 2 de manière que $\text{supp } \theta$ soit contenu dans Ω et que, pour $j < k$ (resp. $\geq k$), les formules suivantes définissent une action R de G_{j+1} sur E :

$$\left\{ \begin{array}{l} R|_{G_j \times E} = \rho_j^1 \\ R(u, x) = \begin{cases} \rho^1(u, x) + \theta(x) (h(x) - \rho^1(u, x)) & \text{si } x \in \Omega \\ \rho^1(u, x) & \text{si } x \in E \setminus \Omega \end{cases} \\ (\text{resp. } \frac{d}{dt} R(tu, x)|_{t=0} = \begin{cases} \theta(x) \eta(x) + (1-\theta(x)) \frac{d}{dt} \rho^1(tu, x)|_{t=0} & \text{si } x \in \Omega \\ \frac{d}{dt} \rho^1(tu, x)|_{t=0} & \text{si } x \in E \setminus \Omega \end{cases}) \end{array} \right.$$

L'action R est alors de classe C^∞ , et l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} [R]_{G_{j+1} \times \{0\}} = \rho_{j+1} \\ \forall g \in G_{j+1}, j_{\mathcal{V}}^\infty(\tilde{R}(g) - \tilde{\rho}^1(g)) = 0 . \end{array} \right.$$

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe fermé discret de $2K_j$ tel que G_j/Γ soit compact. D'après (6.1.1), proposition 1, on a

$$\tilde{\rho}^1|_{\Gamma} = \tilde{\sigma}|_{\Gamma} ;$$

par conséquent, si $\varphi_c \in \text{Diff}^\infty(Q_c \times H_j, E_c)$ est donné (cf. (6.2), proposition 3)

par

$$\varphi_c(x, g) = \tilde{\sigma}(g)x ,$$

l'espace des orbites de $\rho^1|_{\Gamma \times E_c}$ s'identifie par φ_c à

$$\tilde{Q}_c = Q_c \times (H_j/\Gamma) .$$

Si $p_c : E_c \longrightarrow \tilde{Q}_c$ désigne la surjection canonique, l'invariance de $\Omega \cap E_c$ par $\rho^1|_{\Gamma \times E_c}$ se traduit par

$$\Omega \cap E_c = p_c^{-1} (p_c(\Omega \cap E_c))$$

LEMME 1. L'ensemble $\omega_o = Q_c \cap \bigcap_{g \in H_j} \tilde{\sigma}(g)\Omega$ est un voisinage ouvert de $\mathcal{V}_j \cap Q_c$ dans Q_c .

Preuve. On a évidemment $\omega_o = Q_c \setminus \text{pr}_1(\tilde{Q}_c \setminus p_c(\Omega \cap E_c))$, et l'on conclut en utilisant la compacité de H_j/Γ . \square

Si l'on choisit s dans (6) de façon à avoir $\text{supp } \theta_o \subset \omega_o$ - ce qui est possible d'après (5.2), proposition 8, on a $\text{supp } \theta \subset \hat{\mathcal{V}}_c \cup \tilde{\sigma}(H_j)\omega_o \subset \Omega$.

Fin de la démonstration pour $j \geq k$: la seule assertion non triviale est celle selon laquelle $\tilde{R}(tu)$ est bien défini pour tout t , problème qui ne se pose que dans E_c . Or, la restriction à E_c de $\frac{d}{dt} \tilde{R}(tu)|_{t=0}$ est un automorphisme infinitésimal du revêtement p_c , au-dessus d'un champ de vecteurs ζ de classe C^∞ sur \tilde{Q}_c . Il suffit donc de prouver que le flot de ζ est complet. C'est le cas du flot du champ de vecteurs ζ_o associé de même à $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^1(tu)|_{t=0}$, car $\tilde{\rho}^1(tu)$ est défini pour tout t . Comme ζ et ζ_o sont égaux en dehors du compact $p_c(E_c \cap \text{supp } \theta) = \text{supp } \theta_o \times (H_j/\Gamma)$, on conclut par (3.1.3), corollaire 3. \square

Fin de la démonstration pour $j < k$: la seule assertion non triviale - nous ne nous en servons d'ailleurs pas - est la possibilité de choisir θ_o de manière que $\tilde{R}(u)$ soit un difféomorphisme. Soient (e_1, \dots, e_j) une base du \mathbb{Z} -module libre Γ , et

$$\begin{cases} \Delta = \left\{ \sum_{i=1}^j \lambda_i e_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_j) \in [0, 1]^j \right\} \subset H_j \\ D = \sigma(\Delta \times Q_c) \subset E_c \end{cases}$$

LEMME 2. Si s est choisi assez grand dans (6), on a

$$\tilde{R}(u) (E_c) \subset E_c .$$

Preuve. Puisque $\sigma(\Gamma \times D) = E_c$ et que $\tilde{R}(u)$ commute à $\tilde{\sigma}(g) = \tilde{\rho}^1(g)$ pour tout $g \in \Gamma$, il s'agit de prouver l'inclusion

$$\tilde{R}(u) (D) \subset E_c ,$$

qui résulte évidemment de

$$\tilde{R}(u) (D \cap \text{supp } \theta) \subset E_c .$$

Or, cette dernière inclusion est claire pour s assez grand, car le compact $D \cap \text{supp } \theta = \sigma(\Delta \times \text{supp } \theta_0)$ tend vers $D \cap \mathcal{V}_j$ et $\tilde{R}(u) (D \cap \text{supp } \theta)$, vers $\tilde{\rho}^1(u) (D \cap \mathcal{V}_j)$ quand $s \rightarrow +\infty$. \square

Il suffit donc de prouver que $\tilde{R}(u)|_{E_c}$ est dans $\text{Diff}^\infty(E_c, E_c)$ pour s assez grand. Or, $\tilde{R}(u)|_{E_c}$ est un endomorphisme du revêtement p_c au-dessus d'une application $f \in C^\infty(\mathcal{Q}_c, \mathcal{Q}_c)$. L'application f_0 associée de même à $\tilde{\rho}^1(u)$ est évidemment un difféomorphisme. De plus, quand $s \rightarrow \infty$, f tend vers f_0 dans la topologie C^1 de Whitney, car $j_D^1 \tilde{R}(u)$ tend (exercice!) vers $j_D^1 \tilde{\rho}^1(u)$ pour la topologie C^0 de Whitney. On conclut donc du dernier corollaire de (2.4.2) que, pour s assez grand, f est un difféomorphisme. Par conséquent, c'est alors le cas de $\tilde{R}(u)|_{E_c}$. \blacksquare

(6.1.3) Ultime réduction du problème.

THÉORÈME. Si R est définie comme dans le théorème (6.1.2), alors, pour $j < k$ (resp. $\geq k$), quand $t \in \mathbb{Z}$ (resp. \mathbb{R}) tend vers $+\infty$,

$$h_t = \tilde{R}(tu) \circ \tilde{\rho}^1(-tu)$$

converge simplement vers une application $h_\infty \in C^\infty(E, E)$, possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall g \in G_{j+1} & , \quad h_\infty \circ \tilde{\rho}^1(g) = \tilde{R}(g) \circ h_\infty \\ j_{\mathcal{V}}^\infty(h_\infty - \text{id}_E) = 0 . \end{cases}$$

Une fois ce théorème établi, il est clair que $\varphi_{j+1} = [h_\infty]_0$ appartient à $\mathcal{B}_0^\infty(E)$ et linéarise ρ_{j+1} , ce qui prouve le théorème $j+1$ de (6.1.1), et donc notre théorème de linéarisation pour $\ell = \infty$.

L'énoncé précédent rappelle évidemment (4.1), lemme 3. Le commentaire géométrique fait dans (4.1) demeure valide, et nous sera cette fois très utile :

PROPOSITION 1. Soit $x = \sigma(g, x_0)$ ($x_0 \in Q_c$, $g \in H_j$) un point de E_c . Si

$$x_0 \notin \bigcup_{I \in \mathcal{I}_c} W_{c,I}^- ,$$

il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans Q_c et un $t_0 \in \mathbb{Z}$ tels que, si
 $U = \sigma(H_j \times U_0)$, on ait

$$\forall t \geq t_0 , \quad h_t|_U = h_{t_0}|_U .$$

Démonstration. Nous allons vérifier que

$$\begin{cases} t_0 = \min \{ t \in \mathbb{N} : f_c \circ \tilde{\Phi}_c^{1-t}(x_0) \leq C \} \\ U_0 = \tilde{\Phi}_c^{t_0} (f_c^{-1}(\cdot)_{-\infty} , C[\cdot)) , \end{cases}$$

où $C = \min f_c(\text{supp } \theta_0)$, répondent à la question. Tout d'abord, il résulte de (5.2), théorème 2, que t_0 est un entier bien défini, et donc que U_0 est un voisinage ouvert de x_0 dans Q_c .

Etant donné $y \in U$, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$y = \sigma(g, y_0) \text{ avec } g \in H_j \text{ et } y_0 \in U_0 .$$

Nous désirons prouver que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\tilde{R}((t_0+t)u) (\tilde{\rho}^1(-(t_0+t)u)y) = \tilde{R}(t_0 u) (\tilde{\rho}^1(-t_0 u)y) .$$

Pour cela, il suffit de montrer que

$$\tilde{R}(tu) (\tilde{\rho}^1(-tu)z) = z ,$$

où

$$z = \tilde{\rho}^1(-t_0 u) y .$$

Or, pour $0 \leq t' \leq t$,

$$\theta(\tilde{\rho}^1(-t'u)z) = \theta(\tilde{\rho}^1(-t'+t_0)u)y = \theta_0(\tilde{\rho}_c^{-t'-t_0}(y_0))$$

par définition de θ . Comme on a

$$f_c(\tilde{\rho}_c^{-t'-t_0}(y_0)) < C$$

d'après (5.2), théorème 2 et la définition de U_0 , on en déduit que

$$\theta(\tilde{\rho}^1(-t'u)z) = 0 \text{ pour tout } t' \in [0, t] .$$

Par conséquent,

$$\tilde{R}(t''u) (\tilde{\rho}^1(-tu)z) = \tilde{\rho}^1((t''-t)u)z \text{ pour tout } t'' \in [0, t] ,$$

d'où le résultat cherché. ■

De la proposition, on déduit facilement le

COROLLAIRE. Quand $t \longrightarrow +\infty$, h_t converge simplement vers une application

$h_\infty : E \longrightarrow E$, égale à l'identité sur \mathcal{V} , de classe C^∞ dans

$$E_{c,j+1} = E_c \setminus \bigcup_{I \in \mathfrak{J}_c} \sigma(H_j) W_{c,I}^- ,$$

ayant un contact infini avec id_E le long de $\mathcal{V} \cap E_{c,j+1}$, vérifiant $h_\infty(E_c) \subset E_c$ et

$h_\infty \circ \tilde{\rho}^1(g) = \tilde{R}(g) \circ h_\infty$ pour tout $g \in G_{j+1}$. ■

Il ne nous reste donc plus qu'à prouver que h_∞ est de classe C^∞ et a un contact infini avec id_E en tout point de $E \setminus E_{c,j+1}$, ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant, en utilisant un avatar "global" du théorème 2

de (4.2.3) (l'appendice 6, section (A6-4), contient un meilleur résultat).

(6.2) Partie analytique de la démonstration.

(6.2.1) Un théorème de prolongement.

Dans cette section, on se donne une variété N et un $\tilde{\Phi} \in \text{Diff}^\infty(N, N)$ possédant les propriétés suivantes :

1) Il existe un ensemble fini \mathfrak{I} et des sous-variétés compactes M_I , $I \in \mathfrak{I}$, de N , deux à deux disjointes et telles que l'action

$$\mathbb{Z} \times N \ni (\ell, x) \longmapsto \tilde{\Phi}^\ell(x)$$

soit simplement hyperbolique normalement à chaque M_I , de variétés stable Y_I^+ et instable Y_I^- .

2) Pour tout $I \in \mathfrak{I}$, il existe deux espaces euclidiens E_I^+ et E_I^- et un germe de C^∞ -difféomorphisme

$$\mathcal{C}_I : [N]_{M_I} \longrightarrow [Q_I]_{\Sigma_I},$$

où

$$Q_I = M_I \times E_I^+ \times E_I^- \quad \text{et} \quad \Sigma_I = M_I \times \{0\} \times \{0\} \subset Q_I,$$

tel que les hypothèses de (4.2.3), théorème 2 soient vérifiées par

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_I = (\mathcal{C}_I)_* [\tilde{\Phi}]_{M_I} \in \mathcal{L}_{\Sigma_I}^\infty(Q_I) \\ E^\pm = E_I^\pm, \Sigma = \Sigma_I \text{ et } [w^\pm]_\Sigma = \mathcal{C}_I([Y_I^\pm]_{M_I}). \end{cases}$$

3) Il existe une fonction $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(i) Elle est constante sur chaque M_I , et, pour tout $x \in N \setminus \bigcup_{I \in \mathfrak{I}} M_I$, la fonction $\chi_x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\chi_x(\ell) = f(\tilde{\Phi}^\ell(x))$ est strictement croissante.

(ii) Pour que χ_x soit bornée supérieurement (resp. inférieurement), il faut et il suffit que

$$x \in \bigcup_{I \in \mathfrak{J}} Y_I^+ \quad (\text{resp. } \bigcup_{I \in \mathfrak{J}} Y_I^-) .$$

(iii) Si $\mathcal{Y} = \bigcup_{I \in \mathfrak{J}} (Y_I^+ \cup Y_I^-)$, $f|_{\mathcal{Y}}$ est propre.

Soient $\gamma_1 < \dots < \gamma_m$ les réels définis par

$$f \left(\bigcup_{I \in \mathfrak{J}} \Sigma_I \right) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} ,$$

et, pour chaque $i \in I_m = \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{cases} \mathfrak{J}_i = \{I \in \mathfrak{J} : f(\Sigma_I) = \gamma_i\} \\ \hat{\mathcal{Y}}_i = \bigcup_{I \in \mathfrak{J}_i \cup \dots \cup \mathfrak{J}_m} Y_I^- , \\ \hat{\mathcal{Y}}_{m+1} = \emptyset \text{ et } \hat{\mathcal{Y}} = \hat{\mathcal{Y}}_1 . \end{cases}$$

PROPOSITION. (i) \mathcal{Y} et les $\hat{\mathcal{Y}}_i$, $i \in I_m$, sont fermés.

(ii) Pour chaque $I \in \mathfrak{J}$, soit h_I un difféomorphisme local représentant \mathcal{C}_I . Pour toute boule fermée B de centre 0 et de rayon assez petit dans E_I^\pm , le compact $K = h_I^{-1}(M_I \times B)$ vérifie $\hat{\Phi}^{\pm 1}(K) \subset \overset{\circ}{K}$, et $\hat{\Phi}|_{Y_I^\pm \setminus M_I}$ est déterminé par $\hat{\Phi}|_D$, où $D = \overset{\circ}{K} \setminus \hat{\Phi}^{\pm 1}(\overset{\circ}{K})$, $\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K dans Y_I^\pm .

(iii) Etant donnés $I \neq J$ dans \mathfrak{J} , la relation $Y_I^+ \cap \overline{Y_J^+} \neq \emptyset$ (resp. $Y_J^- \cap \overline{Y_I^-} \neq \emptyset$) est équivalente à $M_I \cap \overline{Y_J^+} \neq \emptyset$ (resp. $M_J \cap \overline{Y_I^-} \neq \emptyset$), et implique que l'on ait $f(M_I) < f(M_J)$.

(iv) Pour tout $i \in I_m$ et tout $I \in \mathfrak{J}_i$, $(N \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i) \cup Y_I^-$ est ouvert et invariant par $\hat{\Phi}$.

Démonstration. Point (i). Soit (x_n) une suite à valeurs dans \mathcal{Y} , de limite $x \in N$. Si K désigne une partie compacte de \mathbb{R} contenant $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$, alors (x_n) est à valeurs dans $(f|_{\mathcal{Y}})^{-1}(K)$, qui est compact d'après 3) (iii) et

contient donc x . Par conséquent, \mathcal{Y} est fermé. Pour chaque i ,

$$\hat{\mathcal{Y}}_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathcal{Y} : f(\Phi^{-n}(x)) \geq v_i\}$$

est fermé dans \mathcal{Y} , et donc dans N .

Point(ii). Exercice.

Point(iii). Si $x \in Y_J^-$ est adhérent à Y_I^- , tout voisinage de x contient des points de Y_I^- , et donc tout voisinage de $\Phi^n(x)$ contient des points de Y_I^- pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En faisant tendre n vers $-\infty$, on en déduit que $M_J \cap Y_I^- \neq \emptyset$. Comme I et J sont distincts, on a $M_J \cap Y_I^- = \emptyset$. Par conséquent, étant donné $D \subset Y_I^-$ M_I satisfaisant (ii), toute suite (y_n) à valeurs dans Y_I^- et de limite $y \in M_J$ s'écrit de manière unique $y_n = \Phi^{\ell_n}(x_n)$, avec $x_n \in D$ et $\ell_n \geq 1$ à partir d'un certain rang, d'où, d'après 3(i), $f(y_n) > f(x_n) \geq \min f(\bar{D}) > f(M_I)$, et, à la limite, $f(y) = f(M_J) > f(M_I)$.

Point (iv). L'ouvert $N \setminus \hat{\mathcal{Y}}_{i+1}$ est la réunion de l'ouvert $N \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i$ et des sous-variétés deux à deux disjointes Y_I^- avec $I \in \mathfrak{J}_i$. Il s'agit donc de prouver que, étant donnés $I \neq J$ dans \mathfrak{J}_i , on a $Y_I^- \cap \overline{Y_J^-} = \emptyset$, ce qui résulte de (iii), et que $(N \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i) \cup Y_I^-$ est invariant par Φ , ce qui provient de l'invariance de tous les Y_I^- . ■

Pour chaque $I \in \mathfrak{J}$, soit $s_I : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \ni$ l'application s associée à $\varphi = \varphi_I$ par le théorème 2 (ii) de (4.2.3). Nous noterons, pour chaque $i \in I_m$,

$$\begin{cases} t_i = \max \{s_I : I \in \mathfrak{J}_i\} \\ u_i = t_m \circ \dots \circ t_i : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \ni \end{cases}$$

et $u = u_1$. On a évidemment $u_i^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ pour tout i .

THÉOREME. Quels que soient $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, l'application $\Psi \in C^{u(\ell)}(N, N)$ vérifiant $j_{\mathcal{Y}}^{u(\ell)} \Psi = j_{\mathcal{Y}}^{u(\ell)} \Phi$ et le jet $j_{\mathcal{Y}}^{u(\ell)} H_0$, où $H_0 : [N]_{\mathcal{Y}} \ni$ est un germe de $C^{u(\ell)}$ -difféomorphisme tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{\mathcal{Y}}^{u(\ell)}(H_o^{-1} \circ \Phi \circ H_o) = j_{\mathcal{Y}}^{u(\ell)} \Phi \\ \forall I \in \mathfrak{I}, H_o(Y_I^+) = Y_I^+ \text{ et } H_o(Y_I^-) = Y_I^- \end{array} \right.$$

la propriété suivante est vérifiée : toute application $H \in C^{u(\ell)}(N \setminus \hat{\mathcal{Y}}, N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{\mathcal{Y} \setminus \hat{\mathcal{Y}}}^{u(\ell)} H = j_{\mathcal{Y} \setminus \hat{\mathcal{Y}}}^u H_o \\ \Psi \circ H = H \circ \Phi|_{N \setminus \hat{\mathcal{Y}}} \end{array} \right.$$

se prolonge en une unique application continue $\bar{H} : N \rightarrow N$, qui appartient à $C^\ell(N, N)$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{\mathcal{Y} \setminus \hat{\mathcal{Y}}}^\ell \bar{H} = j_{\mathcal{Y} \setminus \hat{\mathcal{Y}}}^\ell H_o \\ \Psi \circ \bar{H} = \bar{H} \circ \Phi . \end{array} \right.$$

Démonstration. L'unicité du prolongement, s'il existe, est évidente : l'ensemble $\hat{\mathcal{Y}}$ est fermé d'après la proposition (i), et d'intérieur vide d'après 2) (E_I^+ et E_I^- sont non triviaux par hypothèse) et la proposition (ii).

Nous allons prouver par récurrence sur i le résultat suivant, qui implique (pour $i = m+1$, et en posant $u_{m+1}(\ell) = \ell$) le théorème :

LEMME 2i ($1 \leq i \leq m+1$) Sous les hypothèses du théorème, H se prolonge en un unique $\bar{H}_i \in C^{u_i(\ell)}(N \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i, N)$, qui vérifie

$$j_{\mathcal{Y} \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i}^{u_i(\ell)} \bar{H}_i = j_{\mathcal{Y} \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i}^{u_i(\ell)} H_o .$$

Preuve. Pour $i = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc le lemme 2i pour un $i \in I_m$. D'après la proposition (iv), il nous suffit d'établir le

LEMME 1. Sous l'hypothèse de récurrence précédente, pour chaque $I \in \mathfrak{I}_i$, il existe un unique prolongement $\bar{H}_I \in C^{u_{i+1}(\ell)}((N \setminus \hat{\mathcal{Y}}_i) \cup Y_I^-, N)$ de \bar{H}_i , qui vérifie

$$j_{Y_I^-}^{u_{i+1}(\ell)} \bar{H}_I = j_{Y_I^-}^{u_{i+1}(\ell)} H_o .$$

Preuve. D'après 2) et le théorème 2(ii) de (4.2.3) appliqué à

$\varphi = \varphi_I$, $\Psi = (\mathcal{C}_I)_* [\Psi]_{M_I}$, $h_o = (\mathcal{C}_I)_* [H_o]_{M_I}$ et $h = (\mathcal{C}_I)_* [\bar{H}_i]_{M_I}$, l'application

\bar{H}_I définie par

$$\begin{cases} \bar{H}_I|_{N \setminus \hat{Y}_i} = \bar{H}_i \\ \bar{H}_I|_{Y_I^-} = H_o|_{Y_I^-} \end{cases}$$

est de classe $C^{u_{i+1}(\ell)}$ dans un voisinage U de M_I dans N . Comme

$$\begin{cases} Y_I^- = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{\Phi}^n(Y_I^- \cap U) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \bar{H}_I = \Psi^n \circ \bar{H}_I \circ \bar{\Phi}^{-n}, \end{cases}$$

on en déduit que \bar{H}_I est de classe $C^{u_{i+1}(\ell)}$ dans $(N \setminus \hat{Y}_i) \cup Y_I^-$. ■

EXERCICE. Déterminer une application u meilleure que u_1 .

REMARQUE. Nous avons donné ici l'énoncé qui servira à prouver notre théorème de linéarisation. Ses hypothèses peuvent être considérablement affaiblies (cf. Appendice 6, section (A6.4))

(6.2.2) Fin de la démonstration du théorème (6.1.3)

Les hypothèses et les notations sont maintenant celles de (6.1.3).

PROPOSITION 1. La restriction de h_∞ à E_c est de classe C^∞ et a un contact infini avec id_E le long de $\mathcal{V} \cap E_c$.

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème (6.1.2), soient Γ un sous-groupe discret de $2K_j$ tel que G_j/Γ soit compact, et $p_c : E_c \longrightarrow \tilde{Q}_c$ le revêtement canonique de l'espace des orbites \tilde{Q}_c de $\rho^1|_{\Gamma \times E_c} = \sigma|_{\Gamma \times E_c}$. Dans ce qui suit, on identifie \tilde{Q}_c à $Q_c \times (H_j/\Gamma)$ par le difféomorphisme induit par φ_c , où $\varphi_c \in \text{Diff}^\infty(Q_c \times H_j, E_c)$ est donné par $\varphi_c(x, g) = \sigma(g, x)$.

Comme $h_\infty|_{E_{c,j+1}}$ (resp. $\tilde{\rho}^1(2u) = \tilde{\sigma}(2u)$, $\tilde{R}(2u)$) commute à $\tilde{\rho}^1(g)$ pour tout $g \in \Gamma$, c est un endomorphisme de $p_c|_{E_{c,j+1}}$ (resp. un automorphisme de p_c) au-dessus d'un $H_c \in C^\infty(p_c(E_{c,j+1}), \tilde{Q}_c)$ (resp. $\tilde{\Phi} \in \text{Diff}^\infty(\tilde{Q}_c, \tilde{Q}_c)$, $\Psi \in \text{Diff}^\infty(\tilde{Q}_c, \tilde{Q}_c)$).

Je laisse le lecteur vérifier que les hypothèses du théorème (6.2.1) sont satisfaites par $\tilde{\Phi}$, Ψ , $H = H_c$ et $H_0 = \text{id}$, pour

$$\begin{cases} N = \tilde{Q}_c, \mathcal{I} = \mathcal{I}_c, f = f_c \circ \text{pr}_1 \\ \forall I \in \mathcal{I}, M_I = \Sigma_I \times (H_j/\Gamma) \text{ et } Y_I^\pm = W_{c,I}^\pm \times (H_j/\Gamma). \end{cases}$$

Par conséquent, H_c se prolonge en un unique $\bar{H}_c \in C^\infty(N, N)$, qui a un contact infini avec id_N en $\hat{\mathcal{V}} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} Y_I^-$.

En utilisant le fait que p_c est un difféomorphisme local et la relation $p_c \circ h_\infty|_{E_c} = \bar{H}_c \circ p_c$, on en déduit que $h_\infty|_{E_c}$ est de classe C^∞ et a un contact infini avec id_E en $E_c \setminus E_{c,j+1} = p_c^{-1}(\hat{\mathcal{V}})$, et donc sur $\mathcal{V} \cap E_c$, d'après le corollaire (6.1.3). ■

Pour prouver le théorème (6.1.3), nous allons nous borner à répéter j fois l'argument précédent, grâce à une remarque simple : dans notre hypothèse de récurrence $\rho_j = [\rho_j^1]_{G_j \times \{0\}}$, le choix de la suite $G_0 \subset \dots \subset G_{j-1}$ n'intervient pas, et nous sommes donc libres de le modifier :

PROPOSITION 2. Il est possible de choisir les sous-groupes G_ℓ ($1 \leq \ell \leq j-1$) de manière que la suite $G_0 \subset \dots \subset G_r$ satisfasse les hypothèses de (6.1.1), proposition 2, et possède les deux propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $\ell \in \{0, \dots, j\}$, $b_\ell = c|_{H_\ell}$ est une valeur régulière de $F_\ell = \pi_\ell \circ F$.
- (ii) Pour $0 \leq \ell \leq j-1$, il existe $u_{\ell+1} \in K_{\ell+1} \setminus K_\ell$ tel que si $Q_{b_\ell} = F_\ell^{-1}(b_\ell)$, toutes les valeurs critiques de $f_{b_\ell} = \langle F_{\ell+1}, u_{\ell+1} \rangle|_{Q_{b_\ell}}$ soient strictement supérieures à $\langle b_{\ell+1}, u_{\ell+1} \rangle$.

Démonstration. Par récurrence sur j : si $j = 0$, il n'y a rien à prouver. Pour $j > 1$, nous avons donc simplement à choisir G_{j-1} , c'est-à-dire K_{j-1} , dans (6.1.1), proposition 2, de manière que les propriétés (i) et (ii) ci-dessus soient satisfaites pour $\ell = j-1$.

Soient $H_j \subset G_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel engendré par K_j , et \mathcal{R} l'ensemble des hyperplans H_{j-1} de H_j tels que, si $\pi : H'_j \longrightarrow H'_{j-1}$ désigne la restriction à H_{j-1} , on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall I \subset I_n, \dim \pi(V_{j,I}) = \min \{j-1, \dim V_{j,I}\} \\ \pi(c) \notin \bigcup_{I \in I_n} V_{j-1,I} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, si

$$(1) \quad H_{j-1} = a^{-1}(0) \text{ pour un } a \in H'_j,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall I \in K_{j-1}, a \notin V_{j,I} \\ \forall I \in K_{j-2}, (c + \mathbb{R} a) \cap V_{j,I} = \emptyset. \end{array} \right.$$

Il est clair que \mathcal{R} est ouvert et dense dans la grassmannienne des hyperplans de H_j . En raison de (6.1.1), lemmes 1 et 2, il nous suffit donc de prouver que l'ensemble des $H_{j-1} \in \mathcal{R}$ tels que (ii) soit satisfaite avec $\ell = j-1$ pour un $u_j \in H_j \setminus H_{j-1}$ contient un ouvert non vide.

En vertu de (5.2), théorème 2 (i), notre problème consiste à trouver $a \in H'_j$ satisfaisant (2) et $u_j \in H_j$ vérifiant, si H_{j-1} est donné par (1),

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \langle a, u_j \rangle \neq 0 \\ (ii) \quad \forall I \in \mathfrak{J}_{\pi(c)}, \langle c, u_j \rangle < \langle c, g_I \rangle, \end{array} \right.$$

où g_I et $\mathfrak{J}_{\pi(c)}$ sont donnés par

$$(4) \quad \begin{cases} V_{j,I} = \{u_j - g_I\}^\perp & \text{et } g_I \in H_{j-1} \\ \mathfrak{S}_{\pi(c)} = \{I \in K_{j-1} : \pi(c) \in C_{j,I}\} . \end{cases}$$

Etant donné $a \in H_j'$ vérifiant (2), chaque $I \in K_{j-1}$ détermine un $\lambda_I \in \mathbb{R}$ avec

$$(5) \quad c - \lambda_I a \in V_{j,I} .$$

La relation $\pi(c) \in C_{j-1,I}$ équivaut donc, puisque $\pi^{-1}(0) = \mathbb{R}a$, à

$$c - \lambda_I a \in C_{j,I} ,$$

et si $u_j \in H_j$ vérifie (3)(i), alors, d'après (1), (4) et (5),

$$\langle c, u_j - g_I \rangle = \langle c, u_j - g_I \rangle - \langle c - \lambda_I a, u_j - g_I \rangle = \langle \lambda_I a, u_j - g_I \rangle = \lambda_I \langle a, u_j \rangle .$$

Par conséquent, nous avons simplement à choisir a de manière que

$$\forall I \in K_{j-1}, \quad c - \lambda_I a \in C_{j,I} \quad \text{entraîne } \lambda_I > 0 .$$

Or, pour tout a assez proche de c , tous les λ_I sont voisins de 1. ■

Démonstration du théorème (6.1.3) (suite et fin). Etant donnée une suite

$G_0 \subset \dots \subset G_r$ satisfaisant la proposition 2, on a évidemment $E_{b_0} = E$, et il nous

suffit donc de prouver par récurrence "descendante" sur ℓ la

PROPOSITION 3. Pour tout $\ell \in \{0, \dots, j\}$, l'application $h_\infty|_{E_{b_\ell}}$ est de classe C^∞ et vérifie $\bigcap_{j \in \mathcal{V}} \bigcap_{E_{b_\ell}} (h_\infty - \text{id}_E) = 0$.

Démonstration. C'est vrai pour $\ell = j$ d'après la proposition 1. Supposons donc que ce soit vrai pour un $\ell + 1 \in \{1, \dots, j\}$:

LEMME. On a $h_\infty(E_{b_\ell}) \subset E_{b_\ell}$ et $E_{b_\ell} \setminus E_{b_{\ell+1}} = \bigcup_{I \in \mathfrak{S}_{b_\ell}} \tilde{\sigma}(H_\ell) W_{b_\ell, I}^-$

Preuve. - D'après le corollaire (6.1.3), on a $h_\infty(E_{b_j}) \subset E_{b_j}$ et

$h_{\infty}(\hat{\mathcal{V}}_{b_j} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{b_\ell}) = \hat{\mathcal{V}}_{b_j} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{b_\ell}$. Par conséquent,

$$h_{\infty}(E_{b_\ell}) = h_{\infty}(E_{b_j} \cup (\hat{\mathcal{V}}_{b_j} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{b_\ell})) = h_{\infty}(E_{b_j}) \cup \hat{\mathcal{V}}_{b_j} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{b_\ell} = E_{b_j} \cup \hat{\mathcal{V}}_{b_j} \setminus \hat{\mathcal{V}}_{b_\ell} = E_{b_\ell}.$$

- Pour que $y \in E_{b_\ell}$ appartienne à $E_{b_{\ell+1}}$, il faut et il suffit que

$\tilde{\sigma}(H_{\ell+1})y$ rencontre $Q_{b_{\ell+1}}$. Si $\{x\} = Q_{b_\ell} \cap \tilde{\sigma}(H_\ell)y$, cela revient à dire que

$Q_{b_{\ell+1}} \cap \tilde{\sigma}(H_{\ell+1})x \neq \emptyset$. Des relations

$$\begin{cases} Q_{b_{\ell+1}} = f_{b_\ell}^{-1}(\langle b_{\ell+1}, u_{\ell+1} \rangle) \subset Q_{b_\ell} \\ Q_{b_\ell} \cap \tilde{\sigma}(H_{\ell+1})x = \{\tilde{\Phi}_{b_\ell}^t(x) : t \in \mathbb{R}\}, \end{cases}$$

où $(\tilde{\Phi}_{b_\ell}^t)$ est le flot sur Q_{b_ℓ} défini par (5.2), proposition 3 (avec $j = \ell$ et $u = u_{\ell+1}$), on déduit donc, grâce à (5.2), théorème 2 (iii), la seconde assertion. \square

Pour achever notre démonstration, il ne reste plus qu'à reprendre la preuve de la proposition 1 en y remplaçant j par ℓ , c par b_ℓ et u par $u_{\ell+1}$. \blacksquare

EXERCICE. Démontrer la version du théorème (6.2.1) obtenue en y définissant

$\hat{\mathcal{A}}_j$ par

$$\hat{\mathcal{A}}_j = \bigcup_{\substack{\gamma_i > \gamma \\ I \in \mathfrak{J}_i}} Y_I^- \cup \bigcup_{\substack{\gamma_i < \gamma \\ I \in \mathfrak{J}_i}} Y_I^+,$$

avec $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. En déduire que l'on peut dans ce qui précède se passer de la proposition 2 (qui figure surtout ici en raison de son caractère instructif) - le lecteur pressé peut regarder dans l'appendice 6, (A6.4).

(6.2.3) Cas de la différentiabilité finie.

Soient $b \in G'_R$ une valeur régulière de F et $G_0 \subset \dots \subset G_r = G$, $u_1, \dots, u_r \in K_r$ deux suites satisfaisant les hypothèses de (6.2.2), proposition 2, avec $j = r$ et $c = b$. Pour chaque $j \in \{0, \dots, r-1\}$, soient Γ_j un sous-

groupe discret de $2K_j$ tel que G_j/Γ_j soit compact, N_j l'espace des orbites de $\rho^1|_{\Gamma_j \times E_{b_j}} = \sigma|_{\Gamma_j \times E_{b_j}}$ et $\tilde{\Phi}_j$ l'élément de $\text{Diff}^\infty(N_j, N_j)$ défini à partir de $\tilde{\rho}^1(2u_{j+1}) = \tilde{\sigma}(2u_{j+1})$ par passage au quotient. Comme nous l'avons vu dans (6.2.2), chaque $\tilde{\Phi}_j$ vérifie les hypothèses de (6.2.1) ; désignons par $u^j : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \hookrightarrow$ l'application u associée à $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_j$ dans (6.2.1), et posons

$$s^j = u^j \circ \dots \circ u^1.$$

La méthode utilisée en classe C^∞ permet évidemment de prouver notre théorème de linéarisation en différentiabilité finie, avec

$$s = t \circ s^1 \circ \dots \circ s^{r-1},$$

où t est l'application associée à ρ^1 par (4.4.2), théorème 1. ■

EXERCICES. - L'ensemble $\text{Hom}(G, \text{GL}(E))$ des représentations linéaires continues de G dans E étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, prouver le fait suivant : pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des $\tilde{\rho}^1 \in \text{Hom}(G, \text{GL}(E))$ tels que tout $\rho \in \text{Act}_b^\infty(G, X)$ de partie linéaire $(g, x) \xrightarrow{\rho^1} \tilde{\rho}^1(g, x)$ soit C^s -linéarisable contient un ouvert dense dont le complémentaire est de mesure nulle (l'importance de ce résultat du double point de vue de la stabilité structurelle et de la linéarisation effective des actions n'échappera pas au lecteur).

- Essayer de déterminer la meilleure application s obtenue par notre méthode (de toutes manières loin d'être optimale : voir l'appendice 8 et l'article de Samovol cité dans la bibliographie du chapitre 2).

- Déterminer le centralisateur dans $\mathcal{L}_b^\infty(X)$ de $\rho(G)$ lorsque $\rho \in \text{Act}_b^\infty(X)$ est faiblement hyperbolique et $\tilde{\rho}^\infty$ semi-simple.

(6.3) Nécessité de l'hyperbolicité faible.

Le lecteur peut s'être demandé pourquoi nous ne limitons pas nos investigations au cas "générique" où ρ^1 est fortement hyperbolique. Voici une réponse (voir aussi la remarque qui, dans (8.5), suit le théorème 2) :

THÉOREME. Etant donnée une représentation linéaire continue $\tilde{\rho}^1$ de G dans E , si l'action ρ^1 de G sur E qui lui est associée n'est pas faiblement hyperbolique, il existe $\rho \in \text{Act}_0^\infty(G, E)$, vérifiant $\tilde{\rho}^\infty = [\tilde{\rho}^1]_{G \times \{0\}}^\infty$, mais non C^0 -isomorphe à $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$.

Démonstration dans le cas semi-simple.

Les notations étant les mêmes que précédemment, la non hyperbolicité faible de ρ^1 se traduit par l'existence de $j \in \{0, \dots, r-1\}$ et de $I \subset I_n$ vérifiant

$$(1) \quad \begin{cases} (a) \# I = j + 1 ; \\ (b) j \text{ quelconques des } c_i \text{ avec } i \in I \text{ sont toujours indépendants ;} \\ (c) 0 \in \text{conv} \{c_i : i \in I\} \subset G'_{\mathbb{R}} . \end{cases}$$

Si j est minimal pour cette propriété, il existe une suite $G_0 \subset \dots \subset G_r = G$ de sous-groupes de G satisfaisant (6.1.1), Proposition 2 (i), telle que $\rho^1|_{G_j \times E}$ soit faiblement hyperbolique, ce que nous supposons désormais. Nous ferons aussi l'hypothèse que $I = \{1, \dots, j+1\}$.

Soit alors σ (resp. u) l'action de $G_{\mathbb{R}}$ (resp. G) sur E donnée par

$$\begin{cases} v(i, g, x) \in I_n \times G_{\mathbb{R}} \times E, \quad \sigma(g, x)_i = e^{\langle c_i, g \rangle} x_i \\ v(g, x, i) \in G \times E \times I_n, \quad u(g, x)_i = \frac{a_i(g)}{|a_i(g)|} x_i . \end{cases}$$

On a évidemment

$$v(g, x) \in G \times E, \quad \rho^1(g, x) = \tilde{u}(g) \sigma(g_{\mathbb{R}}, x) = \tilde{\sigma}(g_{\mathbb{R}}) u(g, x),$$

où $g_{\mathbb{R}}$ désigne l'image canonique de g dans $G_{\mathbb{R}}$.

Fixons un $e_\ell \in K_\ell \setminus K_{\ell-1}$ pour chaque $\ell \in \{1, \dots, r\}$. Il est clair que (e_1, \dots, e_r) est une base de $G_{\mathbb{R}}$. Pour $j+1 \leq \ell \leq r$, soit g_ℓ l'unique élément de H_j vérifiant

$$\forall i \in I, \quad \langle c_i, e_\ell - g_\ell \rangle = 0.$$

LEMME 1. (i) La sous-variété $Q_I = \{x \in E_I : |x_1| = \dots = |x_j| = 1\}$ est un quotient de $U_I = \{x \in E_I : \forall i \in \{1, \dots, j\}, |x_i| \neq 0\}$ par $\sigma|_{H_j \times E_I}$.

(ii) Si $\varphi_I \in \text{Diff}^\infty(Q_I \times H_j, U_I)$ est défini par $\varphi_I(x, g) = \sigma(g, x)$, on a, quels que soient $t_{j+1}, \dots, t_r \in \mathbb{R}$, $g, g' \in H_j$ et $x \in Q_I$,

$$\varphi_I^* \sigma(g' + \sum_{\ell=j+1}^r t_\ell e_\ell, (x, g)) = (x, g + g' + \sum_{\ell=j+1}^r t_\ell g_\ell) . \quad \square$$

LEMME 2. Etant donnée $v \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ telle que $v^{-1}(0) =] - \infty, 0]$ et $v^{-1}(1) = [1, \infty[$, les formules

$$\begin{cases} \psi_I^t(x)_i = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq j \\ \frac{d}{dt} \psi_I^t(x)_{j+1}|_{t=0} = \frac{x_{j+1}}{|x_{j+1}|} v(|x_{j+1}|^2) \end{cases}$$

définissent un flot complet sur Q_I , et l'on a

$$\forall x \in Q_I, \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_I^t(x)_{j+1} = 0 . \quad \square$$

LEMME 3. L'action σ_I^t de $G_{\mathbb{R}}$ sur U_I définie, pour $t_{j+1}, \dots, t_r \in \mathbb{R}$, $g, g' \in H_j$ et $x \in Q_I$, par

$$\varphi_I^* \sigma_I^t(g' + \sum_{\ell=j+1}^r t_\ell e_\ell, (x, g)) = (\psi^t(x), g + g' + \sum_{\ell=j+1}^r t_\ell g_\ell)$$

se prolonge en une action C^∞ de $G_{\mathbb{R}}$ sur E_I qui a un contact infini avec $\sigma|_{G_{\mathbb{R}} \times E_I}$ le long de $G_{\mathbb{R}} \times (E_I \setminus U_I)$.

Preuve. Puisque $\sigma_I^t|_{H_{r-1} \times U_I} = \sigma|_{H_{r-1} \times U_I}$, il suffit d'étudier le flot

$(\tilde{\sigma}_I^t(t e_r))$ $t \in \mathbb{R}$. Pour cela, commençons par inverser φ_I : l'équation $\varphi_I^{-1}(X) = (x, g)$ donne évidemment $|X_i| = e^{\langle c_i, g \rangle}$ pour $1 \leq i \leq j$, d'où

$$g = \sum_{i=1}^j c_i^* \text{Log}|X_i| ,$$

où $c_1^*, \dots, c_j^* \in H_j$ sont définis par $\langle c_i, c_\ell^* \rangle = \delta_i^\ell$ pour $1 \leq i, \ell \leq j$.

De (1), on déduit que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ définis par $\lambda_\ell = - \langle c_{j+1}, c_\ell^* \rangle$

sont strictement positifs (ce sont pour $j > 0$ les coordonnées de $-c_{j+1}$ dans la base

(c_1, \dots, c_j) de H_j^1), et l'on a

$$\begin{cases} x_\ell = \frac{x_\ell}{|x_\ell|} \text{ pour } 1 \leq \ell \leq j+1 \\ x_{j+1} = x_{j+1} |x_1|^{\lambda_1} \dots |x_j|^{\lambda_j} . \end{cases}$$

On en déduit facilement que, pour tout $x \in U_I$, on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma_I^1(t e_r, x)_\ell |_{t=0} = \langle c_\ell, g_r \rangle x_\ell \text{ pour } 1 \leq \ell \leq j \\ \frac{d}{dt} \sigma_I^1(t e_r, x)_{j+1} |_{t=0} = \langle c_{j+1}, g_r \rangle x_{j+1} + \frac{x_{j+1}}{|x_{j+1}|} v (|x_{j+1}| |x_1|^{\lambda_1} \dots |x_j|^{\lambda_j}) \end{cases}$$

d'où le résultat cherché, $E_I \setminus U_I$ étant la réunion des sous-espaces $\{x_\ell = 0\}$, $1 \leq \ell \leq j$. \square

LEMME 4. On définit une action R , de classe C^∞ , de G sur E par

$$\begin{cases} R(g, x)_I = \tilde{u}(g) \sigma_I^1(g \mathbb{R}, x_I) = \tilde{\sigma}_I^1(g \mathbb{R}) (\tilde{u}(g) x_I) . \\ R(g, x)_I^\wedge = \rho^1(g, x)_I^\wedge = \rho^1(g, x_I^\wedge) . \end{cases}$$

Toutes les orbites de $R|_{G \times E_I}$ sont adhérentes à 0 . De plus, si \mathcal{V} désigne la réunion des v.f.i. de ρ^1 , R a un contact infini avec ρ^1 le long de $G \times \mathcal{V}$.

Preuve. On vérifie facilement que R est bien définie. Le lemme 2 implique (exercice!) la deuxième assertion. Enfin il résulte de (1) que toute v.f.i. maximale de ρ^1 est contenue dans un des sous-espaces $\{x_\ell = 0\}$, $1 \leq \ell \leq j+1$, d'où la dernière assertion par le lemme 3. \square

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de prendre $\rho = [R]_{G \times \{0\}}$ et de remarquer que la réunion des orbites de ρ^1 adhérentes à l'origine est \mathcal{V} , alors que la réunion \mathcal{W} des orbites de R adhérentes à l'origine contient $\mathcal{V} \cup E_I$, qui est distinct de \mathcal{V} . Il s'ensuit que les germes $[V]_0$ et $[W]_0$ ne sont pas homéomorphes. \blacksquare

EXERCICES. - Nous venons en fait de prouver qu'il n'existe pas de germe $\varphi \in \mathcal{B}_0^0(E)$ "envoyant les orbites de ρ sur celles de $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$ ". Montrer que

cette notion peut être formulée avec précision et fournit une relation d'équivalence entre germes d'actions plus faible que le C^0 -isomorphisme.

- Prouver que les v.f.i. maximales de σ'_I sont les sous-espaces $x_i^{-1}(0)$, $1 \leq i \leq j + 1$. En déduire que le lemme 3 peut s'obtenir "sans calcul" par les méthodes de (6.2).

7 - INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DE CONTACT.

(7.1) Structures de contact

(7.1.1) Structure de contact des espaces de jets.

Etant donné un ouvert U de \mathbb{R}^n et $f \in C^k(U, \mathbb{R}^q)$, le jet $j^k f$ est une section continue de la projection $s_k : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ au-dessus de U , qui n'est pas arbitraire, mais vérifie

$$(1) \quad D(D^{j-1}f) = D^j f \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k.$$

Nous allons exprimer (1) en termes de systèmes de Pfaff : soient y^1, \dots, y^n (resp. z^1, \dots, z^q) les coordonnées standard sur \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^q), soient $x^1, \dots, x^n : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions données par

$$x^i(j_v^k \gamma) = y^i(v),$$

et, pour $1 \leq j \leq q$ et chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq k$, soit $u_\alpha^j : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u_\alpha^j(j_v^k \gamma) = \frac{\partial^\alpha (z^j \circ \gamma)}{\partial y^\alpha}(v) = z^j \circ \frac{\partial^\alpha \gamma}{\partial y^\alpha}(v).$$

Considérons sur $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ les 1-formes différentielles

$$c_\alpha^j = du_\alpha^j - \sum_{i=1}^n u_{\alpha+\delta_i}^j dx^i, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| < k, \quad 1 \leq j \leq q,$$

où $\delta_i = (\delta_i^1, \dots, \delta_i^n) \in \mathbb{N}^n$, δ_i^ℓ désignant le symbole de Kronecker.

Il est évident qu'une section continue φ de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \xrightarrow{s_k} \mathbb{R}^n$ au-dessus de U est de la forme $\varphi = j^k f$ avec $f \in C^k(U, \mathbb{R}^q)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$(a) \quad \pi_k^{k-1} \circ \varphi \text{ est de classe } C^1, \text{ où } \pi_k^{k-1} : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \longrightarrow J^{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

est la projection canonique.

$$(b) \varphi^*(c_\alpha^j|_{s_k^{-1}(U)}) = 0 \text{ quels que soient } j \text{ et } \alpha.$$

(La condition (b) a un sens, bien que φ soit seulement continue, en raison de (a) et de la forme très particulière des c_α^j).

Si $\kappa_{n,q}^k$ désigne le sous-fibré vectoriel du cotangent $T^*(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q))$ engendré par les formes de Pfaff c_α^j , la relation (b) s'écrit

$$(2) \quad \varphi^*(\kappa_{n,q}^k|_{s_k^{-1}(U)}) = 0.$$

Pour des raisons évidentes, nous dirons que $\kappa_{n,q}^k$ est la structure de contact de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

Si $s = \text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on a $J^k(s) = J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, et nous noterons π_k la projection canonique de $J^k(s)$ sur $J^0(s) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$. Etant donnés $A \subset \mathbb{R}^n$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$, nous désignerons par \tilde{g} la section de s au-dessus de A définie par $\tilde{g}(x) = (x, g(x))$; si A est ouvert et g de classe C^k , rappelons que, par définition, on a $j_x^k g = j_x^{k\sim} \tilde{g}$.

Le résultat suivant se déduit facilement de la formule de Faa-di Bruno (appendice 1) :

PROPOSITION. Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ et $H : U \longrightarrow U'$ un C^r -isomorphisme de $s|_U$ sur $s|_{U'}$, au-dessus de $h \in \text{Diff}^r(s(U), s(U'))$ avec $r \geq k$. Le C^{r-k} -difféomorphisme $H^k : \pi_k^{-1}(U) \longrightarrow \pi_k^{-1}(U')$ défini par

$$H^k(j_x^k \gamma) = j_{h(x)}^k (H \circ \tilde{\gamma} \circ [h^{-1}]_{h(x)}) \text{ vérifie}$$

$$(3) \quad H_*^k (\kappa_{n,q}^k|_{\pi_k^{-1}(U)}) = \kappa_{n,q}^k|_{\pi_k^{-1}(U')} \quad . \quad \blacksquare$$

EXERCICE. Expliquer pourquoi (3) conserve un sens si $r = k$ (s'inspirer de ce qui est dit ci-dessus après (b)).

COROLLAIRE 1. Soit $p : Y \longrightarrow X$ une C^r -fibration, $r \geq 1$. Pour $1 \leq k \leq r$, il existe un sous-fibré vectoriel $\kappa^k(p)$ de $T^*J^k(p)$, appelé structure de contact de $J^k(p)$, et possédant la propriété suivante : pour qu'une section continue g de $p_k : J^k(p) \longrightarrow X$ au-dessus d'un ouvert U de X soit holonome, il faut et il suffit que $\pi_k^{k-1} \circ g$ soit de classe C^1 et que l'on ait $g^* \kappa^k(p) = \{0\}$. ■

Il est raisonnable de poser $\kappa^0(p) = \{0\}$.

COROLLAIRE 2. Soient p et p' deux C^r -fibrations, $r \geq 1$, et H un C^r -isomorphisme de p sur p' . Pour $1 \leq k \leq r$, le C^{r-k} -difféomorphisme H^k de $J^k(p)$ sur $J^k(p')$ défini par $H^k(j_x^k \gamma) = j_x^k(H \circ \gamma \circ [h^{-1}]_{h(x)})$, où $p' \circ H = h \circ p$, vérifie

$$(4) \quad H_*^k \kappa(p) = \kappa(p') . \quad \blacksquare$$

Un difféomorphisme H^k qui vérifie (4) est une transformation de contact.

Nous y reviendrons dans (7.2).

EXERCICES. - Donner des définitions précédentes une formulation intrinsèque, s'étendant en dimension infinie, en prouvant que $\kappa^k(p)$ est définie de manière unique par le corollaire 1.

- Montrer que $\kappa^k(p)$ est la restriction à $J^k(p)$ de la structure de contact de $J^k(X, Y)$. ■

Soit Y une variété de classe C^{r+1} et de dimension $n+q$. Considérons sur l'ensemble des couples (b, Z) , où Z est un germe en $b \in Y$ de sous-variété de codimension q de Y , la relation d'équivalence " $b = b'$ et Z et Z' ont un contact d'ordre $k \leq r + 1$ en b " entre (b, Z) et (b', Z') . Le quotient est l'ensemble $J^k(Y, q)$ des jets d'ordre k de sous-variétés de codimension q de Y . Pour chaque (b, Z) , on note $j_b^k Z$ sa classe d'équivalence. Etant donnée une C^k -sous-variété W de codimension q de Y , l'application $j^k W : W \longrightarrow J^k(Y, q)$ définie par $j^k W(x) = j_x^k [W]_x$ est le jet d'ordre k de

W.

Pour tout $I \subset \{1, \dots, n+q\}$ vérifiant $\# I = q$, soit

$A_I : \mathbb{R}^{n+q} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ l'isomorphisme donné par

$$\begin{cases} A_I(x_1, \dots, x_{n+q}) = ((x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), (x_{i_{n+1}}, \dots, x_{i_{n+q}})) \\ i_1 < \dots < i_n, i_{n+1} < \dots < i_{n+q}, I = \{i_{n+1}, \dots, i_{n+q}\} \text{ et } \{1, \dots, n+q\} = \\ \hspace{15em} = \{i_1, \dots, i_{n+q}\}. \end{cases}$$

Pour chaque carte locale $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ de Y et chaque germe Z en $b \in U$ de C^k -sous-variété de codimension q de Y , il existe $I \subset \{1, \dots, n+q\}$ et un germe φ d'application C^k de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^q tels que $A_I \circ h(Z)$ soit le graphe de φ . L'application $h_I^k : j_b^k Z \longrightarrow j_{A_I \circ h(b)}^k \varphi$ est une carte d'un atlas de

C^{r+1-k} -variété différentiable sur $J^k(Y, q)$, modelée sur $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$. Comme les changements de cartes sont des transformations de contact de $\kappa_{n,q}^k$, on définit un système de Pfaff $\kappa^k(Y, q)$ sur $J^k(Y, q)$, sa structure de contact, par

$$\kappa^k(Y, q) \big|_{(h_I^k)^{-1}(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q))} = (h_I^k)^* \kappa_{n,q}^k.$$

On définit de manière tout à fait analogue le fibré $J_+^k(Y, q)$ des jets d'ordre k de sous-variétés orientées de codimension q de Y , et sa structure de contact $\kappa_+^k(Y, q)$.

EXEMPLE. Pour $k = q = 1$, $\kappa^1(Y, 1)$ (resp. $\kappa_+^1(Y, 1)$) s'identifie canoniquement au fibré P^*Y (resp. S^*Y) de base Y quotient de $T^*Y \setminus 0$ par l'action multiplicative de \mathbb{R}^* (resp. \mathbb{R}_+^*) dans les fibres. La structure de contact de ces fibrés joue un rôle très important dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et intégraux de Fourier (voir Sato-Kawai-Kashiwara et Hörmander).

EXERCICES. - A la lumière de l'exemple précédent, montrer qu'un rapport simple existe toujours entre $J^k(Y, q)$ et $J_+^k(Y, q)$.

- Donner de $\mathcal{K}^k(Y, q)$ une caractérisation intrinsèque analogue à celle que donne le corollaire 1.

(7.1.2) Structures de contact "abstraites"

L'usage est de n'appeler $\mathcal{K}_{n,q}^k$ une "structure de contact" que si $k = q = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{K}_{n,1}^1$ est engendré par sa section

$$(1) \quad c_n = du - \sum_{i=1}^n p_i dx^i,$$

où l'on a posé $u = u_o^1$ et $p_i = u_{o_i}^1$. On vérifie facilement que c est une forme de contact, au sens de la

DÉFINITION. Une 1-forme c sur une variété X est une forme de contact lorsque, pour chaque $x \in X$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) On a $c(x) \neq 0$.

(ii) La forme bilinéaire alternée $dc(x)|_{\text{Ker } c(x) \times \text{Ker } c(x)}$ est non-dégénérée.

En particulier, si X est de dimension finie, elle est forcément de dimension impaire $2n+1$, et une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 1-forme α sur X soit une forme de contact est que $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n}$ soit une forme-volume.

Nous allons maintenant voir que toute 1-forme "générique" sur X a pour restriction au complémentaire d'un fermé de mesure nulle une forme de contact - ce qui explique dans une certaine mesure l'abondance des structures de contact dans le paysage mathématique. Nous noterons τ_X^* la projection $T^*X \longrightarrow X$.

THÉORÈME 1. Etant donnée une variété X de dimension impaire $2n + 1$, il existe pour tout $r \geq 2n + 1$ un ouvert dense \mathcal{U} de $C^r(\tau_X^*)$ pour la topologie de Whitney, possédant la propriété suivante : à chaque $c \in \mathcal{U}$ est associé une sous-variété H_c de codimension 1 dans X telle que $c|_{X \setminus H_c}$ soit une forme

de contact. De plus, H_c est fermée.

Démonstration. Nous allons montrer que le fermé

$$\Sigma = \{ j_x^1 \gamma \in J^1(\tau_X^*) : \gamma(x) \wedge (d\gamma(x))^{\wedge n} = 0 \}$$

est un ensemble stratifié de codimension 1 dans $J^1(\tau_X^*)$, de strates $\Sigma_{-n}, \dots, \Sigma_{2n}$.

D'après le théorème de transversalité de Thom, l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{ c \in C^r(\tau_X^*) : \forall j \in \{-n, \dots, 2n\}, j^1 c \nparallel \Sigma_j \}$$

est donc résiduel pour $r \geq 2n + 1$, et, pour chaque $c \in \mathcal{U}$, il résulte de (2.2), proposition 1, que le fermé

$$H_c = (j^1 c)^{-1}(\Sigma)$$

est stratifié, de strates $(j^1 c)^{-1}(\Sigma_j)$, et donc de codimension 1. Une fois Σ stratifié, il ne restera donc plus, pour établir le théorème, qu'à montrer que \mathcal{U} est ouvert et que chacun des H_c est une sous-variété.

(i) Stratification de Σ . L'application $j_x^1 \gamma \longrightarrow (\gamma(x), d\gamma(x))$ étant une submersion de $J^1(\tau_X^*)$ sur $Y = T^*X \oplus_X \Lambda^2 T^*X$, il suffit de prouver que le fermé

$$\Sigma' = \{ (\alpha_x, \beta_x) \in Y : \alpha_x \wedge \beta_x^{\wedge n} = 0 \}$$

est un ensemble stratifié de codimension 1. Nous allons voir que la partition

$\Sigma' = \Sigma'_{-n} \sqcup \dots \sqcup \Sigma'_{2n}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma'_0 = \{ (0_x, 0_x) : x \in X \}, \Sigma'_{1-k} = \{ (0_x, \beta_x) : \beta_x^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta_x^{\wedge k} = 0 \} \\ \Sigma'_{2k-1} = \{ (\alpha_x, \beta_x) : \alpha_x \wedge \beta_x^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta_x^{\wedge k} = 0 \} \\ \Sigma'_{2k} = \{ (\alpha_x, \beta_x) : \alpha_x \wedge \beta_x^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta_x^{\wedge k} \neq 0 \text{ et } \alpha_x \wedge \beta_x^{\wedge k} = 0 \} \end{array} \right.$$

est une stratification. Comme Σ'_0 est évidemment une sous-variété de Y , il suffit de prouver que c'est le cas des autres Σ'_k , ce qui résulte immédiatement du

LEMME 1. Pour $1 \leq k \leq n$, $V_{1-k} = \{(0, \beta) : \beta^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta^k = 0\}$,

$$V_{2k-1} = \{(\alpha, \beta) : \alpha \wedge \beta^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta^k = 0\} \text{ et}$$

$$V_{2k} = \{(\alpha, \beta) : \alpha \wedge \beta^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta^k \neq 0 \text{ et } \alpha \wedge \beta^k = 0\}$$

sont des sous-variétés de $(\mathbb{R}^{2n+1})^* \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n+1})^*$, invariantes sous l'action
de $GL(2n+1, \mathbb{R})$.

Preuve. Etant donné $(\alpha_o, \beta_o) \in V_{2k-1}$ (resp. V_{2k}), un exercice simple d'algèbre linéaire consiste à montrer l'existence d'un système de coordonnées linéaires x^1, \dots, x^{2n+1} sur \mathbb{R}^{2n+1} tel que $\alpha_o = x^{2n+1}$ et

$$\beta_o = \sum_{1 \leq i \leq k-1} x^{2i-1} \wedge x^{2i} \text{ (resp. } \beta_o = x^{2k-1} \wedge x^{2n+1} + \sum_{1 \leq i \leq k-1} x^{2i-1} \wedge x^{2i} \text{)}.$$

En d'autres termes, V_{2k-1} (resp. V_{2k}) est l'orbite de (α_o, β_o) sous l'action de $GL(2n+1, \mathbb{R})$. Par conséquent, V_{2k-1} (resp. V_{2k}) est une sous-variété immergée injectivement de $(\mathbb{R}^{2n+1})^* \oplus \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n+1})^*$; comme c'est aussi un sous-ensemble fermé de l'ouvert

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha \wedge \beta^{\wedge k-1} \neq 0\} \text{ (resp. } \{(\alpha, \beta) : \alpha \wedge \beta^{\wedge k-1} \neq 0 \text{ et } \beta^{\wedge k} \neq 0\} \text{)},$$

c'est donc une vraie sous-variété. Le cas des V_{-k} se traite de même. \square

Comme $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta^{\wedge n}$ est une submersion en dehors du fermé stratifié

$V_o \cup \bigcup_{1 \leq k \leq n} (V_{-k} \cup V_{2k-1} \cup V_{2k})$, de codimension $> n$, les H_c sont des sous-variétés.

(ii) Ouverture de \mathcal{U} . Comme dans la preuve du théorème de transversalité de Thom, il suffit de montrer que

$$A = \bigcup_{-n \leq k \leq 2n} \{j_x^2 c \in J^2(\tau_X^*) : c(x) \in \Sigma_k \text{ et } T_{j_x^1 c} J^1(\tau_X^*) \neq T_x(j^1 c)(T_x X) + T_{j_x^1 c} \Sigma_k\}$$

est fermé, puisque l'on a $\mathcal{U} = \{c \in C^r(\tau_X^*) : j^2 c(X) \subset J^2(\tau_X^*) \setminus A\}$.

Or, une condition suffisante pour que ce soit le cas est que, pour toute suite $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un des Σ_k , de limite $z \in \Sigma_\ell$ avec $\ell \neq k$,

chacune des valeurs d'adhérence de la suite $(T_{z_m} \Sigma_k)$ dans la grassmannienne des sous-espaces tangents à $J^1(\tau_X^*)$ en z contienne $T_z \Sigma_\ell$ (on dit alors que la stratification (Σ_k) vérifie la condition (a) de Whitney). L'ouverture de \mathcal{U} résulte donc du lemme suivant, laissé à la perspicacité du lecteur :

LEMME 2. La stratification $(\Sigma_k)_{-n \leq k \leq 2n}$ vérifie la condition (a) de Whitney. ■

REMARQUE. On dispose en fait de théorèmes généraux évitant de construire explicitement une stratification de Σ : voir l'article de Mather cité au chapitre 1.

Nous allons voir maintenant que toutes les formes de contact admettent le même modèle local. Pour ne pas obscurcir l'exposé, nous sous-entendons que les variétés, fonctions, formes différentielles, difféomorphismes et systèmes de coordonnées dont il est question sont de classe C^∞ . Le lecteur n'aura aucune difficulté à compléter l'exposé en différentiabilité finie.

THÉORÈME 2 (Darboux). Etant donnée une forme de contact c sur une variété X de dimension $2n + 1$, il existe pour tout $a \in X$ un germe $\varphi : [X]_a \longrightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0$ de difféomorphisme tel que $[c]_a = \varphi^*[c_0]_0$, où c_0 est définie par (1). De plus, φ peut être choisi analytique si c l'est.

Démonstration. Soit V le champ de vecteurs sur X défini par

$$\forall x \in X, i_{V(x)} c(x) = 1 \text{ et } i_{V(x)} dc(x) = 0,$$

où $i_{V(x)}$ désigne le produit intérieur par $V(x)$. Si $\varphi_t = \exp tV$, alors, d'après la formule d'homotopie (Appendice O, (AO-2)), on a $L_V c = 0$ et donc $\varphi_t^* c = c$, d'où (!) $\varphi_t^* dc = dc$.

Si $S \ni a$ est une sous-variété de codimension 1 de X , transverse aux courbes intégrales de V , et si j désigne l'injection de S dans X , il est clair que $j^* dc$ est une forme symplectique sur S (Appendice O, (AO-3)).

D'après le théorème de Darboux (Appendice 0, (A0-4)), il existe sur S un système de coordonnées locales $y^1, \dots, y^n, q_1, \dots, q_n$ nulles en a tel que

$$j^* dc = \sum_{i=1}^n dy^i \wedge dq_i.$$

Soient $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$ les fonctions définies au voisinage de a par $x^i|_S = y^i, p_i|_S = q_i$ et $\varphi_t^* x^i = x^i, \varphi_t^* p_i = p_i$.

Puisque $\varphi_t^* dc = dc$, on a

$$dc = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i \text{ au voisinage de } a.$$

Il en résulte que $c + \sum_{i=1}^n p_i dx^i$ est fermée ; d'après le lemme de Poincaré, il existe donc une fonction u , définie dans un voisinage de a dans X et nulle en a , telle que

$$c = du - \sum_{i=1}^n p_i dx^i \text{ au voisinage de } a.$$

Comme $c \wedge (dc)^{\wedge n}$ est une forme-volume, $(u, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ est un système de coordonnées locales. \square

DÉFINITION. Une structure de contact (abstraite) sur une variété X est un sous-fibré vectoriel en droites \mathcal{K} de T^*X tel que, si $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus 0_{T^*X}$, toute section locale de $\pi = \tau_X^*|_{\mathcal{K}^*}$ soit une forme de contact.

EXERCICE. Pour cela, il faut et il suffit que, pour chaque $a \in X$, il existe une section de π au-dessus d'un ouvert $U \ni a$ qui soit une forme de contact.

DÉFINITION. Etant données deux structures de contact \mathcal{K} et \mathcal{K}' , définies respectivement sur des variétés X et X' , un isomorphisme $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ est un difféomorphisme $f : X \longrightarrow X'$ tel que $f^* \mathcal{K}' = \mathcal{K}$.

EXEMPLES. - D'après la proposition (7.1.1), tout automorphisme local C^1 de la fibration $s_0 : J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (et donc en particulier tout C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n) définit un unique automorphisme local de $\mathcal{K}_{n,1}^1$ (isomorphisme local

sur elle-même), qui est un automorphisme local de chacune des fibrations $\pi_1^0 : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $s_1 : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. En fait, le pseudo-groupe des automorphismes locaux de $\mathcal{K}_{n,1}^1$ est beaucoup plus gros que cela, puisqu'il contient des difféomorphismes locaux ne conservant pas ces projections. Un exemple typique est fourni par les involutions de Legendre h_I , $I \subset \{1, \dots, n\}$, définies, avec les notations de (1), par

$$\begin{cases} x^i \circ h_I = \begin{cases} -p_i & \text{pour } i \in I \\ x^i & \text{sinon} \end{cases} \\ p_i \circ h_I = \begin{cases} x^i & \text{pour } i \in I \\ p_i & \text{sinon} \end{cases} \\ u \circ h_I = u - \sum_{i \in I} p_i x^i. \end{cases}$$

Un automorphisme infinitésimal d'une structure de contact \mathcal{K} sur une variété X est un C^1 champ de vecteurs ξ sur X "qui engendre un pseudo-groupe à un paramètre d'automorphismes locaux de \mathcal{K} ", ce qui se traduit en termes infinitésimaux par la propriété suivante : pour toute section locale c de la projection $\mathcal{K} \longrightarrow X$, la dérivée de Lie $L_\xi c$ est une section locale de la projection $\mathcal{K} \longrightarrow X$.

Une variété de Legendre de \mathcal{K} est une sous-variété $Y \hookrightarrow \mathcal{K}$ telle que $j^*_{T^*Y} \mathcal{K} = 0^*_{T^*Y}$, et de dimension maximale parmi les sous-variétés de X possédant cette propriété.

THÉORÈME 4. (i) Si X est de dimension $2n + 1$, les variétés de Legendre de \mathcal{K} sont de dimension n .

(ii) Pour que $Y \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ soit une variété de Legendre de $\mathcal{K}_{n,1}^1$, il faut et il suffit que, pour chaque $b \in Y$, il existe une involution de Legendre h_I et un germe $\varphi : [\mathbb{R}^n]_{s_1(h_I(b))} \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^2 tels que

$$[h_I(Y)]_{h_I(b)} = j^1 \varphi ([\mathbb{R}^n]_{s_1(h_I(b))}).$$

Démonstration. Point (i). Soit $Y \xrightarrow{i} X$ une variété de Legendre de \mathbb{K} . Si c est une forme de contact engendrant localement \mathbb{K} , on a $i^*c = 0$ et (donc) $i^*dc = 0$. Comme $dc(i(y))$ est non-dégénérée sur $\text{Ker } c(i(y))$ pour tout $y \in Y$, on déduit de ces deux relations que $T_y i (T_y Y)$ est de dimension au plus n . Pour voir qu'il existe effectivement des variétés intégrales de \mathbb{K} de dimension n , il suffit, le problème étant local, d'utiliser le théorème 2 et de remarquer que, pour toute fonction $\varphi \in C^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $j^1 \varphi(\mathbb{R}^n)$ est une variété de Legendre de $\mathbb{K}_{n,1}^1$.

Point (ii). Soit $\pi : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ la projection canonique donnée par $\pi(j_x^1 \gamma) = d\gamma(x)$. Il existe évidemment sur $T^*\mathbb{R}^n$ une unique forme symplectique Ω_n telle que $\pi^*\Omega_n = dc_n$: si $(y^1, \dots, y^n, q_1, \dots, q_n)$ est le système de coordonnées linéaires sur $T^*\mathbb{R}^n$ donné par $y^i(d\gamma(x)) = x^i(j_x^1 \gamma)$ et $q_i(d\gamma(x)) = p_i(j_x^1 \gamma)$, on a $\Omega_n = \sum_{i=1}^n dy^i \wedge dq_i$. Comme $(d\varphi)^*\Omega_n = 0$ pour tout $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, le même argument que dans (i) montre que les sous-variétés $Z \xrightarrow{j} T^*\mathbb{R}^n$ vérifiant $j^*\Omega_n = 0$ et de dimension maximale parmi celles qui ont cette propriété sont de dimension n ; on dit que ce sont les variétés lagrangiennes de Ω_n .

LEMME 1. Soit Y une variété de Legendre de $\mathbb{K}_{n,1}^1$; pour chaque $b \in Y$, le germe $\pi([Y]_b)$ est un germe en $\pi(b)$ de variété lagrangienne de Ω_n . Réciproquement, étant donné un point c d'une variété lagrangienne Z de Ω_n , il existe pour chaque $b \in \pi^{-1}(c)$ un unique germe $[Y]_b$ de variété de Legendre de $\mathbb{K}_{n,1}^1$ tel que $[Z]_c = \pi([Y]_b)$. \square

LEMME 2. Soit $[Y]_b$ un germe de variété de Legendre de $\mathbb{K}_{n,1}^1$; pour qu'il existe un germe $\varphi : [\mathbb{R}^n]_{s_1(b)} \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^2 tel que $[Y]_b = j^1 \varphi([\mathbb{R}^n]_{s_1(b)})$, il faut et il suffit que $T_b s_1(T_b Y) = T_{s_1(b)} \mathbb{R}^n$. \square

Appelons espace lagrangien de Ω_n tout sous-espace vectoriel de

$T^* \mathbb{R}^n$ qui est une variété lagrangienne, et involutions de Lagrange les automorphismes linéaires k_I , $I \subset \{1, \dots, n\}$ de $T^* \mathbb{R}^n$ définis par $k_I \circ \pi = \pi \circ h_I$. On a évidemment $k_I^* \Omega_n = \Omega_n$ pour tout I , ce qui s'exprime en disant que les k_I sont des automorphismes de Ω_n . Comme l'espace tangent à une variété lagrangienne en chacun de ses points est lagrangien, il résulte des lemmes 1 et 2 que, pour achever notre démonstration, il suffit de prouver le

LEMME 3. Pour tout espace lagrangien L de Ω_0 , il existe une involution de Lagrange k_I telle que $\tau^*(k_I L) = \mathbb{R}^n$, où $\tau^* : T^* \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la projection canonique.

Preuve. Le sous-espace $P = (\tau^*)^{-1}(\{0\})$ est lagrangien. Soit

$$(6) \quad M = L \cap P.$$

Si $M = \{0\}$, $k_I = \text{id}$ convient. Sinon, il existe évidemment $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que

$$(7) \quad P = M \oplus N_I, \text{ avec } N_I = \{v \in P : \forall i \in I, q_i(v) = 0\},$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad N_I = P \cap k_I(P).$$

Nous allons voir que k_I répond à la question : il s'agit de prouver que $k_I(L) \cap P = \{0\}$, soit

$$L \cap k_I(P) = \{0\}.$$

Pour chaque sous-espace vectoriel E de $T^* \mathbb{R}^n$, posons

$E^\perp = \{v \in T^* \mathbb{R}^n : \forall w \in E, \Omega_n(v, w) = 0\}$. Il est clair que E est lagrangien si et seulement si $E = E^\perp$. Comme L et $k_I(P)$ sont lagrangiens, on déduit trivialement de (6) et de (8) les inclusions

$$M \subset L^\perp \text{ et } N_I \subset k_I(P)^\perp,$$

d'où l'on tire

$$M + N_I \subset (L \cap k_I(P))^{\perp},$$

soit, d'après (7),

$$L \cap k_I(P) \subset P^{\perp} = P.$$

On a donc $L \cap k_I(P) = (L \cap P) \cap (k_I(P) \cap P) = M \cap N_I = \{0\}$. ■

Appelons variété lagrangienne d'une forme symplectique Ω sur une variété M toute sous-variété $N \hookrightarrow M$ telle que $j^* \Omega = 0$, et de dimension maximale parmi les sous-variétés de M ayant cette propriété. La démonstration précédente et le théorème de Darboux donnent, avec les mêmes notations, le

THÉOREME 5. (i) Si M est de dimension $2n$, les variétés lagrangiennes de Ω sont de dimension n .

(ii) Pour que $N \hookrightarrow T^* \mathbb{R}^n$ soit une variété lagrangienne de Ω_n , il faut et il suffit que, pour chaque $b \in N$, il existe une involution de Lagrange k_I et un germe $\varphi : [\mathbb{R}^n]_{\tau^*_{(k_I(b))}} \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^2 tels que

$$[k_I(N)]_{k_I(b)} = d\varphi([\mathbb{R}^n]_{\tau^*_{(k_I(b))}}). \quad \blacksquare$$

EXERCICE. Montrer que la 2-forme symplectique Ω_n peut être définie intrinsèquement par $\Omega_n = d\lambda_n$, où la 1-forme canonique λ_n de $T^* \mathbb{R}^n$ est déterminée par l'une quelconque des deux propriétés suivantes :

$$(a) \quad \forall \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), (d\varphi)^* \lambda_n = d\varphi$$

$$(b) \quad \forall p \in T^* \mathbb{R}^n, \forall v_p \in T_p(T^* \mathbb{R}^n), \langle \lambda_n(p), v_p \rangle = \langle p, T_p \tau_{\mathbb{R}^n}^* \cdot v_p \rangle$$

(Ces deux définitions s'étendent évidemment à $T^* X$ pour toute variété X).

Quelle est l'expression de λ_n dans les coordonnées y^i, q_i ?

(7.2) Transformations de contact et équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous allons commencer par exploiter le théorème 5 pour décrire explicitement tous les germes d'automorphismes de Ω_n et de $K_{n,1}^1$:

(7.2.1) Fonctions génératrices.

Soit J l'isomorphisme de $T^* \mathbb{R}^n \times T^* \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*) \times (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$ sur $T^*(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*) = (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*) \times ((\mathbb{R}^n)^* \times (\mathbb{R}^n)^{**})$ défini par $((x, \xi), (x', \xi')) \longrightarrow ((x, \xi'), (\xi, jx'))$, où $j : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^{**}$ est l'isomorphisme canonique.

PROPOSITION 1. Pour qu'un germe $\gamma : [T^* \mathbb{R}^n]_b \longrightarrow T^* \mathbb{R}^n$ de difféomorphisme C^1 , de graphe Γ , soit un germe d'automorphisme de Ω_n , il faut et il suffit que $J(\Gamma)$ soit un germe de variété lagrangienne de $T^*(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$. ■

\mathbb{R}^n étant muni de sa base canonique et $(\mathbb{R}^n)^*$ de la base duale, on définit comme précédemment les involutions de Lagrange k_I , $I \subset \{1, \dots, 2n\}$, de $T^*(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$. La proposition précédente et le théorème 5 de (7.1.2) se traduisent (en appelant τ^* la projection $T^*(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$) par le

COROLLAIRE 1. Pour qu'un germe $\gamma : [T^* \mathbb{R}^n]_b \longrightarrow [T^* \mathbb{R}^n]_c$ de difféomorphisme C^1 , de graphe Γ , soit un germe d'automorphisme de Ω_n , il faut et il suffit qu'il existe une involution de Lagrange k_I de $T^*(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$ et un germe $\varphi : [\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*]_{\tau^*(k_I(J(b,c)))} \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^2 tels que

$$(1) \quad k_I(J(\Gamma)) = d\varphi ([\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*]_{\tau^*(k_I(J(b,c)))}) . \quad \blacksquare$$

Traduisons plus explicitement le corollaire 1 en termes de coordonnées locales :

COROLLAIRE 2. Soit $\gamma : [T^* \mathbb{R}^n]_b \longrightarrow [T^* \mathbb{R}^n]_c$ un germe de difféomorphisme $C^r (r \geq 1)$ de graphe Γ . Si l'on note $(z^1, \dots, z^n, r_1, \dots, r_n, z^1, \dots, z^n, r_1, \dots, r_n)$ les coordonnées standard sur $T^* \mathbb{R}^n \times T^* \mathbb{R}^n$, une condition nécessaire et suffisante pour que γ soit un germe d'automorphisme de Ω_n est

qu'il existe deux partitions $I \sqcup J = \{1, \dots, n\} = I' \sqcup J'$ et une fonction
 $\Phi \in C^{r+1}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ telles que Γ soit le germe en (b, c) de la sous-variété
définie par

$$(2) \quad \begin{cases} r_I = \frac{\partial \Phi}{\partial z^I} (z^I, r_J, z^{I'}, R_{J'}) , & z^J = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_J} (z^I, r_J, z^{I'}, R_{J'}) , \\ R_{I'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z^{I'}} (z^I, r_J, z^{I'}, R_{J'}) , & z^{J'} = \frac{\partial \Phi}{\partial R_{J'}} (z^I, r_J, z^{I'}, R_{J'}) , \end{cases}$$

où l'on a posé $z^I = (z^i)_{i \in I}$, etc.

Réciproquement, étant donnés $I, I' \subset \{1, \dots, n\}$, $\Phi \in C^{r+1}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ et
un point (b, c) de la sous-variété V définie par (2), les conditions
suivantes sont équivalentes :

(i) $[V]_{(b, c)}$ est le graphe d'un germe γ d'automorphisme
de Ω_n .

(ii) $[V]_{(b, c)}$ est le graphe d'un germe γ d'application de $T^* \mathbb{R}^n$
dans $T^* \mathbb{R}^n$.

(iii) $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (z^I, r_J) \partial (z^{I'}, R_{J'})} (z^I(b, c), r_J(b, c), z^{I'}(b, c), R_{J'}(b, c))$ est une

forme bilinéaire non dégénérée. ■

Sous les hypothèses du corollaire 2, on dit que Φ (ou plutôt son
 germe) est une fonction génératrice de γ .

EXERCICE. Une fonction génératrice de l'identité est $\sum_{i=1}^n z^i R_i$. Plus généra-
 lement, montrer que tout germe γ d'automorphisme de Ω_n assez
 proche d'une translation admet une fonction génératrice avec $I = J' = \{1, \dots, n\}$.

Soient y^1, \dots, y^{n+1} , q_1, \dots, q_{n+1} (resp. $x^1, \dots, x^n, u, p_1, \dots, p_n$) les
 coordonnées standard sur $T^* \mathbb{R}^{n+1}$ (resp. $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$), $U_{n+1} = \{v \in T^* \mathbb{R}^{n+1} : q_{n+1} \neq 0\}$,
 et $\pi : U_{n+1} \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ la fibration définie (voir la remarque ci-dessous) par

$$u \circ \pi = y^{n+1} \text{ et } \forall i, x^i \circ \pi = y^i \text{ et } p_i \circ \pi = -\frac{q_i}{q_{n+1}}$$

PROPOSITION 2. Etant donnés deux ouverts U et U' de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et un automor-
phisme local $h : U \rightarrow U'$ de $\kappa_{n,1}^1$, il existe un unique automor-
phisme local $\tilde{h} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(U')$ de Ω_{n+1} vérifiant $\pi \circ \tilde{h} = h \circ \pi$; en outre, \tilde{h}
est homogène, c'est-à-dire commute à l'action naturelle de \mathbb{R}^* dans les fibres
de $\tau_{\mathbb{R}^n}^*$.

Réciproquement, étant donnés deux ouverts homogènes (pour cette
action) $V = \pi^{-1}(U)$ et $V' = \pi^{-1}(U')$ de U_{n+1} et un automorphisme local
 $H : V \rightarrow V'$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) H est homogène.
- (ii) Si $\lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} q_i dy^i$, on a $H^* \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}$.
- (iii) Il existe un (unique) automorphisme local $h : U \rightarrow U'$
de $\kappa_{n,1}^1$ tel que $H = \tilde{h}$. ■

REMARQUE. La projection π paraîtra moins mystérieuse si l'on note qu'elle s'obtient par composition de la projection canonique $T^* \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow PT^* \mathbb{R}^{n+1} \simeq J^1(\mathbb{R}^{n+1}, n)$ et de l'inverse de l'injection $i : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow J^1(\mathbb{R}^{n+1}, n)$ donnée par $i(j_x^1 f) = j_{(x, f(x))}^1(\text{graphe}(f))$. La proposition 2 traite en fait des rapports entre Ω_{n+1} et la structure de contact $\kappa^1(\mathbb{R}^{n+1}, n)$.

COROLLAIRE 3. Soit $\gamma : [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_b \rightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_c$ un germe d'automor-
phisme C^r , $r \geq 1$, de $\kappa_{n,1}^1$. Si l'on note $(x^1, \dots, x^n, u, p_1, \dots, p_n) = (x, u, p)$
et $(X^1, \dots, X^n, U, P_1, \dots, P_n) = (X, U, P)$ les coordonnées standard de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
à la source et au but de γ respectivement, il existe deux involutions de
Legendre h_I et h_J , de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et un germe $\Phi(x, u, p)$ de fonction C^{r+1} tels
que le graphe de $h_J \circ \gamma \circ h_I$ soit défini par

$$(3) \quad U = \Phi - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial p}, p \right\rangle, \quad X = - \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad \text{et} \quad p = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}.$$

En particulier, si γ est assez proche du germe de l'identité, on peut prendre
 $h_I = h_J = \text{id}$. ■

On dit que $\tilde{\Phi}$ est la fonction génératrice de $h_J, \circ \gamma \circ h_I$.

EXERCICE. Prouver le corollaire 3 en utilisant la proposition 2 et le corollaire 1 et donner un critère analogue à celui du corollaire 2 pour que, étant donné $\tilde{\Phi}$, (3) définisse le graphe d'un germe de transformation de contact.

(7.2.2) Hamiltoniens de contact, équations aux dérivées partielles du premier ordre et problèmes différentiels.

Dans ce paragraphe, nous supposons tous les objets considérés de classe C^∞ , laissant le lecteur examiner le cas de la différentiabilité finie.

Soient K une structure de contact sur une variété X , c une section de $K^* = K \setminus 0$ au-dessus d'un ouvert U de X , et ξ un automorphisme infinitésimal de $K|_U$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$(1) \quad f(x) = \langle c(x), \xi(x) \rangle = (i_\xi c)(x),$$

la colinéarité de $L_\xi c$ à c s'écrit, d'après la formule d'homotopie,

$$(2) \quad (df + i_\xi dc) \wedge c = 0.$$

PROPOSITION 1. Pour chaque $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, les formules (1) et (2) définissent un unique automorphisme infinitésimal ξ de $K|_U$, donné si

$c = c_n$ et $K = K_{n,1}^1$ par

$$(3) \quad \xi = \sum_{i=1}^n \left(- \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right) + \left(f - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial u}.$$

En d'autres termes, l'application $\xi \mapsto f$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des automorphismes infinitésimaux de $K|_U$ sur $C^\infty(U, \mathbb{R})$.

Démonstration. D'après le théorème 2 de (7.1.2), il s'agit de prouver que

(1) et (2) sont équivalents à (3) si $c = c_n$, ce qui est facile. ■

Sous les hypothèses précédentes, on dit que f est le hamiltonien de contact de ξ par rapport à c , et l'on note $\xi = H_c f$.

COROLLAIRE 1. L'ensemble des automorphismes d'une structure de

contact \mathcal{K} sur une variété X est toujours infini (et même "de dimension infinie").

Démonstration. Sous les hypothèses de la proposition 1, pour chaque $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ à support compact, on définit un automorphisme infinitésimal ξ de \mathcal{K} par

$$\xi|_U = H_c f \quad \text{et} \quad \xi|_{X \setminus U} = 0,$$

et ξ engendre un flot complet d'après (3.1.3), corollaire 2. ■

PROPOSITION 2. Sous les hypothèses de la proposition 1, soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ayant 0 pour valeur régulière. Alors

- (i) $H_c f$ est tangent à $f^{-1}(0)$ en chacun de ses points.
- (ii) Les orbites de $H_c f|_{f^{-1}(0)}$ sont des variétés (immergées) intégrales de \mathcal{K} .
- (iii) Pour toute section c' de \mathcal{K}' au-dessus de U et tout $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur $f^{-1}(0)$, les orbites de $H_{c', (gf)}|_{f^{-1}(0)}$ sont celles de $H_c f|_{f^{-1}(0)}$.

Démonstration. Si $\xi = H_c f$, il résulte de (2) que $i_\xi df = i_\xi(df + i_\xi dc)$ est un multiple de $i_\xi c = f$, d'où (i). On déduit immédiatement (ii) de (1), et (iii) est un exercice facile. ■

Etant donnée une sous-variété S de codimension 1 de X , il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de S par des ouverts de X tels que, pour tout $i \in I$,

- (a) \mathcal{K}' admette une section c_i au-dessus de U_i ;
- (b) il existe $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant 0 pour valeur régulière et telle que $S \cap U_i = f_i^{-1}(0)$.

On déduit facilement de la proposition 2 le

COROLLAIRE 2. Sous les hypothèses précédentes, $\Sigma = \bigcup_{i \in I} (H_{c_i} f_i)^{-1}(0)$ est un fermé de S , indépendant du choix de (U_i) , des c_i et des f_i ; de même, la formule

$$\forall i \in I, \forall x \in U_i \cap (S \setminus \Sigma), D_x = \mathbb{R} H_{c_i} f_i(x)$$

définit un champ de droites tangentes à $S \setminus \Sigma$, ne dépendant que de S et de \mathcal{K} . ■

(Σ est évidemment l'ensemble des $x \in S$ où $T_x S$ est orthogonal à \mathcal{K}_x)

Le feuilletage $\tilde{\mathcal{U}}$ de $S \setminus \Sigma$ par les courbes ayant les droites D_x pour tangentes est le feuilletage caractéristique de S .

EXERCICE. Prouver que, génériquement (parmi les plongements de S dans X), Σ est un ensemble de points isolés.

COROLLAIRE 3. Sous les hypothèses du corollaire 2, soit $V \xrightarrow{j} X$ une sous-variété vérifiant $j^* \mathcal{K} = 0_{T^*V}$ et $V \subset S \setminus \Sigma$. Si l'on a

$$(4) \quad \forall x \in V, D_x \not\subset T_x V,$$

alors le germe $W \xrightarrow{i} S \setminus \Sigma$ en V de l'ensemble $\bigcup_{\substack{F \in \tilde{\mathcal{U}} \\ F \cap V \neq \emptyset}} F$ est un germe de sous-variété vérifiant $i^* \mathcal{K} = 0_{T^*W}$ et $\dim W = \dim V + 1$.

Démonstration. D'après (4), W est un germe de sous-variété. Pour chaque $x_0 \in V$, soit $U \ni x_0$ un ouvert de X tel que \mathcal{K} ait une section c au-dessus de U et que $U \cap S = f^{-1}(0)$ pour une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ayant 0 pour valeur régulière. Si $Z \supset U \cap V$ est une sous-variété de codimension 1 de U à laquelle $\xi = H_c f$ n'est nulle part tangent (il en existe d'après (4)), il existe d'après le théorème 1 de (3.1.3) un ouvert $U_1 \ni x_0$ de U de la forme

$$U_1 = \bigcup_{t \in J} \varphi^t(U_0),$$

où $J \ni 0$ est un intervalle ouvert, $U_0 \ni x_0$ un ouvert de Z et $\varphi^t = \exp t\xi$.

Il est clair que $W \cap U_1$ est le germe en $W_0 = U_1 \cap V = U_0 \cap V$ de la sous-

variété $W_1 = \bigcup_{t \in J} \varphi^t(W_0)$, d'où l'assertion sur les dimensions. De plus, pour chaque $x \in W_0$ et chaque $t \in J$, si $y = \varphi^t(x)$, $c(y)$ s'annule sur $\xi(y)$ d'après la proposition 2(i) et sur $T_y \varphi^t(W_0) = T \varphi^t(T_x W_0)$ parce que W_0 est une variété intégrale de c et φ^t un automorphisme de K . Par conséquent, $c(y)$ s'annule sur $T_y W_1 = T_y \varphi^t(W_0) \oplus \mathbb{R} \xi(y)$. ■

COROLLAIRE 4. Sous les hypothèses du corollaire 3, si X est de dimension $2n + 1$ et V de dimension $n - 1$, W est l'unique germe en V de variété de Legendre vérifiant

$$(5) \quad V \subset W \subset S.$$

Démonstration. Si W' était une variété de Legendre vérifiant $V \subset W' \subset S$ et telle qu'il existe un ouvert U de S satisfaisant

$$W' \cap U \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in U, D_x \not\subset T_x W',$$

alors le germe en $W' \cap U$ de la réunion des courbes caractéristiques issues de $W' \cap U$ serait, d'après le corollaire 3, un germe de variété intégrale de K de dimension $n+1$, ce qui est impossible. ■

Appelons équation aux dérivées partielles du premier ordre sur une variété Y toute sous-variété S de codimension 1 de $X = J^1(Y, \mathbb{R})$ (cette appellation vient du cas où $Y = \mathbb{R}^n$ et où S est de la forme $f^{-1}(0)$), et solution (locale) d'une telle équation S toute fonction $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est ouvert dans X , telle que l'on ait $j^1 \varphi(U) \subset S$. Nous allons voir que le corollaire 4 contient la théorie locale du problème de Cauchy pour S , c'est-à-dire du problème suivant : étant données une sous-variété Z de codimension 1 de Y et $\varphi : Z \rightarrow \mathbb{R}$, trouver un germe $\psi : [Y]_Z \rightarrow \mathbb{R}$ de

solution de S tel que

$$(6) \quad \Psi|_Z = \varphi.$$

Si Ψ est une solution de ce problème, $W = j^1\Psi([Y]_Z)$ est un germe en $V = j^1\Psi(Z)$ de variété de Legendre de la structure de contact \mathcal{K} de X , dont V est donc une variété intégrale. D'après les corollaires 3 et 4 et avec leurs notations, cela suppose que (4) soit vérifiée et que l'on ait de plus

$$(7) \quad \forall x \in V, \quad T_x s_1(D_x) \not\subset T_{s_1(x)} Z,$$

où $s_1 : X \longrightarrow Y$ désigne la projection canonique.

Soit $r_Z : s_1^{-1}(Z) \longrightarrow J^1(Z, \mathbb{R})$ la projection définie par $r_Z(j_x^1\gamma) = j_x^1(\gamma|_Z)$. Des considérations précédentes, on déduit facilement le

COROLLAIRE 5. Pour que le problème de Cauchy défini par S et (6) admette une unique solution Ψ , il faut et il suffit que $V = S \cap r_Z^{-1}(j^1\varphi(Z))$ soit une sous-variété vérifiant (7) (et donc (4)) et telle que $s_1|_V$ soit un difféomorphisme de V sur Z . ■

EXERCICES. 1) Avec les notations du corollaire 5, si $s_1|_V$ est bijective, une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy défini par S et (6) admette une solution (qui est alors unique) est que, pour chaque

$x \in Z$, il existe un germe de difféomorphisme $h : [Y]_x \longrightarrow [\mathbb{R}^n]_0$ tel que $h([Z]_x) = [\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}]_0$, et possédant en outre la propriété suivante :

si $h^1 : [X]_{V \cap s_1^{-1}(x)} \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est donné (par abus de langage) par

$h^1(j_y^1\gamma) = j_{h(y)}^1(\gamma \circ h^{-1})$, il existe une fonction g telle que $h^1([S]_{V \cap s_1^{-1}(x)})$

soit le germe de l'hypersurface d'équation $p_n = g(x^1, \dots, x^n, u, p_1, \dots, p_{n-1})$.

2) En considérant par exemple l'équation "iconale" $p_1^2 + p_2^2 = 1$ sur \mathbb{R}^2 , trouver des cas de non existence et de non unicité des solutions du

problème de Cauchy.

3) Soit ω une n -forme différentielle non nulle sur $Y \times \mathbb{R} = J^0(Y, \mathbb{R})$, où $\dim Y = n$. Montrer que la recherche des fonctions $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ (U ouvert de Y) vérifiant $(j^0\varphi)^*\omega = 0$ équivaut à celle des solutions (locales) d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre S d'un type particulier sur Y (équation quasilinéaire). Si $\pi_1 : J^1(Y, \mathbb{R}) \rightarrow Y \times \mathbb{R}$ désigne la projection canonique, il existe un ensemble fermé $\Sigma_0 \subset Y \times \mathbb{R}$ et un champ $x \xrightarrow{D^0} D_x^0$ de droites tangentes à $(Y \times \mathbb{R}) \setminus \Sigma_0$ tel que, pour tout $z \in (Y \times \mathbb{R}) \setminus \Sigma_0$ et tout $x \in \pi_1^{-1}(z) \cap S$, on ait $T_x \pi_1(D_x^0) = D_z^0$. Les courbes partout tangentes au champ de droites D^0 forment un feuilletage de $(Y \times \mathbb{R}) \setminus \Sigma_0$, appelé feuilletage caractéristique de ω . Au voisinage de chaque point de $(Y \times \mathbb{R}) \setminus \Sigma_0$, il existe n formes de Pfaff $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ linéairement indépendantes et telles que, sur ce voisinage, $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$. Quel est le lien entre D^0 et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$? En déduire que, pour toute sous-variété V^0 de dimension $n-1$ de $(Y \times \mathbb{R}) \setminus \Sigma_0$ vérifiant

$$\forall x \in V^0, D_x^0 \not\subset T_x V^0,$$

le germe W^0 en V^0 de la réunion des courbes caractéristiques de ω passant par V^0 est le seul germe en V^0 de variété intégrale de ω contenant V^0 (résultat qui reste vrai si l'on remplace $J^0(Y, \mathbb{R})$ par une variété arbitraire de dimension $n+1$). Il n'y a donc jamais de problème d'unicité (locale) pour la solution du problème de Cauchy lorsque S est quasilinéaire. Trouver l'analogue de (7) dans ce cas particulier, et montrer que c'est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution (locale) du problème de Cauchy.

4) En considérant l'équation $p_1 + u p_2 = 0$ sur \mathbb{R}^2 , et les problèmes de Cauchy associés à $Z = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ (qui ont tous une unique solution locale d'après les exercices 1 et 3), montrer que, même pour une équation quasilinéaire, le problème de Cauchy n'admet en général pas de

solution globale de classe C^1 - mais seulement des solutions admettant des discontinuités sur des ensembles de mesure nulle, et non uniques si elles ne sont pas astreintes à des conditions supplémentaires ("conditions d'entropie" : voir Gelfand, Lax et Schaeffer).

5) Une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre sur une variété Y est une équation quasilinéaire S de la forme suivante : il existe $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de vecteurs ξ sur Y tels que φ soit solution (locale) de S si et seulement si $L_\xi \varphi + f \cdot \varphi = 0$. Montrer que tous les problèmes de Cauchy pour S associés à une sous-variété de codimension un, Z , de Y admettent une unique solution locale dès que l'on a $\xi(x) \notin T_x Z$ pour tout $x \in Z$. Examiner le problème de l'existence de solutions globales lorsque Z est fermée dans $Y = \mathbb{R}^n$.

6) Etendre la théorie précédente aux fibrés de jets de la forme $J^1(p)$, $J^1(Y,1)$ ou $J^1_+(Y,1)$.

7) Soient sur $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $n > 1$, les n -formes

$$\begin{cases} \omega_1 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} dp_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ \omega_2 = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} dp_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n + (-1)^n dp_n \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}, \end{cases}$$

où le signe \wedge , placé au-dessus d'un facteur d'un produit extérieur, signifie que l'on omet ce facteur. Montrer que la recherche des fonctions $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ (U ouvert de \mathbb{R}^n) vérifiant $(j^1\varphi)^* \omega_1 = 0$ (resp. $(j^1\varphi)^* \omega_2 = 0$) équivaut à celle des solutions locales d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre très simple, l'équation de Laplace (resp. de d'Alembert) $\Delta \varphi = 0$ (resp. $\square \varphi = 0$). Pour chaque automorphisme local h de $\mathcal{K}_{n,1}^1$, la n -forme $h^* \omega_1$ (resp. $h^* \omega_2$) définit de même une équation aux dérivées partielles du second ordre, que nous noterons $(h^* \Delta) \varphi = 0$ (resp. $(h^* \square) \varphi = 0$) ; quel que soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\Delta \varphi = 0$

(resp. $\square \varphi = 0$) , la variété de Legendre $h^{-1}(j^1\varphi(U)) \xrightarrow{i} J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est évidemment telle que $i^*(h^*\omega_1) = 0$ (resp. $i^*(h^*\omega_2) = 0$). En utilisant cette remarque et les résultats classiques - voir par exemple Garabedian - sur les solutions de l'équation de Laplace (resp. d'Alembert), donner des exemples de problèmes de Dirichlet (resp. de Cauchy) pour des équations elliptiques (resp. hyperboliques) du second ordre non linéaires - en l'occurrence les $(h^*\Delta)\varphi = 0$ (resp. $(h^*\square)\varphi = 0$) - admettant une unique solution variété de Legendre, qui n'est pas l'image du jet d'une fonction, plusieurs solutions, etc.

Appelons problème différentiel d'ordre k tout problème du type suivant : étant données une fibration $p : Y \rightarrow X$ et une partie A de $J^k(p)$, trouver des (ou les) sections $\varphi : X \rightarrow Y$ de p vérifiant $j^k\varphi(X) \subset A$. Suivant Gromov, on dit que A est une relation différentielle.

La plupart des problèmes rencontrés en topologie ou en géométrie différentielle entrent dans le cadre - cf. Gromov et Thom. Les exemples précédents, élémentaires, montrent déjà que les solutions d'un problème différentiel, si elles existent, ne sont en général pas faciles à trouver. Il y a donc intérêt à "couper en deux" la difficulté en commençant soit par oublier la structure de contact de $J^k(p)$ (Gromov), soit par oublier sa structure de fibré (Thom). Dans la première approche, on résout d'abord un problème de topologie (trouver les sections de $p_k|_A$) , puis on montre que toute classe d'homotopie de sections de $p_k|_A$ contient le jet d'ordre k d'une section de p . Dans la seconde approche, on cherche d'abord les variétés intégrales de la structure de contact de $J^k(p)$ contenues dans A - ou solutions géométriques de A - , puis celles d'entre elles qui sont les images de jets d'ordre k de sections de p .

Dans la recherche des solutions géométriques d'une relation différentielle, $A \subset J^k(p)$, on peut évidemment, pour simplifier le problème, faire agir le pseudo-groupe des transformations de contact de $\mathcal{K}^k(p)$, ce qui donne

d'excellents résultats pour les équations du premier ordre :

PROPOSITION 3. Soient κ une structure de contact sur une variété X de dimension $2n + 1$, et $S \hookrightarrow X$ une sous-variété de codimension 1 . Avec les notations du corollaire 2 , pour chaque $a \in S \setminus \Sigma$, il existe un germe $\varphi : [X]_a \rightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0$ d'isomorphisme $\kappa \rightarrow \kappa_{n,1}^1$ tel que $\varphi([S]_a) = [p_n^{-1}(0)]_0$.

Etant donné un automorphisme infinitésimal ξ de κ , sa variété caractéristique - ce n'est une sous-variété de X que génériquement - est l'ensemble $\text{Car}(\xi) = \{x \in X : \xi(x) \text{ est orthogonal à } \kappa(x)\}$. En raison du corollaire 2 , la proposition 3 résultera de la

PROPOSITION 4. Soit ξ un germe en $a \in X$ d'automorphisme infinitésimal de κ vérifiant $\xi(a) \neq 0$. Il existe un germe $h : [X]_a \rightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0$ d'isomorphisme $\kappa \rightarrow \kappa_{n,1}^1$ tel que

$$(i) \quad h_{*\xi} \xi = \left[\frac{\partial}{\partial u} \right]_0 \quad \text{si} \quad a \notin \text{Car}(\xi) ;$$

$$(ii) \quad h_{*\xi} \xi = \left[\frac{\partial}{\partial x^n} \right]_0 \quad \text{sinon.}$$

Démonstration. Si $a \notin \text{Car}(\xi)$, il existe un germe c en a de section de κ tel que $i_{\xi} c = [1]_a$, et il suffit donc de choisir pour h n'importe quel germe de difféomorphisme tel que $h_{*}c = c_n$, grâce au théorème de Darboux.

Si $a \in \text{Car}(\xi)$, le théorème de Darboux et une involution de Legendre permettent de se ramener au cas où $\kappa = \kappa_{n,1}^1$, $a = 0$ et $x^n(\xi(0)) \neq 0$. Si ρ est une action de \mathbb{R} sur $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\tilde{\rho}(t)$ soit pour tout $t \in \mathbb{R}$ un automorphisme de $\kappa_{n,1}^1$, et que $\left[\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) \right]_{t=0} = \xi$, il résulte

du théorème des fonctions implicites que l'équation

$$x^n(\rho(-t, v)) = 0$$

admet une unique solution $t = \tau(v)$ définie dans un voisinage de 0 et nulle sur $(x^n)^{-1}(0)$. Il suffit donc de prendre pour h le germe en 0 de

l'automorphisme H de $\mathcal{K}_{n,1}^1$ défini au voisinage de 0 par

$$\begin{cases} x^n \circ H = \tau, & u \circ H(v) = u(\rho(-\tau(v), v)), \\ \forall i < n, & x^i \circ H(v) = x^i(\rho(-\tau(v), v)) \text{ et } p_i \circ H(v) = p_i(\rho(-\tau(v), v)), \end{cases}$$

$p_n \circ H$ étant choisi de manière que H préserve $\mathcal{K}_{n,1}^1$: si

f désigne le hamiltonien de contact du générateur infinitésimal de ρ par rapport à c_n , on a, par définition de τ ,

$$(H^* c_n)(v) = (\tilde{\rho}(-\tau(v))^* c_n)(v) - (f(\rho(-\tau(v), v)) + p_n \circ H(v)) d\tau(v),$$

d'où, $\tilde{\rho}(-\tau(v))$ préservant $\mathcal{K}_{n,1}^1$,

$$p_n \circ H(v) = -f(\rho(-\tau(v), v)).$$

Il est clair que $h = [H]_0$ vérifie (ii). ■

REMARQUES.1. L'hypothèse $a \in \text{Car}(\xi)$ n'intervient dans ce qui précède que pour avoir $h(a) = 0$. Nous avons en fait prouvé que, sous l'hypothèse de la proposition 3, il existait toujours un germe $h : [X]_a \rightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de transformation de contact $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{n,1}^1$ tel que $h_* \xi = [\frac{\partial}{\partial x^n}]_{h(a)}$.

2. En traduisant la proposition 2 dans le langage des fonctions génératrices, on obtient une bonne compréhension de la méthode - a priori mystérieuse - de l'intégrale complète (cf. Arnold, E. Cartan et l'Appendice 9).

3. Il est évidemment tentant de classifier de même localement les équations aux dérivées partielles du second ordre.

Malheureusement, le pseudo-groupe des transformations de contact n'est pas assez gros pour fournir dans ce cas une classification raisonnable : contrairement à ce que pourrait faire croire l'exercice 7 ci-dessus, même si l'on se restreint aux (germes d') équations du second ordre sur \mathbb{R}^n définies par un germe de n -forme ω sur $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on voit aisément que les classes d'équi-

valence de la relation "il existe un germe h de transformation de contact de $\kappa_{n,1}^1$ tel que $h^*\omega'$ et ω définissent la même équation" entre ω et ω' forment un ensemble gigantesque, même si l'on ne considère que les cas "génériques".

Le lecteur objectera qu'il n'y a rien d'étonnant à cela, puisque c'est le pseudo-groupe des transformations de contact de $\kappa_{n,1}^2$ qu'il conviendrait de faire agir. Cette objection se heurte à la dure réalité suivante : tout germe de transformation de contact de $\kappa_{n,q}^k$, $k \geq 1$, provient (en un sens facile à préciser) d'un germe de transformation de contact de $\kappa_{n,q}^1$ si $q = 1$, d'un germe de difféomorphisme de $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ pour $q > 1$.

EXERCICE (Kupka). Prouver l'affirmation précédente (remarquer pour $n > 1$ que les fibres de la projection $J^k \rightarrow J^{k-1}$ sont des variétés intégrales de dimension exceptionnellement grande de $\kappa_{n,q}^k$, et doivent donc être conservées par transformation de contact).

(7.2.3) Intégrales singulières des équations du premier ordre

Soient κ une structure de contact sur une variété X de dimension $2n + 1$, et $S \xrightarrow{i} X$ une sous-variété de codimension 1. Si Σ désigne comme précédemment le fermé de S formé des x tels que $T_x S$ soit orthogonal à κ_x , une variété intégrale singulière (ou intégrale singulière) de $\kappa|_S$ est une sous-variété $V \xrightarrow{j} S$ incluse dans Σ . La propriété suivante est évidente :

PROPOSITION 1. Pour toute intégrale singulière $V \xrightarrow{j} S$ de $\kappa|_S$, on a $j^* i^* \kappa = 0_{T^* V}$. En particulier, V est de dimension au plus n . ■

EXEMPLE. Si $\kappa = \kappa_{1,1}^1$, l'équation de Clairaut $u = p_1 x^1 + g(p_1)$ admet l'intégrale singulière définie par $x^1 = -g'(p_1)$.

Soit U un ouvert de X tel que κ^* admette une section c au-dessus de U et qu'il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, ayant 0 pour valeur régulière, vérifiant $S \cap U = f^{-1}(0)$. La sous-variété $V \cap U$ est incluse dans

$$\Sigma \cap U = (H_c f)^{-1}(0).$$

Si l'on cherche un modèle local (à transformation de contact près) de S au voisinage de $a \in V \cap U$, une méthode - qui sera la nôtre - consiste à résoudre un problème plus précis : trouver un modèle local de $H_c f$ au voisinage de a .

Nous allons étudier les cas où $\xi = [H_c f]_a$ est hyperbolique normale-
ment à V , ce qui signifie que l'endomorphisme A de $N_a V = T_a X / T_a V$ déduit de $T_a \xi$ par passage au quotient n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. On dit alors que l'intégrale singulière V est normalement hyperbolique. Lorsque de plus les valeurs propres de A sont toutes du même côté de l'axe imaginaire, on dit que V est normalement extrémale. Ces deux définitions ne dépendent pas, on le vérifie aisément, du choix de c et de f .

EXEMPLES. Pour chaque $r \in \{0, \dots, n\}$, soit $V_r = \pi_r(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, où π_r est la projection linéaire définie par

$$\begin{cases} x^i \circ \pi_r = \begin{cases} x^i & \text{pour } 1 \leq i \leq r \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ u \circ \pi_r = p_1 \circ \pi_r = \dots = p_n \circ \pi_r = 0. \end{cases}$$

Etant données des fonctions $a_r, \dots, a_n : V_r \rightarrow \mathbb{R}$, si

$$f_r = (a_r \circ \pi_r) u - \sum_{i=r+1}^n (a_i \circ \pi_r) x^i p_i,$$

on vérifie facilement que V_r est une intégrale singulière de $\kappa_{n,1}^1|_{f_r^{-1}(0)}$.

En utilisant la formule (3) de (7.2.2), le lecteur pourra déterminer les cas (génériques!) où elle est normalement hyperbolique (resp. extrémale).

Nous allons voir que ces exemples ne sont pas aussi particuliers qu'ils en ont l'air. Voici la première étape dans cette direction :

PROPOSITION 2. Pour toute sous-variété $V \hookrightarrow X$ de dimension r vérifiant

$j^* \kappa = 0$ sur T^*V et tout $a \in V$, il existe un germe $h : [X]_a \rightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0$

d'isomorphisme $\kappa \rightarrow \kappa_{n,1}^1$ tel que $h([V]_a) = [V_r]_0$.

Démonstration. Pour $r = 0$, cela résulte immédiatement du théorème de Darboux.

Sinon, supposons que ce soit vrai pour $r - 1$. En appliquant cette hypothèse de récurrence à n'importe quelle hypersurface W de V passant par a , on peut supposer que $(X, a) = (J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0)$, que $\kappa = \kappa_{n,1}^1$ et que

$$(1) \quad [V]_0 \supset [V_{r-1}]_0.$$

Comme $c_n(0)$ ne s'annule sur $T_0 V$, il est impossible que $x^i(T_0 V) = p_i(T_0 V) = \{0\}$ pour tout i . Une involution de Legendre et une permutation de $\{r, \dots, n\}$ permettent donc de supposer

$$(2) \quad x^r|_{T_0 V} \neq 0.$$

On déduit de (1) et (2) l'existence de $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n : V_r \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$[V]_0 \subset \bigcap_{i>r} (x^i - \varphi_i \circ \pi_r)^{-1}(0).$$

L'unique automorphisme h_0 de $\kappa_{n,1}^1$ défini par

$$\begin{cases} x^i \circ h_0 = \begin{cases} x^i & \text{pour } i \leq r \\ x^i - \varphi_i \circ \pi_r & \text{pour } i > r \end{cases} \\ u \circ h_0 = u \end{cases}$$

nous ramène au cas où V est le germe en 0 d'une sous-variété de la forme

$$\bigcap_{i>r} (x^i)^{-1}(0) \cap (u - f \circ \pi_r)^{-1}(0) \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} (p_i - g_i \circ \pi_r)^{-1}(0), \text{ avec}$$

$f, g_1, \dots, g_n : V_r \rightarrow \mathbb{R}$. Comme c_n s'annule sur V , les formules

$$\begin{cases} x^i \circ h_1 = x^i & \text{et } p_i \circ h_1 = p_i - g_i \circ \pi_r & \text{pour tout } i \\ u \circ h_1 = u - f \circ \pi_r \end{cases}$$

définissent un difféomorphisme h_1 tel que $[h_1]_0$ préserve $\kappa_{n,1}^1$. ■

EXERCICE. Donner une démonstration analogue de (7.1.2), théorème 4(ii).

(7.3) Propriétés de stabilité des structures de contact et symplectiques.

Notre preuve du théorème de Darboux pour les formes symplectiques (Appendice O) fournit des résultats de stabilité globale (Appendice O, (AO-3)).

En revanche, le théorème de Darboux pour les

formes de contact ((7.1.2), théorème 2) est trop fin pour avoir des analogues globaux intéressants ; nous allons donc considérer des déformations de structures de contact, suivant Gray et Martinet :

THEOREME 1. - Soient R une action C^∞ d'un groupe de Lie K sur une variété M , I l'intervalle compact $[0,1]$, et $(K_t)_{t \in I}$ une famille de structures de contact R -invariantes sur M , dépendant de manière C^∞ de $t \in I$, et toutes égales en dehors d'un compact de M . Il existe alors une isotopie (φ_t) de M , telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) $\varphi_t^* K_t = K_0$ et $\varphi_t^* R = R$ pour tout $t \in I$.
- (ii) Si $x \in M$ est tel que K_t et K_0 y aient un contact d'ordre k pour tout $t \in I$, on a $j_x^k \varphi_t = j_x^k \text{id}_M$ pour tout $t \in I$.

Démonstration. Comme pour le théorème de Darboux, nous allons utiliser la méthode infinitésimale de Moser (Appendice O).

Soit Σ l'ensemble des sections C^∞ de la fibration $P \rightarrow M$, où $P = PT^*M$ désigne le fibré en projectifs dont les points sont les droites cotangentes à M . Nous noterons $(\sigma_t)_{t \in I}$ la famille d'éléments de Σ définie par (K_t) : dire que K_t dépend de manière C^∞ de t signifie donc que $(t, x) \mapsto \sigma_t(x)$ est une application C^∞ de $I \times M$ dans P .

Pour chaque $\sigma \in \Sigma$, il est naturel de noter $T_\sigma \Sigma$ l'ensemble des déformations infinitésimales de σ , c'est-à-dire l'ensemble des $\frac{d}{dt} \tau_t|_{t=0}$, où (τ_t) est un chemin d'origine σ dans Σ .

Etant donné un tel chemin (τ_t) , $\dot{\tau}_0(x) = \frac{d}{dt} \tau_t(x)|_{t=0}$ est pour chaque $x \in M$ un vecteur tangent à P en $\sigma(x)$, et, si $\nu : P \rightarrow M$ désigne la projection canonique, la relation $\nu \circ \tau_t(x) = x$ pour tout t donne

$$T_{\sigma(x)} \nu \cdot \dot{\tau}_0(x) = 0.$$

En d'autres termes, $\dot{\tau}_0$ appartient à l'espace vectoriel des sections C^∞ du fibré vectoriel $\sigma^* V \rightarrow M$, où V désigne le sous-fibré vectoriel de TP formé des vecteurs verticaux pour ν . Il est facile de voir que, réciproquement, toute section C^∞ de $\sigma^* V \rightarrow M$ appartient à $T_\sigma \Sigma$, qui est donc un espace vectoriel.

Soient $(T^*M)^* = T^*M \setminus 0_{T^*M}$, et $\pi : (T^*M)^* \rightarrow P$ la projection naturelle. Il est clair que l'action $(\varphi, \alpha) \mapsto \varphi^* \alpha$ de $\text{Diff}^\infty(M)$ sur les sections (locales) de $(T^*M)^* \rightarrow M$ passe au quotient par π . On note $(\varphi, \sigma) \mapsto \varphi^* \sigma$ l'action de $\text{Diff}^\infty(M)$ sur Σ ainsi obtenue. Pour tout champ de vecteurs ξ de classe C^∞ sur M et tout $\sigma \in \Sigma$, on définit donc un élément $L_\xi \sigma$ de $T_\sigma \Sigma$ par

$$L_\xi \sigma = \frac{d}{dt} ((\exp t\xi)^* \sigma)|_{t=0}.$$

Pour chaque $\sigma \in \Sigma$, notons σ^\perp le sous-fibré vectoriel de TM dont la fibre en chaque $x \in M$ est l'hyperplan formé des vecteurs annulant les éléments de $\pi^{-1}(\sigma(x))$, et $N(\sigma)$ l'espace des sections C^∞ de $\sigma^\perp \rightarrow M$. La clef de la démonstration est le

LEMME 1 (Stabilité infinitésimale des structures de contact). Pour chaque $\sigma \in \Sigma$ définissant une structure de contact, $\xi \mapsto L_\xi \sigma$ est un isomorphisme de $N(\sigma)$ sur $T_\sigma \Sigma$, induit par un isomorphisme $u : \sigma^\perp \rightarrow \sigma^* V$ de fibrés vectoriels de base M .

Commençons par déduire le théorème 3 du lemme 1: soit (ξ_t) l'isotopie infinitésimale de M définie (d'après le lemme 1) par

$$(1) \quad \xi_t \in N(\sigma_t) \quad \text{et} \quad L_{\xi_t} \sigma_t + \frac{d}{dt} \sigma_t = 0, \quad t \in I.$$

Comme (ξ_t) est à support compact, elle engendre une unique isotopie (φ_t) de M .
 D'après (1), celle-ci vérifie bien $\varphi_t^* \sigma_t = \sigma_0$ pour tout $t \in I$ (les détails sont laissés en exercice au lecteur).

En outre, pour tout $g \in K$, (1) implique que

$$L_{\tilde{R}(g)^* \xi_t} \tilde{R}(g)^* \sigma_t + \frac{d}{dt} (\tilde{R}(g)^* \sigma_t) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad L_{\tilde{R}(g)^* \xi_t} \sigma_t + \frac{d}{dt} \sigma_t = 0.$$

Comme $\tilde{R}(g)^* \xi_t$ annule $\tilde{R}(g)^* \kappa_t = \kappa_t$, on déduit donc du lemme 1 que $\tilde{R}(g)^* \xi_t = \xi_t$, ce qui achève de prouver (i).

Pour établir (ii), il suffit de remarquer que, si $\frac{d}{dt} \sigma_t$ a un contact d'ordre k avec 0 en $x \in M$ pour tout $t \in J$, c'est également le cas de ξ_t . \square

Preuve du lemme 1. Revenons d'abord sur la définition de la dérivée de Lie d'une 1-forme α sur M suivant un champ de vecteurs ξ : si $\varphi_t = \exp t \xi$, alors, en toute rigueur, $\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha(x) \big|_{t=0}$ est pour chaque $x \in M$ un vecteur tangent à T^*M en $\alpha(x)$, et vertical pour la projection $\tau_M^* : T^*M \rightarrow M$. On utilise donc implicitement, dans la définition de la dérivée de Lie, l'identification canonique de T_x^*M à l'espace vertical de τ_M^* en $\alpha(x)$.

Pour chaque section α de $(T^*M)^* \rightarrow M$ au-dessus d'un ouvert U de M et chaque $x \in U$, $T_{\alpha(x)} \pi$ définit évidemment une surjection de l'espace vertical de τ_M^* en $\alpha(x)$ sur $V_{\pi(\alpha(x))}$, qui s'identifie canoniquement d'après ce qui précède à une surjection linéaire $T_x^*M \rightarrow V_{\pi(\alpha(x))}$, de noyau $\mathbb{R}\alpha(x)$. Nous noterons $T_\alpha \pi : T^*U \rightarrow (\pi \circ \alpha)^* V$ le morphisme de fibrés vectoriels de base U ainsi obtenu. Si c désigne une forme de contact sur un ouvert U de M , vérifiant $\pi \circ c = \sigma$, il existe donc, quelle que soit la section $\dot{\sigma}$ de $\sigma^* V$ au-dessus de U , une 1-forme β sur U , déterminée à l'addition d'un multiple de $c|_U$ près, et telle que

$$\dot{\sigma} = T_c \pi \circ \beta.$$

Par ailleurs, pour chaque champ de vecteurs ξ sur M , on a (par définition de $L_\xi \sigma$)

$$L_\xi \sigma|_U = T_c \pi_* L_\xi c .$$

Par conséquent, dire que ξ est une section de c^\perp au-dessus de U et vérifie $L_\xi \sigma|_U = \dot{\sigma}$ équivaut à affirmer que, pour tout $x \in U$, on a

$$(2) \quad \begin{cases} i_{\xi(x)} c(x) = 0 \\ i_{\xi(x)} dc(x) - \beta(x) \in \mathbb{R} c(x) , \end{cases}$$

d'après la formule d'homotopie.

Comme c est une forme de contact, (2) admet une unique solution $\xi(x) = u_U^{-1}(\dot{\sigma}(x))$.

En résumé, nous avons prouvé que, pour tout ouvert U tel que $\sigma|_U$ soit définie par une forme de contact, l'application $\xi \mapsto L_\xi \sigma$ est un isomorphisme de l'espace des sections C^∞ de σ^\perp au-dessus de U sur l'espace des sections C^∞ de $\sigma^* V$ au-dessus de U , induit par un isomorphisme $u_U : \sigma^\perp|_U \longrightarrow \sigma^* V|_U$ de fibrés vectoriels de base U . Le lemme 1 s'en déduit immédiatement par recollement. ■

THÉOREME 2 (stabilité des structures de contact). Soient R une action C^∞ d'un groupe de Lie compact K sur une variété de dimension impaire M , et κ une structure de contact R -invariante sur M . Il existe alors un voisinage ouvert \mathcal{U} de κ (comme section de $PT^*M \rightarrow M$) dans la topologie C^1 de Whitney tel que, pour tout $\kappa' \in \mathcal{U}$ de classe C^∞ , R -invariant et égal à κ en dehors d'un compact de M , il existe $h \in \text{Diff}^\infty(M, M)$ possédant les propriétés suivantes :

$$(i) \quad h^* \kappa = \kappa' \quad \text{et} \quad h^* R = R .$$

$$(ii) \quad \text{En tout } x \in M \text{ où } \kappa \text{ et } \kappa' \text{ ont un contact d'ordre } k, \text{ on a } j_x^k h = j_x^k \text{id}_M .$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du

LEMME 2. Sous les hypothèses du théorème 4, il existe un voisinage \mathcal{U} de K dans la topologie C^1 de Whitney tel que, pour tout $K' \in \mathcal{U}$ de classe C^∞ et R-invariant, il existe un chemin $(K_t)_{t \in [0,1]}$ dans les structures de contact R-invariantes et C^∞ sur M , dépendant C^∞ de $t \in [0,1]$, et tel que

$$(i) \quad K_0 = K \quad \text{et} \quad K_1 = K' ;$$

(ii) Quel que soit $x \in M$, si K' a un contact d'ordre k avec K en x , il en va de même de K_t pour tout $t \in [0,1]$.

Preuve. Soit γ une métrique riemannienne R-invariante sur M que l'on peut construire à partir d'une métrique riemannienne quelconque γ_1 par la formule

$$\gamma = \int_K \tilde{R}(g)^* \gamma_1 d\mu(g) ,$$

où μ désigne la probabilité de Haar sur K . Soit S le sous-fibré de T^*M dont la fibre S_x en $x \in M$ est la sphère-unité de T_x^*M pour la métrique euclidienne $\gamma_x^\#$ sur T_x^*M définie par γ . La projection canonique $(T^*M)^* \rightarrow P$ se restreint en un revêtement à deux feuillets $S \rightarrow P$. Pour chaque $x \in M$, ce revêtement envoie la structure riemannienne induite sur S_x par $\gamma_x^\#$ sur une structure riemannienne ρ_x sur P_x , et l'on a

$$(3) \quad \forall x \in M, \forall g \in K, \quad \tilde{R}(g)^* \rho_x = \rho_{R(g^{-1}, x)} .$$

Soient σ la section de $P \rightarrow M$ définie par K , et U l'ouvert de P dont la fibre U_x au-dessus de chaque $x \in M$ est l'ensemble des $\alpha_x \in P_x$ dont la distance géodésique (pour ρ_x) à $\sigma(x)$ est $< \frac{\pi}{2}$ (en d'autres termes, U est l'image par la projection $(T^*M)^* \rightarrow P$ du complémentaire dans T^*M du sous-fibré vectoriel dont la fibre en chaque $x \in M$ est l'hyperplan $\gamma_x^\#$ -orthogonal à K_x). Pour chaque section σ' de $P \rightarrow M$ vérifiant $\sigma'(M) \subset U$, soit (σ_t) le chemin dans Σ défini de la manière suivante : pour tout $x \in M$, $t \mapsto \sigma_t(x)$ est l'unique arc de géodésique de U_x pour ρ_x tel que $\sigma_0(x) = \sigma(x)$ et $\sigma_1(x) = \sigma'(x)$. Si σ' est R-invariante, il en va de même de σ_t pour tout $t \in [0,1]$, d'après (3).

Il suffit donc de prendre pour ouvert \mathcal{U} l'ensemble des $\sigma' \in \Sigma$ vérifiant $\sigma'(M) \subset U$ et telles que tous les σ_t , $0 \leq t \leq 1$, définis ci-dessus soient des structures de contact. ■

Nous utiliserons dans 8 une version (semi-)locale du théorème 2, qui se prouve exactement de la même façon :

THEOREME 3. Soient N une partie compacte d'une variété M de dimension impaire, K un groupe de Lie compact et $\rho : [K \times M]_{K \times N} \rightarrow [M]_N$ un germe d'action C^∞ . Quels que soient les germes K et K' en N de structures de contact C^∞ sur M , ρ -invariants et ayant un contact d'ordre k le long d'un fermé $F \supset N$ de M , il existe un germe $h : [M]_N \hookrightarrow$ de difféomorphisme C^∞ tel que

$$(i) \quad h^* K = K' \text{ et } h^* \rho = \rho ;$$

$$(ii) \quad (j^k h)|_F = [j_F^k \text{ id}_M]_N . \blacksquare$$

Voici l'analogue du théorème 2 en géométrie symplectique.

THÉORÈME 2bis. Soient R une action C^∞ d'un groupe de Lie compact K sur une variété compacte M , et ω une forme symplectique R -invariante C^∞ sur M . Il existe alors un ouvert $\mathcal{U} \ni \omega$ de la topologie C^0 (sur les sections de $\Lambda^2 T^* M \rightarrow M$) possédant la propriété suivante : pour toute forme fermée $\omega' \in \mathcal{U}$, de classe C^∞ , cohomologue à ω et R -invariante, il existe un chemin

$(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\text{Diff}^\infty(M, M)$, dépendant C^∞ de t , tel que $\varphi_0 = \text{id}_M$, $\varphi_1^* \omega = \omega'$ et $\varphi_t^* R = R$ pour tout t .

Démonstration. Soit \mathcal{U} l'ouvert formé des ω' telles que, pour tout

$(t, x) \in [0, 1] \times M$, $\omega_t(x) = \omega(x) + t(\omega' - \omega)(x)$ soit non-dégénérée. Si $\omega' \in \mathcal{U}$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, alors ω_t est symplectique et R -invariante pour tout $t \in [0, 1]$, et il existe une 1-forme R -invariante α de classe C^∞ sur M telle que $d\alpha = \omega' - \omega$ (α peut être obtenue à partir d'une primitive

quelconque de $\omega' - \omega$ par la méthode habituelle de moyennisation). Il ne reste plus maintenant qu'à suivre la démonstration de l'appendice 0, (A0-3). ■

Dans les applications que nous avons en vue, une version plus précise et moins globale du théorème 2bis nous sera utile :

THÉORÈME 3bis. Soient N une sous-variété compacte d'une variété M de dimension paire, K un groupe de Lie compact, et $\rho : [K \times M]_{K \times N} \longrightarrow [M]_N$ un germe d'action C^∞ . Quels que soient les germes ω et ω' en N de formes symplectiques C^∞ sur M , ρ -invariants et ayant un contact d'ordre k en N , il existe un germe $h : [M]_N \hookrightarrow$ de difféomorphisme C^∞ tel que

$$(i) \quad h^* \omega = \omega' \quad \text{et} \quad h^* \rho = \rho ;$$

$$(ii) \quad j_N^{k+1} h = j_N^{k+1} \text{id}_M .$$

Démonstration. C'est celle du théorème 2bis, moyennant le

LEMME 3. Il existe un germe ρ -invariant α en N de 1-forme C^∞ sur M tel que $d\alpha = \omega' - \omega$ et $j_N^{k+1} \alpha = 0$.

Preuve. Le problème étant local, on peut supposer que M est un fibré vectoriel de section nulle N , sur lequel ω et ω' sont des formes symplectiques globalement définies (existence de voisinages tubulaires de N dans M : cf.

Golubitsky-Guillemin, bibliographie du chapitre 1). Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : M \longrightarrow M$ l'application consistant à faire l'homothétie de rapport e^t dans chaque fibre. Si ξ désigne le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre

$(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, on a

$$\begin{aligned} \omega' - \omega &= \varphi_0^*(\omega' - \omega) = \varphi_0^*(\omega' - \omega) - \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{-t}^*(\omega' - \omega) = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega' - \omega) dt = \int_{-\infty}^0 \varphi_t^* L_\xi(\omega' - \omega) dt = \int_{-\infty}^0 \varphi_t^* di_\xi(\omega' - \omega) dt = \\ &= d\alpha_1 , \end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \int_{-\infty}^0 \psi_t^{\gamma} i_{\xi}(\omega' - \omega) dt$. On vérifie aisément que $j_N^{k+1} \alpha_1 = 0$, et il suffit de définir α à partir de $[\alpha_1]_N$ par moyennisation. ■

8 - VIF DU SUJET

 (8.1) Un peu d'algèbre linéaire.

 (8.1.1.) Structure de contact tangente en un point à une structure de contact.

Soient ω une forme symplectique sur une variété X et $b \in X$; pour tout $h \in \mathcal{L}_b^1(X)$ préservant ω l'automorphisme $T_b h$ de $T_b X$ conserve évidemment $\omega(b)$.

Le cas des structures de contact (abstraites) est plus compliqué, car il n'y a pas de structure de contact canonique sur l'espace tangent $T_a X$ en a à une variété X munie d'une structure de contact \mathcal{K} . Nous allons maintenant expliquer la construction qui en tient lieu : étant donnée une section c de \mathcal{K} au-dessus d'un ouvert $U \ni a$ de X , il est clair que l'hyperplan

$$N_a = \text{Ker } c(a) \subset T_a X$$

et la droite

$$\mathcal{J}_a = \mathbb{R} \Omega_a \subset \Lambda^2 N_a^*, \text{ où } \Omega_a = dc(a)|_{N_a \times N_a},$$

ne dépendent que de \mathcal{K} , et non du choix de c .

Si $h \in \mathcal{L}_a^1(X)$ est un germe d'automorphisme de \mathcal{K} , il existe un germe $f : [X]_a \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$h^* c = f c, \text{ et donc } h^* dc = f dc + df \wedge c.$$

Il en résulte que $A = T_a h|_{N_a}$ est un automorphisme de N_a , vérifiant

$$A^* \Omega_a = f(a) \Omega_a, \text{ et donc } A^* \mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a.$$

Il est clair que $f(a)$ ne dépend pas du choix de c .

Si λ_a désigne la 1-forme sur N_a définie par

$$\lambda_a(x) = \frac{1}{2} i_x \Omega_a,$$

on a évidemment, A étant linéaire,

$$A^* \lambda_a = f(a) \lambda_a .$$

Sur la droite $K_a = T_a X / N_a$, considérons la forme linéaire μ_a déduite de $c(a)$ par passage au quotient. La 1-forme c_a sur $E_a = K_a \oplus N_a$ donnée par

$$\forall ((v, w), (\dot{v}, \dot{w})) \in E_a \times E_a, \quad \langle c_a(v, w), (\dot{v}, \dot{w}) \rangle = \langle \mu_a, \dot{v} \rangle + \langle \lambda_a(w), \dot{w} \rangle$$

engendre une structure de contact $T_a K$ sur E_a , indépendante du choix de c et appelée structure de contact tangente à K en a . L'automorphisme B de E_a défini par

$$B(v, w) = (f(a)v, Aw)$$

est une transformation de contact de $T_a K$, appelée K -jet d'ordre 1 ou K -partie linéaire de h en a . On note

$$B = \tilde{h}_K^1(a), \text{ ou simplement } B = \tilde{h}_K^1 .$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_a^k(K) = \{ h \in \mathcal{B}_a^k(X) : h^*[K]_a = [K]_a \} \text{ pour } k \geq 1 \\ GL(T_a K) = \{ B \in GL(E_a) : B^* T_a K = T_a K \} \\ GL(\mathcal{J}_a) = \{ A \in GL(N_a) : A^* \mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a \} \end{array} \right\} \text{ (groupe conforme symplectique de } \mathcal{J}_a \text{)} .$$

PROPOSITION (i) Tout $B \in GL(T_a K)$ laisse N_a et K_a invariants.

(ii) L'application $\mathfrak{J} : GL(T_a K) \longrightarrow GL(\mathcal{J}_a)$ définie par $\mathfrak{J}(B) = B|_{N_a}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

(iii) L'orthogonal $N_{0,a} \subset T_0(T_a X)$ de $T_a K(0)$ s'identifie à N_a par l'isomorphisme canonique $T_0(T_a X) \longrightarrow T_a X$. Modulo l'identification canonique de $E_{0,a} = (T_0(T_a X)/N_{0,a}) \oplus N_{0,a}$ à E_a qui s'en déduit, on a $T_0(T_a K) = T_a K$.

(iv) Tout $B \in GL(T_a K)$ est la K -partie linéaire d'un $h \in \mathcal{B}_a^\infty(K)$.

Démonstration. (i), (ii) et (iii) sont faciles. D'après le théorème de Darboux, il existe un germe $\varphi : [X]_a \longrightarrow [E_a]_0$ de transformation de contact

$(\mathcal{K} \rightarrow T_a \mathcal{K}$, ce qui permet de déduire (iv) de (iii). ■

(8.1.2) Un théorème spectral.

Soient Ω une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, $\mathcal{J} = \mathbb{R}\Omega \subset \Lambda^2 E^*$ et $GL(\mathcal{J}) = \{A \in GL(E) : A^* \mathcal{J} = \mathcal{J}\}$. Etant donnés un groupe élémentaire G et un morphisme continu $\tilde{\rho}^1 : G \rightarrow GL(\mathcal{J})$, rappelons (cf. (4.3.1), Proposition 5 et dernier alinea) qu'il existe une unique décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ et des morphismes continus $a_j : G \rightarrow \mathbb{C}^*$, $1 \leq j \leq n$, possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour $1 \leq j \leq n$, on a $\tilde{\rho}^1(g)E_j = E_j$ pour tout $g \in G$, et le spectre (du complexifié) de $\tilde{\rho}^1(g)|_{E_j}$ est $\{a_j(g), \overline{a_j(g)}\}$.

(ii) Pour $1 \leq j < k \leq n$, on a $a_j \neq a_k \neq \overline{a_j}$.

THÉORÈME. - Sous les hypothèses précédentes, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Si $b_0 : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ est donné par

$$\forall g \in G, \tilde{\rho}^1(g)^* \Omega = b_0(g) \Omega,$$

on définit une involution τ de $I_n = \{1, \dots, n\}$ par

$$j = \tau(i) \text{ si et seulement si } \{a_j, \overline{a_j}\} = \{b_0/a_i, b_0/\overline{a_i}\}.$$

(ii) Quels que soient i et $j \in I_n$ vérifiant $\tau(i) \neq j$, E_i et E_j sont Ω -orthogonaux ; en particulier, pour $i \neq \tau(i)$, E_i est Ω -isotrope.

(iii) Pour tout $i \in I_n$ vérifiant $\tau(i) \neq i$, on a $\dim E_i = \dim E_{\tau(i)}$, et $\Omega|_{(E_i \oplus E_{\tau(i)})^2}$ est non-dégénérée.

(iv) Pour tout point fixe $i \in I_n$ de τ , $\Omega|_{E_i^2}$ est non-dégénérée, et E_i est donc de dimension paire.

Démonstration. Commençons par supposer a_1, \dots, a_n à valeurs réelles. Alors, pour tout $i \in I_n$,

$$(1) \quad E_i = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} E_i^r, \text{ où } E_i^r = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(\mathfrak{p}^1(g) - a_i(g) \text{id})^r.$$

Si i et j vérifient $a_i a_j \neq b_0$, on a, étant donnés $v \in E_i^r$ et $w \in E_j^s$,

$$\forall g \in G, \mathfrak{p}^1(g) \cdot v = a_i(g) v + v_1(g) \text{ et } \mathfrak{p}^1(g) \cdot w = a_j(g) w + w_1(g),$$

où $v_1(g)$ (resp. $w_1(g)$) est nul si r (resp. s) est ≤ 1 , appartient à E_i^{r-1} (resp. E_j^{s-1}) sinon. On a donc

$$\begin{aligned} b_0(g) \Omega(v, w) &= \mathfrak{p}^1(g)^* \Omega(v, w) = a_i(g) a_j(g) \Omega(v, w) + \\ &+ \Omega(v_1(g), w_1(g)) + a_i(g) \Omega(v, w_1(g)) + a_j(g) \Omega(v_1(g), w). \end{aligned}$$

On en déduit, par "récurrence descendante" sur $r + s$, que

$$\forall g \in G, b_0(g) \Omega(v, w) = a_i(g) a_j(g) \Omega(v, w),$$

et donc $\Omega(v, w) = 0$, d'où (ii) d'après (1).

Etant donné $i \in I_n$, l'orthogonal E_i^\perp de E_i pour Ω vérifie donc

$$(2) \quad E_i^\perp \supset \begin{cases} \bigoplus_{j \neq i} E_j & \text{si } a_i^2 = b_0 \\ \bigoplus_{a_i a_j \neq a_0} E_j \supset E_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le premier cas, on a donc $E_i^\perp = \bigoplus_{j \neq i} E_j$, d'où (iv). Dans le second cas, puisque E_i^\perp n'est pas E tout entier, il existe $\tau(i) \in I_n$ tel que $a_i a_{\tau(i)} = b_0$, ce qui prouve (i). De (2), on déduit la relation $\dim E_{\tau(i)} \geq \dim E_i$, d'où $\dim E_{\tau(i)} = \dim E_i$, puisque τ est une involution. Enfin on a évidemment

$$(E_i \oplus E_{\tau(i)})^\perp = \bigoplus_{i \neq j \neq \tau(i)} E_j,$$

ce qui achève de prouver (iii).

Lorsque les a_i ne sont pas tous réels, on applique le traitement précédent aux complexifiés de E , de Ω et de \mathfrak{P}^1 , d'où le théorème dans le cas général. ■

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses du théorème, la partie semi-simple (cf. (4.3.1), proposition 4) σ^1 de ρ^1 est telle que

$$\sigma^1(g)^* \Omega = b_0(g) \Omega \text{ pour tout } g \in G, \text{ et donc } \sigma^1(g) \in GL(\mathfrak{Y}).$$

La partie nilpotente (cf. 4.3.1), proposition 4) $\hat{\nu}^1 : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$ de ρ^1 vérifie

$$\forall g \in G, \forall v, w \in E, \Omega(\hat{\nu}^1(g)v, w) + \Omega(v, \hat{\nu}^1(g)w) = 0;$$

en d'autres termes, $\hat{\nu}^1$ est à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\Omega)$ des automorphismes linéaires infinitésimaux de Ω . ■

Nous allons établir un résultat plus précis :

COROLLAIRE 2. - Avec les notations précédentes, si $q = \# \{ \{i, \tau(i)\} : i \in I_n \}$, il existe $d, e \in \mathbf{N}$ avec $d + 2e \leq q$, $m_1, \dots, m_q \in \mathbf{N}^*$, $b_1, \dots, b_q \in \{a_1, \dots, a_n, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ et $x_j^\ell, y_j^\ell \in L(E, \mathbb{C})$, $1 \leq \ell \leq m_j$, $1 \leq j \leq q$, possédant les propriétés suivantes :

(i) $((x_j^\ell), (y_j^\ell))$ est une base de l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$.

(ii) Pour tout $g \in G$, on a

$$x_j^\ell \circ \sigma^1(g) = b_j(g) x_j^\ell \text{ et } y_j^\ell \circ \sigma^1(g) = b_0(g) y_j^\ell / b_j(g), \quad 1 \leq \ell \leq m_j, \quad 1 \leq j \leq q.$$

(iii) $\Omega = \sum_{j, \ell} y_j^\ell \wedge x_j^\ell$

(iv) On a

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j(G) \not\subset \mathbb{R}, \quad b_j \overline{b_j} = b_0 \text{ et } x_j^\ell = 2i \varepsilon_\ell \overline{y_j^\ell}, \varepsilon_\ell = \pm 1, \quad 1 \leq \ell \leq m_j, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq d; \\ b_j(G) \not\subset \mathbb{R}, \quad b_j \overline{b_j} \neq b_0, b_j = \overline{b_{j+e}}, x_j^\ell = \overline{x_{j+e}^\ell}, y_j^\ell = \overline{y_{j+e}^\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq m_j, \quad \text{pour } d < j \leq d+e \\ b_j(G) \subset \mathbb{R} \text{ et } x_j^\ell = \overline{x_j^\ell}, y_j^\ell = \overline{y_j^\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq m_j, \quad \text{pour } d+2e < j \leq q \end{array} \right.$$

(v) Il existe des applications $e_{j,m}^\ell \in L(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$, $d < j \leq q$, telles que,
pour tout $g \in G_{\mathbb{R}}$, tout $j \in \{1+d, \dots, q\}$ et tout $\ell \in \{1, \dots, m_j\}$, on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^\ell \circ \tilde{v}^1(g) = \sum_{\ell < m \leq m_j} e_{j,m}^\ell(g) x_j^m \\ y_j^\ell \circ \tilde{v}^1(g) = - \sum_{1 \leq m < \ell} e_{j,\ell}^m(g) y_j^m \end{array} \right.$$

(vi) Il existe des applications $e_{j,m}^\ell \in L(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$ avec $1 \leq \ell, m \leq m_j$ et
 $1 < j \leq d$, telles que $e_{j,\ell}^m = -\varepsilon_\ell \varepsilon_m \overline{e_{j,m}^\ell}$ et que, pour tout $g \in G_{\mathbb{R}}$, tout
 $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\ell \in \{1, \dots, m_j\}$, on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^\ell \circ \tilde{v}^1(g) = \sum_{1 \leq m \leq m_j} e_{j,m}^\ell(g) x_j^m \\ y_j^\ell \circ \tilde{v}^1(g) = - \sum_{1 \leq m \leq m_j} e_{j,\ell}^m(g) y_j^m \end{array} \right.$$

Démonstration. Soient F l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$, et t_Ω la forme \mathbb{C} -bilinéaire alternée sur F obtenue par complexification de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \Omega(x^\#, y^\#)$ sur $L(E, \mathbb{R})$, où $x \mapsto x^\#$ est l'isomorphisme de $L(E, \mathbb{R})$ sur E tel que $\Omega(x^\#, v) = x(v)$ pour tout $v \in E$ et tout $x \in L(E, \mathbb{R})$. Il est clair que t_Ω est non-dégénérée ; pour tout $g \in G$, l'application \mathbb{C} -linéaire $t_{\tilde{\sigma}^1}^1(g) : x \mapsto x \circ \tilde{\sigma}^1(g)$ de F dans lui-même vérifie

$$t_{\tilde{\sigma}^1}^1(g)^* t_\Omega = b_0(g) t_\Omega ;$$

de même, $x \mapsto x \circ \tilde{v}^1(g)$ est pour tout $g \in G_{\mathbb{R}}$ un automorphisme infinitésimal de t_Ω .

Pour $1 \leq j \leq n$, soit $F_{a_j} = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(t_{\tilde{\sigma}^1}^1(g) - a_j(g) \text{id}_F)$.

On a évidemment $F = \bigoplus_j F_{a_j} \oplus \bigoplus_{a_j(G) \notin \mathbf{R}} \overline{F_{a_j}}$, et il y a quatre sortes de F_{a_j} :

a) Ceux pour lesquels $a_j(G) \notin \mathbf{R}$ et $|a_j|^2 = b_0$; F_{a_j} et $\overline{F_{a_j}}$ sont alors t_Ω -isotropes.

b) Ceux pour lesquels $a_j(G) \notin \mathbf{R}$ et $|a_j|^2 \neq b_0$; F_{a_j} et $\overline{F_{a_j}}$ sont alors t_Ω -isotropes.

c) Ceux pour lesquels $a_j(G) \in \mathbf{R}$ et $a_j^2 = b_0$; la restriction de t_Ω à F_{a_j} est alors non-dégénérée.

d) Ceux pour lesquels $a_j(G) \in \mathbf{R}$ et $a_j^2 \neq b_0$; $F_{a_j} = \overline{F_{a_j}}$ est alors isotrope.

- Appelons b_1, \dots, b_d les a_j du type a). Pour $1 \leq j \leq d$, la restriction de t_Ω à $F_{b_j} \oplus \overline{F_{b_j}}$ est non-dégénérée ; par conséquent, la forme quadratique $z \mapsto t_\Omega(z, \bar{z})/2i$ ne peut pas être identiquement nulle sur F_{b_j} . On peut donc choisir $x_j^1 \in F_{b_j}$, tel que $t_\Omega(x_j^1, \bar{x}_j^1) = \pm 2i$. Si $F_{j,1}$ désigne l'orthogonal de \bar{x}_j^1 dans F_{b_j} pour t_Ω , alors (F_{b_j} étant t_Ω -isotrope) $F_{j,1} \oplus \mathbb{C} x_j^1 = F_{b_j}$, et la restriction de t_Ω à $F_{j,1} \oplus \overline{F_{j,1}}$ est non-dégénérée. Si $F_{j,1}$ n'est pas trivial, il existe donc $x_j^2 \in F_{j,1}$ avec $t_\Omega(x_j^2, \bar{x}_j^2) = \pm 2i$. De proche en proche, on prouve ainsi l'existence d'une base $(x_j^1, \dots, x_j^{m_j})$ de F_{b_j} et d'une base $(y_j^1, \dots, y_j^{m_j})$ de $\overline{F_{b_j}}$ telles que $t_\Omega(y_j^\ell, x_j^m) = \delta_\ell^m$ et $x_j^\ell = \pm 2i y_j^{-\ell}$ pour $1 \leq \ell \leq m \leq m_j$ (F_{b_j} étant t_Ω -isotrope, on a évidemment $t_\Omega(x_j^\ell, x_j^m) = 0$).

- Parmi les a_j du type b), il existe évidemment b_{d+1}, \dots, b_{d+e} tels que les autres a_j du type 2) s'obtiennent en choisissant pour $d < j \leq d+e$ un seul élément dans $\{b_0/b_j, b_0/\overline{b_j}\}$. Pour $d < j \leq d+e$, il existe une base $(x_j^1, \dots, x_j^{m_j})$ de F_{b_j} et des $e_{j,m}^\ell \in L(G_{\mathbf{R}}, \mathbb{C})$, $1 \leq \ell < m \leq m_j$, tels que

$$x_j^\ell \circ \gamma^1(g) = \sum_m e_{j,m}^\ell(g) x_j^m \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq m_j.$$

La restriction de t_Ω à $F_{b_j} \oplus F_{b_o/b_j}$ étant non-dégénérée, il existe une base $(y_j^1, \dots, y_j^{m_j})$ de F_{b_o/b_j} telle que $t_\Omega(y_j^\ell, x_j^m) = \delta_\ell^m$ pour $1 \leq \ell \leq m \leq m_j$. Du fait que

$$t_\Omega(x, y \circ \tilde{v}^1(g)) + t_\Omega(x \circ \tilde{v}^1(g), y) = 0$$

quels que soient $x, y \in F$ et $g \in G_{\mathbf{R}}$, on a donc

$$y_j^m \circ \tilde{v}^1(g) = - \sum_{\ell} e_{j,m}^\ell(g) y_j^\ell \quad \text{pour } 1 \leq m \leq m_j.$$

Posons

$$x_j^{\ell+e} = \bar{x}_j^\ell \quad \text{et} \quad y_j^{\ell+e} = \bar{y}_j^\ell \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq m_j \quad \text{et} \quad d < j \leq d+e.$$

- Appelons $b_{d+2e+1}, \dots, b_{d+2e+f}$ les a_j du type c). Pour

$d+2e < j \leq d+2e+f$, il existe $x_j^1 \in F_{b_j}$, avec $\bar{x}_j^1 = x_j^1$, telle que $x_j^1 \circ v^1(g) = 0$ pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$. Du fait que la restriction de t_Ω à $F_{b_j} = \overline{F_{b_j}}$

est non-dégénérée, il existe $y_j^1 = \bar{y}_j^1 \in F_{b_j}$ tel que $t_\Omega(y_j^1, x_j^1) = 1$. Soit

$F_{j,1}$ l'orthogonal de $\{x_j^1, y_j^1\}$ dans F_{b_j} pour t_Ω . On a évidemment $F_{j,1} = \overline{F_{j,1}}$,

$F_{b_j} = F_{j,1} \oplus \mathbb{A}x_j^1 \oplus \mathbb{A}y_j^1$, et la restriction $t_{\Omega,j,1}$ de t_Ω à $F_{j,1}$ est non-dégénérée.

Si $t_{\tilde{v}^1,j,1} : G_{\mathbf{R}} \rightarrow g^L(F_{j,1})$ désigne la composée de $g \mapsto t_{\tilde{v}^1}(g)|_{F_{j,1}}$ et de la projection t_Ω -orthogonale sur $F_{j,1}$, il est clair que $t_{\tilde{v}^1,j,1}(g)$ est un auto-

morphisme infinitésimal de $t_{\Omega,j,1}$. Il existe donc $x_{j,1}^2, y_{j,1}^2 \in F_{j,1}$ tels que

$t_\Omega(\bar{y}_{j,1}^2, x_{j,1}^2) = 1$, que $\bar{x}_{j,1}^2 = x_{j,1}^2$ et $\bar{y}_{j,1}^2 = y_{j,1}^2$, et que $t_{\tilde{v}^1,j,1}(g) x_{j,1}^2 = 0$ pour tout

$g \in G_{\mathbf{R}}$. De proche en proche, on construit donc ainsi une base $(x_{j,1}^\ell, y_{j,1}^\ell)_{1 \leq \ell \leq m_j}$

de F_{b_j} , vérifiant

$$\begin{cases} t_\Omega(y_{j,1}^\ell, x_{j,1}^m) = \delta_\ell^m \quad \text{et} \quad t_\Omega(x_{j,1}^\ell, x_{j,1}^m) = t_\Omega(y_{j,1}^\ell, y_{j,1}^m) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq m \leq m_j \\ \bar{x}_{j,1}^\ell = x_{j,1}^\ell \quad \text{et} \quad \bar{y}_{j,1}^\ell = y_{j,1}^\ell \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq m_j, \end{cases}$$

et telle qu'il existe des applications linéaires $e_{j,m}^\ell : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$,

$1 \leq m < \ell \leq m_j$, pour lesquelles

$$x_j^\ell \circ \mathcal{V}^1(g) = \sum_m e_{j,m}^\ell(g) x_j^m \quad , \quad 1 \leq \ell \leq m_j \quad , \quad g \in G_{\mathbf{R}} \quad .$$

On en déduit que

$$y_j^m \circ \mathcal{V}^1(g) = - \sum_\ell e_{j,m}^\ell(g) y_j^\ell \quad , \quad 1 \leq m \leq m_j \quad , \quad g \in G_{\mathbf{R}} \quad .$$

- Soient $b_{d+2e+f+1}, \dots, b_q$, $b_o/b_{d+2e+f+1}, \dots, b_o/b_q$ les a_j du type d). Pour $d+2e+f < j \leq q$, il existe une base $(x_j^1, \dots, x_j^{m_j})$ de F_{b_j} , avec $\overline{x}_j^\ell = x_j^\ell$ pour $1 \leq \ell \leq m_j$, et des applications linéaires $e_{j,m}^\ell : G_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq m < \ell \leq m_j$ vérifiant

$$x_j^\ell \circ \mathcal{V}^1(g) = \sum_m e_{j,m}^\ell(g) x_j^m \quad , \quad 1 \leq \ell \leq m_j \quad , \quad g \in G_{\mathbf{R}} \quad .$$

Si $(y_j^1, \dots, y_j^{m_j})$ est une base de F_{b_o/b_j} telle que

$\overline{y}_j^\ell = y_j^\ell$ et $t_\Omega(y_j^\ell, x_j^m) = \delta_\ell^m$ pour $1 \leq \ell \leq m \leq m_j$, alors

$$y_j^m \circ \mathcal{V}^1(g) = - \sum_\ell e_{j,m}^\ell(g) y_j^\ell \quad , \quad 1 \leq m \leq m_j \quad , \quad g \in G_{\mathbf{R}} \quad .$$

Du fait que F_{a_j} et F_{a_k} (resp. $F_{a_k}^-$) sont t_Ω -orthogonaux pour $a_j \cdot a_k \neq b_o$ (resp. $a_j \cdot \overline{a}_k \neq b_o$) , la base $(x_j^\ell, y_j^\ell)_{\substack{1 \leq \ell \leq m_j \\ 1 \leq j \leq q}}$ de F que nous venons de construire

satisfait (iii). Je laisse le lecteur s'assurer des autres propriétés énoncées. ■

EXERCICES.1. - Les coordonnées complexes x_j^ℓ , y_j^ℓ introduites ci-dessus possèdent la propriété (iv) afin que

$$\begin{aligned} & ((\Re x_j^\ell, \Im x_j^\ell)_{1 \leq j \leq d}, (2\Re x_j^\ell, -\Im x_j^\ell, \Re y_j^\ell, \Im y_j^\ell, 2\Im y_j^\ell)_{d < j \leq d+e}, \\ & \quad , (x_j^\ell, y_j^\ell)_{d+2e < j < q}) \end{aligned}$$

soit un système de coordonnées linéaires réelles sur E où Ω et ρ^1 s'expriment de manière simple. Ecrire cette expression.

2. - Le lecteur aura remarqué que, au niveau des a_j du type a) (avec les notations de la démonstration précédente), aucun effort de "triangulation" particulier n'a été accompli. Montrer que, pour $1 \leq j \leq d$, il existe une suite

$$F_{b_j} = I_{o,j} \supset \dots \supset I_{k_j,j} = \{0\}$$

de sous-espaces vectoriels (complexes) de F_{b_j} et une suite $B_{o,j}, \dots, B_{k_j,j}$ avec $B_{\ell,j} \in L(G_{\mathbf{R}}, g^{\ell}(I_{\ell,j}))$ possédant les propriétés suivantes :

(a) $B_{o,j}(g) = t_{\Omega}^1(g)|I_{o,j}$ pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$.

(b) Pour $0 \leq \ell \leq k_j$, la restriction $t_{\Omega_{\ell,j}}$ de t_{Ω} à $I_{\ell,j} \oplus \overline{I_{\ell,j}}$ est non-dégénérée.

(c) Pour $0 \leq \ell < k_j$, si $K_{\ell,j} = \bigcap_{g \in G} \text{Ker } B_{\ell,j}(g)$ et si $J_{\ell,j}$ est l'orthogonal de $\overline{K_{\ell,j}}$ dans $I_{\ell,j}$ pour $t_{\Omega_{\ell,j}}$, alors $I_{\ell+1,j}$ est un supplémentaire de $J_{\ell,j} \cap K_{\ell,j}$ dans $J_{\ell,j}$.

(d) Pour $0 \leq \ell < k_j$, $B_{\ell+1,j}(g)$ est pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$ la composée de $B_{\ell,j}(g)|I_{\ell+1,j}$ avec la projection $t_{\Omega_{\ell,j}}$ -orthogonale sur $I_{\ell+1,j} \oplus \overline{I_{\ell+1,j}}$.

(Indications : ne pas oublier que $I_{o,j}$ est t_{Ω} -isotrope et invariant par $B_{o,j}(g)$ pour tout $g \in G_{\mathbf{R}}$. A chaque cran ℓ , prendre pour $I_{\ell+1,j}$ n'importe quel supplémentaire de $J_{\ell,j} \cap K_{\ell,j}$ dans $J_{\ell,j}$; remarquer que $B_{\ell,j}(g)$ est pour tout g un automorphisme infinitésimal de $\Omega_{\ell,j}$, et que donc $J_{\ell,j} = \bigcup_{g \in G} B_{\ell,j}(g)I_{\ell,j}$).

En déduire la forme normale cherchée de la manière suivante : pour chaque ℓ , choisir un supplémentaire $K'_{\ell,j}$ de $K_{\ell,j} \cap J_{\ell,j}$ dans $K_{\ell,j}$ et construire une

base $(x_{j,\ell}^1, \dots, x_{j,\ell}^{m_{j,\ell}})$ de $K'_{\ell,j}$ et une base $(y_{j,\ell}^1, \dots, y_{j,\ell}^{m_{j,\ell}})$ de $\overline{K'_{\ell,j}}$ telles que $t_{\Omega}(y_{j,\ell}^m, x_{j,\ell}^p) = \delta_m^p$ et $x_{j,\ell}^p = \pm 2$ i $\overline{y_{j,\ell}^p}$ pour $1 \leq m \leq p \leq m_{j,\ell}$.

Choisir une base $(x_{j,\ell}^{1+m_{j,\ell}}, \dots, x_{j,\ell}^{p_{j,\ell}})$ de $J_{\ell,j} \cap K_{\ell,j}$, et prouver l'existence d'éléments $y_{j,\ell}^{1+m_{j,\ell}}, \dots, y_{j,\ell}^{p_{j,\ell}}$ de $\overline{I}_{\ell,j}$, orthogonaux à $K'_{\ell,j} \oplus I_{\ell+1,j}$ pour $t_{\Omega_{\ell,j}}$, et tels que $t_{\Omega}(y_{j,\ell}^m, x_{j,\ell}^p) = \delta_m^p$ pour $m_{j,\ell} + 1 \leq m \leq p \leq p_{j,\ell}$. Remarquer que $(x_{j,\ell}^1, \dots, x_{j,\ell}^{p_{j,\ell}}, \overline{y}_{j,\ell}^{m_{j,\ell}+1}, \dots, \overline{y}_{j,\ell}^{p_{j,\ell}})$ est une base de l'orthogonal de $\overline{I}_{\ell+1,j}$ dans $I_{\ell,j}$ pour $t_{\Omega_{\ell,j}}$. \square

Une base $((x_j^\ell), (y_j^\ell))$ de l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$ possédant les propriétés (i)-(vi) du Corollaire 2 sera appelée système de coordonnées \mathbf{R} -linéaires complexes Ω -adapté à ρ^1 .

(8.2) Classification formelle des germes d'actions de groupes élémentaires conservant une structure de contact ou une forme symplectique.

(8.2.1) Le cas symplectique.

Soit ω une forme symplectique sur une variété de dimension finie X . Un automorphisme infinitésimal de ω est un champ de vecteurs ξ sur X tel que $L_\xi \omega = 0$, c'est-à-dire (formule d'homotopie) tel que la 1-forme $i_\xi \omega$ soit fermée. Lorsque $i_\xi \omega$ est exacte, on dit que ξ est un champ hamiltonien, et toute $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $i_\xi \omega = df$ est un hamiltonien de ξ , ce que nous noterons $\xi = H_\omega f$. Sur l'algèbre $\mathcal{E}(X)$ des fonctions $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ , on définit une structure d'algèbre de Lie, de crochet $[\cdot, \cdot]_\omega$ donné par

$$(1) \quad [f, g]_\omega = L_{H_\omega f} g \quad (\text{crochet de Poisson}),$$

et l'on a

$$H_\omega [f, g]_\omega = [H_\omega f, H_\omega g] \quad (\text{crochet de Lie}).$$

Bien entendu, le crochet de Poisson de deux fonctions de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, est bien défini, mais est en général seulement de classe C^{k-1} . Si

$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ est un système de coordonnées locales sur X où

$$\omega = \sum dy_i \wedge dx_i \quad (\text{théorème de Darboux}),$$

alors

$$(2) \quad L_{H_\omega} f = \sum \left(-\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Un point a de X étant fixé, soit \mathcal{E}^k , $1 \leq k \leq \infty$, l'algèbre réelle des jets d'ordre k en a de fonctions C^k sur X , et soit \mathcal{M}_k l'idéal maximal de \mathcal{E}^k (formé des jets de fonctions nulles en a).

PROPOSITION 1. (i) Le crochet de Poisson induit une structure d'algèbre de Lie
 $[.,.]_\omega^\infty$ sur \mathcal{E}^∞ , et l'on a $[\mathcal{M}_\infty^i, \mathcal{M}_\infty^j]_\omega^\infty \subset \mathcal{M}_\infty^{i+j-2}$ pour $i, j \geq 1$.

(ii) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le crochet de Poisson induit :

- Pour $i, j \geq 0$ et $m + i, \ell + j \geq k$, une application bilinéaire (antisymétrique)
 $\mathcal{M}_\ell^{i+2} \times \mathcal{M}_m^{j+2} \rightarrow \mathcal{M}_k^{i+j+2}$, notée $(f, g) \mapsto [f, g]_\omega^k$, et donc en particulier une
structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{M}_k^2 .

- Pour $\ell, m > k$, une application bilinéaire (antisymétrique) $\mathcal{E}^\ell \times \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{E}^k$,
encore notée $(f, g) \mapsto [f, g]_\omega^k$.

- Pour $j + \ell, m \geq k$, une application bilinéaire (antisymétrique)
 $\mathcal{E}^\ell \times \mathcal{M}_{m+1}^{j+2} \rightarrow \mathcal{M}_k^{j+1}$, toujours notée $(f, g) \mapsto [f, g]_\omega^k$.

(iii) Pour $1 \leq k \leq \infty$, l'application $f \mapsto H_\omega f$ induit un iso-
morphisme de l'algèbre de Lie \mathcal{M}_{k+1}^2 sur l'algèbre de Lie $\mathcal{E}_a^k = \mathcal{E}_a^{k(\omega)}$ des jets d'
ordre k en a d'automorphismes infinitésimaux C^k de ω nuls en a . ■

Pour $1 \leq k \leq \infty$, soit $\mathcal{G}^k = \mathcal{G}_a^k(\omega)$ le groupe topologique des jets d'ordre
 k en a de germes d'automorphismes C^k de ω fixant a , et notons $\text{Aut}_\omega(\mathcal{E}^k)$
le groupe des automorphismes A de l'algèbre réelle \mathcal{E}^k "préservant $[.,.]_\omega^k$ "
au sens suivant : quels que soient $f, g \in \mathcal{E}^k$, on a

$$(3a) \quad A_{k-1}[f, g]_\omega^{k-1} = [Af, Ag]_\omega^{k-1},$$

où A_{k-1} désigne l'automorphisme de $\mathcal{E}^{k-1} \simeq \mathcal{E}^k / \mathcal{M}_k^k$ induit par A , et en outre

$$(3b) \quad A[f, g]_{\omega}^k = [Af, Ag]_{\omega}^k \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{M}_k^2.$$

Soit de même $\text{aut}_{\omega}(\mathcal{E}^k)$ l'algèbre de Lie des dérivations b de \mathcal{E}^k qui sont des automorphismes infinitésimaux de $[\cdot, \cdot]_{\omega}^k$ au sens suivant :

$$(3)\text{bis} \quad \begin{cases} \forall f, g \in \mathcal{E}^k, & b_{k-1}[f, g]_{\omega}^{k-1} = [bf, g]_{\omega}^{k-1} + [f, bg]_{\omega}^{k-1} \\ \forall f, g \in \mathcal{M}_k^2, & b[f, g]_{\omega}^k = [bf, g]_{\omega}^k + [f, bg]_{\omega}^k. \end{cases}$$

Pour chaque $\varphi \in \mathcal{B}^k$ (resp. $\varphi \in \delta^k$), soit φ_{*} l'élément de $\text{Aut}_{\omega}(\mathcal{E}^k)$ (resp. $\text{aut}_{\omega}(\mathcal{E}^k)$) donné par $\varphi_{*}f = f \circ \varphi^{-1}$ (resp. $\varphi_{*}f = -L_{\varphi}f$).

THEOREME 1. - (i) L'application $\varphi \mapsto \varphi_{*}$ est un isomorphisme continu de \mathcal{B}^k sur $\text{Aut}_{\omega}(\mathcal{E}^k)$.

(ii) L'application $\xi \mapsto \xi_{*}$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie δ^k sur $\text{aut}_{\omega}(\mathcal{E}^k)$.

Démonstration. Point (ii). Soit $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ un système de coordonnées locales nulles en a tel que (Darboux)

$$\omega = \sum dy_i \wedge dx_i.$$

D'après (1) et (2), on a

$$(4) \quad \begin{cases} (a) & L_{H_{\omega} x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad L_{H_{\omega} y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{et donc} \\ (b) & [x_i, x_j]_{\omega} = 0 \quad \text{et} \quad [x_i, y_j]_{\omega} = \delta_i^j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, nous écrirons x_i, y_i au lieu de $j_a^k x_i, j_a^k y_i$.

Etant donné $b \in \text{aut}_{\omega}(\mathcal{E}^k)$, d'après la proposition 1 (iii) et (si $k = \infty$) le théorème d'E. Borel, il s'agit d'établir l'existence de $f \in \mathcal{M}_{k+1}^2$ tel que

$$\forall g \in \mathcal{E}^k, \quad bg = [g, f]_{\omega}^k,$$

ou encore, de manière équivalente,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad b x_i = [x_i, f]_{\omega}^k \quad \text{et} \quad b y_i = [y_i, f]_{\omega}^k,$$

car $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ engendre l'algèbre $\check{\mathcal{E}}^k$. En vertu de (4) (a), il suffit pour cela de montrer que la 1-forme formelle

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} (-b y_i \, dx_i + b x_i \, dy_i)$$

est fermée, f étant en ce cas son unique primitive dans \mathcal{M}_{k+1} . Toujours d'après (4)(a), la relation $d\alpha = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} [x_i, b x_j]_{\omega}^{k-1} + [b x_i, x_j]_{\omega}^{k-1} &= [y_i, b y_j]_{\omega}^{k-1} + [b y_i, y_j]_{\omega}^{k-1} = \\ &= [x_i, b y_j]_{\omega}^{k-1} + [b x_i, y_j]_{\omega}^{k-1} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n; \end{aligned}$$

or, ces égalités résultent immédiatement de (3)bis, de (4)(b) et du fait que b est nul sur les (jets de) constantes. \square

Point (i) Soient $E = T_a X$, et Ω la forme symplectique sur E constamment égale (dans la trivialisatation canonique de $\Lambda^2 T^*E$) à $\omega(a)$.

LEMME 1.- Pour tout $A \in \text{Aut}_{\omega}(\check{\mathcal{E}}^k)$, il existe $\varphi \in \check{\mathcal{B}}^k$ tel que $A \circ \varphi_{*}$ induisse l'identité sur $\mathcal{M}_k / \mathcal{M}_k^2$.

Preuve. Soit Ω_{ℓ} la forme symplectique sur $L(E, \mathbf{R})$ donnée par $\Omega_{\ell}(x)(y, z) = -[y, z]_{\Omega_{\ell}}$, et soit A_1 l'automorphisme linéaire de $L(E, \mathbf{R})$ induit par A via l'isomorphisme canonique de $\mathcal{M}_k / \mathcal{M}_k^2$ sur $L(E, \mathbf{R})$. On vérifie facilement que A_1 conserve Ω_{ℓ} , et l'on en déduit presque aussi facilement que son transposé ${}^t A_1 \in \text{GL}(E)$ préserve Ω . D'après le théorème de Darboux (Appendice 0), il existe un germe $h : [X]_a \rightarrow [E]_0$ de C^{∞} -difféomorphisme "tangent à l'identité" et tel que $h^{*}[\Omega]_0 = [\omega]_a$. Le lemme 1 en résulte avec $\varphi = j_a^k(h^{-1} \circ {}^t A_1 \circ h)$. \square

Rappelons une convention introduite dans (4.3.2) : un endomorphisme b de l'espace vectoriel $\check{\mathcal{E}}^{\infty}$, vérifiant $b \mathcal{M}_{\infty}^k \subset \mathcal{M}_{\infty}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, est dit

nilpotent lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme de $\check{\mathcal{E}}^k \simeq \check{\mathcal{E}}^\infty / \mathcal{M}_\infty^{k+1}$ induit par b est nilpotent.

LEMME 2.- Pour tout $B \in \text{Aut}_w(\check{\mathcal{E}}^k)$ tel que $B - \text{id}$ soit nilpotent (ce qui est en particulier le cas si B induit l'identité sur $\mathcal{M}_k / \mathcal{M}_k^2$), il existe un unique $b \in \text{aut}_w(\check{\mathcal{E}}^k)$ nilpotent et tel que $B = \exp b$.

Preuve. Avec les notations de (4.3.1), lemme 2, il suffit pour $k < \infty$ de montrer que $b = \text{Log } B$ est un automorphisme infinitésimal de $[\cdot, \cdot]_w^k$, simple vérification que je laisse au lecteur. Le passage à la limite projective pour $k = \infty$ ne pose comme d'ordinaire aucun problème. \square

Pour établir le point (i), il suffit de prouver que tout $A \in \text{Aut}_w(\check{\mathcal{E}}^k)$ est de la forme $A = h_*$ avec $h \in \check{\mathcal{D}}^k$ (l'unicité a déjà été démontrée dans (4.3.2.)). Or, si $\varphi \in \check{\mathcal{D}}^k$ satisfait le lemme 1, le lemme 2 montre qu'il existe $b \in \text{aut}_w(\check{\mathcal{E}}^k)$ vérifiant $\exp b = A \circ \varphi_*$. D'après le point (ii), on a $b = \xi_*$ pour un $\xi \in \check{\delta}^k$, et donc $A = ((\exp \xi) \circ \varphi^{-1})_*$. ■

COROLLAIRE 1. - (i) Pour tout entier $k \geq 1$ et tout $\check{\varphi} \in \check{\mathcal{D}}^k$ (resp. $\check{\varphi} \in \check{\delta}^k$), il existe un germe φ d'automorphisme (resp. d'automorphisme infinitésimal) de ω fixant (resp. nul en) a , de classe C^∞ - et même analytique lorsque ω l'est - tel que $\check{\varphi} = j_a^k \varphi$.

(ii) Les injections canoniques $\check{\mathcal{D}}^\infty \hookrightarrow \varprojlim \check{\mathcal{D}}^k$ et $\check{\delta}^\infty \hookrightarrow \varprojlim \check{\delta}^k$ sont des isomorphismes.

Démonstration. Le point (ii) vient de ce que, d'après le théorème d'E. Borel, on a $\check{\mathcal{E}}^\infty = \varprojlim \check{\mathcal{E}}^k$, et donc $\text{Aut}_w(\check{\mathcal{E}}^\infty) = \varprojlim \text{Aut}_w(\check{\mathcal{E}}^k)$.

Point (i). D'après le théorème de Darboux (appendice 0), il existe un $h : [X]_a \longrightarrow [E]_0$ de classe C^∞ , tangent à l'identité et tel que $h^*[\Omega]_0 = [\omega]_a$. En outre, h peut être choisi analytique si ω l'est. Posons $\check{h} = j_a^k h$. Etant donné $\check{\varphi} \in \check{\mathcal{D}}^k$, la proposition 1 (iii) exprime que $\check{\varphi}$ admet un unique hamiltonien $\check{f} \in \mathcal{H}_{k+1}^2$. Si $\check{f} \circ h^{-1} : [E]_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ est un germe d'ap-

plication polynomiale vérifiant $j_a^{k+1} f = f^{\vee}$, on a donc $\varphi = j_a^k(H_\omega f)$. Enfin, étant donné $\varphi \in \mathcal{D}_a^k$, la preuve du théorème 1 montre qu'il existe $\xi \in \mathcal{O}^k$ et $A \in GL(E)$ tels que $\varphi = (\exp \xi) \circ j_a^k(h^{-1} \circ A \circ h)$. ■

COROLLAIRE 2. - \mathcal{D}_a^k est exactement l'ensemble des $j_a^k \varphi$ tels que $\varphi \in \mathcal{D}_a^k(X)$ vérifie $j_a^{k-1}(\varphi^*[\omega]_a - [\omega]_a) = 0$.

Démonstration. Le point (i) du corollaire 1 exprime en particulier que tout élément de \mathcal{D}_a^k est du type souhaité. Inversement, si $\varphi \in \mathcal{D}_a^k(X)$ est tel que $j_a^{k-1} \varphi^*[\omega]_a = j_a^{k-1} \omega$, alors, pour tout $f \in \mathcal{E}_a^k(X)$, on a $j_a^{k-1}(H_\omega \varphi_* f - \varphi_* H_\omega f) = 0$. Par définition du crochet de Poisson, l'automorphisme $(j_a^k \varphi)_*$ de l'algèbre réelle \mathcal{E}^k est donc dans $\text{Aut}_\omega(\mathcal{E}^k)$, et il suffit d'appliquer le théorème 1. ■

Soient G un groupe abélien élémentaire, et $\text{Act}_a^k(G, \omega)$, $1 \leq k \leq \infty$, l'ensemble des $\varphi \in \text{Act}_a^k(G, X)$ vérifiant $\varphi(G) \subset \mathcal{D}_a^k(\omega)$. Pour chaque $\varphi \in \text{Act}_a^k(G, X)$, rappelons que sa partie linéaire $\varphi^1 \in \text{Act}_0^k(G, E)$, où $E = T_a X$, est définie comme suit : pour tout $g \in G$, on a $\varphi^1(g) = j_0^k(\varphi(g)_1)$, où $\varphi(g)_1 \in GL(E) \simeq \mathcal{D}_a^1(X)$ est la projection canonique de $\varphi(g)$. Soit Ω la forme symplectique sur E constamment égale à $\omega(a)$ dans la trivialisation canonique de $\Lambda^2 T_a^* E$; pour tout $\varphi \in \text{Act}_a^k(G, \omega)$, on a $\varphi^1 \in \text{Act}_0^k(G, \Omega)$. Nous désignerons par $\mathcal{D}_{a,0}^k(\omega, \Omega)$ l'ensemble des jets d'ordre k de germes $h : [X]_a \rightarrow [E]_0$ de C^k -difféomorphismes tels que $h^*[\Omega]_0 = [\omega]_a$.

THEOREME 2. - Quel que soit $\varphi \in \text{Act}_a^k(G, \omega)$, $1 \leq k \leq \infty$, la partie semi-simple σ de φ (cf. (4.3.2), théorème 4) appartient à $\text{Act}_a^k(G, \omega)$, et il existe $h \in \mathcal{D}_{a,0}^k(\omega, \Omega)$, tangent à l'identité, tel que $h_* \sigma = \sigma^1$.

Démonstration. Cela résultera immédiatement des lemmes 3 et 6 ci-dessous :

LEMME 3. - Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_a^k(\omega)$, la partie semi-simple σ de φ appartient à $\mathcal{D}_a^k(\omega)$.

Preuve. Soit $\mathcal{E}_\mathbb{C}^k \simeq \mathcal{E}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ l'algèbre complexe des jets d'ordre k en a

de fonctions $X \longrightarrow \mathbb{C}$, et soit $\mathcal{M}_{k,\mathbb{C}}$ son idéal maximal. Désignons encore par $[\cdot, \cdot]_{\omega}^k$ l'unique extension \mathbb{C} -bilinéaire de $[\cdot, \cdot]_{\omega}^k$ obtenue par complexification, et par $\text{Aut}_{\omega}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^k)$ le groupe des automorphismes de l'algèbre complexe $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^k$ préservant $[\cdot, \cdot]_{\omega}^k$ au sens de (3a)-(3b). En raison du théorème 1 et de (4.3.1), lemme 1, le lemme 3 résulte du

LEMME 4. - Pour tout $A \in \text{Aut}_{\omega}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^k)$, la partie semi-simple de A préserve $[\cdot, \cdot]_{\omega}^k$.

Preuve. Cela résulte immédiatement du résultat suivant, où A_{k-1} désigne l'automorphisme de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{k-1} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^k / \mathcal{M}_{k,\mathbb{C}}^k$ induit par A, et qui se prouve comme (4.3.2), lemme 2 :

LEMME 5. - Sous les hypothèses du lemme 4, pour $k < \infty$, quels que soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ et

$$w_j \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A - \mu_j \text{id})^m, \quad j = 1, 2,$$

on a

$$[w_1, w_2]_{\omega}^{k-1} \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A_{k-1} - \mu_1 \mu_2 \text{id})^m,$$

et, si $w_1, w_2 \in \mathcal{M}_{k,\mathbb{C}}^2$,

$$[w_1, w_2]_{\omega}^k \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(A - \mu_1 \mu_2 \text{id})^m. \quad \square.$$

LEMME 6. - Quel que soit l'élément semi-simple $\overset{\vee}{\sigma}$ de $\text{Act}_a^k(G, \omega)$, $1 \leq k \leq \infty$, il existe $\overset{\vee}{h} \in \mathcal{D}_{a,0}^k(\omega, \Omega)$ tel que $h_* \overset{\vee}{\sigma} = \overset{\vee}{\sigma} 1$.

Preuve. D'après le théorème de Darboux, on peut supposer que $(X, a, \omega) = (E, 0, \Omega)$.

En vertu du Corollaire 2, nous avons donc à trouver $\overset{\vee}{h} \in \mathcal{D}_0^k(E)$ tel que

$\overset{\vee}{h}^* j_0^{k-1} \Omega = j_0^{k-1} \Omega$. Or, le théorème 4 (ii) de (4.3.1) implique l'existence de $h_0 \in \mathcal{D}_0^k(E)$, tangent à l'identité, tel que $(j_0^k h_0)^* \overset{\vee}{\sigma} = \overset{\vee}{\sigma} 1$, et il s'agit donc de trouver $h_1 \in \mathcal{D}_0^k(E)$ tel que $(j_0^k h_1)^* \overset{\vee}{\sigma} 1 = \overset{\vee}{\sigma} 1$ et $j_0^{k-1}(h_1^* \Omega' - \Omega) = 0$, où $\Omega' = h_0^* \Omega$ (et de prendre $\overset{\vee}{h} = j_0^k(h_0 \circ h_1)$). Pour cela, d'après la version

formelle du théorème de Darboux démontrée dans l'appendice 0, il suffit de montrer l'existence d'une 1-forme γ sur E telle que

$$(1) \quad \begin{cases} j^{k-1}(d\gamma + \Omega' - \Omega) = 0 \\ \gamma(0) = 0 \\ \forall g \in G, \quad \forall_{\sigma}^1(g)^* j_0^k \gamma = j_0^k \gamma. \end{cases}$$

(En fait, c'est évidemment $j_0^k \gamma$ qu'il s'agit de trouver). Si β est une primitive de $[\Omega]_0 - \Omega'$ nulle en 0, nous allons chercher γ sous la forme

$$(2) \quad \gamma = \beta + dh,$$

où $h \in \mathcal{E}_0^{k+1}(E)$ est nul en 0 ainsi que sa différentielle.

Soit (x_1, \dots, x_n) une base de $L(E, \mathbb{C})$ telle que $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ et qu'il existe des morphismes continus $\alpha_1, \dots, \alpha_n : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ pour lesquels

$$\forall_{\sigma}^1(g)_* x_j = \alpha_j(-g) x_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

(dans cette formule, comme dans la suite de la démonstration, on note x_j au lieu de $j_0^k x_j$). Si l'on écrit (modulo l'abus de notation précédent)

$$j_0^k \beta = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{p \in \mathbb{N}^n \\ |p| \leq k}} (p_j + 1) \beta_{j,p+\delta_j} x^p dx_j.$$

où $\delta_j = (\delta_j^1, \dots, \delta_j^n) \in \mathbb{N}^n$, la relation

$$\forall g \in G, \quad \forall_{\sigma}^1(g)^* (j_0^{k-1} d\beta) = j_0^{k-1} d\beta$$

équivalent à

$$(3) \quad \beta_{\ell,p} = \beta_{j,p} \quad \text{pour } 1 \leq j < \ell \leq n, \quad p_j > 0, \quad p_{\ell} > 0 \quad \text{et } \alpha^p \neq 1.$$

Nous cherchons, d'après (1) et (2), un élément $j_0^{k+1} h = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N}^n \\ |p| < k+1}} h_p x^p.$

de $\mathcal{E}_0^{k+1}(E)$ tel que $j_0^1 h = 0$ et que

$$h_p + \beta_{j,p} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n, \quad p_j > 0 \quad \text{et } \alpha^p \neq 1.$$

Du fait que $\beta(0) = 0$, un tel $j_0^{k+1} h$ existe d'après (3). ■

COROLLAIRE 3. Sous les hypothèses du théorème 2, la partie nilpotente \mathcal{V} de ρ (cf. (4.3.2), Théorème 4) est à valeurs dans $\delta_a^k(\omega)$. ■

NOTATIONS. Sous les hypothèses précédentes, soit ρ^1 l'action linéaire de G sur E dont \mathcal{V}^1 est le jet d'ordre k , soit $(x_j^\ell, y_j^\ell)_{1 \leq \ell \leq m_j}$ un système de coordonnées \mathbb{R} -linéaires sur E , $\omega(a)$ -adapté à ρ^1 (cf. (8.1.2), Corollaire 2 et définition subséquente), et soient $b_1, \dots, b_q : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ les morphismes continus définis par (8.1.2), corollaire 2, (ii)- avec $b_0 = 1$. En notant x_j^ℓ, y_j^ℓ au lieu de $j_0^k x_j^\ell, j_0^k y_j^\ell$, et en supposant, pour simplifier les notations, que

$$(4) \quad (X, a, \omega) = (E, 0, \Omega),$$

tout élément h de \mathcal{M}_{k+1}^2 s'écrit de manière unique comme un polynôme (pour $k < \infty$) ou une série formelle (si $k = \infty$)

$$(5) \quad h = \sum_{\substack{(\beta, \gamma) \in \mathcal{Q} \\ 1 \leq |\beta| + |\gamma| \leq k+1}} h_{\beta, \gamma} x^\beta y^\gamma,$$

où $\mathcal{Q} = \left(\prod_{1 \leq j \leq q} \mathbb{N}^{m_j} \right)^2$, avec les notations multi-indicielles habituelles,

les $h_{\beta, \gamma}$ désignant des constantes complexes. On a

$$(6) \quad \forall g \in G, \forall (\beta, \gamma) \in \mathcal{Q} \quad \text{avec } 2 \leq |\beta| + |\gamma| < k+1, \quad \sigma^1(g)_* (x^\beta y^\gamma) = \prod_{1 \leq j \leq q} b_j(g)^{|\gamma_j| - |\beta_j|} x^\beta y^\gamma,$$

où l'on a noté β_j, γ_j les composantes de $\beta, \gamma \in \prod_{1 \leq j \leq q} \mathbb{N}^{d_j}$ suivant le j -ième facteur. Si

$$R = \{(\beta, \gamma) \in \mathcal{Q} : |\beta| + |\gamma| > 2 \text{ et } \forall g \in G, \prod_{1 \leq j \leq q} b_j(g)^{|\gamma_j| - |\beta_j|} = 1\},$$

nous pouvons enfin énoncer le résultat de formes normales cherché, évident d'après (5) et (6) :

COROLLAIRE 4. - Sous les hypothèses du Théorème 2 et du Corollaire 3, et avec les notations précédentes, le morphisme \check{f} de l'algèbre de Lie abélienne $G_{\mathbf{R}}$ dans l'algèbre de Lie $(\mathcal{M}_{k+1}^2, [\cdot, \cdot]_{\omega}^{k+1})$ donné par

$$\forall g \in G_{\mathbf{R}}, h_* \check{v}(g) = H_{\Omega} \check{f}(g)$$

est de la forme

$$\forall g \in G_{\mathbf{R}}, \check{f}(g) = \sum_{j, \ell, m} e_{j, m}^{\ell}(g) x_j^{\ell} y_j^m + \sum_{\substack{(\beta, \gamma) \in R \\ |\beta| + |\gamma| \leq k+1}} f_{\beta, \gamma}(g) x^{\beta} y^{\gamma},$$

où les $f_{\beta, \gamma}$ sont des formes linéaires complexes sur $G_{\mathbf{R}}$ (les $e_{j, m}^{\ell}$ étant celles introduites dans (8.1.2), Corollaire 2). ■

Je laisse le lecteur prouver (voir aussi (8.3.3)) le

SCOLIE. - Génériquement, R est l'ensemble R_0 des $(\beta, \gamma) \in \mathcal{Q}$ avec $|\beta_j| = |\gamma_j|$ pour tout j ; plus précisément, l'ensemble des morphismes continus $\hat{\rho}^1 : G \rightarrow GL(\omega(b))$ tels que $R = R_0$ (les notations étant celles de (8.1.1), Corollaire 2 en ce qui concerne les b_j) est résiduel pour la topologie compacte-ouverte. ■

(8.2.2) Cas d'une structure de contact.

Soient K une structure de contact sur une variété X , a un point de X et

$$\delta = \delta_a^\infty(K)$$

l'algèbre de Lie des germes en a d'automorphismes infinitésimaux C^∞ de K .

On note

$$(1) \quad \begin{cases} N_a = K_a^L \subset T_a E, & \delta_{-2} = \delta \\ \delta_{-1} = \{\xi \in \delta : a \in \text{Car } \xi\} = \{\xi \in \delta : \xi(a) \in N_a\} \\ \delta_0 = \{\xi \in \delta : \xi(a) = 0\} \subset \delta_{-1}. \end{cases}$$

Avec les notations de (8.1.1), soit $gl(T_a K)$ la sous-algèbre de Lie de $gl(E_a)$ formée des automorphismes infinitésimaux linéaires de $T_a K$. L'application

$$\delta_0 \ni \xi \longmapsto \tilde{\xi}_K^1 = \frac{d}{dt} (\text{expt } \xi)_K^1 \Big|_{t=0} \in gl(T_a K)$$

est ((8.1.1), Proposition, (iv)) un morphisme surjectif d'algèbres de Lie.

Nous appellerons $\tilde{\xi}_K^1$ la k -partie linéaire de $\xi \in \delta_0$.

Définissons une suite décroissante $\delta = \delta_{-2} \supset \delta_{-1} \supset \delta_0 \supset \dots \supset \delta_k \supset \dots$ de sous-espaces de δ par (1) et

$$(2) \quad \delta_{k+1} = \{\xi \in \delta_k : [\xi, \delta] \subset \delta_{k-1} \text{ et } [\xi, \delta_{-1}] \subset \delta_k\}, k \in \mathbb{N}.$$

PROPOSITION 1. Pour $k + \ell \geq -2$, on a $[\delta_k, \delta_\ell] \subset \delta_{k+\ell}$ (en particulier, δ_k est une algèbre de Lie pour $k \geq 0$). En outre,

$$\delta_1 = \{\xi \in \delta_0 : \tilde{\xi}_K^1 = 0\}.$$

Démonstration. La première assertion résulte facilement de l'identité de Jacobi. Pour prouver (ii), remarquons que, pour tout $\xi \in \delta_0$ et tout $\eta \in \delta$, on a

$$(3) \quad [\xi, \eta](a) = -d\xi(a) \cdot \eta(a).$$

Dire que $\xi \in \delta_0$ vérifie $[\xi, \delta_{-1}] \subset \delta_0$ signifie donc que $d\xi(a)|_{N_a} = 0$, c'est

à-dire $\tilde{\xi}_k^1 = 0$. Mais alors l'endomorphisme de $T_a X / N_a$ induit par $d\xi(a)$ est nul, c'est-à-dire que l'on a $d\xi(a) \cdot T_a X \subset N_a$, soit encore $[\xi, \delta] \subset \delta_{-1}$ d'après (3), d'où la seconde assertion. ■

Soit c une section de K^* au-dessus d'un voisinage de a dans X , et (Darboux) soit $(w, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ un système de coordonnées sur ce voisinage, nulles en a et telles que

$$(4) \quad c = dw + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i dy_i - y_i dx_i).$$

D'après (7.2.2), Proposition 1, l'application $\xi \mapsto i_\xi c$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel δ sur l'espace \mathcal{C} des germes $[X]_a \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctions C^∞ . Le crochet de Lagrange $[.,.]_c$ défini sur \mathcal{C} par

$$(5) \quad [i_\xi c, i_\eta c]_c = i_{[\xi, \eta]c} \quad , \quad \xi, \eta \in \delta \quad ,$$

munit \mathcal{C} d'une structure d'algèbre de Lie. Avec les notations habituelles $\partial/\partial x_i$, $\partial/\partial y_i$, $\partial/\partial w$ (cf. Appendice 0, section (A0-5)), on a

$$(6) \quad \forall f \in \mathcal{C}, \quad L_{H_c} f = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\left(\frac{x_i}{2} \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\frac{y_i}{2} \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + \left(f - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}) \right) \frac{\partial}{\partial w}$$

et

$$(7) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}, \quad [f, g]_c = L_{H_c} f \cdot g - g \frac{\partial f}{\partial w} \quad .$$

PROPOSITION 2. Pour tout entier $k \geq -2$, le sous-espace $\mathcal{C}_k = \{i_\xi c : \xi \in \delta_k\}$ de \mathcal{C} est l'ensemble des $f \in \mathcal{C}$ vérifiant

$$(8) \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \quad \text{avec} \quad 2\alpha + |\beta| + |\gamma| < k+2, \quad \frac{\partial^{\alpha+|\beta|+|\gamma|} f}{\partial w^\alpha \partial x^\beta \partial y^\gamma} (a) = 0 \quad .$$

En particulier, $\delta_\infty = \cap \delta_k$ est donné par

$$(9) \quad \delta_\infty = \{ \xi \in \delta : j_a^\infty \xi = 0 \} \quad .$$

Démonstration. Pour $k \geq -2$, soit $\mathcal{E}_k^?$ l'ensemble des $f \in \mathcal{E}$ vérifiant (8). On a bien $\mathcal{E}_{-2} = \mathcal{E} = \mathcal{E}_{-2}^?$, $\mathcal{E}_{-1} = \mathcal{E}_{-1}^?$ (par définition) et $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^?$ (d'après (6)). Etant donné $k \in \mathbb{N}$, supposons donc que

$$\mathcal{E}_\ell = \mathcal{E}_\ell^? \quad \text{pour } -2 \leq \ell \leq k.$$

De (6) et (7), on déduit alors facilement l'inclusion $\mathcal{E}_{k+1}^? \subset \mathcal{E}_{k+1}$. L'inclusion $\mathcal{E}_{k+1} \subset \mathcal{E}_{k+1}^?$ s'obtient en remarquant que, pour tout $f \in \mathcal{E}_{k+1}$, on doit avoir

$$\mathcal{E}_{k-1}^? = \mathcal{E}_{k-1} \ni [1, f] = \frac{\partial f}{\partial w},$$

et donc, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{cases} \mathcal{E}_k^? = \mathcal{E}_k \ni [x_i, f] - \frac{x_i}{2} \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial y_i} \\ \mathcal{E}_k^? = \mathcal{E}_k \ni [f, y_i] + \frac{y_i}{2} \frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Pour tout $k \in \{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$\tilde{\delta}^k = \delta / \delta_k = \delta_a^k(K)$$

est l'espace des K -jets d'ordre k en a d'automorphismes infinitésimaux de K . On note de même (si $\mathcal{E}_\infty = \{i_\xi c : \xi \in \delta_\infty\}$)

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}^k = \mathcal{E} / \mathcal{E}_k, \\ \tilde{\delta}_\ell^k = \delta_\ell / \delta_\ell \cap \delta_k, \quad \ell \geq -2 \\ \tilde{\mathcal{E}}_\ell^k = \mathcal{E}_\ell / \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_k, \quad \ell \geq -2. \end{cases}$$

Pour chaque $\xi \in \delta$ (resp. $f \in \mathcal{E}$), nous noterons $\tilde{\xi}^k$ (resp. \tilde{f}^k) son image canonique dans $\tilde{\delta}^k$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}^k$), que nous appellerons son K -(resp. c -) jet d'ordre k en a .

SCOLIE 1. L'algèbre de Lie δ_1 étant le noyau du morphisme surjectif

$$\delta_0 \ni \xi \mapsto \tilde{\xi}_K^1 \in \mathfrak{gl}(T_a K),$$

celui-ci induit un isomorphisme de $\tilde{\delta}_0^1$ sur $\mathfrak{gl}(T_a K)$. ■

Pour tout $\xi \in \tilde{\delta}_0^k$, la $(k-)$ partie linéaire ξ^1 de ξ est le $T_a K$ -jet d'ordre k en 0 de la projection canonique de ξ sur $\tilde{\delta}_0^1 \simeq g^{\mathbb{L}}(T_a K)$.

Voici l'analogie de (8.2.1), Proposition 1 :

PROPOSITION 3. - (i) Le crochet de Lagrange induit une structure d'algèbre de Lie $[\cdot, \cdot]_c^\infty$ sur $\tilde{\mathcal{E}}^\infty$, et l'on a $[\tilde{\mathcal{E}}_k^\infty, \tilde{\mathcal{E}}_\ell^\infty] \subset \tilde{\mathcal{E}}_{k+\ell}^\infty$ pour $k + \ell \geq -2$.

(ii) Pour tout entier $k \geq -1$, le crochet de Lagrange induit :

- Pour $i + j \geq -2$ et $m + i, \ell + j \geq k$, une application bilinéaire (antisymétrique) $\tilde{\mathcal{E}}_i^\ell \times \tilde{\mathcal{E}}_j^m \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{i+j}^k$, notée $(f, g) \longmapsto [f, g]_c^k$, et donc en particulier une structure d'algèbre de Lie sur $\tilde{\mathcal{E}}_\ell^k, \ell \geq 0$.

- Pour $\ell, m \geq k + 2$, une application bilinéaire (antisymétrique) $\tilde{\mathcal{E}}_\ell^m \times \tilde{\mathcal{E}}_\ell^m \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_\ell^k$, encore notée $(f, g) \longmapsto [f, g]_c^k$.

- Pour $m + 1, \ell > k$, une application bilinéaire (antisymétrique) $\tilde{\mathcal{E}}_\ell^m \times \tilde{\mathcal{E}}_{-1}^m \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_\ell^k$, toujours notée $(f, g) \longmapsto [f, g]_c^k$. ■

SCOLIE 2. - D'après la proposition 2, la structure d'algèbre réelle de \mathcal{E} est telle que $\mathcal{E}_\ell \times \mathcal{E}_m \subset \mathcal{E}_{\ell+m+2}$ pour $\ell, m \geq -2$. Elle induit donc une structure d'algèbre réelle sur $\tilde{\mathcal{E}}^k$ pour $-1 \leq k \leq \infty$, et, plus précisément, une application bilinéaire (symétrique)

$$\tilde{\mathcal{E}}_\ell^{k-m-2} \times \tilde{\mathcal{E}}_m^{k-\ell-2} \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\ell+m+2}^k, \text{ notée } (f, g) \longmapsto (fg)^k, \text{ pour } -2 \leq \ell, m < k. \blacksquare$$

Soit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_a^\infty(K)$$

le groupe des germes en a d'automorphismes locaux de K fixant a . Pour tout $h \in \mathfrak{A}$ et tout $k \geq -2$, on a (exercice)

$$(10) \quad h_* \delta_k = \delta_k.$$

La représentation $h \mapsto h_*$ de \mathfrak{A} dans δ_0 induit donc une représentation de \mathfrak{A} dans l'espace de dimension finie $\tilde{\delta}_0^k \times \tilde{\delta}_{-1}^{k-1} \times \tilde{\delta}^{k-2}$, de noyau

$$\mathfrak{A}_k = \{h \in \mathfrak{A} : \forall j \in \{0, 1, 2\}, (h_* - \text{id}) \delta_{-j} \subset \delta_{k-j}\}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le quotient

$$\tilde{\mathcal{H}}^k = \tilde{\mathcal{B}}_a^k(K) = \mathcal{B}/\mathcal{B}_k$$

est le groupe des K -jets d'ordre k en a d'automorphismes locaux de K fixant a . Pour chaque $h \in \mathcal{B}$, nous noterons $\tilde{h}^k \in \tilde{\mathcal{B}}^k$ sa projection canonique, que nous appellerons son K -jet d'ordre k en a . Je laisse le lecteur établir le résultat suivant qui justifie l'appellation de K -jet d'ordre 1 donnée à la K -partie linéaire dans (8.1.1) :

SCOLIE 3. Le groupe \mathcal{B}_1 est le noyau du morphisme surjectif

$$\mathcal{B} \ni h \longmapsto \tilde{h}_K^1 \in GL(T_a K),$$

qui induit donc un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{B}}^1$ sur $GL(T_a K)$. ■

Pour tout $h \in \tilde{\mathcal{B}}^k$, la $(K-)$ partie linéaire h^1 de h est le $T_a K$ -jet d'ordre k en 0 de la projection canonique de h sur $\tilde{\mathcal{B}}^1 \simeq GL(T_a K)$.

Pour $1 \leq k \leq \infty$, soit $\text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$ le sous-groupe de $GL(\tilde{\mathcal{E}}_0^k) \times GL(\tilde{\mathcal{E}}_{-1}^{k-1}) \times GL(\tilde{\mathcal{E}}^{k-2})$ formé des $B = (B_0, B_1, B_2)$ possédant les propriétés suivantes :

- $$(11) \left\{ \begin{array}{l} (a) \ B_j \tilde{\mathcal{E}}_\ell^{k-j} = \tilde{\mathcal{E}}_\ell^{k-j}, \ \ell \geq -j, \ 0 \leq j \leq 2. \\ (b) \ \text{Pour } 0 \leq \ell \leq j \leq 2, \ B_j|_{\tilde{\mathcal{E}}_{-\ell}^{k-j}} \text{ est l'automorphisme de } \tilde{\mathcal{E}}_{-\ell}^{k-j} \simeq \tilde{\mathcal{E}}_{-\ell}^{k-\ell} / \tilde{\mathcal{E}}_{k-j}^{k-\ell} \\ \text{induit (d'après (a)) par } B_\ell. \\ (c) \ B_2(\tilde{\gamma}^{k-2}) B_{j+\ell-2}(fg)^{k-j-\ell+2} = ((B_j f) \cdot (B_\ell g))^{k-j-\ell+2}, \ f \in \tilde{\mathcal{E}}_{-j}^{k-j}, \ g \in \tilde{\mathcal{E}}_{-\ell}^{k-\ell}, \\ 1 \leq j \leq \ell \leq 2. \\ (d) \ [B_j f, B_\ell g]_c^{k-\ell-j} = B_{\ell+j}[f, g]_c^{k-\ell-j}, \ f \in \tilde{\mathcal{E}}_{-\ell}^{k-\ell}, \ 1 \leq j \leq \ell \leq 2, \text{ où } B_3 \text{ et } B_4 \\ \text{désignent les automorphismes de } \tilde{\mathcal{E}}^{k-3} \text{ et } \tilde{\mathcal{E}}^{k-4} \text{ induits par } B_2. \end{array} \right.$$

Soit de même $\text{aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$ l'algèbre de Lie de $\text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$, c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie de $\text{gl}(\tilde{\mathcal{E}}_0^k) \times \text{gl}(\tilde{\mathcal{E}}_{-1}^{k-1}) \times \text{gl}(\tilde{\mathcal{E}}^{k-2})$ formée des $b = (b_0, b_1, b_2)$ possédant les propriétés suivantes :

$$(11bis) \left\{ \begin{array}{l} (a) \ b_j \tilde{\mathcal{E}}_l^{k-j} \subset \tilde{\mathcal{E}}_l^{k-j}, \ l \geq -j, \ 0 \leq j \leq 2. \\ (b) \text{ Pour } 0 \leq l \leq j \leq 2, \ b_j|_{\tilde{\mathcal{E}}_{-l}^{k-j}} \text{ est l'endomorphisme induit par } b_l. \\ (c) \ b_2(1^{k-2}) \cdot (fg)^{k-j-l+2} + b_{j+l-2}(fg)^{k-j-l+2} = ((b_j f) \cdot g)^{k-j-l+2} + \\ + (f \cdot (b_l g))^{k-j-l+2}, \ f \in \tilde{\mathcal{E}}_{-j}^{k-j}, \ g \in \tilde{\mathcal{E}}_{-l}^{k-l}, \ 1 \leq j \leq l \leq 2. \\ (d) \ [b_j f, g]_c^{k-l-j} + [f, b_l g]_c^{k-l-j} = b_{l+j}[f, g]_c^{k-l-j}, \ f \in \tilde{\mathcal{E}}_{-j}^{k-j}, \\ g \in \tilde{\mathcal{E}}_{-l}^{k-l}, \ 1 \leq j \leq l \leq 2, \text{ où } b_3 \text{ et } b_4 \text{ désignent les endomor-} \\ \text{phismes de } \tilde{\mathcal{E}}^{k-3} \text{ et } \tilde{\mathcal{E}}^{k-4} \text{ induits par } b_2. \end{array} \right.$$

Pour chaque $\xi \in \delta_0$, soit $\text{ad}_c \xi$ l'automorphisme infinitésimal de l'algèbre de Lie $(\mathcal{E}, [\cdot, \cdot]_c)$ donné par

$$(\text{ad}_c \xi) \cdot f = [f, i_{\xi} c]_c.$$

Nous noterons $\text{ad}_c \tilde{\xi}^k$, $0 \leq k \leq \infty$, l'élément de $\text{aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$ qui se déduit de $\text{ad}_c \xi$ par passage au quotient. De même, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$, si $\text{Ad}_c \varphi$ désigne l'automorphisme de $(\mathcal{E}, [\cdot, \cdot]_c)$ défini par

$$(\text{Ad}_c \varphi) \cdot f = i_{\varphi_* H_c f} c,$$

nous noterons $\text{Ad}_c \tilde{\varphi}^k$, $0 \leq k \leq \infty$, l'élément de $\text{Aut}_c(\mathcal{E}^k)$ qui se déduit de $\text{Ad}_c \varphi$ par passage au quotient (je laisse le lecteur vérifier que ces notations ont un sens, c'est-à-dire que $\text{ad}_c \tilde{\xi}^k$ et $\text{Ad}_c \tilde{\varphi}^k$ sont bien déterminés par $\tilde{\xi}^k$ et $\tilde{\varphi}^k$ respectivement).

THÉORÈME 1.- (i) L'application $\varphi \mapsto \text{Ad}_c \varphi$ est un isomorphisme du groupe \mathcal{D}^k sur $\text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$ pour $1 \leq k \leq \infty$

(ii) L'application $\xi \mapsto \text{ad}_c \xi$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\tilde{\delta}_0^k$ sur $\text{aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$ pour $1 \leq k \leq \infty$.

Démonstration. Point (ii). Etant donné $b \in \text{aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$, il s'agit de prouver l'existence d'un unique $h \in \tilde{\mathcal{E}}_0^k$ tel que

$$b_j f = [f, h]_c^{k-j}, \ f \in \tilde{\mathcal{E}}_{-j}^{k-j}, \ 0 \leq j \leq 2.$$

L'unicité est claire, car, d'après (6) et (7), on aura forcément

$$(12) \quad h = -b(w) + wb(1) + \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{x_i}{2} b(y_i) - \frac{y_i}{2} b(x_i) \right),$$

où l'on a noté $1, x_i, y_i, w, b(1), b(x_i), b(y_i), b(w)$ et fg au lieu de, respectivement, $1^{k-2}, \tilde{x}_i^{k-1}, \tilde{y}_i^{k-1}, \tilde{w}^k, b_2(1^{k-2}), b_1(\tilde{x}_i^{k-1}), b_1(\tilde{y}_i^{k-1}), b_0(\tilde{w}^k)$ et $(fg)^k$. Pour l'existence, il suffit donc de prouver que, si h est donné par (12), on a bien

$$(13) \quad \begin{cases} (i) [1, h]_c^{k-2} = b(1) \\ (ii) [x_i, h]_c^{k-1} = b(x_i) \text{ et } [y_i, h]_c^{k-1} = b(y_i), 1 \leq i \leq n \\ (iii) [w, h]_c^k = b(w) \end{cases}$$

Nous allons prouver (i), laissant (ii) et (iii) au lecteur : d'après (6), (7) et (11bis), on a

$$\begin{cases} [1, -b(w)]_c^{k-2} = [-w, b(1)]_c^{k-2} - b(1) \\ [1, wb(1)]_c^{k-2} = b(1) + w[1, b(1)]_c^{k-4} \\ [1, \frac{x_i}{2} b(y_i)]_c^{k-2} = \frac{x_i}{2} [y_i, b(1)]_c^{k-3}, 1 \leq i \leq n \\ [1, -\frac{y_i}{2} b(x_i)]_c^{k-2} = -\frac{y_i}{2} [x_i, b(1)]_c^{k-3}, 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

d'où, d'après (12),

$$\begin{aligned} [1, h]_c^{k-2} &= [-w, b(1)]_c^{k-2} + w[1, b(1)]_c^{k-4} + \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{x_i}{2} [y_i, b(1)]_c^{k-3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_i}{2} [x_i, b(1)]_c^{k-3} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire (13) (i) d'après (6) et (7). \square

Point (i) L'idée est la même que dans la preuve de (8.2.1), théorème 1(i).

LEMME 1. - Le théorème 1 (i) est vrai si $k = 1$. En d'autres termes, pour tout $B \in \text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$, $1 \leq k \leq \infty$, il existe $\varphi \in \tilde{\mathcal{B}}^k$ tel que $B \circ \text{Ad}_c \varphi$ induise l'identité sur $\tilde{\mathcal{E}}_0^1 \times \tilde{\mathcal{E}}_{-1}^0 \times \tilde{\mathcal{E}}^{-1} \simeq (\tilde{\mathcal{E}}_0^k / \tilde{\mathcal{E}}_1^k) \times (\tilde{\mathcal{E}}_{-1}^k / \tilde{\mathcal{E}}_0^k) \times (\tilde{\mathcal{E}}^k / \tilde{\mathcal{E}}_{-1}^k)$.

Preuve. La seconde assertion résulte évidemment de la première, puisque (d'après (11)(a)), tout élément de $\text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{E}}^k)$, $k \geq 1$, induit un unique élément

de $\text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{C}}^1)$ par passage au quotient.

Soit donc $B = (B_o, B_1, B_2) \in \text{Aut}_c(\tilde{\mathcal{C}}^1)$. Comme $\mathcal{C}^{-1} \simeq \mathbf{R}$, B_2 s'identifie à $B_2(\tilde{\mathcal{C}}_1^{-2}) = \lambda \in \mathbf{R}$. Par conséquent, quels que soient x et y dans $\tilde{\mathcal{C}}_{-1}^o$, on a

$$[B_1(x), B_1(y)]_c^{-2} = B_2([x, y]_c^{-2}) = \lambda [x, y]_c^{-2}.$$

En outre, du fait que $\tilde{\mathcal{C}}_o^1$ a pour base $(\tilde{w}^1, (\widetilde{x_i x_j^1}, \widetilde{y_i y_j^1})_{i \leq j}, (\widetilde{x_i y_j^1}))$, il est clair que \tilde{w}^1 est l'unique élément v de $\tilde{\mathcal{C}}_o^1$ tel que

$$vx \in \tilde{\mathcal{E}}_{-1}^o, [v, x]_c^o = -\frac{x}{2}.$$

De l'identité

$$vx \in \tilde{\mathcal{E}}_{-1}^o, [B_o(\tilde{w}^1), B_1(x)]_c^o = B_1[\tilde{w}^1, x]_c^o = -\frac{1}{2} B_1(x),$$

on déduit donc que

$$B_o(\tilde{w}^1) = \tilde{w}^1.$$

Soit \mathcal{E}_{-1}^o le sous-espace vectoriel de \mathcal{E} engendré par $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

L'application $f \mapsto \tilde{f}^o$ est un isomorphisme de \mathcal{E}_{-1}^o sur $\tilde{\mathcal{E}}_{-1}^o$; soit φ le germe de difféomorphisme $[X]_a \hookrightarrow$ défini (modulo cette identification) par

$$\begin{cases} f \circ \varphi^{-1} = B_1(f)/\lambda & \text{pour } f \in \mathcal{E}_{-1}^o; \\ w \circ \varphi^{-1} = w/\lambda \end{cases}$$

Nous allons prouver que φ appartient à \mathcal{A} et que $\text{Ad}_c \tilde{\varphi}^1 = B$.

Tout germe ξ en a de champ de vecteurs sur X est déterminé par $L_\xi w$ et par les $L_\xi x_i, L_\xi y_i$. Appliquons cette remarque à

$$\xi = \varphi_* H_c f, \quad f \in \mathcal{E}_{-1}^o:$$

pour tout $g \in \mathcal{E}_{-1}^o$ (donc en particulier $g = x_i$ ou y_i), on a

$$L_\xi g = \varphi_* (L_{H_c f} \varphi^* g) = \varphi_* [f, \varphi^* g]_c,$$

et donc, puisque $[f, \varphi^* g]_c$ est constante,

$$L_{\xi}g = [f, \varphi^*g]_c ;$$

comme

$$L_{H_c(B_1f)}g = [B_1f, \varphi_*\varphi^*g]_c = [B_1f, B_1(\varphi^*g/\lambda)]_c = \lambda[f, \varphi^*g/\lambda]_c = [f, \varphi^*g]_c ,$$

on a donc

$$(14) \quad \forall g \in \mathcal{C}_{-1}^0, \quad L_{\xi}g = L_{H_c(B_1f)}g .$$

De même,

$$L_{\xi}w = \varphi_*[f, \varphi^*w]_c = \lambda\varphi_*[f, w]_c ,$$

soit, puisque $[f, w]_c \in \mathcal{C}_{-1}^0$,

$$(15) \quad L_{\xi}w = B_1[f, w]_c = [B_1f, w]_c = L_{H_c(B_1f)}w .$$

de (14) et (15), on tire donc, par définition de ξ ,

$$(16) \quad \forall f \in \mathcal{C}_{-1}^0, \quad \varphi_*H_c f = H_c(B_1f) .$$

Par ailleurs, d'après (6), on a évidemment

$$(17) \quad \varphi_*H_c 1 = \lambda H_c 1 .$$

Tout germe α en a de 1-forme sur X est déterminé par $i_{H_c 1} \alpha$ et par les $i_{H_c f} \alpha$, $f \in \mathcal{C}_{-1}^0$; en effet, d'après (6), $H_c 1$ et les $H_c f$ avec $f \in \mathcal{C}_{-1}^0$ engendrent le \mathcal{C} -module des germes en a de champs de vecteurs sur X . Appliquons cette remarque à $\alpha = \varphi_* c$: d'après (17), on a

$$(18) \quad i_{H_c 1} \varphi_* c = i_{\varphi_* H_c 1} \varphi_* c / \lambda = \varphi_*(i_{H_c 1} c) / \lambda = i_{H_c 1} c / \lambda$$

puisque $i_{H_c 1} c = 1$ par définition. De même, pour tout $f \in \mathcal{C}_{-1}^0$, on a $B_1^{-1} f \in \mathcal{C}_{-1}^0$, et donc, d'après (16),

$$(19) \quad \forall f \in \mathcal{C}_{-1}^0, \quad i_{H_c f} \varphi_* c = 1_{\varphi_* H_c(B_1^{-1}f)} \varphi_*(B_1^{-1}f) = f / \lambda = i_{H_c f} c / \lambda .$$

De (18) et (19), on déduit que

$$(20) \quad \varphi_* c = c / \lambda, \text{ et donc en particulier } \varphi \in \mathcal{A} .$$

Il est alors clair que $(\text{Ad}_c \varphi)1 = \lambda$, $(\text{Ad}_c \varphi)f = B_1 f$ pour tout $f \in \mathcal{C}_{-1}^0$ et

$(\text{Ad}_C \varphi)w = w$, et donc $\text{Ad}_C \tilde{\varphi}^1 = B$. \square

LEMME 2. - Pour tout $C \in \text{Aut}_C(\mathcal{E}^k)$, $1 \leq k \leq \infty$, induisant l'identité sur $\tilde{\mathcal{E}}_0^1 \times \tilde{\mathcal{E}}_{-1}^0 \times \tilde{\mathcal{E}}^{-1}$, il existe un unique $\xi \in \tilde{\delta}_1^k$ tel que $C = \exp \text{ad}_C \xi = \text{Ad}_C(\exp \xi)$.

Preuve. Notre hypothèse signifie que l'on a

$$(C_j - \text{id}) \tilde{\mathcal{E}}_{-j}^{k-j} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{1-j}^{k-j} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2,$$

et donc, d'après (11) (b)-(c),

$$(C_j - \text{id}) \tilde{\mathcal{E}}_\ell^{k-j} \subset \tilde{\mathcal{E}}_{\ell+1}^{k-j} \quad \text{pour } \ell \geq -j.$$

Par conséquent, pour $k < \infty$, $C - \text{id}$ est nilpotent ; il en va donc de même de

$$\text{Log } C = - \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{id} - C)^{n+1} / (n+1),$$

et l'on vérifie facilement que $\text{Log } C \in \text{aut}_C(\tilde{\mathcal{E}}^k)$. D'après (ii), il existe un unique $\xi \in \tilde{\delta}^k$ nilpotent et tel que $\text{Log } C = \text{ad}_C \xi$, et l'on a évidemment $\xi \in \tilde{\delta}_1^k$. Si $k = \infty$, le passage à la limite projective se fait sans problème. \square

En mettant bout à bout les lemmes 1 et 2, on voit que le morphisme $\text{Ad}_C : \tilde{\mathcal{B}}^k \longrightarrow \text{Aut}_C(\tilde{\mathcal{E}}^k)$ est surjectif. L'injectivité est triviale : dire que $\varphi \in \mathcal{B}$ est tel que $\text{Ad}_C \tilde{\varphi}^k = \text{id}$ signifie que

$$\forall j \in \{0, 1, 2\}, ((\text{Ad}_C \varphi) - \text{id}) \mathcal{E}_{-j} \subset \mathcal{E}_{k-j}$$

soit encore

$$\forall j \in \{0, 1, 2\}, (\varphi_* - \text{id}) \delta_{-j} \subset \delta_{k-j},$$

c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{B}_k$. ■

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous supposons désormais $\tilde{\mathcal{B}}^k$ muni de la structure de groupe de Lie algébrique image réciproque par Ad_C de celle de $\text{Aut}_C(\tilde{\mathcal{E}}^k)$, et $\tilde{\mathcal{B}}^\infty$ sera équipé de la structure de groupe topologique limite projective.

THEOREME 2. - Pour tout $\varphi \in \tilde{\mathcal{B}}^k$, $1 \leq k \leq \infty$, il existe un unique $\sigma \in \tilde{\mathcal{B}}^k$ tel que la partie semi-simple de $\text{Ad}_C \varphi$ soit $\text{Ad}_C \sigma$.

(Nous dirons que σ est la partie semi-simple de φ et, si $\varphi = \sigma$, que φ est semi-simple).

Démonstration. D'après Darboux, on peut supposer que

$$(21) \quad (X, a, K) = (E_a, 0, T_a K) .$$

LEMME 3.- Sous l'hypothèse (21), soit $\tau \in \mathcal{D}$ le germe en 0 d'un élément semi-simple de $GL(T_a K)$, et soit $\Psi \in \tilde{\mathcal{D}}^j$, $1 < j < \infty$, tel que sa projection $\Psi_{j-1} \in \tilde{\mathcal{D}}^{j-1}$ soit de la forme

$$\Psi_{j-1} = \tau^{j-1} \circ \exp \xi_{j-1} = \exp \xi_{j-1} \circ \tau^{j-1} ,$$

où $\xi_{j-1} \in \tilde{\delta}^{j-1}$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \tau_*^{j-1} \xi_{j-1} = \xi_{j-1} \\ \text{ad}_c \xi_{j-1} \text{ est nilpotent} . \end{cases}$$

Il existe alors $\eta \in \tilde{\delta}_{j-1}^j$ et $\xi \in \tilde{\delta}^j$ tels que $\text{ad}_c \xi$ soit nilpotent et que

$$\begin{cases} \tau_*^j \xi = \xi \\ (\exp \eta)^* \Psi = \tau^j \circ \exp \xi = (\exp \xi) \circ \tau^j . \end{cases}$$

La projection de ξ sur $\tilde{\delta}_{j-1}^{j-1}$ est alors évidemment ξ_{j-1} .

Preuve. Commençons par un

EXERCICE. L'automorphisme τ_*^j de $\tilde{\delta}_{-l}^{j-l}$ est semi-simple pour $0 \leq l \leq 2$ (Indication : il revient au même de dire que $\text{Ad}_c \tau_*^j$ est semi-simple ; or, si (e_i) est une base de $L(E_a, \mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de τ_*^j , il existe une base propre de $\text{Ad}_c \tau_*^j$ formée des c-jets en a de monômes $\pi e_i^{q_i}$) . \square

On en déduit qu'il existe un unique sous-espace vectoriel L de $\tilde{\delta}_{j-1}^j$ possédant les deux propriétés suivantes :

$$(22) \quad \begin{cases} \tau_*^j L = L \\ \tilde{\delta}_{j-1}^j = L \oplus \text{Ker}(\tau_*^j - \text{id})|_{\tilde{\delta}_{j-1}^j} . \end{cases}$$

Notre hypothèse sur Ψ se traduit, grâce au lemme 2 et à (22), de la manière suivante : il existe un unique couple $(\xi, \xi') \in \tilde{\delta}^j \times L$ tel que

$$\begin{cases} \text{ad}_c \xi \text{ soit nilpotent} \\ \tau_*^j \xi = \xi \\ \Psi = \tau^j \circ \exp(\xi + \xi'). \end{cases}$$

Posons

$$B = \text{Ad}_c \tau^j, \quad b = \text{ad}_c \xi \text{ et } b' = \text{ad}_c \xi'.$$

Nous allons établir l'existence d'un unique $\eta \in L$ tel que

$$(\exp \eta)^* \Psi = \tau^j \circ \exp \xi,$$

c'est-à-dire, si $\ell = \text{ad}_c \eta$, tel que

$$(\exp \ell)^{-1} \cdot B \cdot (\exp(b+b')) \circ \exp \ell = B \circ \exp b,$$

soit encore

$$(23) \quad B \circ \exp(b+b') \circ \exp \ell \circ (B \circ \exp b)^{-1} = \exp \ell.$$

Du fait que l'on cherche $\eta \in L \subset \tilde{\delta}_{j-1}^j$, on aura

$$\begin{cases} \exp \ell = \text{id} + \ell \\ B \circ (\exp(b+b')) \circ \ell \circ (B \circ \exp b)^{-1} = B \circ (\exp b^1) \circ \ell \circ (B \circ \exp b^1)^{-1}, \end{cases}$$

où $b^1 = \text{ad}_c \xi^1$, ξ^1 désignant la \mathcal{K} -partie linéaire de ξ .

De même, puisque $b' \in L \subset \tilde{\delta}_{j-1}^j$, on a

$$\exp(b+b') = \exp b + \sum_{0 \leq i < n} \frac{(b^1)^i b' (b^1)^{n-i-1}}{n!}$$

(expression qui a un sens car b^1 est nilpotent), et (23) s'écrit donc

$$\ell = (B \circ \exp b^1) \circ \ell \circ (B \circ \exp b^1)^{-1} + B \circ \left(\sum_{0 \leq i < n} \frac{(b^1)^i b' (b^1)^{n-i-1}}{n!} \right) \circ (B \circ \exp b^1)^{-1},$$

soit encore

$$(24) \quad \text{ad}_c (\tau^j \circ \exp \xi^1)_* \eta - \eta = - B \circ \left(\sum_{0 \leq i < n} \frac{(b^1)^i b' (b^1)^{n-i-1}}{n!} \right) \circ (B \circ \exp b^1)^{-1}.$$

Du fait que $\tau_*^j \xi^1 = \xi^1$, on a (cf. (4.3.1), lemme trivial)

$$(\tau^j \circ \exp \xi^1)_* L = L;$$

en outre, $\text{ad}_c \xi^1$ étant nilpotent, la partie semi-simple de $(\tau^j \circ \exp \xi^1)_*|_L$

est $\tilde{\tau}_*^j|_L$; par définition de L , $((\tilde{\tau}_*^j \circ \exp \xi^1)_* - \text{id})|_L$ est donc un automorphisme de L . Par conséquent, pour établir l'existence (et l'unicité) de $\eta \in L$ satisfaisant (24), il suffit de montrer que

$$b'' = -B \circ \left(\sum_{0 \leq i < n} \frac{(b^1)^i b' (b^1)^{n-i-1}}{n!} \right) \circ (B \circ \exp b^1)^{-1} \in \text{ad}_c L .$$

C'est évident si $\xi^1 = 0$, car alors $b^1 = 0$, et donc $b'' = -\text{ad}_c(\tilde{\tau}_*^j \xi')$. Sinon, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ les valeurs propres de $\tilde{\tau}_*^j|_L$. Quitte à complexifier la situation, on peut supposer que

$$L = \bigoplus_{1 \leq k \leq K} L_k , \text{ où } L_k = \text{Ker}(\tilde{\tau}_*^j - \lambda_k \text{id})|_L ,$$

et ξ' s'écrit donc de manière unique

$$\xi' = \sum_{1 \leq k \leq K} \xi'_k , \text{ avec } \xi'_k \in L_k .$$

Si, pour $1 \leq k \leq K$, on note

$$\begin{cases} b'_k = \text{ad}_c \xi'_k \\ b''_k = -B \circ \left(\sum_{0 \leq i < n} \frac{(b^1)^i b'_k (b^1)^{n-i-1}}{n!} \right) \circ (B \circ \exp b^1)^{-1} , \end{cases}$$

on a $b''_k \in \text{ad}_c \tilde{\delta}_{j-1}^j$, car

$$b''_k = \frac{d}{dt} (B \circ (\exp(b + tb'_k)) \circ (B \circ \exp b)^{-1})|_{t=0} .$$

Pour voir que $b''_k \in \text{ad}_c L_k$, il suffit donc de prouver que

$$B \circ b''_k \circ B^{-1} = \lambda_k b''_k ,$$

ce qui résulte immédiatement des relations

$$\begin{cases} B \circ b_1 = b_1 \circ B \\ B \circ b'_k \circ B^{-1} = \lambda_k b'_k . \end{cases}$$

Par conséquent, $b'' = \sum b''_k$ appartient bien à $\text{ad}_c L$. \square

Toujours sous l'hypothèse (21), étant donné $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}^k$, $1 \leq k \leq \infty$, soit φ_j la projection de φ sur $\tilde{\mathcal{J}}^j$, $1 \leq j \leq k$, soit $\sigma_1 \in \text{GL}(T_a K)$ la partie semi-simple de $\varphi_1 \in \tilde{\mathcal{B}}^1 \simeq \text{GL}(T_a K)$ -cf.(4.1.1), Proposition, (iii)-, et soit σ^1 la partie

linéaire de σ , i.e. le K -jet d'ordre k de σ_1 en $a = 0$. Le lemme 3 (et l'exercice qui débute sa preuve) permettent de construire de proche en proche, pour chaque $j \in \mathbb{N} \cap [1, k]$,

- un $\xi_j \in \tilde{\delta}^j$, de projection canonique $\xi_{j-1} \in \tilde{\delta}^{j-1}$ pour $j > 1$, tel que $\sigma_j^1 * \xi_j = \xi_j$ et que $\text{ad}_c \xi_j$ soit nilpotent.
- un $\eta_j \in \delta_{j-1}$, avec $\eta_1 = 0$,

tels que

$$(\exp \tilde{\eta}_j^j)^* \dots (\exp \tilde{\eta}_1^j)^* \varphi_j = \sigma_j^1 \circ \exp \xi_j$$

pour tout $j \in \mathbb{N} \cap [1, k]$. Par passage à la limite projective, on voit donc qu'il existe $\Psi \in \tilde{\mathcal{B}}^k$ et $\xi \in \tilde{\delta}^k$ possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_*^1 \xi = \xi \\ \Psi^* \varphi = \sigma^1 \circ \exp \xi = (\exp \xi) \circ \sigma^1 \\ \text{ad}_c \xi \text{ est nilpotent.} \end{cases}$$

La partie semi-simple de φ est donc $\Psi_* \sigma^1$. ■

REMARQUE. Nous avons évidemment prouvé mieux que le théorème 2, à savoir un cas particulier ($G = \mathbb{Z}$) de ce qui va suivre.

Soit $\mathcal{D}_{a,0} = \mathcal{D}_{a,0}(K, T_a K)$ l'ensemble des germes $\varphi : [X]_a \rightarrow [E_a]_0$ de C^∞ -difféomorphismes tels que $\varphi^* T_a K = [K]_a$. Nous dirons que $\varphi, \varphi' \in \mathcal{D}_{a,0}$ ont le même K -jet d'ordre k (en a), $1 \leq k \leq \infty$, si $\varphi^{-1} \circ \varphi' \in \mathcal{D}_k$. Nous noterons $\tilde{\mathcal{D}}_{a,0}^k$ le quotient de $\mathcal{D}_{a,0}$ par cette relation d'équivalence, et $\tilde{\varphi}^k \in \tilde{\mathcal{D}}_{a,0}^k$ le K -jet d'ordre k de $\varphi \in \mathcal{D}_{a,0}$. Il est clair que $\tilde{\mathcal{D}}_{a,0}^k$ hérite de $\tilde{\mathcal{B}}^k$ une structure de variété pour $k < \infty$, d'espace topologique si $k = \infty$. A chaque $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}_{a,0}^k$, on associe le morphisme continu $\varphi_* : \Psi \rightarrow \varphi \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$ du groupe $\tilde{\mathcal{B}}^k$ sur $\tilde{\mathcal{B}}_0^k(T_a K)$.

Soit G un groupe élémentaire ; pour chaque $k \geq 1$, notons $\text{Act}^k = \text{Act}_a^k(G, K)$ l'ensemble des morphismes continus $\rho : G \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}^k$; étant donné un tel ρ et $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}_{a,0}^k$, on définit $\varphi_* \rho \in \text{Act}_0^k(G, T_a K)$ par $(\varphi_* \rho)(g) = \varphi_*(\rho(g))$, $g \in G$.

La K -partie linéaire de ρ est l'élément ρ^1 de $\text{Act}_0^{\vee k}(G, T_a K)$ défini par $\rho^1(g) = \rho(g)^1$, $g \in G$. Enfin, on dit que ρ est semi-simple lorsque $\rho(g)$ l'est pour tout g , et l'on note ρ_j , $1 \leq j \leq k$, la projection de ρ sur Act^j .

THÉORÈME 3. - Tout élément semi-simple ρ de Act^k , $1 \leq k \leq \infty$, est linéarisable : il existe $\varphi \in \mathcal{B}_{a,0}^k$ tel que $\varphi_* \rho = \rho^1$.

Démonstration. C'est à peu près celle du théorème 2, avec les simplifications dues à ce que ρ est semi-simple et les complications dues à ce que G n'est pas monogène. Ici encore, on peut supposer que

$$(21) \quad (X, a, K) = (E_a, 0, T_a K).$$

LEMME 3bis. - Sous l'hypothèse (21), soit σ un élément semi-simple de Act^j , $1 < j < \infty$, vérifiant

$$\sigma_{j-1}^j = \sigma_{j-1}^1.$$

Il existe alors $\eta \in \tilde{\delta}_{j-1}^j$ tel que $(\exp \eta)^* \sigma = \sigma^1$.

Preuve. Je laisse le lecteur vérifier que σ^1 (et donc la représentation $\sigma_*^1 : g \mapsto \sigma^1(g)_*$ de G dans $\tilde{\delta}_{-\ell}^{j-\ell}$, $0 \leq \ell \leq 2$) est semi-simple. Il existe donc un unique sous-espace vectoriel L de $\tilde{\delta}_{j-1}^j$ possédant les deux propriétés suivantes :

$$(22\text{bis}) \quad \begin{cases} \forall g \in G, \sigma^1(g)_* L = L \\ \tilde{\delta}_{j-1}^j = L \oplus \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(\sigma^1(g)_* - \text{id}) \Big|_{\tilde{\delta}_{j-1}^j}. \end{cases}$$

Notre hypothèse sur σ_{j-1}^j se traduit donc de la manière suivante : pour chaque $g \in G$, il existe un unique couple $(\xi(g), \xi'(g)) \in \tilde{\delta}_{j-1}^j \times L$ tel que

$$\begin{cases} \forall g' \in G, \sigma^1(g')_* \xi(g) = \xi(g) \\ \sigma(g) = \sigma^1(g) \circ \exp(\xi(g) + \xi'(g)). \end{cases}$$

Nous allons établir l'existence d'un unique $\eta \in L$ tel que

$$(25) \quad \forall g \in G, (\exp \eta)^* \sigma(g) = \sigma^1(g) \circ \exp \xi(g),$$

ce qui (σ étant semi-simple ainsi que σ^1) impliquera que $\xi(g) = 0$ pour tout

g , d'où le résultat cherché.

Le calcul qui a conduit à (24) montre que (25) équivaut à

$$(26) \quad \forall g \in G, \sigma^1(g)_{**} \eta - \eta = -\sigma^1(g)_{**} \xi'(g) .$$

Du fait que chaque $\xi(g)$ est invariant par chaque $\sigma^1(g')_{**}$, la relation $\sigma(g) \circ \sigma(g') = \sigma(g') \circ \sigma(g)$ s'écrit

$$(27) \quad \forall g, g' \in G, \sigma^1(g)_{**} (\sigma^1(g')_{**} \xi'(g) - \xi'(g)) = \sigma^1(g')_{**} (\sigma^1(g)_{**} \xi'(g') - \xi'(g'))$$

Quitte à complexifier la situation, on peut supposer que

$$(28) \quad L = \bigoplus_{1 \leq k \leq K} L_k, \text{ où } L_k = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(\sigma^1(g)_{**} - \lambda_k(g) \text{id})|_L \neq \{0\},$$

en désignant par $\lambda_1, \dots, \lambda_K : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ des morphismes continus distincts deux à deux et distincts du morphisme trivial d'après (22bis). Pour chaque $k \in \{1, \dots, K\}$, il existe donc $g_k \in G$ tel que $(\sigma^1(g_k)_{**} - \text{id})|_{L_k}$ soit un automorphisme de L_k (i.e. tel que $\lambda_k(g_k) \neq 1$). Soit $\xi'_k(g)$, $g \in G$, la composante de $\xi'(g)$ suivant L_k dans la décomposition (28), et soit η_k l'unique élément de L_k défini par

$$\sigma^1(g_k)_{**} \eta_k - \eta_k = -\sigma^1(g_k)_{**} \xi'_k(g_k) .$$

La relation (27) implique en particulier (après projection sur L_k)

$$\forall g \in G, (\sigma^1(g_k)_{**} - \text{id}) \sigma^1(g)_{**} \xi'_k(g) = (\sigma^1(g)_{**} - \text{id}) \sigma^1(g_k)_{**} \xi'_k(g_k) ,$$

d'où, puisque $\eta_k = -(\sigma^1(g_k)_{**} - \text{id})^{-1} \sigma^1(g_k)_{**} \xi'_k(g_k)$,

$$\forall g \in G, \sigma^1(g)_{**} \eta_k - \eta_k = -\sigma^1(g)_{**} \xi'_k(g) .$$

Il en résulte que $\eta = \sum_{1 \leq k \leq K} \eta_k$ satisfait (26). \square

Toujours sous l'hypothèse (21), étant donné un élément semi-simple $\check{\rho}$ de $\check{\text{Act}}^k$, $1 \leq k \leq \infty$, le lemme 3bis permet de construire de proche en proche, pour chaque $j \in \mathbb{N} \cap [1, k]$, un $\eta_j \in \delta_{j-1}$ (avec $\eta_1 = 0$) de manière que

$$\forall j \in \mathbb{N} \cap [1, k], (\exp \tilde{\eta}_j^j)^* \dots (\exp \tilde{\eta}_1^j)^* \check{\rho}_j = \check{\rho}_j^1 ;$$

par passage à la limite projective, on voit donc qu'il existe $\varphi \in \tilde{\mathcal{B}}^k$ tel que

$$\varphi_{**} \check{\rho} = \check{\rho}^1 . \blacksquare$$

Des théorèmes 1, 2 et 3, on déduit immédiatement (cf. (4.3.1), Proposition 4 et (4.3.2.), Théorème 4) le

THÉORÈME 4. - Pour tout $\check{\nu} \in \check{\text{Act}}^k$, $1 \leq k \leq \infty$, si $\check{\nu}(g)$ désigne pour chaque $g \in G$ la partie semi-simple de $\check{\nu}(g)$, alors

- (i) $\check{\sigma} : g \mapsto \check{\sigma}(g)$ appartient à $\check{\text{Act}}^k$: c'est la partie semi-simple de $\check{\nu}$;
- (ii) $\check{\sigma}$ est linéarisable : il existe $\varphi \in \check{\mathcal{B}}_{a,0}^k$ tel que $\varphi_* \check{\sigma} = \check{\sigma}^1 \in \check{\text{Act}}_0^k(G, T_a K)$;
- (iii) il existe un unique morphisme $\check{\nu}$ de l'algèbre de Lie abélienne $G_{\mathbf{R}}$ dans $\check{\mathcal{B}}_0^k$ tel que, pour chaque $g \in G$, la partie nilpotente de $\text{Ad}_{\check{c}}^{\check{\nu}(g)}$ soit $\text{ad}_{\check{c}}^{\check{\nu}(g_{\mathbf{R}})}$, et l'on a donc

$$\begin{cases} \check{\nu}(g, g') \in G \times G_{\mathbf{R}}, & \check{\sigma}(g) * \check{\nu}(g') = \check{\nu}(g') \\ \check{\nu}(g) \in G, & \check{\nu}(g) = \check{\sigma}(g) \circ \exp \check{\nu}(g_{\mathbf{R}}) = (\exp \check{\nu}(g_{\mathbf{R}})) \circ \check{\sigma}(g), \end{cases}$$

où $g \mapsto g_{\mathbf{R}}$ désigne le morphisme canonique $G \rightarrow G_{\mathbf{R}}$. ■

EXERCICE (pour le lecteur très courageux). Donner des théorèmes 2.3.4 une démonstration analogue à celle de (8.2.1), Théorème 2 : avec la notation (4), soit \underline{D} le sous-groupe de $\check{\mathcal{B}}_a^{\infty}(X)$ formé des φ tels que $\varphi_* \check{c}_k = \check{c}_k$ pour tout $k \geq -2$ (ou, de manière équivalente, tels que $\varphi_* w = w \circ \varphi^{-1}$ appartienne à \check{c}_0). Pour chaque $k \geq 1$, soient $\underline{D}_k = \{\varphi \in \underline{D} : (\varphi_* - \text{id})\check{c}_0 \subset \check{c}_k \text{ et } (\varphi_* - \text{id})\check{c}_{-1} \subset \check{c}_{k-1}\}$, et $\check{\underline{D}}^k = \underline{D}/\underline{D}_k$ (groupe topologique - de Lie pour $k < \infty$ - des k -jets tordus d'éléments de \underline{D} (en a)). Montrer que $\check{\mathcal{B}}^k$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $\check{\underline{D}}^k$, et plus précisément à l'ensemble des $\varphi \in \check{\underline{D}}^k$ qui préservent le k -jet tordu (à définir) de K en a . Dédurre alors le théorème 4 de son analogue pour les morphismes continus $\check{\nu} : G \rightarrow \check{\underline{D}}^k$ (qui se démontre comme (4.3.2), théorème 4) et d'une version formelle du théorème de Gray équivariant prouvé dans (7.3). ■

Nous allons maintenant déduire du théorème 4 les formes normales annoncées ; avec les notations précédentes, soient c_a la forme de contact sur E_a associée à c comme dans (8.1.1), $\check{\nu}^1 : G \rightarrow \text{GL}(T_a K)$ un morphisme continu et $\check{\rho}^1$: $(g, v) \mapsto \check{\rho}^1(g)v$ l'action de G sur E_a associée à $\check{\nu}^1$; nous allons commencer par une conséquence immédiate de (8.1.1), Proposition, (ii) et (8.1.2), Corol-

lares 1 et 2 :

PROPOSITION 4.- Sous les hypothèses précédentes, la partie semi-simple σ^1 de ρ^1 (cf. (4.3.1), Proposition 4) est telle que le morphisme continu $\tilde{\sigma}^1 : G \longrightarrow GL(E_a)$ soit à valeurs dans $GL(T_a K)$; plus précisément, si $b_o : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ est le morphisme continu donné par

$$\forall g \in G, \tilde{\rho}^1(g)^* c_a = b_o(g) c_a,$$

alors $\tilde{\sigma}^1(g)^* c_a = b_o(g) c_a$ pour tout $g \in G$. La partie nilpotente $\tilde{\nu}_1 : G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{gl}(E_a)$ de ρ^1 vérifie donc

$$\forall g \in G_{\mathbb{R}}, L_{\tilde{\nu}_1(g)} c_a = 0.$$

Il existe des entiers $q \geq 1, m_1, \dots, m_q \geq 1$ et $d, e \geq 0$ avec $d + e \leq q$, des morphismes continus $b_1, \dots, b_q : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ et des formes linéaires $w, x_j^\ell, y_j^\ell \in L(E, \mathbb{C}), 1 \leq \ell \leq m_j, 1 \leq j \leq q$, possédant les propriétés suivantes :

(i) $(w, (x_j^\ell), (y_j^\ell))$ est une base de l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$.

(ii) Pour tout $g \in G$, on a $w \circ \tilde{\sigma}^1(g) = w \bullet \tilde{\rho}^1(g) = b_o(g)w$ et

$$x_j^\ell \circ \tilde{\sigma}^1(g) = b_j(g) x_j^\ell, y_j^\ell \circ \tilde{\sigma}^1(g) = b_o(g) y_j^\ell / b_j(g), 1 \leq \ell \leq m_j, 1 \leq j \leq q.$$

(iii) $c_a = dw + \frac{1}{2} \sum_{j, \ell} (x_j^\ell dy_j^\ell - y_j^\ell dx_j^\ell).$

(iv) On a $w \circ \tilde{\nu}_1(g) = 0$ pour tout $g \in G_{\mathbb{R}}$, la forme linéaire w est réelle, et les propriétés (iv), (v), (vi) de (8.1.2), Corollaire 2 sont satisfaites. ■

Une base $(w, (x_j^\ell), (y_j^\ell))$ de l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$ possédant les propriétés (ii)-(iv) ci-dessus sera appelé système de coordonnées \mathbb{R} -linéaires complexes c_a -adapté à ρ^1 . ■

Soit maintenant (Théorème 4) $\check{\nu} \in \text{Act}^k$, de partie semi-simple $\check{\sigma} \in \text{Act}^k$ et de partie nilpotente $\check{\nu} : G_{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{\delta}_o^k$, et soit $\varphi \in \tilde{\mathcal{B}}_{a, o}^k$, tel que $\varphi_{\check{\nu}} \check{\sigma} = \check{\sigma}^1$. En supposant, pour simplifier les notations, que

$$(29) \quad (X, a, K, c) = (E_a, 0, T_a K, c_a),$$

l'isomorphisme H_c de l'algèbre de Lie $(\mathcal{L}_0, [\cdot, \cdot]_c)$ sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 induit (par définition) un isomorphisme, encore noté H_c , de l'algèbre de Lie $(\hat{\mathcal{L}}_0^k, [\cdot, \cdot]_c^k)$ sur l'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{g}}_0^k$.

Soient $\tilde{\nu}^1, \tilde{\sigma}^1 : G \rightarrow GL(T_a K)$ les homomorphismes continus associés aux projections $\tilde{\nu}_1$ et $\tilde{\sigma}_1$ de $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\sigma}$ sur Act^1 via l'isomorphisme canonique de $\tilde{\mathcal{B}}^1$ sur $GL(T_a K)$, soit $(w, (x_j^\ell), (y_j^\ell))$ un système de coordonnées \mathbb{R} -linéaires complexes c_a -adapté à ρ^1 , et soient $b_0, \dots, b_q : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ les morphismes continus définis par la proposition 4(ii). En notant w, x_j^ℓ, y_j^ℓ au lieu de $\tilde{w}^k, (\tilde{x}_j^\ell)^{k-1}, (\tilde{y}_j^\ell)^{k-1}$, tout élément h de $\tilde{\mathcal{L}}_0^k$ s'écrit de manière unique (cf. supra, Proposition 2) comme un polynôme (pour $k < \infty$) ou une série formelle (si $k = \infty$)

$$(30) \quad h = \sum_{\substack{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{Q} \\ 2 \leq 2\alpha + |\beta| + |\gamma| \leq k+1}} h_{\alpha, \beta, \gamma} w^\alpha x^\beta y^\gamma,$$

où $\mathcal{Q} = \mathbb{N} \times (\prod_{1 \leq j \leq q} \mathbb{N}^j)^2$, avec les notations multi-indicielles habituelles, les $h_{\alpha, \beta, \gamma}$ désignant des constantes complexes.

De la relation

$$\forall g \in G, \forall f \in \tilde{\mathcal{L}}_0^k, (\text{Ad}_{c_a}^{\tilde{\sigma}^1(g)})_0 f = b_0(g) \tilde{\sigma}^1(g) f,$$

on déduit que

$$(31) \quad (\text{Ad}_{c_a}^{\tilde{\sigma}^1(g)})_0 w^\alpha x^\beta y^\gamma = b_0(g)^{1-|\gamma|-\alpha} \prod_{1 \leq j \leq q} b_j(g)^{|\gamma_j| - |\beta_j|} w^\alpha x^\beta y^\gamma, g \in G, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{Q},$$

où l'on a noté β_j, γ_j les composantes de $\beta, \gamma \in \prod_{1 \leq j \leq q} \mathbb{N}^j$ suivant le j -ième

facteur. Si

$$R = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{Q} : 2\alpha + |\beta| + |\gamma| > 2 \text{ et } \forall g \in G, b_0(g)^{1-|\gamma|-\alpha} \prod_{1 \leq j \leq q} b_j(g)^{|\gamma_j| - |\beta_j|} = 1\},$$

nous pouvons enfin formuler le résultat annoncé, évident d'après (30)-(31) :

COROLLAIRE.- Sous les hypothèses du théorème 4 et avec les notations que nous venons de définir, le morphisme \check{f} de l'algèbre de Lie abélienne $G_{\mathbf{R}}$ dans l'algèbre de Lie $(\check{\mathcal{C}}_o^k, [\dots]_c^k)$ donné par

$$\forall g \in G_{\mathbf{R}}, \quad \varphi_{*}^{\check{v}}(g) = H_{c_a}^{\check{v}} f(g)$$

est de la forme

$$\forall g \in G_{\mathbf{R}}, \quad \check{f}(g) = \sum_{j, \ell, m} e_{j, m}^{\ell}(g) x_j^{\ell} y_j^m + \sum_{\substack{(\alpha, \beta, \gamma) \in R \\ 2\alpha + |\beta| + |\gamma| < k+2}} f_{\alpha, \beta, \gamma}(g) w^{\alpha} x^{\beta} y^{\gamma},$$

où les $f_{\alpha, \beta, \gamma}$ sont des formes linéaires complexes sur $G_{\mathbf{R}}$ (les $e_{j, m}^{\ell}$ étant celles introduites dans la proposition 4(iv)). ■

Je laisse le lecteur prouver le

SCOLIE 4.-Génériquement, R est vide (plus précisément, si l'on munit l'ensemble $\text{Hom}(G, \text{GL}(T_a^k))$ des morphismes continus $G \rightarrow \text{GL}(T_a^k)$ de la topologie compacte ouverte, l'ensemble des $\tilde{\rho}^1 \in \text{Hom}(G, \text{GL}(T_a^k))$ tels que - les notations étant celles de la proposition 4 quant aux b_j - R soit vide est résiduel), et $\check{\rho}$ est donc linéarisable. ■

EXERCICE - L'espace $\text{Hom}^{\omega}(G, \text{GL}(T_a^k))$ des homomorphismes continus de G dans $\text{GL}(T_a^k)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, montrer que les $\tilde{\rho}^1$ qui ne sont pas faiblement hyperboliques sont contenus dans un fermé de mesure nulle.

(8.3) Le théorème de Sternberg en géométrie de contact et en géométrie symplectique.

Soient K et K' (resp. Ω et Ω') deux structures de contact (resp. deux formes symplectiques) définies respectivement sur des variétés de dimension finie X et X' . Etant donné un groupe de Lie G et deux points $a \in X$ et $a' \in X'$, nous dirons que $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, K)$ et $\rho' \in \text{Act}_{a'}^\infty(G, K')$ (resp. $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, \Omega)$ et $\rho' \in \text{Act}_{a'}^\infty(G, \Omega')$) sont (C^∞) isomorphes lorsqu'il existera un germe $h : [X]_a \rightarrow [X']_{a'}$, de transformation de contact $K \rightarrow K'$ (resp. de transformation symplectique $\Omega \rightarrow \Omega'$) de classe C^∞ tel que $h_* \rho = \rho'$. Nous dirons de même que ρ et ρ' sont formellement isomorphes lorsqu'il existera un germe h comme ci-dessus tel que, pour tout $g \in G$, on ait $j_{a'}^\infty(h_* \tilde{\rho}(g)) = j_{a'}^\infty \tilde{\rho}'(g)$.

THÉOREME 1. Sous les hypothèses précédentes, si G est un groupe élémentaire tel que $\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}} = 1$, et si les parties linéaires de ρ et (ou) de ρ' sont hyperboliques, alors ρ et ρ' sont isomorphes si et seulement s'ils sont formellement isomorphes.

(dans le cas de la géométrie de contact, l'hyperbolicité de la partie linéaire de ρ équivaut à celle de la K -partie linéaire de ρ).

L'hypothèse faite sur G dans le théorème 1 signifie simplement qu'il est isomorphe à $G_0 \oplus \mathbb{Z}$ ou à $G_0 \oplus \mathbb{R}$, où G_0 désigne le sous-groupe compact maximal de G .

JUSQU'À LA FIN DE (8.3), ON SUPPOSE QUE $G = G_0 \oplus \mathbb{Z}$ OU $G_0 \oplus \mathbb{R}$, ET L'ON IDENTIFIE $H = G/G_0$ À \mathbb{Z} OU \mathbb{R} , L'INJECTION CANONIQUE $H \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ ÉTANT L'INCLUSION.

DANS CE QUI SUIT, ρ DÉSIGNE UN ÉLÉMENT DE $\text{Act}_a^\infty(G, K)$ OU DE $\text{Act}_a^\infty(G, \Omega)$, DE PARTIE LINÉAIRE HYPERBOLIQUE.

(8.3.1) Choix d'un modèle pour ρ et formulation précisée du théorème 1.

a) Cas où $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, K)$.

Appliquons (8.2.2), théorème 4, proposition 4 et corollaire, à l'action formelle $\rho^\infty \in \text{Act}_a^\infty(G, K)$ donnée par

$$\rho^\infty(g) = j_a^\infty(\tilde{\rho}(g))$$

(on voit en effet facilement que, pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_a^\infty(K)$, le K -jet d'ordre infini de φ s'identifie à $j_a^\infty \varphi$).

Les notations étant celles de (8.2.2), corollaire , l'application linéaire \check{f} est déterminée, puisque $G_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, par $\check{f}(1)$. Soient

$$\begin{cases} R_1 = R \cup \{1, 0, 0\} \cup \{ \delta_{j, \ell}^m : 1 \leq \ell \leq m \leq m_j \text{ et } 1 \leq j \leq q \} \\ R_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A} \setminus \{(0, 0, 0)\} : \forall g \in G, b_0(g)^{\alpha + |\gamma|} \prod_{j=1}^q b_j(g)^{|\beta_j| - |\gamma_j|} = 1 \} \end{cases},$$

où $\delta_{j, \ell}^m$ est l'élément $(0\beta, \gamma)$ de \mathcal{A} vérifiant $|(0, \beta, \gamma)| = 2$ et $\beta_j^\ell = \gamma_j^m = 1$. Si l'on note $\min R_0$ et $\min R_1$ les ensembles minimaux de R_0 et de R_1 pour l'ordre défini sur \mathcal{A} par " $(\alpha, (\beta_j^\ell), (\gamma_j^\ell)) \leq (\alpha', (r_j^\ell), (s_j^\ell))$ si et seulement si $\alpha \leq \alpha'$ et $\beta_j^\ell \leq r_j^\ell$, $\gamma_j^\ell \leq s_j^\ell$ pour $1 \leq \ell \leq m_j$, $1 \leq j \leq q$ ", on déduit de (4.3.2), lemme 4, l'analogie suivant de (4.3.2), lemme 5 :

PROPOSITION 1. Tout élément de R_1 s'écrit (de manière non nécessairement unique) comme la somme d'un élément de l'ensemble fini $\min R_1$ et d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble fini $\{(0, 0, 0)\} \cup \min R_0$. ■

EXERCICE. Quelles conditions doivent vérifier a_0, \dots, a_q pour que la $(K-)$ partie linéaire de ρ soit dans le domaine de Poincaré ? En déduire que R_0 est alors vide. ■

Soient $E_a = T_a X$ et, pour chaque $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{A}$,

$$u_{\alpha, \beta, \gamma} = (-2i)^{|\gamma_1| + \dots + |\gamma_d|} w^\alpha x^\beta y^\gamma : E_a \longrightarrow \mathbb{C}$$

où d est défini dans (8.2), Proposition 4 (le

facteur $(-2i)^{|\gamma_1| + \dots + |\gamma_d|}$ est là pour que l'ensemble des $u_{\alpha, \beta, \gamma}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in P_0$ soit stable par conjugaison complexe). Soient alors

$z_1, \dots, z_\mu : E_a \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v_1, \dots, v_\nu : E_a \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions telles que $z_1, \dots, z_\mu, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\mu, v_1, \dots, v_\nu$ soient distinctes et vérifient

$$\begin{cases} \{z_1, \dots, z_\mu, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\mu\} = \{u_{\alpha, \beta, \gamma} : (\alpha, \beta, \gamma) \in \min R_0 \text{ et } u_{\alpha, \beta, \gamma}(E_a) \not\subset \mathbb{R}\} \\ \{v_1, \dots, v_\nu\} = \{u_{\alpha, \beta, \gamma} : (\alpha, \beta, \gamma) \in \min R_0 \text{ et } u_{\alpha, \beta, \gamma}(E_a) \subset \mathbb{R}\} . \end{cases}$$

PROPOSITION 2. Il existe des fonctions $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma} : \mathbb{C}^\mu \times \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{C}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \min P_1$, de classe C^∞ , telles que le germe $f : [E_a]_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonction C^∞ défini par

$$f = \left[\sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \min P_1} w^\alpha x^\beta y^\gamma \varphi_{\alpha, \beta, \gamma} \circ (z_1, \dots, z_\mu, v_1, \dots, v_\nu) \right]_0$$

soit réel et vérifie $j_0^\infty f = \check{f}(1)$. Pour tout choix d'un tel f, on a

$$\forall g \in G, [\tilde{\sigma}^1(g)]_0^* H_{c_a} f = H_{c_a} f .$$

En outre, si $G = G_0 \oplus \mathbb{R}$, le générateur infinitésimal de $[\sigma^1|_{\mathbb{R} \times E_a}]_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ commute à $H_{c_a} f$.

Démonstration. La première assertion est une conséquence facile du théorème de prolongement d'E. Borel, de la réalité de $\check{f}(1)$ et du fait que $\{u_{\alpha, \beta, \gamma} : (\alpha, \beta, \gamma) \in \min R_1\}$ est stable par conjugaison. Les détails constitueront pour le lecteur un exercice d'algèbre élémentaire.

Pour prouver la seconde assertion (la dernière, similaire, est laissée au lecteur), il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} i_{\tilde{\sigma}^1(g)}^* H_{c_a} f &= (f \circ \tilde{\sigma}^1(g)) \cdot (c_a / \tilde{\sigma}^1(g)^* c_a) = \\ &= (f \circ \tilde{\sigma}^1(g)) / a_0(g) \\ &= f , \end{aligned}$$

les $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma} \circ (z_1, \dots, z_\mu, v_1, \dots, v_\nu)$ étant des intégrales premières de $[\tilde{\sigma}^1(g)]_0$. ■

Soit u_f l'élément de $\text{Act}_0^\infty(\mathbb{R}, T_a K)$ admettant $H_{c_a} f$ pour générateur infinitésimal. Puisque $G = G_0 \oplus H$ avec $H = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , la proposition 2 admet le

COROLLAIRE 1. Pour tout f vérifiant les hypothèses de la proposition 2, il existe un unique $\rho_f \in \text{Act}_o^\infty(G, T_a K)$ tel que

$$\rho_f|_{G_o \times E_a} = [\sigma^1|_{G_o \times E_a}]_{G_o \times \{o\}}$$

et possédant en outre la propriété suivante :

- Si $H = \mathbb{Z}$, on a $\tilde{\rho}_f(g) = \tilde{\sigma}^1(g) \circ \tilde{u}_f(g)$ pour tout $g \in H$.
- Si $H = \mathbb{R}$, le générateur infinitésimal de $\rho_f|_H$ est

$$\left. \frac{d}{dt} \tilde{\sigma}^1(t) \right|_{t=0} + H_{c_a} f \cdot \blacksquare$$

REMARQUES. - Lorsque R_o n'est pas vide, la non-unicité de f a une double origine : d'une part, la non-unicité du prolongement dans le théorème d'E. Borel, et d'autre part la non-unicité dans la proposition 1.

- Ce qui précède, de la proposition 1 au corollaire 1 inclus, reste évidemment vrai si ρ^1 n'est pas hyperbolique.

Le théorème 1 est une conséquence de l'analogue suivant de (4.4.3),
théorème 2 :

THÉORÈME 2. Pour tout f vérifiant les hypothèses de la proposition 2, ρ est isomorphe à ρ_f .

EXERCICES. - En particulier, si R_o est vide (par exemple lorsque ρ^1 est dans le domaine de Poincaré), ρ admet pour modèle le germe en $G \times \{o\}$ d'une action analytique de G sur E_a , car u_f est alors le germe d'une action algébrique de \mathbb{R} sur E_a .

- Montrer que le théorème 2 implique le théorème 1 (remarquer que la construction de ρ_f a pour point de départ le jet de ρ , dont on peut supposer que c'est celui de ρ' par définition de l'isomorphisme formel).

b/ Cas où $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, \Omega)$. Appliquons de même (8.2.1), théorème 2 et corollaire 4 à l'action formelle $\check{\rho} \in \text{Act}_a^\infty(G, \Omega)$ donnée par $\check{\rho}(g) = j_a^\infty(\tilde{\rho}(g))$. Avec les

notations de (8.2.1), corollaire 4, soit $R_o = \cup \{ \delta_{j,\ell}^m : 1 \leq \ell \leq m \leq j \text{ et } 1 \leq j \leq q \}$, où $\delta_{j,\ell}^m = (\beta, \gamma) \in \mathcal{A}$ est défini par $|\beta| + |\gamma| = 2$ et $\beta_j^\ell = \gamma_j^m = 1$.

PROPOSITION 1bis. Tout élément de R_o s'écrit comme la somme d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble fini $\min R_o$. ■

Soient $E_a = T_a X$ et, pour chaque $(\beta, \gamma) \in \mathcal{A}$,

$$u_{\beta, \gamma} = (-2i)^{|\gamma_1| + \dots + |\gamma_d|} x^{\beta} y^{\gamma},$$

où d est défini dans (8.1.2), corollaire 2. Désignons alors par

$z_1, \dots, z_\mu : E_a \rightarrow \mathbb{C}$ et $v_1, \dots, v_\nu : E_a \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions telles que $z_1, \dots, z_\mu, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\mu, v_1, \dots, v_\nu$ soient distinctes et vérifient

$$\begin{cases} \{z_1, \dots, z_\mu, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\mu\} = \{u_{\beta, \gamma} : (\beta, \gamma) \in \min R_o \text{ et } u_{\beta, \gamma}(E_a) \not\subset \mathbb{R}\} \\ \{v_1, \dots, v_\nu\} = \{u_{\beta, \gamma} : (\beta, \gamma) \in \min R_o \text{ et } u_{\beta, \gamma}(E_a) \subset \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

PROPOSITION 2bis. Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{C}^\mu \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , telle que le germe $f : [E_a]_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de fonction C^∞ défini par

$$f = [\varphi \circ (z_1, \dots, z_\mu, v_1, \dots, v_\nu)]_0$$

vérifie $j_0^\infty f = \check{f}^\infty(1)$, où \check{f}^∞ est définie dans le corollaire (8.2.2). Pour tout choix d'un tel f , on a

$$\forall g \in G, [\tilde{\sigma}^1(g)]_0^* H_{\Omega_a} f = H_{\Omega_a} f.$$

En outre, si $G = G_o \oplus \mathbb{R}$, le générateur infinitésimal de $[\sigma^1]_{\mathbb{R} \times E_a} : \mathbb{R} \times \{0\}$ commute à $H_{\Omega_a} f$. ■

Si u_f désigne l'élément de $\text{Act}_o^\infty(\mathbb{R}, \Omega_a)$ admettant $H_{\Omega_a} f$ pour générateur infinitésimal, on en déduit, puisque $G = G_o \oplus H$ avec $H = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , le

COROLLAIRE 1bis. Pour tout f vérifiant les hypothèses de la proposition 2bis, il existe un unique $\rho_f \in \text{Act}_o^\infty(G, \Omega_a)$ tel que

$$\rho_f|_{G_o \times E_a} = [\sigma^1|_{G_o \times E_a}]_{G_o \times \{o\}}$$

et possédant en outre la propriété suivante :

- Si $H = \mathbb{Z}$, on a $\widetilde{\rho}_f(g) = \widetilde{\sigma}^1(g) \circ \widetilde{u}_f(g)$ pour tout $g \in H$.
- Si $H = \mathbb{R}$, le générateur infinitésimal de $\rho_f|_H$ est

$$\left[\frac{d}{dt} \widetilde{\sigma}^1(t) \Big|_{\substack{t=0 \\ t \in H}} \right]_0 + H_{\Omega_a} f . \blacksquare$$

Ce qui précède ne dépend évidemment pas de l'hypothèse d'hyperbolicité, qui intervient dans l'homologue suivant du théorème 2, dont la version symplectique du théorème 1 se déduit facilement (cf. le dernier exercice de a)) :

THÉORÈME 2bis. Pour tout f vérifiant les hypothèses de la proposition 2bis ,
 ρ est isomorphe à ρ_f .

(8.3.2) Démonstration des théorèmes 2 et 2bis.

Nous allons donner la preuve du théorème 2, celle du théorème 2bis étant à peu près identique, en remplaçant (7.3), théorème 3 par (7.3), théorème 3bis. La méthode choisie consiste à "oublier" dans un premier temps la structure de contact, puis à utiliser (7.3), théorème 3 pour réparer cet oubli. Une autre méthode, peut-être plus élémentaire, figure en exercice à la fin du paragraphe. Les notations sont celles de (8.3.1).

LEMME 1. Les v.f.i. de ρ_f sont les germes en 0 de celles de ρ_K^1 (ou de σ^1). Il existe un germe $\varphi : [X]_a \rightarrow [E_a]_0$ de difféomorphisme C^∞ possédant les deux propriétés suivantes :

- (i) $\varphi * \rho = \rho_f$.
- (ii) Pour toute v.f.i. W de σ^1 , $\varphi * [K]_a$ et $[T_a K]_0$ ont un contact infini en W .

Preuve. La démonstration de la première assertion est un exercice facile.

On peut évidemment supposer que $(X, a, K) = (E_a, 0, T_a K)$ et que $j_0^\infty(\tilde{\rho}(g) - \tilde{\rho}_f(g)) = 0$ pour tout $g \in G$. Si $g_0 \in G$ est égal à $1 \in \mathbb{Z} \subset H$, $\tilde{\sigma}^1(g_0)$ est hyperbolique, de sous-espaces stable E^+ et instable E^- , et il existe, d'après (4.2.2), théorème 1, un germe $\varphi_1 \in \mathcal{L}_0^\infty(E_a)$ tel que (en notation abrégée)

$$(1) \quad \begin{cases} (j^\infty \varphi_1)|_{E^+} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((j^\infty \tilde{\rho}(-ng_0) \circ \tilde{\rho}_f(ng_0))|_{E^+}) \\ (j^\infty \varphi_1)|_{E^-} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((j^\infty \tilde{\rho}(ng_0) \circ \tilde{\rho}_f(-ng_0))|_{E^-}) . \end{cases}$$

Puisque $\tilde{\rho}(g_0)$ et $\tilde{\rho}_f(g_0)$ sont des germes de transformations de contact de $T_a K$, il résulte de (1) que $\varphi_1 * [T_a K]_0$ et $[T_a K]_0$ ont un contact infini le long de la réunion $E^+ \cup E^-$ des v.f.i. de σ^1 . En outre, d'après (4.2.2), théorème 2, on a

$$(2) \quad (j^\infty(\rho_f - \varphi_1 * \rho))|_{G \times (E^+ \cup E^-)} = 0 ,$$

car $\varphi_1 * \tilde{\rho}(g_0)$ et $\tilde{\rho}_f(g_0)$ ont un contact infini en $E^+ \cup E^-$ par (1). Si E^+ ou

E^- est trivial (domaine de Poincaré), le lemme 1 et le théorème 2 sont prouvés.

NOUS SUPPOSERONS DONC DÉSORMAIS E^+ ET E^- NON TRIVIAUX.

Il ne reste plus, pour établir le lemme 1, qu'à construire un germe

$$\varphi_2 \in \mathcal{F}_o^\infty(E_a) \text{ tel que } \varphi_2 * \varphi_1 * \rho = \rho_f \text{ et } (j^\infty \varphi_2)|_{E^+ \cup E^-} = \left[j^\infty_{E^+ \cup E^-} \text{id}_{E_a} \right]_o ,$$

ce qui est facile : la preuve du théorème (3.1.4) permet de supposer (en modifiant $\varphi_1^*[T_a K]$, mais sans toucher à son jet le long de $E^+ \cup E^-$) que

$$(3) \quad (\varphi_{1*} \rho - \rho_f)|_{G_o \times E_a} = 0, \text{ puisque } (c_f - [\sigma_1]_{G \times \{o\}})|_{G_o \times E_a} = 0 ;$$

en multipliant les x_j^ℓ et les y_j^ℓ par des constantes positives, on se ramène au cas où la norme euclidienne $|\cdot|$ sur E_a définie par

$$|v|^2 = w(v)^2 + \sum_{j,\ell} (|x_j^\ell(v)|^2 + |y_j^\ell(v)|^2)$$

est telle qu'il existe une constante $\lambda_o < 0$ vérifiant

$$(4) \quad \forall (v,t) \in E_a \times (H \cap [0, \infty[), \quad |\rho_K^1(t,v)_+| \leq e^{\lambda_o t} |v_+| \text{ et } |\rho_K^1(-t,v)_-| \leq e^{\lambda_o t} |v_-| ,$$

où $v \longrightarrow v_\pm$ désigne la projection orthogonale sur E^\pm . Si l'on utilise cette norme (qui est invariante par $\sigma^1|_{G_o \times E_a}$) dans le procédé d'extension qui a servi à prouver (3.2.1), lemme 1, on parvient à construire deux actions R_1 et R_2 de classe C^∞ de H sur E_a possédant, d'après (2), (3) et (4), les propriétés suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } [R_1]_{H \times \{o\}} = \rho_f|_{H \times E_a} \text{ et } [R_2]_{H \times \{o\}} = \varphi_1 * \rho|_{H \times E_a} . \\ \text{b) } \forall g \in G_o, \quad \tilde{\sigma}^1(g)^* R_j = R_j, \quad j = 1, 2 . \\ \text{c) } j^\infty_{H \times (E^+ \cup E^-)} (R_2 - R_1) = 0 . \\ \text{d) Il existe } \lambda < 0 \text{ vérifiant, } \forall (v,t) \in E_a \times (H \cap [0, \infty[), \\ |R_j(t,v)_+| \leq e^{\lambda t} |v_+| \text{ et } |R_j(-t,v)_-| \leq e^{\lambda t} |v_-|, j = 1, 2 . \\ \text{e) Pour tout compact } K \subset H, (R_j - \rho_K^1)|_{K \times E_a}, j = 1, 2, \text{ est à} \\ \text{support compact.} \end{array} \right.$$

Il en résulte (cf. (4.1) et (4.2.2), théorème 3) que la suite $(\tilde{R}_1(n) \circ \tilde{R}_2(-n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, au sens C^∞ sur tout compact, vers un $\tilde{\Phi} \in \text{Diff}^\infty(E_a^+, E_a^-)$ conservant $\sigma^1|_{G_0 \times E_a}$, ayant un contact infini avec l'identité en $E^+ \cup E^-$, et tel que $\tilde{\Phi}_* R_2 = R_1$. D'après (5)a) et (3), le lemme 1 en résulte avec $\varphi = \tilde{\Phi} \circ \varphi_1$. \square

FIN DE LA DÉMONSTRATION. Soit Γ le sous-groupe libre discret $2\mathbb{Z} \subset H$ de G . D'après (5)d)-e), pour $r > 0$ assez grand, si

$$B_r = \{v \in E_a : |v_+| \leq r\} \text{ et } D_r = B_r \setminus \tilde{\rho}_K^1(2)B_r,$$

la restriction $\tilde{R}_1(2)|_{D_r}$ est égale à $\tilde{\rho}_K^1(2)|_{D_r}$, et détermine entièrement

$R_1|_{\Gamma \times (E_a \setminus E^-)}$. Comme $\tilde{\rho}_K^1(2)$ est sur un groupe à un paramètre d'automorphismes

hyperboliques de E_a , l'espace des orbites Q de $R_1|_{\Gamma \times (E_a \setminus E^-)}$ est donc une

variété C^∞ séparée, difféomorphe à $\partial B_r \times S^1$, et la surjection canonique

$\pi : E_a \setminus E^- \longrightarrow Q$ est un revêtement C^∞ .

Désignons par K_1 et K_2 les germes en $E^+ \cup E^-$ de structures de contact invariantes par $\tilde{R}_1(2)$ définis par

$$[K_1]_0 = [T_a K]_0 \text{ et } [K_2]_0 = \varphi_* [T_a K]_0.$$

D'après le lemme 1 et (5)d), K_1 et K_2 ont un contact infini en $E^+ \cup E^-$. Par conséquent, les germes $\pi_* K_1$ et $\pi_* K_2$ en $N = \pi(E^+ \setminus E^-)$ de structures de contact

sur Q obtenus par passage au quotient ont un contact infini en N . L'action

R de G sur E_a définie (d'après (5)b)) par $(R \circ \sigma^1)|_{G_0 \times E_a} = 0$ et $R|_{H \times E_a} = R_1$

induit une action \bar{R} du groupe compact $K = G/\Gamma$ sur Q ; comme le germe $\bar{\rho}$ de \bar{R}

en $K \times N$ laisse $\pi_* K_1$ et $\pi_* K_2$ invariantes, on déduit de (7.3), théorème 3,

qu'il existe un germe $\bar{h} : [Q]_N \hookrightarrow$ de difféomorphisme C^∞ laissant $\bar{\rho}$ invariant

et tel que $j_N^\infty \bar{h} = j_N^\infty \text{id}_Q$ et $\bar{h}^* \pi_* K_1 = \pi_* K_2$. En relevant \bar{h} par π et en se localisant en $0 \in E_a$, on obtient donc un germe $h : [E_a \setminus E^-]_0 \longrightarrow E_a \setminus E^-$

d'application C^∞ laissant $\rho_f|_{G \times (E_a \setminus E^-)}$ invariant (car ρ_f est le germe de R), tel que $h^* [T_a K]_0 = \varphi_* [T_a K]_0|_{E_a \setminus E^-}$, et vérifiant $j^\infty(h - [\text{id}_{E_a \setminus E^-}]_0) = 0$. Il ré-

sulte donc de (4.2.3), théorème 2 (appliqué avec $\varphi = \Psi = \rho_f(2)$ et $h_o = [\text{id}_{E_a}]_o$) que h se prolonge en un élément (encore noté h) de $\mathcal{L}_o^\infty(E_a)$ tel que $h^* \rho_f = \rho_f$ et $h^* [T_a K]_o = \varphi_* [T_a K]_o$. En d'autres termes, $h_o \varphi : [X]_a \rightarrow [E_a]_o$ est un germe de transformation de contact $K \rightarrow T_a K$ de classe C^∞ , envoyant ρ sur ρ_f . ■

REMARQUE. Le recours à l'extension R de ρ_f dans cette fin de démonstration ne présente aucune utilité, car le germe $[Q]_N$ est entièrement défini par $\tilde{\rho}_f(2)$.

EXERCICES. 1 - Montrer que la notion de K -jet d'ordre $k < \infty$ est définie pour des germes de transformations de contact de différentiabilité finie (que l'on précisera). Enoncer et prouver des versions en différentiabilité finie de tous les théorèmes de (8.3).

2 - Prouver le résultat suivant : pour tout groupe de Lie compact K et tout $\rho \in \text{Act}_a^\infty(K, K)$, il existe un germe $h : [X]_a \rightarrow [E_a]_o$ de transformation de contact $K \rightarrow T_a K$ de classe C^∞ (analytique si X, ρ et K le sont) tel que $h_* \rho = \rho_K^1$. (Remarquer que, si $K = T_a K$, la compacité de K impose que $\rho_K^1 = \rho^1$). Appliquer alors successivement la démonstration du théorème (3.1.4) et une variante de (7.3), théorème 3). Prouver de même le résultat correspondant en géométrie symplectique.

3 - (Autre démonstration du théorème 2 si $G_o = \{o\}$).

a) Montrer que φ_1 , au début de la preuve du lemme 1, peut être choisi dans $\mathcal{L}_o^\infty(T_a K)$ (le plus simple est d'utiliser (7.3), théorème 3 pour modifier un φ_1 d'abord arbitrairement choisi ; on peut aussi définir φ_1 par une fonction génératrice : construire d'abord une transformation de contact $T_a K \rightarrow K_{n,1}^1$, puis refaire la démonstration de (7.2.1), Corollaire 3, au niveau des jets le long d'une réunion de sous-variétés de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^2$, et employer le théorème de prolongement de Whitney).

b) Utiliser les fonctions génératrices si $G = \mathbb{Z}$, les hamiltoniens de contact si $G = \mathbb{R}$, pour montrer que les actions R_1 et R_2 , dans la suite de la preuve du lemme 1, peuvent être choisies de manière à préserver $T_a K$, ce qui entraîne que $\tilde{\varphi}$ est une transformation de contact. ■

(8.3.3) Les cas génériques.

THEOREME 3. - Soient c une forme de contact sur une variété séparable X de dimension finie, et K la structure de contact engendrée par c . Il existe un résiduel S de $C^\infty(X, \mathbb{R})$ pour la topologie de Whitney tel que, pour tout $f \in S$ et tout $a \in X$ vérifiant $H_c f(a) = 0$, les propriétés suivantes soient satisfaites :

(i) L'automorphisme $\exp(dH_c f(a))$ de $T_a X$ est hyperbolique, et la K -partie linéaire de $H_c f(a)$ est semi-simple.

(ii) Le germe $[H_c f]_a$ est C^∞ -linéarisable, au sens suivant : il existe un germe $\varphi \in \mathcal{D}_{a,0}^\infty(K, T_a K)$ envoyant $[H_c f]_a$ sur sa K -partie linéaire en a .

Voici l'analogue du théorème 3 en géométrie symplectique :

THEOREME 3bis. - Soit ω une forme symplectique sur une variété séparable X de dimension finie. Il existe un résiduel S de la topologie de Whitney sur $C^\infty(X, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in S$ et tout $a \in X$ vérifiant $H_\omega f(a) = 0$, les propriétés suivantes soient satisfaites :

(i) Si l'on pose $E = T_a X$ et $\tilde{\xi}^1 = dH_\omega f(a)$, il existe des entiers $q, d, e \in \mathbb{N}$ avec $d + 2e \leq q$, des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ et des formes linéaires complexes

$x_j, y_j \in L(E, \mathbb{C}), 1 \leq j \leq q$, possédant les propriétés suivantes :

(a) $(x_j, y_j)_{1 \leq j \leq q}$ est une base de l'espace vectoriel complexe $L(E, \mathbb{C})$.

(b) On a $x_j \circ \tilde{\xi}^1 = \lambda_j x_j$ et $y_j \circ \tilde{\xi}^1 = -\lambda_j y_j$ pour $1 \leq j \leq q$.

(c) $\omega(a) = \sum_{j=1}^q y_j \wedge x_j$

(d) On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j \in i\mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } x_j = 2i \overline{y_j} \text{ pour } 1 \leq j \leq d \\ \lambda_j = \overline{\lambda_{j+e}} \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R} \cup -i\mathbb{R}) \text{ et } \overline{x_j} = x_{j+e}, \overline{y_j} = y_{j+e} \text{ pour } d \leq j \leq d+e \\ \lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } x_j \in L(E, \mathbb{R}) \text{ pour } j > d + 2e \end{array} \right.$$

(e) Si $(\beta, \gamma) \in (\mathbb{N}^q)^2$ vérifie $\sum (\gamma_j - \beta_j) \lambda_j = 0$, alors $\gamma_j = \beta_j$ pour tout j .

(ii) Si $\exp \tilde{\xi}^1$ est hyperbolique (ce qui est le cas si et seulement si l'entier d ci-dessus est nul), alors il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^e \times \mathbb{R}^{q-2e}, \mathbb{R})$ possédant

la propriété suivante : si Ω est la forme symplectique sur E donnée par

$$\Omega(v) = \sum_{j=1}^q dy_j \wedge dx_j, \quad v \in E,$$

il existe $h \in \mathcal{D}_{a,0}^\infty(\omega, \Omega)$ envoyant $[H_f]_a$ sur $[H_\Omega F]_0$, où

$$F(v) = \psi((x_j(v)y_j(v))_{1 \leq j \leq e}, (x_j(v)y_j(v))_{2e < j \leq q})$$

La démonstration de ces deux résultats, tout à fait semblable à celle du théorème (4.4.5), est laissée au lecteur, qui s'exercera ainsi à manier (8.3.2). ■

La leçon du théorème 3bis est double : d'une part, même génériquement, les points fixes d'une action préservant une structure symplectique ne sont en général pas tous hyperboliques ; d'autre part, même pour ceux qui le sont, le germe de l'action n'est pas en général linéarisable. Cela dit, je laisse le lecteur vérifier que le modèle $H_\Omega F$ fourni par le théorème s'intègre explicitement (indication : chacune des fonctions $x_j y_j$ est une intégrale première de l'action), et est donc tout aussi utilisable qu'un modèle linéaire. (*)

REMARQUE. - Le théorème 3 s'étend aux automorphismes infinitésimaux (et aux automorphismes, cf.(4.4.5)) d'une structure de contact non nécessairement engendrée par une forme, à condition de définir la topologie de Whitney sur l'espace fonctionnel concerné. De même, le théorème 3bis s'étend aux automorphismes infinitésimaux non nécessairement hamiltoniens (et aux automorphismes) d'une forme symplectique. Enfin, comme dans (4.4.5), si l'on demande seulement un C^k -isomorphisme, $k \in \mathbb{N}^*$, au lieu d'un C^∞ -isomorphisme, on obtient un ouvert dense au lieu d'un résiduel - et la fonction ψ du théorème 3bis peut être choisie polynomiale.

(*) Les théorèmes 2bis et 3bis sont autrement rassurants que les résultats sur la classification analytique des germes de champs hamiltoniens analytiques réels : même dans les cas hyperboliques, ladite classification est à peu près impossible, alors que nous venons de voir combien la classification différentiable était simple.

(8.4) Intégrales singulières normalement hyperboliques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

En vertu des remarques faites au début de (7.2.3), nous ne parlerons pas d'intégrales singulières, mais de singularités de transformations de contact infinitésimales, laissant les traductions au lecteur - qui peut d'ores et déjà interpréter (8.3) en termes d'intégrales singulières de dimension 0.

Soient X_1 et X_2 deux variétés, respectivement munies de structures de contact κ_1 et κ_2 . Si ξ_i désigne pour $i = 1, 2$ un germe en $a_i \in X_i$ de transformation de contact infinitésimale C^∞ de κ_i , nous dirons que ξ_1 et ξ_2 sont formellement ν -isomorphes à l'ordre $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ lorsqu'il existera un germe $h : [X_1]_{a_1} \rightarrow [X_2]_{a_2}$ de transformation de contact $\kappa_1 \rightarrow \kappa_2$ tel que $\xi_2^{-1}(0) = h(\xi_1^{-1}(0))$ et $j_{\xi_2^{-1}(0)}^k (h_* \xi_1 - \xi_2) = 0$. Ces conditions sont évidemment satisfaites lorsque ξ_1 et ξ_2 sont C^k -isomorphes, c'est-à-dire lorsqu'il existe un germe h de transformation de contact C^k tel que $h_* \xi_1 = \xi_2$.

THEOREME 1. Sous ces hypothèses, si $\xi_1^{-1}(G)$ est un germe V de sous-variété C^∞ non-vide et si ξ_1 est hyperbolique normalement à V , alors $(\xi_1)_\kappa^{-1}$ détermine $s : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{N}$, avec $s(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{N}^*$, ayant la propriété suivante : si ξ_1 et ξ_2 sont formellement ν -isomorphes à l'ordre $s(k)$, alors ils sont C^k -isomorphes.

Un théorème de ce type n'est guère "parlant" s'il ne s'assortit pas d'un résultat précisant les formes normales auxquelles il permet d'aboutir. Nous allons donc à la fois le prouver et le préciser, en posant $(X, a, \xi) = (X_1, a_1, \xi_1)$, sous l'

HYPOTHÈSE SUPPLÉMENTAIRE. L'endomorphisme $N_a \xi$ de $N_a X = T_a X / T_a V$ induit par $T_a \xi$ a toutes ses valeurs propres distinctes et réelles.

D'après le théorème (8.1), comme $d\xi(a)$ et ξ_κ^{-1} ont le même spectre, les valeurs propres de $N_a \xi$ sont d'une part $\mu(0) = (L_{\xi_\kappa^{-1}} c_a) / c_a$ et d'autre part des nombres réels $\lambda_j(0)$, $\mu(0) - \lambda_j(0)$, $1 \leq j \leq n-r$, où $r = \dim V$. Désignons par P

l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-r} \times \mathbb{N}^{n-r} \times \mathbb{N}^r$ vérifiant $2\alpha + |\beta, \gamma, \delta| > 2$ et

$$(\alpha + |\gamma| + |\delta| - 1) \mu(0) + \sum_{j=1}^{n-r} (\beta_j - \gamma_j) \lambda_j(0) = 0.$$

THÉORÈME 2. Sous les hypothèses précédentes, il existe des fonctions réelles $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ et $f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in P$ de classe C^∞ sur \mathbb{R}^r , telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un germe $h : [X]_a \rightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0$ de transformation de contact $\kappa \rightarrow \kappa_{n,1}^1$, de classe C^k , possédant la propriété suivante : le hamiltonien de contact de $h_* \xi$ par rapport à c_0 est le germe en 0 de

$$F_{s(k)} = (\mu \circ y) u - \sum_{j=1}^{n-r} (\lambda_j \circ y) x^j p_j + \sum_{\substack{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in P \\ 2\alpha + |\beta, \gamma, \delta| \leq s(k)+1}} (f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ y) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta,$$

où $y(p) = (x^{n-r+1}(p), \dots, x^n(p))$.

Si $\mu(0), \lambda_1(0), \dots, \lambda_{n-r}(0), \mu(0) - \lambda_1(0), \dots, \mu(0) - \lambda_{n-r}(0)$ sont tous du même signe, P est fini, ce résultat est vrai pour $k = \infty$, et l'on peut choisir $s(\infty) < \infty$.

Démonstration : (i) Partie formelle. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, nous allons construire une transformation de contact h^ℓ telle que le hamiltonien de contact de $h_*^\ell \xi$ ait le même c_0 -jet d'ordre ℓ en $h(V) = [V_r]_0$ que $[F_\ell]_0$.

Notons $y = (y^1, \dots, y^r) = (x^{n-r+1}, \dots, x^n)$, $x = (x^1, \dots, x^{n-r})$, $p = (p_1, \dots, p_{n-r})$ et $q = (q_1, \dots, q_r) = (p_{n-r+1}, \dots, p_n)$. D'après (7.3.1), Proposition 2, on peut supposer que $(X, a, \kappa) = (J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0, \kappa_{n,1}^1)$ et que V est le germe en 0 de $V_r = u^{-1}(0) \cap x^{-1}(0) \cap p^{-1}(0) \cap q^{-1}(0)$. Le jet en V_r de $i_\xi c_0$ s'identifie au germe en 0 d'une série formelle

$$S = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} (S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ y) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta,$$

où les $S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \in C^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R})$ peuvent être choisis, par hypothèse, de manière que

$$S_{0,0,0,0} = 0 \quad \text{et} \quad S_{0,\beta,\gamma,\delta} = 0 \quad \text{pour} \quad |\beta| + |\gamma| + |\delta| = 1.$$

LEMME 1. Modulo un germe $[J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0 \hookrightarrow$ d'automorphisme de
 $\mathcal{K}_{n,1}^1$, on peut supposer que

$$S = (\mu \circ \gamma) u - \sum_{j=1}^{n-r} (\lambda_j \circ \gamma) x_j^j p_j + \sum_{2\alpha + |\beta| + |\gamma| + |\delta| > 2} (S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ \gamma) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta.$$

Preuve : Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}^r$, soit ξ_θ la transformation de contact infinitésimale de $\mathcal{K}_{n-r,1}^1$ qui a pour hamiltonien de contact

$$\sum_{2\alpha + |\beta| + |\gamma| = 2} S_{\alpha, \beta, \gamma, 0}(\theta) u^\alpha x^\beta p^\gamma$$

par rapport à la forme $c'_0 = du - \sum_{j=1}^{n-r} p_j dx_j^j$. Dans les coordonnées

$$w = u + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-r} p_j x_j^j, \quad x_j = x_j^j \text{ et } y_j = p_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \xi_\theta \text{ est linéaire, et}$$

d'après le théorème (8.1), il résulte de notre hypothèse supplémentaire qu'il existe une transformation de contact (linéaire dans nos nouvelles coordonnées) h_θ telle que

$$h_\theta^* c'_0 = c'_0 \text{ et } i_{h_\theta^* \xi_\theta} c'_0 = \mu(\theta) u - \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j(\theta) x_j^j p_j.$$

Si H_θ désigne la transformation de contact de $\mathcal{K}_{n,1}^1$ donnée par $(u, x, p) \cdot H_\theta = (u, x, p) \cdot h_\theta$ et $(y, q) \cdot H_\theta = (y, q)$, on est donc ramené, en remplaçant ξ par $H_\theta^* \xi$ au cas où

$$(1) \quad \sum_{2\alpha + |\beta| + |\gamma| = 2} S_{\alpha, \beta, \gamma, 0}(\theta) u^\alpha x^\beta p^\gamma = \mu(\theta) u - \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j(\theta) x_j^j p_j.$$

Il existe un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^r où les valeurs propres de ξ_θ (dans les coordonnées w, x_j, y_j) sont des fonctions C^∞ de θ . Un exercice facile d'algèbre linéaire montre alors l'existence d'une famille h_θ de transformations de contact de $\mathcal{K}_{n-r,1}^1$, linéaires dans les coordonnées w, x_j, y_j , dépendant de manière C^∞ de $\theta \in \mathbb{R}^r$, vérifiant (d'après (1))

$$(2) \quad h_\theta = \text{id}, \quad h_\theta^* c'_0 = c'_0$$

et telles que, pour tout θ assez proche de 0, $h_\theta^* \xi_\theta$ ait pour hamiltonien de contact

$$\mu(\theta)u - \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j(\theta) x^j p_j$$

par rapport à c'_0 , avec $\mu = S_{1,0,0,0}$ et $\lambda_j \in C^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R})$. Pour θ assez voisin de 0, il résulte de (2) que h_θ admet une fonction génératrice $\varphi_\theta(x, u, P) = \bar{\varphi}(\theta, x, u, P)$ de la forme $\varphi_\theta(x, u, P) = u - \Psi_\theta(x, P)$, où Ψ_θ est une forme quadratique, dépendant C^∞ de θ . Si l'on considère maintenant la transformation de contact (locale) H de $K_{n,1}^1$ qui admet pour fonction génératrice

$$\bar{\varphi}(y, x, u, P) = \sum_{j=1}^r y^j Q_j$$

(où l'on note (U, X, Y, P, Q) les coordonnées au but), on est ramené, en remplaçant ξ par $H_* \xi$, au cas où

$$(3) \quad \sum_{2\alpha + |\beta| + |\gamma| + |\delta| = 2} (S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ y) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta = \\ = (\mu \circ y) u - \tilde{p}(\Lambda \circ y) \tilde{x} - \tilde{q}(A \circ y) \tilde{x} - \tilde{q}(B \circ y) \tilde{p}^t - \frac{1}{2} \tilde{q}(C \circ y) \tilde{q}^t,$$

où $\Lambda, A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^r, gl(n-r, \mathbb{R}))$ sont telles que $\Lambda(\theta)$ et $C(\theta)$ soient respectivement diagonale et symétrique pour tout θ , et où \tilde{p}^t, \tilde{x}^t (transposée de \tilde{x}), \tilde{q} désignent respectivement les matrices $(p_1 \dots p_{n-r})$, $(x^1 \dots x^{n-r})$ et $(q_1 \dots q_r)$. Pour passer de (3) à la forme souhaitée (c'est-à-dire pour "tuer" A, B , et C), il suffit de prendre l'image réciproque de ξ par la transformation de contact de fonction génératrice

$$u - (\tilde{p}^t \tilde{x} + \tilde{q} D(y) \tilde{x} + \tilde{q} E(y)^t \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{q} K(y)^t \tilde{q} + \tilde{q} \tilde{y})$$

où

$$E = B(\mu - \Lambda)^{-1}, \quad D = A \wedge^{-1} \quad \text{et} \quad K = \mu^{-1}(A^t E + E^t A + C). \quad \square$$

Les notations étant celles du lemme, quels que soient $a \in C^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-r} \times \mathbb{N}^{n-r} \times \mathbb{N}^r$, le jet d'ordre infini du crochet

$$[(\mu \circ y)u - \sum_{j=1}^{n-r} (\lambda_j \circ y) x^j p_j, (a \circ y) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta]_{c_0}$$

peut s'écrire comme la somme de

$$(\alpha + |\gamma| + |\delta| - 1) (\mu \circ y) + \sum_{j=1}^{n-r} (\beta_j - \gamma_j) (\lambda_j \circ y) (a \circ y) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta$$

et d'une "combinaison linéaire infinie", à coefficients C^∞ en y , des $u^{\alpha'} x^{\beta'} p^{\gamma'} q^{\delta'}$ avec $2\alpha' + |\beta'| + |\gamma'| + |\delta'| > 2\alpha + |\beta| + |\gamma| + |\delta|$. Par conséquent, si l'on remplace ξ par $(\exp \eta_1)^* \xi$, où η_1 est le germe en 0 de la transformation de contact infinitésimale admettant

$$\sum_{\substack{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \notin P \\ 2\alpha + |\beta, \gamma, \delta| = 3}} (S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ y) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta / ((\alpha + |\gamma| + |\delta| - 1) (\mu \circ y) + \sum_{j=1}^{n-r} (\beta_j - \gamma_j) (\lambda_j \circ y))$$

pour hamiltonien de contact par rapport à c_0 dans un voisinage de 0, on peut supposer que tous les $S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ avec $2\alpha + |(\beta, \gamma, \delta)| = 3$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \notin P$ sont nuls. On peut alors, par le même procédé, annuler tous les $S_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ avec $2\alpha + |(\beta, \gamma, \delta)| = 4$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \notin P$, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre ℓ . \square

(ii) Preuve de la dernière assertion du théorème 2. P peut s'écrire comme l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ vérifiant $2\alpha + |(\beta, \gamma, \delta)| > 2$ et

$$\mu(o) = (\alpha + |\delta|) \mu(o) + \sum_{j=1}^{n-r} (\beta_j \lambda_j(o) + \gamma_j (\mu(o) - \lambda_j(o)))$$

Soient $s_o = \max \left(\left\{ \frac{\mu(o)}{\lambda_j(o)} : 1 \leq j \leq n-r \right\} \cup \left\{ \frac{\mu(o)}{\mu(o) - \lambda_j(o)} : 1 \leq j \leq n-r \right\} \right)$ et $\ell_o = \min \{ \ell \in \mathbb{N} : \ell > s_o \}$. Sur l'ouvert (contenant 0)

$$U_o = \bigcap_{j=1}^{n-r} \left(\frac{\mu \circ y}{\lambda_j \circ y} \right)^{-1} (]0, \ell_o[) \cap \left(\frac{\mu \circ y}{\mu \circ y - \lambda_j \circ y} \right)^{-1} (]0, \ell_o[),$$

l'équation

$$(4) \quad (\alpha + |\gamma| + |\delta| - 1) (\mu \circ y) + \sum_{j=1}^{n-r} (\beta_j - \gamma_j) (\lambda_j \circ y) = 0$$

n'admet aucune solution pour $\alpha + |(\beta, \gamma, \delta)| \geq \ell_o$. Par conséquent, P est fini, et il existe une boule ouverte B de centre 0 dans \mathbb{R}^r telle que les $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pour lesquels (4) admet une solution sur $U_1 = U_o \cap y^{-1}(B)$ soient exactement les éléments de P . Il en résulte que ξ est formellement v -équivalent à l'ordre infini à $\xi_o = H_{c_o} F_{\ell_o}$ et que tout ξ' qui est formellement v -équivalent à ξ à

l'ordre ℓ_0 lui est formellement v -équivalent à l'ordre infini. Notre assertion sera donc prouvée, avec $s(\infty)=\ell_0$, dès que nous aurons établi que ξ est C^∞ -isomorphe à ξ_0 . Or, nous pouvons supposer que les $f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in P$, $\mu-\mu(o)$ et les $\lambda_j-\lambda_j(o)$, $1 \leq j \leq n-r$, sont à support compact, et que ξ est obtenu par localisation d'un germe (encore noté ξ) de transformation de contact infinitésimale égal à ξ_0 hors d'un borné et (d'après ce qui précède) ayant avec ξ_0 un contact infini le long de V_r . D'après le premier théorème de l'appendice 6, si $\varepsilon = \mu(o)/|\mu(o)|$, la suite $(\exp(\varepsilon n \xi) \circ \exp(-\varepsilon n \xi_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens C^∞ vers un germe en V_r de transformation de contact envoyant ξ_0 sur ξ . \square

(iii) Fin de la preuve du théorème 2. Si E désigne l'espace vectoriel $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, les sous-espaces

$$\left\{ \begin{array}{l} W^+ = \bigcap_{\frac{\lambda_j(o)}{\mu(o)} < 0} (x^j)^{-1}(o) \cap \bigcap_{\frac{\lambda_j(o)}{\mu(o)} > 1} p_j^{-1}(o) \\ W^- = u^{-1}(o) \cap q^{-1}(o) \cap \bigcap_{\frac{\lambda_j(o)}{\mu(o)} \geq 0} (x^j)^{-1}(o) \cap \bigcap_{\frac{\lambda_j(o)}{\mu(o)} \leq 1} p_j^{-1}(o) \end{array} \right.$$

vérifient $W^+ + W^- = E$ et $W^+ \cap W^- = V_r$, et nous pouvons supposer

$$W^- \neq V_r,$$

le cas où $W^- = V_r$ ayant été traité dans (ii). Soient $w : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ une fonction C^∞ vérifiant $w^{-1}(1) =]-\infty, 1]$ et $w^{-1}(0) = [2, \infty[$, et $|\cdot|$ la norme euclidienne sur E donnée par $|\cdot|^2 = u^2 + \sum_{j=1}^n ((x^j)^2 + (p_j)^2)$. Quels que soient l'entier $\ell > 0$ et les réels $\theta > 0$ et $\eta > 0$, désignons par $\xi_{\theta,\ell}$ et $\xi_{\theta,\eta,\ell}$ respectivement les germes en V_r et en W^- de $H_{c_0} f_{\theta,\eta,\ell}$, où $f_{\theta,\eta,\ell}$ est défini par

$$f_{\theta,\eta,\ell}(v) = g(v) + w(\theta|v_o|^2) w(\eta|v_+ + v_-|^2) (F_\ell(v) - g(v)),$$

v_o désignant la projection orthogonale de v sur V_r et v_\pm la projection orthogonale de $v-v_o$ sur W^\pm , la fonction g étant donnée par

$$g = \mu(0) u - \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j(0) x^j p_j .$$

On voit facilement que les $H_{c_0}^f \xi_{\theta, \eta, \ell}$ sont tangents à W^+ et W^- ; en outre, il existe des réels $\theta_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ et deux applications $s_1, s_2 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tels que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, tout $\theta \in]0, \theta_0[$ et tout $\eta \in]0, \eta_0[$, les hypothèses du théorème (A6.5) de l'appendice 6 soient satisfaites,

si $\varepsilon = \mu(o)/|\mu(o)|$,

- par $\varepsilon \xi_{\theta, \ell}$, avec $\Sigma = V_r$, $W = W^-$ et $s = s_1$;
- par $-\varepsilon \xi_{\theta, \eta, \ell}$, avec $\Sigma = W^-$, $W = E$ et $s = s_2$ (cela provient de ce que la suite $(j_{W^-}^1(H_{c_0}^F \ell))_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire à partir d'un certain rang).

Soit $s = 2s_1 \circ s_2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut évidemment supposer (ce que nous ferons) que ξ est un germe de transformation de contact infinitésimale de $\kappa_{n,1}^1$, ayant un contact d'ordre $s_1 \circ s_2(k)$ avec $[H_{c_0}^F s(k)]_0$ en V_r . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ représentant $i_{\xi} c_0$, et soient ξ_θ et $\xi_{\theta, \eta}$, $\theta, \eta > 0$, les germes en V_r et en W^- respectivement de transformations de contact infinitésimales de $\kappa_{n,1}^1$ obtenus à partir de f comme $\xi_{\theta, \ell}$ et $\xi_{\theta, \eta, \ell}$ sont obtenus à partir de F_ℓ . En appliquant l'appendice 6, (A6.5) à $\xi_{\theta, s(k)}$ et ξ_θ pour $\theta \in]0, \theta_0[$ assez petit, on établit l'existence d'un germe $\varphi : [E]_{V_r} \rightarrow$ de difféomorphisme $C^{s_2(k)}$ tel que $j^{s_2(k)}(\varphi * \xi_\theta - \xi_{\theta, s(k)})|_{W^-} = 0$, et qu'en outre $\varphi * [\kappa_{n,1}^1]_{V_r}$ et $[\kappa_{n,1}^1]_{V_r}$ aient un contact d'ordre $s_2(k)$ en V_r . Une variante de (7.3), théorème 3 (ou, si l'on préfère, l'usage de fonctions génératrices : cf. (8.3), exercice 3) permet de supposer que φ est un germe de transformation de contact de $\kappa_{n,1}^1$. Nous ne perdrons donc rien à faire désormais l'hypothèse que $\varphi = [\text{id}_E]_{V_r}$, le champ ξ n'étant plus que de classe $C^{s_2(k)}$. En appliquant alors de nouveau l'appendice 6, (A6.5), à $\xi_{\theta, \eta, s(k)}$ et $\xi_{\theta, \eta}$ pour θ, η assez petits, nous obtenons l'existence d'un germe $\psi : [E]_{W^-} \rightarrow$ de transformation de contact C^k de $\kappa_{n,1}^1$ envoyant $\xi_{\theta, \eta}$ sur $\xi_{\theta, \eta, s(k)}$, d'où le résultat cherché par localisation en 0. \square

(iv) Fin de la démonstration du théorème 1 (sous l'hypothèse supplémentaire). Le théorème 2 prouve l'existence de $s|_{\mathbb{N}}^*$, et sa dernière assertion implique le théorème 1 lorsque $W^- = V_r$. Nous supposons donc $W^- \neq V_r$, et nous attacherons à trouver un modèle de ξ à transformation de contact C^∞ près. Pour cela, fixons des applications $\mu, \lambda_j \in C^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R})$, $1 \leq j \leq n-r$, satisfaisant le lemme 1, et telles que μ et les λ_j , $\mu - \lambda_j$, $1 \leq j \leq n-r$, ne s'annulent pas. Pour chaque ouvert $U \ni 0$ de \mathbb{R}^r , soit P_U l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-r} \times \mathbb{N}^{n-r} \times \mathbb{N}^r$ vérifiant $2\alpha + |(\beta, \gamma, \delta)| > 2$ et tels qu'il existe $\theta \in U$ satisfaisant

$$(\alpha + |(\gamma, \delta)| - 1) \mu(\theta) + \sum_{j=1}^{n-r} (\beta_j - \gamma_j) \lambda_j(\theta) = 0.$$

On a évidemment $P \subset P_U$, et la situation est la suivante : pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, il existe un U tel que tous les $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in P_U$ avec $2\alpha + |(\beta, \gamma, \delta)| \leq \ell + 1$ soient dans P (ce que nous avons utilisé à la fin de (i)), MAIS il n'y a aucune raison (sauf si $r = 0$) pour qu'il existe un U tel que $P_U = P$: là est la différence avec le cas, étudié dans (ii), où $W^- = V_r$. En d'autres termes, on a pour exemple le

SCOLIE. Si $P = \emptyset$ et $W^- \neq V_r$, alors ξ est C^k -isomorphe pour tout $k < \infty$ au germe ξ_0 en 0 de la transformation de contact infinitésimale de $\kappa_{n,1}^1$ admettant $(\mu \circ \gamma)u - \sum_{j=1}^{n-r} (\lambda_j \circ \gamma)x^j p_j$ pour hamiltonien de contact par rapport à c_0 , mais ξ et ξ_0 ne sont pas en général v -isomorphes à l'ordre infini (ni a fortiori, C^∞ -isomorphes) pour $r > 0$.

Le raisonnement de (i) montre que, pour tout U , il existe des fonctions réelles $g_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in P_U$, de classe C^∞ sur \mathbb{R}^r , et un germe $h : [X]_a \rightarrow [E]_0$ de transformation de contact $\kappa \rightarrow \kappa_{n,1}^1$, de classe C^∞ , tels que le jet en V_r de $i_{h_*} \xi_{c_0}$ soit le germe en 0 de

$$\hat{F}_U = (\mu \circ \gamma)u - \sum_{j=1}^{n-r} (\lambda_j \circ \gamma)x^j p_j + \sum_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in P_U} (g_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \circ \gamma) u^\alpha x^\beta p^\gamma q^\delta -$$

(en identifiant les jets en V_r à des séries formelles en u, x, p, q , à coef-

ficients fonctions C^∞ de y). Grâce à notre hypothèse sur $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$, on voit facilement que \hat{F}_U définit (au sens de (4.4.2), avec la convention précédente et en remplaçant le point 0 par le sous-espace V_r) un jet d'ordre infini en $W^+ \cup W^-$, encore noté \hat{F}_U , de fonction C^∞ . En outre, pour tout $f \in C^\infty(E, \mathbb{R})$ vérifiant $j_{W^+ \cup W^-}^\infty f = \hat{F}_U$, le champ $H_{c_0} f$ est tangent à W^+ et à W^- . Un tel f étant fixé, le même argument que dans (iii) prouve que ξ et $[H_c f]_0$ sont C^∞ -équivalents. ■

COROLLAIRE. Soient K une structure de contact sur une variété X de dimension $2n+1$, et S une sous-variété C^∞ de codimension 1 de X , telle que $K|_S$ admette une intégrale singulière V de classe C^∞ et de dimension n . Il existe alors pour tout $a \in V$ un germe $h : [X]_a \rightarrow [J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})]_0$ de transformation de contact $K \rightarrow K_{n,1}^1$ de classe C^∞ tel que $h([S]_0) = [u^{-1}(0)]_0$.

Démonstration. La régularité de S entraîne que V est normalement extrême, et l'on peut appliquer le théorème 2. ■

EXERCICES. 1 a) Sous l'hypothèse de la dernière assertion du théorème 2, montrer que $H_{c_0} F_{S(\infty)}$ est tangent aux sous-variétés $y = \text{constante}$ (remarquer que P ne peut contenir aucun $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ avec $\delta \neq 0$ - ces sous-variétés, au voisinage de $y = 0$, ont une signification géométrique très simple : ce sont les variétés stables (ou instables, selon le signe de $\mu(0)$) des points de V_r pour le flot de $H_{c_0} F_{S(\infty)}$).

b) Donner des formules explicites pour les courbes intégrales de $H_{c_0} F_{S(\infty)}$ dans ce cas (remarquer que l'ordre sur

$\{\mu(0), \lambda_1(0), \dots, \lambda_{n-r}(0), \mu(0) - \lambda_1(0), \dots, \mu(0) - \lambda_{n-r}(0)\}$ impose aux éléments de P des conditions permettant une telle intégration explicite).

2 Généraliser les théorèmes 1 et 2 au cas où les valeurs propres de $N_a \xi$ sont distinctes, mais pas toutes réelles (introduire des coordonnées complexes : cf. Chaperon [1]).

3. Prouver le théorème 1 en général (procéder comme précédemment, mais de manière moins précise au niveau formel : en suivant une démarche proche de (i), obtenir un modèle ξ_0 de ξ possédant la propriété suivante : il est tangent à deux sous-espaces vectoriels W^+ et W^- de $E = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant $W^+ \cap W^- = V_r$ et $W^+ + W^- = E$, et, si $\varepsilon = \mu(0)/|\mu(0)|$, les variétés stables (resp. instables) des points de V_r pour $-\varepsilon\xi_0$ forment un feuilletage de W^+ (resp. W^-) par des sous-espaces affines).

4. Montrer que, sous les hypothèses de la dernière assertion du théorème 2, si ξ , K et V sont analytiques, alors il existe un germe analytique de transformation de contact envoyant ξ sur $[H_{c_0} F_{S(\infty)}]_0$ (procéder par complexification, en prouvant une version holomorphe du théorème : cf. Chaperon [1]).

(8.5) Linéarisation des germes d'actions de groupes élémentaires conservant une structure de contact.

La méthode employée dans (8.3.2) permet, sans coup férir, de donner une version "contact" du théorème démontré dans 6.

Dans ce qui suit, G désigne un groupe élémentaire, K une structure de contact sur une variété X , a un point de X , $\tilde{\rho}^1 : G \rightarrow GL(T_a K)$ un homomorphisme continu et $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, K)$ un germe d'action, de K -partie linéaire $\rho^1 :$
 $(g, v) \rightarrow \tilde{\rho}^1(g)v$. Nous allons commencer par l'avatar suivant de (4.4.2), théorème 2 :

THÉORÈME 1. Si ρ^1 est dans le domaine de Poincaré, alors, pour tout \tilde{h}^∞ vérifiant les hypothèses de (8.2.2), théorème 4 avec $\check{\rho} = \tilde{\rho}_K^\infty$, on définit une action analytique R de G sur E_a de la manière suivante : quel que soit $g \in G$, $\tilde{R}(g) : E_a \rightarrow E_a$ est l'unique application polynomiale telle que $j_0^\infty R(g) = \check{\rho}_* \check{\rho}^1(g)$. Il existe alors un germe $h : [X]_a \rightarrow [E_a]_0$ de transformation de contact $K \rightarrow T_a K$ de classe C^∞ (analytique si ρ et K le sont) tel que $h_* \rho = [R]_{G \times \{0\}}$.

Démonstration. C'est celle de (4.4.2), théorème 2, en remarquant que (4.2.2), théorème 1 fournit ici un germe de transformation de contact. Pour l'analyticité, cf. (4.4.2), exercice 1 . ■

De l'énoncé (plus précis) de (4.4.2), théorème 2 , on tire en particulier le

COROLLAIRE 1. Sous les hypothèses du théorème 1, il existe $s_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que,
pour toute structure de contact K' sur une variété $X' \ni a'$ et tout
 $\rho' \in \text{Act}_a^s(G, K')$ avec $s_0 < s \leq \infty$, la propriété suivante soit vérifiée : s'il
existe un germe $\varphi_1 : [X]_a \longrightarrow [X']_{a'}$, de transformation de contact $X \longrightarrow X'$ tel
que $(\varphi_1^* \rho')_{K'}^{s_0} = \tilde{\rho}_K^{s_0}$, alors il existe un germe $\varphi : [X]_a \longrightarrow [X']_{a'}$, de transfor-
mation de contact $X \longrightarrow X'$ de classe C^s tel que $\varphi^* \rho' = \rho$. ■

Nous dirons que ρ est linéarisable (resp. formellement linéarisable) lorsqu'il sera isomorphe (resp. formellement isomorphe)   $[\rho^1]_{G \times \{0\}}$ au sens de (8.3).

Avec les notations de (8.2.2), proposition 4 , les $c_i \in G_{\mathbb{R}}^1$ associés à ρ^1 dans (4.3.1) sont donnés par

$$(1) \quad \begin{cases} c_i = (\text{Log} |b_i|)_{\mathbb{R}} & \text{pour } 1 \leq i \leq q . \\ n = 2q+1 \text{ et } c_n = (\text{Log} |b_0|)_{\mathbb{R}} . \\ c_i = c_n - c_{i-q} & \text{pour } q < i \leq 2q . \end{cases}$$

COROLLAIRE 2. Si c_1, \dots, c_q, c_n sont linéairement indépendants (ce qui est génériquement le cas pour $\dim X < 2 \dim G_{\mathbb{R}}$), alors ρ^1 est dans le domaine de Poincaré, et l'on peut prendre $s_0 = 1$ dans le corollaire 1 . En particulier, ρ est linéarisable. ■

Le cas où ρ^1 est dans le domaine de Poincaré étant ainsi traité, nous ferons désormais les deux hypothèses suivantes :

- (i) ρ^1 est faiblement hyperbolique, dans le domaine de Siegel.
- (ii) Avec les notations du corollaire (8.1), on a $\tilde{\rho}^1 = \tilde{\sigma}^1$.

THÉOREME 2. Sous les hypothèses précédentes, ρ est linéarisable si et seulement si il est formellement linéarisable.

L'appendice 7 permet de se débarrasser de l'hypothèse de semi-simplicité (ii). En revanche, le lecteur peut faire l'instructif

EXERCICE. Si ρ^1 vérifie (ii) sans être faiblement hyperbolique, le théorème (6.3) est vrai avec un $\rho \in \text{Act}_a^\infty(G, K)$.

REMARQUE. D'après (1), pour $\dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}} > 2$ (et $\dim X > 1$!), ρ^1 ne peut pas être hyperbolique. En revanche (exercice !) l'ensemble des ρ^1 qui ne sont pas faiblement hyperboliques est contenu dans un fermé de mesure nulle. C'est une justification supplémentaire du degré de généralité infligé au lecteur dans le chapitre 3.

Démonstration du théorème 2. Le résultat établi dans 6.- affirme l'existence d'un germe $\Psi : [X]_a \longrightarrow [E_a]_0$ de difféomorphisme C^∞ tel que $\Psi * \rho = [\rho^1]_0$. Il nous suffit donc de construire un germe $\varphi \in \mathcal{F}_0^\infty(E_a)$, invariant par ρ^1 , et tel que $\varphi * (\Psi * [K]_a) = [T_a K]_0$.

Pour cela, remarquons, comme dans (8.3.2), lemme 1, que la méthode utilisée pour construire Ψ permet de supposer que $\Psi * [K]_a$ et $[T_a K]_0$ ont un contact infini le long de la réunion $\hat{\mathcal{V}}$ des v.f.i. de ρ^1 .

Soit $c \in G'_{\mathbb{R}}$ une valeur régulière de la fonction $F : E_a \longrightarrow G'_{\mathbb{R}}$ donnée (avec les notations de (1) et de (8.2.2), proposition 4) par

$$F(v) = \sum_{j=1}^q (c_j \sum_{\ell=1}^{m_j} |x_j^\ell(v)|^2 + c_{j+q} \sum_{\ell=1}^{m_j} |y_j^\ell(v)|^2) + c_{2q+1} w(v)^2.$$

Désignons par $\hat{\mathcal{V}}_c$ la réunion des v.f.i. de ρ^1 qui ne rencontrent pas $Q_c = F^{-1}(c)$, et posons $E_c = E_a \setminus \hat{\mathcal{V}}_c$; si nous fixons une identification de G à $G_0 \oplus H$, où $H = G/G_0$, et un sous-groupe libre discret $\Gamma \subset 2H$ de G , tel que G/Γ soit compact, rappelons (cf. (6.1.2)) que l'espace \tilde{Q}_c des orbites de $\rho^1|_{\Gamma \times E_c}$ est une variété analytique difféomorphe à $Q_c \times (G_{\mathbb{R}}/\Gamma)$, et que la sur-

jection canonique $\pi : E_c \rightarrow \tilde{Q}_c$ est un revêtement analytique.

Soit K_2 le germe en $\hat{\mathcal{V}}$ de structure de contact ρ^1 -invariante défini par $[K_2]_0 = \Psi * [K]_a$, et soit K_1 le germe de $T_a K$ en $\hat{\mathcal{V}}$. D'après notre hypothèse sur Ψ , K_1 et K_2 ont un contact infini en $\hat{\mathcal{V}}$. Par conséquent, les germes $\pi_* K_1$ et $\pi_* K_2$ en $N = \pi(\hat{\mathcal{V}} \setminus \hat{\mathcal{V}}_c)$ de structures de contact sur \tilde{Q}_c obtenus par passage au quotient ont un contact infini en N (lequel est compact par (5.2), proposition 4) ; si R désigne l'action du groupe compact $K = G/\Gamma$ sur \tilde{Q}_c induite par ρ^1 , le germe $\bar{\rho}$ de \bar{R} en $K \times N$ laisse $\pi_* K_1$ et $\pi_* K_2$ invariants, et l'on déduit donc de (7.3), théorème 3, qu'il existe un germe $\bar{\varphi} : [\tilde{Q}_c]_N \hookrightarrow$ de difféomorphisme C^∞ laissant $\bar{\rho}$ invariant, tel que $j_N^\infty \bar{\varphi} = j_N^\infty \text{id}$ et $\bar{\varphi} * (\pi_* K_1) = \pi_* K_2$.

En relevant $\bar{\varphi}$ par π , on obtient un germe $\Phi : [E_c]_{\hat{\mathcal{V}}} \rightarrow E_c$ d'application C^∞ laissant $[\rho^1]_{G \times E_c}|_{G \times \hat{\mathcal{V}}}$ invariant, tel que $K_2|_{E_c} = \Phi^* K_1$, et vérifiant $j_{\hat{\mathcal{V}}}^\infty (\Phi - \text{id}_{E_c}) = 0$. Je laisse le lecteur s'assurer (en utilisant la même méthode que dans (6.2.2), le théorème (6.2.1) étant remplacé par sa version "germique" figurant dans l'appendice 6, (A6.4)) que Φ se prolonge en un germe $\Phi' : [E_a]_{\hat{\mathcal{V}}} \hookrightarrow$ de difféomorphisme C^∞ vérifiant $j_{\hat{\mathcal{V}}}^\infty (\Phi' - \text{id}_{E_a}) = 0$. Le germe $\varphi = [\Phi']_0 \in \mathcal{H}_0^\infty(E_a)$ est bien tel que $\varphi * (\Psi_* [K]_a) = [T_a K]_0$ et $\varphi * [\rho^1]_{G \times \{0\}} = [\rho^1]_{G \times \{0\}}$. ■

EXERCICE. Utiliser la même méthode pour prouver l'analogue du théorème 2 lorsque la conservation d'une structure de contact est remplacée par celle d'une forme - volume.

APPENDICE 0. - ISOTOPIES, ISOTOPIES INFINITESIMALES,
DÉRIVÉE DE LIE ET MÉTHODE DU CHEMIN

Nous présentons ici quelques applications d'une idée très simple qui a littéralement envahi la géométrie différentielle. D'autres résultats utilisant cette méthode figurent dans le chapitre 4, et en particulier dans (7.3).

(A0-0) Conventions.

Sauf mention du contraire, les variétés considérées sont de dimension finie et de classe C^∞ , et les applications, de classe C^∞ (à peu près tout ce qui suit subsiste dans les catégories analytiques réelle et complexe, et - moyennant les pertes de différentiabilité inévitables - dans les catégories C^k). Etant donné un espace d'applications \mathfrak{F} , un chemin dans \mathfrak{F} est une application $t \mapsto f_t$, notée (f_t) , de $I = [0,1]$ dans \mathfrak{F} , telle que $(t,x) \mapsto f_t(x)$ soit C^∞ . Lorsque \mathfrak{F} est un groupe, d'élément neutre e , un chemin (f_t) dans \mathfrak{F} est dit à support compact lorsque $f_t(x) = e(x)$ en dehors d'un compact.

Etant donné un point a d'une variété X et un espace \mathfrak{F} de germes en a d'applications de X dans une variété Y , un chemin (f_t) dans \mathfrak{F} est un germe $f : [I \times X]_{I \times \{a\}} \rightarrow Y$ d'application tel que, pour chaque $t \in I$, l'application partielle $f_t : [X]_a \rightarrow Y$ soit dans \mathfrak{F} - la notation (f_t) est donc trompeuse (mais commode), le germe f étant un peu plus que la collection des f_t .

Etant donné un chemin (f_t) dans l'espace des germes $[X]_a \rightarrow Y$, nous noterons $(\frac{d}{dt} f_t)$ le chemin dans l'espace des germes $[X]_a \rightarrow TY$ défini comme suit : si $F : I \times X \rightarrow Y$ a pour germe (f_t) , alors $(\frac{d}{dt} f_t)$ est le germe de $(t,x) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} F(t,x)$. Si en outre (g_t) est un chemin dans l'espace des germes

$[Z]_b \longrightarrow [X]_a$, germe en $I \times \{b\}$ d'une application $G : I \times Z \longrightarrow X$, nous noterons $(f_t \circ g_t)$ le chemin dans l'espace des germes $[Z]_b \longrightarrow Y$ qui est le germe en $I \times \{b\}$ de $(t, x) \longmapsto F(t, G(t, x))$.

(A0-1) Isotopies et isotopies infinitésimales.

Soient X une variété, \underline{D} le groupe des difféomorphismes de X , et \underline{d} l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur X . Une isotopie de X est un chemin (φ_t) dans \underline{D} tel que

$$(1) \quad \varphi_0 = \text{id}_X.$$

Une isotopie infinitésimale de X est un chemin dans \underline{d} . A toute isotopie (φ_t) de X , on associe son générateur infinitésimal, qui est l'isotopie infinitésimale $(\dot{\varphi}_t)$ de X définie par

$$(2) \quad \forall t \in I, \quad \frac{d}{dt} \varphi_t = \dot{\varphi}_t \circ \varphi_t.$$

L'isotopie (φ_t) est alors l'unique solution du problème de Cauchy (1)-(2) - une isotopie infinitésimale est donc le générateur infinitésimal d'au plus une isotopie. Le théorème 3 de (3 1.3) peut être reformulé comme suit :

THÉORÈME. Toute isotopie infinitésimale de X , à support compact, est le générateur infinitésimal d'une (unique !) isotopie de X , à support compact. ■

(A0-2) Dérivée de Lie.

Etant donné $\xi \in \underline{d}$, à support compact, soit $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre qu'il engendre. Pour toute k -forme différentielle ω sur X , la dérivée de Lie de ω par rapport à ξ est la k -forme différentielle

$$L_\xi \omega = \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega) |_{t=0}.$$

Les propriétés suivantes sont évidentes :

(i) (Localité de la dérivée de Lie) Pour chaque $x \in X$, $(L_\xi \omega)(x)$ ne dépend que des germes (et même des jets d'ordre 1) en x de ξ et de ω .

(ii) Si ω est une fonction $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, alors $(L_{\xi}\omega)(x) = df(x) \cdot \xi(x)$ pour tout $x \in X$.

(iii) On a $L_{\xi}(d\omega) = d(L_{\xi}\omega)$

(iv) Quelles que soient les formes différentielles α et β sur X ,

$$L_{\xi}(\alpha \wedge \beta) = (L_{\xi}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_{\xi}\beta.$$

Ces quatre propriétés constituent en fait une définition axiomatique de la dérivée de Lie par rapport à ξ , valide pour n'importe quel $\xi \in \underline{d}$, engendrant ou non un groupe à un paramètre. On en déduit très facilement la FORMULE D'HOMOTOPIE DES CARTAN. - Pour tout $\xi \in \underline{d}$ et toute forme différentielle ω sur X , on a

$$L_{\xi}\omega = i_{\xi}d\omega + d(i_{\xi}\omega),$$

où i_{ξ} désigne le produit intérieur par ξ , défini de la manière suivante : pour toute k -forme différentielle α sur X , $i_{\xi}\alpha$ est si $k > 0$ la $(k-1)$ -forme différentielle sur X donnée par

$$(i_{\xi}\alpha)(x)(h_1, \dots, h_{k-1}) = \alpha(x)(\xi(x), h_1, \dots, h_{k-1}), \quad x \in X, h_1, \dots, h_{k-1} \in T_x X, \text{ et } i_{\xi}\alpha = 0 \text{ pour } k = 0. \blacksquare$$

PROPOSITION. - Soit (φ_t) une isotopie de X . Pour toute forme différentielle ω sur X , et tout $t \in I$, on a $\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega = \varphi_t^* L_{\dot{\varphi}_t} \omega$. ■

COROLLAIRE. - Soient (φ_t) une isotopie de X , et (ω_t) un chemin dans l'espace des formes différentielles sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $\forall t \in I, \quad \varphi_t^* \omega_t = \omega_o.$
- (ii) $\forall t \in I, \quad L_{\dot{\varphi}_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t = 0.$

Démonstration. D'après la proposition, $(\varphi_t^* \omega_t)$ est l'unique solution (α_t) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad \frac{d}{dt} \alpha_t = \varphi_t^* (L_{\dot{\varphi}_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t) \\ \alpha_0 = \omega_0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

(A0-3) Application : deux théorèmes de Moser.

Une forme symplectique sur une variété X est une 2-forme fermée ω telle que la forme bilinéaire alternée $\omega(x)$ soit non-dégénérée pour tout $x \in X$ (en particulier, X doit être de dimension paire).

THÉORÈME 1.- Soit (ω_t) un chemin dans l'espace des formes symplectiques sur X tel qu'il existe un chemin (α_t) à support compact dans l'espace des 1-formes sur X vérifiant $(d\alpha_t) = (\frac{d}{dt} \omega_t)$. Il existe alors une isotopie à support compact (φ_t) de X telle que $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ pour tout $t \in I$.

Démonstration. D'après le théorème (A0-1) et le corollaire (A0-2), il s'agit de trouver une isotopie infinitésimale (ξ_t) de X , à support compact, telle que

$$(3) \quad \forall t \in I, \quad L_{\xi_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t = 0.$$

Par hypothèse, il existe un chemin (α_t) à support compact dans l'espace des 1-formes sur X tel que

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt} \omega_t + d\alpha_t = 0.$$

D'après la formule d'homotopie, (3) s'écrit donc (les ω_t étant fermées)

$$(3\text{bis}) \quad \forall t \in I, \quad d(i_{\xi_t} \omega_t - \alpha_t) = 0.$$

Comme $\omega_t(x)$ est non dégénérée pour tout $(t, x) \in I \times X$, la formule

$$\forall t \in I, \quad i_{\xi_t} \omega_t = \alpha_t$$

définit une isotopie infinitésimale (ξ_t) de X , à support compact, qui vérifie (3bis), donc (3). ■

COROLLAIRE. - Toute forme symplectique ω sur une variété compacte X possède un voisinage \mathcal{U} (pour la topologie C^0) qui a la propriété suivante :
quelle que soit la forme fermée $\omega' \in \mathcal{U}$, si $\omega - \omega'$ est exacte, alors il existe une isotopie (φ_t) de X telle que $\varphi_1^* \omega' = \omega$.

Démonstration. Il suffit de prendre pour \mathcal{U} l'ensemble des 2-formes α sur X telles que $((1-t)\omega + t\alpha)(x)$ soit non-dégénérée pour tout $(t, x) \in I \times X$, et d'appliquer le théorème à $(\omega_t) = ((1-t)\omega + t\omega')$. ■

THEOREME 2.- Soient X une variété compacte connexe, et ω, ω' deux formes-volume sur X . Il existe un unique réel $\lambda \neq 0$ et une isotopie (φ_t) de X tels que $\varphi_1^* \omega' = \lambda \omega$.

Démonstration. Puisque $\int_X \varphi^* \omega' = \int_X \omega'$ pour tout $\varphi \in \underline{D}$ préservant l'orientation, on a forcément

$$\lambda = \int_X \omega' / \int_X \omega.$$

Le chemin (ω_t) défini par

$$\omega_t = \lambda(1-t)\omega + t\omega'$$

est à valeurs dans l'espace des formes-volume sur X ; en effet, il existe une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, ne s'annulant pas, telle que $\omega' = f\omega$, et f est évidemment partout du signe de λ . Par ailleurs, X étant connexe, $\lambda\omega - \omega'$ est une forme exacte. Le même argument que dans la preuve du théorème 1 permet donc de construire une isotopie (φ_t) de X telle que $\varphi_t^* \omega_t = \lambda\omega$ pour tout $t \in I$. ■

Deux formes-volume sur une variété compacte sont donc isotopes si et seulement si elles sont cohomologues.

(A0-4) Aspect local : 1 - le théorème de Darboux.

Soit a un point d'une variété X . Notons \mathcal{A} le groupe des germes en a de difféomorphismes locaux de X fixant a , δ l'algèbre de Lie

des germes en a de champs de vecteurs sur X , et δ_0 la sous-algèbre de δ formée des ξ nuls en a . Une isotopie de $[X]_a$ est un chemin (φ_t) dans \mathcal{D} tel que $\varphi_0 = [\text{id}]_a$; de même, une isotopie infinitésimale de $[X]_a$ est un chemin dans δ_0 . Je laisse le lecteur prouver, grâce aux résultats de (3.1.3), l'analogie suivant du théorème A0-1 :

PROPOSITION. - A toute isotopie (φ_t) de $[X]_a$ est associée l'isotopie infinitésimale $(\dot{\varphi}_t) = ((\frac{d}{dt} \varphi_t) \circ \varphi_t^{-1})$, que l'on appelle son générateur infinitésimal. Réciproquement, toute isotopie infinitésimale de $[X]_a$ est le générateur infinitésimal d'une unique isotopie de $[X]_a$. ■

THÉORÈME (Darboux) Soient ω et ω' deux germes en a de formes symplectiques sur (un voisinage de a dans) X , tels que $\omega(a) = \omega'(a)$. Il existe alors $\varphi \in \mathcal{D}$, tangent à l'identité, tel que $\varphi^* \omega' = \omega$.

Démonstration. (Weinstein). C'est celle du Corollaire A0-4 : on définit un chemin (ω_t) dans l'espace des germes en a de formes symplectiques sur (un voisinage de a dans) X par

$$(\omega_t) = ((1-t)\omega + t\omega').$$

D'après le lemme de Poincaré (cf.(7.3), lemme 3), il existe un germe β en a de 1-forme sur X tel que

$$\omega - \omega' = d\beta \quad \text{et} \quad j_a^1 \beta = 0.$$

Soit (ξ_t) l'isotopie infinitésimale de $[X]_a$ définie par

$$(i_{\xi_t} \omega_t - \beta) = (0)$$

(je laisse le lecteur, s'inspirant de A0-0, donner un sens à cette notation).

D'après la proposition, (ξ_t) est le générateur infinitésimal d'une isotopie (φ_t) de $[X]_a$, et l'analogie local du corollaire A0-2 montre que l'on a $\varphi_t^* \omega_t = \omega$ pour tout t , et donc $\varphi_1^* \omega' = \omega$. En outre, pour tout $t \in I$, φ_t est tangent à l'identité, car $j_a^1 \xi_t = 0$. ■

COROLLAIRE 1. - Pour tout germe ω en a de forme symplectique sur X , il existe un germe $\varphi : [X]_a \rightarrow [T_a X]_0$ de difféomorphisme, tangent à l'identité, tel que $\varphi_* \omega$ soit le germe en a de la forme symplectique Ω sur $T_a X$ définie par $\Omega(v) = \omega(a)$ pour tout $v \in T_a X$.

Preuve. Il existe un germe $h : [X]_a \rightarrow [T_a X]_0$ de difféomorphisme tangent à l'identité ; il suffit donc d'appliquer le théorème à $\omega' = h^*[\Omega]_0$. ■

COROLLAIRE 2. - Sous les hypothèses du corollaire 1, il existe un germe $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ en a de système de coordonnées locales sur X nulles en a tel que $\omega = \sum dy_i \wedge dx_i$.

Preuve. Il suffit de prendre $x_i = X_i \circ \varphi$ et $y_i = Y_i \circ \varphi$, où φ vérifie les conditions du corollaire 1, et où (X_i, Y_i) est un système de coordonnées linéaires sur $T_a X$ tel que $\omega(a) = \sum Y_i \wedge X_i$. ■

A germe de difféomorphisme près, il n'y a donc en chaque dimension paire qu'un seul germe de forme symplectique.

(A0-5) Aspect local : 2.-le théorème des jets suffisants.

Les notations X , a , \mathcal{E} , \mathcal{M} et δ_0 signifiant la même chose que dans (A0-4), appelons \mathcal{E} l'algèbre réelle des germes $[X]_a \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctions C^∞ , et \mathcal{M} son idéal maximal (formé des $f \in \mathcal{E}$ nuls en a). D'après la formule de Taylor, \mathcal{M}^{k+1} est donc pour chaque $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble des f tels que $j_a^k f = 0$ (en d'autres termes, la fibre en a de la projection-source $J^k(X, \mathbb{R}) \rightarrow X$ s'identifie à $\mathcal{E}/\mathcal{M}^{k+1}$). L'idéal jacobien de $f \in \mathcal{E}$ est l'idéal $J(f) = \{L_{\xi} f : \xi \in \delta\}$ de \mathcal{E} .

THÉORÈME. - Si $f \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ satisfont

$$\mathcal{M}^k \subset \mathcal{M} J(f),$$

alors, pour tout $g \in \mathcal{E}$ vérifiant

$$j_a^k g = j_a^k f ,$$

il existe $\varphi \in \mathcal{D}$, tangent à l'identité, tel que $g \circ \varphi = f$.

Démonstration. Notre hypothèse sur g signifie que l'on a

$$(4) \quad h = f - g \in \mathcal{M}^{k+1} .$$

Soit (f_t) le chemin $(f - th)$ de f à g dans \mathcal{E} : Nous allons construire une isotopie (φ_t) de $[X]_a$ telle que $(f_t \circ \varphi_t)$ soit le chemin constant (f) dans \mathcal{E} . Il revient au même (d'après l'analogie local de corollaire A0-2) de dire que le générateur infinitésimal (ξ_t) de (φ_t) satisfait

$$(5) \quad (L_{\xi_t} f_t) = (h) .$$

Soit (x_1, \dots, x_n) un germe en a de système de coordonnées locales nulles en a sur X (c'est-à-dire une base du \mathcal{E} -module libre \mathcal{M}), et soit (e_1, \dots, e_n) la base du \mathcal{E} -module libre δ définie par

$$L_{e_j} x_i = [\delta_i^j]_a \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n ,$$

c'est-à-dire

$$L_{e_i} = \partial / \partial x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n .$$

Soit \mathcal{C} l'algèbre réelle des chemins dans \mathcal{E} , et soit \mathfrak{J} l'idéal de \mathcal{C} formé des chemins dans \mathcal{M} . D'après (4), chaque $\partial h / \partial x_j$ appartient à \mathcal{M}^k , et s'écrit donc (en raison de notre hypothèse sur f)

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} , \quad \text{avec } \mu_{i,j} \in \mathcal{M} \text{ pour } 1 \leq i \leq n .$$

Il en résulte que

$$(6) \quad \begin{pmatrix} (\partial f_t / \partial x_1) \\ \vdots \\ (\partial f_t / \partial x_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} (\partial f / \partial x_1) \\ \vdots \\ (\partial f / \partial x_n) \end{pmatrix}$$

où A est une matrice inversible à coefficients dans \mathcal{C} .

D'après la formule de Taylor, les chemins (c) avec $c \in \mathcal{M}^k$ engendrent le \mathcal{C} -module \mathfrak{J}^k . Par conséquent, en raison de notre hypothèse sur f , tout élément de \mathfrak{J}^{k+1} est de la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_{t,i}) (\partial f / \partial x_i) \text{ avec } (\lambda_{t,i}) \in \mathfrak{J}^2, 1 \leq i \leq n,$$

ou encore, d'après (6), de la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\mu_{t,i}) (\partial f_t / \partial x_i) \text{ avec } (\mu_{t,i}) \in \mathfrak{J}^2, 1 \leq i \leq n.$$

En appliquant ce résultat au chemin constant $(h) \in \mathfrak{J}^{k+1}$, on voit que (5) admet une solution (ξ_t) , vérifiant $j_a^1 \xi_t = 0$ pour tout $t \in I$. Par conséquent, l'isotopie (φ_t) telle que $(\dot{\varphi}_t) = (\xi_t)$, qui satisfait $(f_t \circ \varphi_t) = (f)$ par construction, est en outre telle que $j_a^1 \varphi_t = j_a^1 \text{id}_X$ pour tout $t \in I$. ■

COROLLAIRE. - (i) Si f et $k \in \mathbb{N}^*$ vérifient l'hypothèse du théorème et si en outre X est un espace affine, il existe un germe $\varphi \in \mathcal{D}$, tangent à l'identité, tel que $f \circ \varphi$ soit le germe en a du polynôme de Taylor d'ordre k de f en a .

(ii) Si f et $k \in \mathbb{N}^*$ vérifient l'hypothèse du théorème, il existe un germe $\varphi : [T_a X]_0 \longrightarrow [X]_a$ de difféomorphisme tangent à l'identité tel que $f \circ \varphi$ soit un germe d'application polynomiale de degré k .

Preuve. (i) est évident, et (ii) s'en déduit du fait qu'il existe un germe $h : [T_a X]_0 \rightarrow [X]_0$ de difféomorphisme tangent à l'identité. ■

Je laisse le lecteur vérifier que le lemme de Morse est un cas particulier de (ii). Le lecteur pourra aussi essayer de remplacer l'hypothèse du théorème par

$$\mathcal{M}^{k+1} \subset \mathcal{M}^2 J(f),$$

et en prouver une version à paramètre.

On dit que $f \in \mathcal{E}$ est de codimension finie lorsque son nombre de Milnor

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}/J(f)$$

est fini. Il revient au même d'affirmer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'hypothèse du théorème. Par conséquent, l'étude des germes $f \in \mathcal{E}$ qui sont de codimension finie est en fait un problème de géométrie algébrique.

Le corollaire précédent est un outil de choix pour le physicien ou l'ingénieur, puisqu'il donne un critère précis de "bonne approximation" d'un germe de fonction par son "développement limité" à l'ordre k , critère tout à fait utilisable car il porte en fait sur le dit développement limité, et non sur la fonction elle-même (puisque le "développement limité" d'un élément f de \mathcal{E} en a à l'ordre k s'identifie à la projection de f dans $\mathcal{E}/\mathcal{M}^{k+1}$).

(A0-6) Aspect formel ; le théorème de Darboux formel.

Si l'on essaye de prouver (par exemple) le théorème de Darboux en différentiabilité finie, la méthode précédente impose une petite perte de différentiabilité. Nous allons voir que ce phénomène disparaît au niveau formel, en raison d'une remarque triviale mais essentielle (les notations sont celles de (A0-4)-(A0-5)) :

PROPOSITION.- Etant donnés des entiers k, ℓ, m avec $1 \leq k \leq \ell < m$ et deux germes $f \in \mathcal{M}^k$ et $g \in \mathcal{M}^\ell$, le jet $j_a^m(fg)$ est déterminé par $j_a^{m-\ell} f$ et $j_a^{m-k} g$.

Démonstration. Comme $j_a^n h$ s'identifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathcal{E}$, à la projection de h sur $\mathcal{E}/\mathcal{M}^{n+1}$, il s'agit de prouver que si l'on ajoute à f un élément de $\mathcal{M}^{m-\ell+1}$ et à g un élément de \mathcal{M}^{m-k+1} , alors on ajoute à fg un élément de \mathcal{M}^{m+1} , ce qui est évident. ■

COROLLAIRE. - Pour tout $\xi \in \delta_0$ et tout germe ω en a de forme différentielle sur X , le jet $j_a^{k+1}(i_\xi \omega)$, $k \in \mathbb{N}$, est déterminé par $\xi^{k+1} = j_a^{k+1} \xi$ et $\omega^k = j_a^k \omega$, et sera noté $i_{\xi^{k+1}} \omega^k$. ■

Pour $1 \leq k \leq \infty$ et $\ell \in \mathbb{N}$, soient \mathcal{J}^k , \mathcal{J}^k et \mathcal{J}_0^k les espaces de jets d'ordre k en a d'éléments de \mathcal{J} , \mathcal{J} et \mathcal{J}_0 respectivement, soit $\Omega^{\ell,k}$ l'espace des jets d'ordre k en a de ℓ -formes différentielles sur X , et soit $\Omega_0^{\ell,k}$ le sous-espace de $\Omega^{\ell,k}$ formé des jets de formes nulles en a . Etant donnés $h \in \mathcal{J}^{k+1}$ et $\omega \in \Omega^{\ell,k}$, on définit de manière évidente

$$h^* \omega \in \Omega^{\ell,k}, \quad L_{\xi} \omega \in \Omega^{\ell,k} \quad \text{et} \quad d\omega \in \Omega^{\ell+1,k-1},$$

et on a la formule d'homotopie

$$L_{\xi} \omega = i_{\xi} d\omega + d(i_{\xi} \omega).$$

Appelons isotopie (φ_t) de X_a^k tout chemin de classe C^∞

$I \ni t \mapsto \varphi_t \in \mathcal{J}_0^k$ (pour $k = \infty$, cela signifie que chacun des chemins obtenus par projection de (φ_t) dans les espaces de jets d'ordre fini en a est de classe C^∞). Appelons de même isotopie infinitésimale (ξ_t) de X_0^k tout chemin C^∞ $I \ni t \mapsto \xi_t \in \mathcal{J}_0^k$ (avec la même convention).

Toute isotopie infinitésimale (ξ_t) de X_a^{k+1} est évidemment le générateur infinitésimal d'une unique isotopie (φ_t) de X_0^{k+1} (i.e. $\frac{d}{dt} \varphi_t = \xi_t \circ \varphi_t$ pour tout $t \in I$), et on a alors

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \forall \omega \in \Omega^{\ell,k}, \quad \frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega = \varphi_t^* L_{\xi_t} \omega.$$

Pour chaque $\omega \in \Omega^{\ell,k}$, on note $\omega(a)$ la valeur en a des germes de formes différentielles α telles que $j_a^k \alpha = \omega$, et ω_j , $1 \leq j \leq \ell$, la projection de ω sur $\Omega^{\ell,j}$.

THÉORÈME.- Soit $\omega \in \Omega^{2,k}$, $1 \leq k \leq \infty$, tel que $\omega(a)$ soit non-dégénérée et que $d\omega = 0$. Pour tout $\omega' \in \Omega^{2,k}$ vérifiant $d\omega' = 0$ et $\omega - \omega' \in \Omega_0^{2,k}$, il existe $\varphi \in \mathcal{J}^{k+1}$, "tangent à l'identité", tel que $\varphi^* \omega' = \omega$.

Démonstration. C'est celle du théorème de Darboux : je laisse le lecteur, par un calcul formel facile, prouver qu'il existe $\beta \in \check{\Omega}_0^{1,k+1}$ tel que $d\beta = \omega - \omega'$ et $\beta_1 = 0$. Si (ω_t) est le chemin $((1-t)\omega + t\omega')$ dans $\Omega^{2,k}$, l'argument habituel montre que l'isotopie (φ_t) de \check{X}_a^{k+1} dont le générateur infinitésimal (ξ_t) est donné par

$$\forall t \in I, i_{\xi_t} \omega_t = \beta$$

satisfait $\varphi_t^* \omega_t = \omega$ pour tout $t \in I$, et que chacun des φ_t est "tangent à l'identité". ■

Le corollaire qui suit repose sur une conséquence évidente de la proposition : pour tout $\varphi \in \check{\mathcal{B}}^k$ et tout $\omega \in \check{\Omega}_0^{\ell,k}$, la notation $\varphi^* \omega$ définit sans ambiguïté un élément de $\check{\Omega}_0^{\ell,k}$, et non seulement de $\check{\Omega}_0^{\ell,k-1}$.

COROLLAIRE. - Etant donné un groupe de Lie G et $\rho \in \check{\text{Act}}_a^{k+1}(G, X)$, supposons que ω et ω' vérifient les hypothèses du théorème, et qu'en outre

$$\forall g \in G, \rho(g)^* \omega - \omega = \rho(g)^* \omega' - \omega' = 0.$$

S'il existe $\beta \in \check{\Omega}_0^{1,k+1}$ tel que $d\beta = \omega - \omega'$, $\beta_1 = 0$ et $\rho(g)^* \beta = \beta$ pour tout g (ce qui est en particulier le cas si G est compact), alors il existe $\varphi \in \check{\mathcal{B}}^{k+1}$, "tangent à l'identité", tel que $\varphi^* \omega' = \omega$ et $\varphi^* \rho = \rho$.

Preuve. Sous ces hypothèses, l'isotopie infinitésimale (ξ_t) construite dans la démonstration du théorème est telle que $\rho(g)^* \xi_t = \xi_t$ pour tout t ; l'isotopie (φ_t) qu'elle engendre vérifie donc $\varphi_t^* \rho = \rho$ pour tout t . Si G est compact, et si $\alpha \in \check{\Omega}_0^{1,k+1}$ est telle que $\alpha_1 = 0$ et $d\alpha = \omega - \omega'$, alors la formule

$$\beta = \int_G \rho(g)^* \alpha \, d\mu(g),$$

où μ désigne la probabilité de Haar sur G , définit un élément β de $\check{\Omega}_0^{1,k+1}$ vérifiant l'hypothèse du corollaire. ■

Référence : J. Moser. "On the volume elements on a manifold", Trans. A.M.S.

120 (1965), 286-294.

APPENDICE 1 - DÉRIVÉES SUCCESSIVES D'UNE APPLICATION COMPOSÉE

Soient E, F et G trois espaces de Banach, j un entier ≥ 1 , B un élément de $L_S^j(F, G)$, i_1, \dots, i_j des entiers ≥ 1 de somme k, et, pour chaque $\ell \in \{1, \dots, j\}$, A_ℓ un élément de $L_S^{i_\ell}(E, F)$. Nous désignerons par $B \cdot \bigodot_{\ell=1}^j A_\ell$ l'élément de $L_S^k(E, G)$ défini par

$$\begin{aligned} (B \cdot \bigodot_{\ell=1}^j A_\ell)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{i_1! \dots i_j!} \sum_{\sigma \in S_k} B(A_1(v_{\sigma(1)}), \dots, v_{\sigma(i_1)}) \\ &\quad \dots, A_j(v_{\sigma(k-i_j+1)}, \dots, v_{\sigma(k)})) , \end{aligned}$$

où S_k désigne le groupe des permutations de $\{1, \dots, k\}$.

La plupart des démonstrations laissées au lecteur dans la section sur les fibrés de jets reposent sur le résultat suivant, qui se prouve facilement par récurrence :

THÉORÈME. Soient k un entier > 0 , et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications de classe C^k . Pour tout $x \in E$, on a

$$D^k(g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^k D^j g(f(x)) \cdot \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_j\} \subset \mathbb{N}^* \\ \sum_{1 \leq \ell \leq j} i_\ell = k}} \bigodot_{\ell=1}^j D^{i_\ell} f(x) ,$$

où l'on a écrit $\sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_j\} \subset \mathbb{N}^* \\ \sum i_\ell = k}} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_j) \in (\mathbb{N}^*)^j \\ \sum i_\ell = k}}$ au lieu de $\frac{1}{j!} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_j) \in (\mathbb{N}^*)^j \\ \sum i_\ell = k}}$.

(c'est la formule de Faa-di Bruno)

APPENDICE 2 - DÉRIVÉE k-ième D'UNE APPLICATION

ENTRE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Soient X et Y deux variétés riemanniennes. Pour tout $f \in C^r(X, Y)$ ($r \geq 1$) et tout $k \in \{1, \dots, r\}$, la dérivée k-ième de f en $x \in X$ est par définition

$$D^k f(x) = D^k f_x(0) \in L_S^k(T_x X, T_{f(x)} Y) \approx S_k(T_x^* X) \otimes T_{f(x)} Y$$

où $f_x : T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y$ est définie dans un voisinage de 0 par

$$f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x, \quad \exp_y \text{ désignant l'exponentielle en } y.$$

(A2.1) L'application $D^k f$ est une section de classe C^{r-k} du fibré vectoriel

$$S_k(T^* X) \otimes_X f^* T Y,$$

appelée dérivée k-ième de f . ■

(A2.2) Soient X , Y et Z trois variétés riemanniennes et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux C^r applications ($r \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $x \in X$, la dérivée r -ième $D^r(g \circ f)(x)$ est donnée par la formule de Faa-di Bruno (appendice 1). ■

(A2.3) Avec les notations précédentes, l'application

$$j_x^k f \longmapsto (D^j f(x))_{1 \leq j \leq k}$$

définit pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$ un isomorphisme de fibrés de base $X \times Y$ entre $J^k(X, Y)$ et

$$\bigoplus_{j=1}^k \mathcal{L}_S^j(TX, TY) \text{ . } \blacksquare$$

Cette notion de dérivée k-ième nous sera utile dans les appendices 4 et 6.

Je laisse au lecteur le soin de formuler l'analogue de (A2.3) pour $J^k(p)$ lorsque $p : E \longrightarrow X$ est une C^r -fibration localement triviale.

APPENDICE 3 - COMPLÉMENTS SUR LA TRANSVERSALITÉ.

Tout ce qui est exprimé ici dans le cadre des variétés à bord pourrait l'être dans celui des variétés "à coins", et très probablement, dans une large catégorie d'espaces stratifiés.

(A.3.1) Variétés à bord.

Soient B et B' deux espaces de Banach et $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[\subset \mathbb{R}$. Si U est un ouvert de $B \times \mathbb{R}_+$, on dit que $f : U \rightarrow B' \times \mathbb{R}_+$ est un C^r -morphisme ($1 \leq r \leq \infty$) lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $f^{-1}(B' \times \{0\}) = U \cap (B \times \{0\})$ ou $f^{-1}(B' \times \{0\}) = \emptyset$.
- (ii) Il existe des applications continues $D^k f : U \rightarrow L_S^k(B \times \mathbb{R}, B' \times \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq r$, avec $D^0 f = f$, telles que, pour tout $x \in U$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k < r$, on ait

$$0 = \lim_{\substack{y \in U \\ y \rightarrow x}} (D^k f(y) - D^k f(x) - D^{k+1} f(x) \cdot (y-x)) / |y-x| ,$$

où l'on a identifié $D^{k+1} f(x)$ à l'élément

$$h \mapsto \left((v_1, \dots, v_k) \mapsto D^{k+1} f(x) (h, v_1, \dots, v_k) \right) \text{ de } L(B \times \mathbb{R}, L_S^k(B \times \mathbb{R}, B' \times \mathbb{R})) .$$

Un atlas de C^r -variété à bord sur un ensemble X est un ensemble Φ de cartes

$\varphi : U_\varphi \rightarrow B_\varphi \times \mathbb{R}_+$, où B_φ est un espace de Banach et φ une bijection de U_φ sur un ouvert $\varphi(U_\varphi)$ de $B_\varphi \times \mathbb{R}_+$, possédant les deux propriétés suivantes :

- (a) $(U_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ est un recouvrement de X .
- (b) Quels que soient φ et φ' dans Φ , $\varphi(U_\varphi \cap U_{\varphi'})$ est ouvert dans $B_\varphi \times \mathbb{R}_+$ et $\varphi' \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U_\varphi \cap U_{\varphi'})}$ est un C^r -morphisme. On dit que $\varphi \in \Phi$ est une carte en $x \in X$ lorsque $x \in U_\varphi$.

Deux tels atlas Φ et Φ' sur X sont dits équivalents lorsque $\Phi \cup \Phi'$ en est un. On appelle C^r -variété à bord un ensemble X muni d'une classe d'équivalence \mathcal{J} d'atlas de C^r -variété à bord. La réunion des $\varphi^{-1}(\varphi(U_\varphi) \cap (B_\varphi \times \{0\}))$ lorsque φ varie dans un atlas $\Phi \in \mathcal{J}$ ne dépend pas du choix de Φ : c'est le bord ∂X de X . On appelle carte de X tout $\varphi \in \Phi$ avec $\Phi \in \mathcal{J}$, et X est munie par la topologie engendrée par les ouverts U_φ avec $\varphi \in \Phi$ et $\Phi \in \mathcal{J}$.

Rappelons qu'un sous-espace vectoriel S d'un espace de Banach B est facteur direct lorsqu'il admet un supplémentaire S' tel que les projections $B \rightarrow S$ et $B \rightarrow S'$ associées à cette décomposition soient continues. D'après un théorème de Banach, il faut et il suffit pour cela que S soit fermé et admette un supplémentaire fermé. Une C^r -sous-variété d'une C^r -variété à bord Y est une partie Z de Y possédant les deux propriétés suivantes :

- 1) Pour tout $y \in Z \setminus \partial Y$, il existe une carte $\varphi : U_\varphi \rightarrow B_\varphi \times \mathbb{R}_+$ de Y en y et un sous-espace S facteur direct dans $B_\varphi \times \mathbb{R}$ tels que $\varphi(U_\varphi \cap Z) = \varphi(U_\varphi) \cap S$
- 2) Pour tout $y \in Z \cap \partial Y$, il existe une carte $\varphi : U_\varphi \rightarrow B_\varphi \times \mathbb{R}_+$ de Y en y et un sous-espace S facteur direct dans B_φ tels que $\varphi(U_\varphi \cap Z) = \varphi(U_\varphi) \cap (S \times \mathbb{R}_+)$.

Les restrictions à Z des cartes du type précédent forment un atlas de C^r -variété à bord sur Z , de bord $\partial Z = Z \cap \partial Y$.

Etant données deux C^r -variétés à bord X et Y , une application $f : X \rightarrow Y$ est un C^r -morphisme (ou morphisme de C^r -variétés à bord) lorsque, pour tout $x \in X$, il existe une carte φ de X en x et une carte ψ de Y , avec $f(U_\varphi) \subset U_\psi$, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U_\varphi)}$ soit un C^r -morphisme au sens de (i)-(ii). On a donc $f^{-1}(\partial Y) \subset \partial X$; en outre, pour toute composante connexe C de ∂X , on a ou bien $f(C) \subset \partial Y$, ou bien $f(C) \cap \partial Y = \emptyset$. Un C^r -morphisme est évidemment continu; s'il est bijectif, d'inverse un C^r -morphisme, c'est un C^r -difféomorphisme (les cartes sont donc des difféomorphismes sur leur image). L'injection canonique d'une C^r -sous-variété est un C^r -morphisme.

Les variétés usuelles s'identifient aux variétés à bord de bord

vide, ou variétés sans bord. Etant données deux C^r -variétés à bord X et Y , avec $\partial X = \emptyset$, le produit $X \times Y$ est canoniquement muni d'une structure de C^r -variété à bord, de bord $X \times \partial Y$, et les projections canoniques de $X \times Y$ sur X et Y sont des C^r -morphisms.

La notion de contact d'ordre $k \in \mathbb{N}$ entre C^k -morphisms, identique à celle introduite dans (1.2.1), permet de définir l'ensemble $J^k(X, Y)$ des jets d'ordre k de C^k -morphisms de la variété à bord X dans la variété à bord Y . Pour tout x dans la C^1 -variété à bord X , l'ensemble des jets d'ordre 1 en 0 de C^1 -germes $[\mathbb{R}_+]_0 \rightarrow [X]_x$ est canoniquement muni d'une structure d'espace de Banach (espace normable complet) pour $x \notin \partial X$, d'une structure de demi-espace fermé dans un espace de Banach sinon ; dans les deux cas, ledit espace de Banach est appelé espace tangent $T_x X$ à X en x .

Comme pour les variétés usuelles, $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ est muni naturellement d'une structure de C^{k-1} -fibré vectoriel (à bord), de projection l'application canonique $\tau_X : TX \rightarrow X$; on dit que TX est le fibré tangent de X . Le fibré tangent $T\partial X$ de ∂X (pour la structure de variété sur ∂X induite par celle de X) s'identifie naturellement à un sous-fibré vectoriel de $\partial TX = \tau_X^{-1}(\partial X)$. A tout C^k -morphisme $f : X \rightarrow Y$ de variétés à bord, avec $k \geq 1$, est associé le C^{k-1} -morphisme $Tf : TX \rightarrow TY$ de fibrés vectoriels au-dessus de f défini par $Tf(j_0^1 \gamma) = j_0^1(f \circ \gamma)$ pour tout germe $\gamma : [\mathbb{R}_+]_0 \rightarrow X$ de C^1 -morphisme. Pour toute C^k -sous-variété $Z \xhookrightarrow{i} X$, le fibré tangent TZ s'identifie (par Ti) à un sous-fibré vectoriel C^{k-1} de $\tau_X^{-1}(Z)$. Un C^1 -morphisme $f : X \rightarrow Y$ de variétés à bord est une submersion en $x \in X$ lorsque $T_x f$ est surjectif, de noyau facteur direct et lorsqu'en outre, si $x \in \partial X$ et $f(x) \notin \partial Y$, alors $T_x f|_{T_x \partial X}$ est surjectif, de noyau facteur direct. Les notions de submersion, de point critique, de valeur critique et de valeur régulière sont alors définies comme dans (2.1).

(A.3.2) Morphisms de Fredholm ; le théorème de Sard, version Smale.

Un morphisme $A : B \rightarrow B'$ d'espaces de Banach est appelé presqu'iso-

morphisme, ou morphisme de Fredholm, lorsqu'il a les deux propriétés suivantes :

(i) $\text{Ker } A$ est de dimension finie n (donc facteur direct dans B).

(ii) $A(B)$ est fermé, et $\text{Coker } A = B'/A(B)$ est de dimension finie p (la codimension de $A(B)$, qui est donc facteur direct).

L'entier $\text{Ind}(A) = n-p$ est l'indice de A .

Un C^1 -morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de variétés à bord est dit de Fredholm lorsque $T_x f$ est de Fredholm pour tout $x \in X$.

THEOREME (Smale). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un C^r -morphisme de variétés à bord, $r \geq 1$. Si X est séparable, f de Fredholm, et qu'en outre on a $r > \text{Ind}(T_x f)$ pour tout $x \in X$, alors l'ensemble des valeurs régulières de f est résiduel (et donc dense d'après (2.1), théorème 2) dans Y .

Démonstration. Comme X est séparable, ses composantes connexes forment un ensemble au plus dénombrable, ce qui permet de se ramener au cas où X est connexe ; l'entier $\text{Ind}(T_x f)$ est alors le même quel que soit $x \in X$, car il est localement constant du fait que (exercice facile) l'ensemble des presque-isomorphismes $A : B \longrightarrow B'$ d'espaces de Banach qui sont d'indice q donné est ouvert dans $L(B, B')$. Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

LEMME 1. Soient B et B' deux espaces de Banach, V une boule ouverte de B , J un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0 , $I = J \cap \mathbb{R}_+$ et $g : V \times I \longrightarrow B' \times \mathbb{R}_+$ un C^k -morphisme, $k \in \mathbb{N}$. On définit alors un C^k -morphisme $G : V \times J \longrightarrow B' \times \mathbb{R}$ par

$$G(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{pour } y \geq 0 \\ \sum_{j=0}^k D^j g(x, 0) \cdot (0, y) j/j! & \text{pour } y \leq 0 . \quad \square \end{cases}$$

LEMME 2. - Soient B et B' deux espaces de Banach, et $h : [B]_0 \longrightarrow [B']_0$ un germe d'application C^k , $k \geq 1$, tel que $Dh(0)$ soit un presque-isomorphisme

d'indice q . Il existe alors $n, p \in \mathbb{N}$, avec $n-p = q$, un espace de Banach B_1 , deux germes $\varphi : [\mathbb{R}^n \times B_1]_{(0,0)} \longrightarrow [B]_0$ et $\psi : [B']_0 \longrightarrow [\mathbb{R}^p \times B_1]_{(0,0)}$ de C^k -difféomorphismes et une application $h_1 \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times B_1$ contenant $(0,0)$, tels que $\psi \circ h \circ \varphi$ soit le germe en $(0,0)$ de l'application $H_1 \in C^k(U, \mathbb{R}^p \times B_1)$ définie par $H_1(x,y) = (h_1(x,y), y)$ (C'est une conséquence facile du théorème d'inversion locale). \square

Supposant donc X connexe, soit $q \in \mathbb{Z}$ la valeur commune des $\text{Ind } T_x f$, $x \in X$, et $k = \max \{1, q + 1\}$. Par hypothèse, f est de classe C^k . Comme X est séparable, les lemmes 1 et 2 entraînent l'existence de deux recouvrements ouverts dénombrables \mathcal{U} et $(V_U)_{U \in \mathcal{U}}$ de X possédant les propriétés suivantes : pour tout $U \in \mathcal{U}$, on a $V_U \supset \bar{U}$, et il existe

- un entier $n \geq \max\{0, q\}$, un espace de Banach B de boule-unité ouverte D , un demi-espace fermé H de $\mathbb{R}^n \times B$ et un C^k -difféomorphisme

$\varphi : V_U \longrightarrow H \cap (D_n \times D)$, où D_n est la boule-unité ouverte standard de \mathbb{R}^n , tels que $\varphi(\bar{U}) = H \cap \frac{1}{2}(\bar{D}_n \times \bar{D})$;

- un ouvert W_U de Y contenant $f(V_U)$ et $\overline{f(\bar{U})}$, un demi-espace fermé H' de $\mathbb{R}^{n-q} \times B$ et un C^k -difféomorphisme ψ de W_U sur un ouvert de $(\mathbb{R}^{n-q} \times B) \cap H'$;

- une application $h \in C^k(D_n \times D, \mathbb{R}^{n-q})$

tels que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit l'application $(x,y) \longmapsto (h(x,y), y)$.

Si C désigne l'ensemble (fermé) des points critiques de f , il est clair que $f(C \cap \bar{U})$ est fermé, car il est contenu dans la fermé $\overline{f(\bar{U})}$ et a pour image par ψ un ensemble fermé, $\frac{1}{2}\bar{D}_n$ étant compacte. Nous allons maintenant montrer que $f(C \cap \bar{U})$ est d'intérieur vide; de deux choses l'une :

(i) Ou bien $f(\partial X \cap V_U)$ est contenu dans ∂Y , auquel cas le complémentaire de $\psi(f(C \cap \bar{U}))$ dans $\mathbb{R}^{n-q} \times D$ contient $R = \bigcup_{y \in D} \text{Reg}(h_y) \times \{y\}$, où $\text{Reg}(h_y)$ désigne l'ensemble des valeurs régulières de l'application $h_y : x \longmapsto h(x,y)$; d'après le théorème de Sard, chaque $\text{Reg } h_y$ est dense dans \mathbb{R}^{n-q} , et R est

donc dense dans $\mathbb{R}^{n-q} \times D$, ce qui prouve bien que le fermé $\Psi(f(C \cap \bar{U}))$ est d'intérieur vide.

(ii) Ou bien $f(\partial X \cap V_U)$ n'est pas contenu dans ∂Y , auquel cas $C \cap \bar{U}$ est de la forme $(C_1 \cap \bar{U}) \cup (C_2 \cap \bar{U})$, où C_2 est l'ensemble des points critiques de $f|_{\partial X}$ et C_1 l'ensemble des $x \in X$ où $T_x f$ n'est pas surjective. Les deux ensembles $C_1 \cap \bar{U}$ et $C_2 \cap \bar{U}$ sont fermés, ainsi que leurs images par f , et ce qui a été fait en (i) montre que $f(C_1 \cap \bar{U})$ est d'intérieur vide. Pour voir que $f(C_2 \cap \bar{U})$ est d'intérieur vide, on remarque que $\varphi(C_2 \cap V_U)$ est l'ensemble des points critiques de $\Psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\partial H \cap (D_n \times D)}$, et l'on procède comme dans (i).

L'ensemble $f(C)$ étant la réunion (dénombrable) des fermés d'intérieur vide $f(C \cap \bar{U})$ lorsque U varie dans \mathcal{U} , l'ensemble $Y \setminus f(C)$ des valeurs régulières de f est bien résiduel. ■

(A.3.3) Le théorème de transversalité, version Abraham.

On dit qu'un C^1 -morphisme $f : X \rightarrow Y$ de variétés à bord est transverse en $x \in X$ à une C^1 -sous-variété Z de Y , ce qui se note $f \pitchfork_x Z$, lorsqu'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(1) $f(x) \notin Z$.

(2) $f(x) \in Z$, $\text{Ker } T_x f$ est facteur direct dans $T_x X$, et

a) Si $x \notin \partial X$, $T_x f(T_x X)$ contient un supplémentaire fermé de $T_{f(x)} Z$ dans $T_{f(x)} Y$.

b) Si $x \in \partial X$, $T_x f(T_x \partial X)$ contient un supplémentaire fermé de $T_{f(x)} Z$ dans $T_{f(x)} Y$.

Je laisse le lecteur comparer cette définition à celle de (2.2.), et se guider sur (2.2) pour établir la

PROPOSITION 1. Soit $f : X \rightarrow Y$ un C^r -morphisme, $r \geq 1$, de variétés à bord, transverse à une C^r -sous-variété Z de Y (c'est à dire vérifiant $f \pitchfork_x Z$ pour tout $x \in X$, ce qui se note $f \pitchfork Z$). Alors $W = f^{-1}(Z)$ est une C^r -sous-

variété de X ; pour tout $x \in W$, on a $T_x W = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z)$, et $T_x f$ induit donc un isomorphisme $T_x X / T_x W \longrightarrow T_{f(x)} Y / T_{f(x)} Z$. En particulier, si Z est de codimension c (i.e. $\dim(T_y Y / T_y Z) = c$ pour tout $y \in Z$), W est de codimension c . ■

Nous allons maintenant généraliser (2.2), proposition 2 :

THÉORÈME (Abraham). Soient \mathfrak{X} , X et Y trois C^r -variétés à bord, avec $r \geq 1$, $\partial \mathfrak{X} = \emptyset$, X et \mathfrak{X} séparables et X de dimension finie n . Pour toute C^r -sous-variété Z de codimension finie p de Y et tout C^r -morphisme $\rho : \mathfrak{X} \times X \rightarrow Y$,

si l'on a $\rho \nmid Z$ et $r > n-p$, alors l'ensemble $\mathcal{C}_{\rho, Z}$ des $f \in \mathfrak{X}$ tels que $\rho_f : x \longmapsto \rho(f, x)$ soit transverse à Z est résiduel. En outre, si X est compacte et Z fermée, alors $\mathcal{C}_{\rho, Z}$ est ouvert.

Démonstration. C'est celle de (2.2), proposition 2 : d'après la proposition 1 , $W = \rho^{-1}(Z)$ est une C^r -sous-variété de $\mathfrak{X} \times X$; si $\pi : W \rightarrow \mathfrak{X}$ désigne la restriction de la projection canonique $\mathfrak{X} \times X \rightarrow \mathfrak{X}$, on établit facilement les propriétés suivantes :

- W est séparable ;
- π est un C^r -morphisme de Fredholm, d'indice constant $n-p$.
- Les points critiques de π sont les $(f, x) \in W$ tels que ρ_f ne soit pas transverse à Z en x .

L'ensemble des valeurs régulières π n'est donc autre que $\mathcal{C}_{\rho, Z}$; comme π vérifie les hypothèses du théorème de Smale, $\mathcal{C}_{\rho, Z}$ est résiduel. Si X est compacte et Z fermée, alors π est propre, donc fermée ((2.4.2), proposition 2), ce qui prouve que $\mathcal{C}_{\rho, Z}$ est ouvert. ■

EXERCICE D'APPLICATION (voir aussi les appendices 4 et 5) : étant données deux variétés X et M de dimension finie, avec X compacte, appliquer le théorème de transversalité d'Abraham à $Y = J^k(X, M)$, $\mathfrak{X} = C^s(X, M)$ et $\rho(f, x) = j^k f(x)$, $s > k$, pour redémontrer le théorème de Thom (cf. Abraham-Robbin pour la structure de variété banachique de \mathfrak{X}) .

REMARQUE. Cette preuve du théorème de transversalité de Thom est plus savante (et plus restrictive quant aux hypothèses) que celle donnée dans (2.2). L'article de C. Robinson cité dans la bibliographie du chapitre 1 contient un théorème abstrait combinant les avantages des deux approches.

APPENDICE 4 - COMMENT "BOUCHER LE TROU DE LA DIAGONALE"

DANS LES ESPACES DE BIJETS.

Soient X et Y deux variétés. Nous allons identifier ${}_2X = (X \times X) \setminus \Delta X$ (resp., pour $k \in \mathbb{N}$, ${}_2J^k(X, Y)$) à l'intérieur d'une variété à bord $\overline{{}_2X}$ (resp. $\overline{{}_2J^k(X, Y)}$) de façon que le bijet ${}_2j^k f$ de chaque $f : X \longrightarrow Y$ assez différentiable se prolonge en une section différentiable $\overline{{}_2j^k f}$ de la "fibration" $\overline{{}_2J^k(X, Y)} \longrightarrow \overline{{}_2X}$.

L'idée est d'exprimer qu' "une tangente est limite de sécantes" .

Dans ce qui suit, une métrique riemannienne est fixée sur chacune des variétés X et Y , et les notations sont celles de l'appendice 2

(A4.1) Construction de $\overline{{}_2X}$

Appelons SX le fibré en sphères unités tangentes à X . Il existe un voisinage ouvert U de $\{0\} \times SX$ dans $\mathbb{R}_+ \times SX$ tel que l'application

$$U \ni (r, (x, u)) \xrightarrow{\overline{p}} (x, \exp_x ru) \in X \times X$$

soit bien définie et possède les propriétés suivantes :

- (i) $\overline{p}(U)$ est un voisinage ouvert de ΔX .
- (ii) $p = \overline{p}|_{U \setminus \{r=0\}}$ est un difféomorphisme sur $\overline{p}(U) \setminus \Delta X$.

En recollant U à ${}_2X$ par p , on obtient donc une variété $\overline{{}_2X}$ à bord SX , dont ${}_2X$ est l'intérieur : on dit que $\overline{{}_2X}$ s'obtient à partir de $X \times X$ par éclatement orienté de la diagonale (le choix de U n'intervient évidemment pas dans l'objet construit, dont la structure de variété ne dépend pas non plus, d'ailleurs, du choix de la métrique).

(A4.2) Construction de $\overline{2J^0(X,Y)}$ et définition de $\overline{2j^0}f$ pour $f \in C^1(X,Y)$.

Il existe un voisinage V_0 de $\{0\} \times SX \times TY$ dans $\mathbb{R}_+ \times SX \times TY$ tel que l'application

$$V_0 \ni (r, (x,u), (y,v)) \xrightarrow{\overline{q_0}} ((x,y), (\exp_x ru, \exp_y rv)) \in (X \times Y)^2 = (J^0(X,Y))^2$$

soit bien définie et possède les propriétés suivantes :

(i) $\overline{q_0}(V_0)$ est un voisinage ouvert de $\Delta(X \times Y)$ dans $2J^0(X,Y) \cup \Delta(X \times Y)$.

(ii) $q_0 = \overline{q_0}|_{V \setminus \{r=0\}}$ est un difféomorphisme sur $\overline{q_0}(V_0) \cap 2J^0(X,Y)$.

En recollant V_0 à $2J^0(X,Y)$ par q_0 , on construit donc une variété $\overline{2J^0(X,Y)}$ de bord $SX \times TY$ et d'intérieur $2J^0(X,Y)$, dont la définition ne dépend pas du choix de V_0 ; l'application $\overline{2p_0} : \overline{2J^0(X,Y)} \longrightarrow \overline{2X}$ obtenue à partir de $2p_0$ par prolongement continu est différentiable, égale à la projection $SX \times TY \longrightarrow SX$ sur le bord; pour tout $f \in C^k(X,Y)$ ($k \geq 1$), on peut, via p et q_0 , écrire $2j^0f$ sous la forme

$$(r, (x,u)) \longmapsto (r, (x,u), (f(x), r^{-1}f_x(ru))$$

(où rappelons-le, $f_x = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$) dans un voisinage de ΔX , et donc la prolonger en la C^{k-1} -section $\overline{2j^0}f$ de $\overline{2p_0}$ définie sur le bord par

$$\overline{2j^0}f(0, (x,u)) = (0, (x,u), (f(x), Df(x) \cdot u)) .$$

(A4.3) Construction de $\overline{2J^k(X,Y)}$ dans le cas général.

Commençons par l'exemple où $k = 1$ et où X et Y sont des espaces vectoriels euclidiens. Etant donné f dans $C^k(X,Y)$ ($k \geq 1$), l'application $2j^1f$ s'identifie alors à

$$(x, x') \longmapsto (x, f(x), Df(x), x', f(x'), Df(x')) .$$

Dans ce cas particulier, on peut prendre pour U l'espace $\mathbb{R}_+ \times SX = \mathbb{R}_+ \times X \times S$ tout

entier (S désigne la sphère unité de X), l'application $p : U \longrightarrow X \times X$ étant donnée par $p(r, x, u) = (x, x+ru)$.

D'après la formule de Taylor, pour $k \geq 3$,

$$E_1 f(x, r, u) = r^{-1} (Df(x+ru) - Df(x))$$

tend au sens C^{k-2} vers $D^2 f(x_0) \cdot u_0$, et

$$E_2 f(x, r, u) = 6r^{-3} (f(x+ru) - f(x) - r Df(x) \cdot u - \frac{r}{2} E_1 f(x, r, u))$$

tend au sens C^{k-3} vers $D^3 f(x_0) \cdot u_0^3$ quand r tend vers 0, x vers x_0 et u vers u_0 .

L'idée est donc de définir $\overline{2j^1} f$ (via p) par

$$\overline{2j^1} f(x, r, u) = (x, r, u, f(x), Df(x), E_1 f(x, r, u), E_2 f(x, r, u)).$$

On obtient ainsi une section de classe C^{k-3} de la projection

$$U \times (Y \times L(X, Y))^2 = \overline{2j^1} (X, Y) \xrightarrow{\overline{2p^1}} U = {}_2 \overline{X},$$

qui (via un changement de variables évident) prolonge $2j^1 f$.

Formalisons maintenant cette idée lorsque X et Y sont quelconques, k désignant un entier ≥ 1 : il existe alors un voisinage ouvert W_0 de $0_{TX} \times 0_{TY}$ dans $TX \times TY$ tel que l'application

$$((x, a), (y, b)) \xrightarrow{h_0} ((x, y), (\exp_x a, \exp_y b))$$

soit un difféomorphisme de W_0 sur un voisinage ouvert $h_0(W_0)$ de $\Delta(X \times Y)$ dans $(X \times Y)^2$. Si π_k désigne la fibration $J^k(X, Y) \longrightarrow X \times Y$, on en déduit un difféomorphisme h_k de $(\pi_k \times \pi_k)^{-1}(h_0(W_0))$ sur

$$W_k = W_0 \times_{X \times Y} \left(\bigoplus_{j=1}^k L_s^j(TX, TY) \right)^2_{X \times Y},$$

donné par

$$(j^k f(x), j^k g(x')) \longrightarrow (h_0^{-1}(x, f(x), x', g(x')), (D^j f(x))_{1 \leq j \leq k}, (D^j g_x(\exp_x^{-1} x'))_{1 \leq j \leq k})$$

Il existe alors un voisinage ouvert V_k de

$$\{0\} \times (SX \times TY) \times_{X \times Y} \left(\bigoplus_{j=1}^k L_s^j(TX, TY) \right)^{2 \times Y}$$

dans

$$\mathbb{R}_+ \times (SX \times TY) \times_{X \times Y} \left(\bigoplus_{j=1}^k L_s^j(TX, TY) \right)^{2 \times Y}$$

tel que l'application \bar{q}_k qui à

$$(r, (x, u), (y, v), (A^1, \dots, A^k), (B^1, \dots, B^k)) \in V_k$$

associe

$$((x, ru), (y, \sum_{j=1}^k \frac{r^j}{j!} A^j \cdot u^j + \sum_{j=1}^k \frac{r^{k+j}}{(k+j)!} B^{k-j+1} \cdot u^{k-j+1} + \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!} v) ,$$

$$, (A^1, \dots, A^k), (\sum_{j=i}^k \frac{r^{j-i}}{(j-i)!} A^j \cdot u^{j-i} + \sum_{j=1}^{k-i+1} \frac{r^{k+j-i}}{(k+j-i)!} B^{k-j+1} \cdot u^{k-j-i+1})_{1 \leq i \leq k})$$

soit bien définie, à valeurs dans W_k , et possède les propriétés suivantes :

(i) $\bar{q}_k(V_k)$ est ouvert dans $(W_k \setminus \{a=0\}) \cup \{a=0 \text{ et } b=0\}$

(ii) $q_k = h_k \circ \bar{q}_k|_{V_k \setminus \{r=0\}}$ est un difféomorphisme sur $h_k \circ \bar{q}_k(V_k) \cap {}_2J^k(X, Y)$.

En recollant ${}_2J^k(X, Y)$ à V_k par q_k , on obtient donc une variété

$\bar{{}_2J^k(X, Y)}$ de bord

$$(SX \times TY) \times_{X \times Y} \left(\bigoplus_{j=1}^k L_s^j(TX, TY) \right)^{2 \times Y}$$

et d'intérieur ${}_2J^k(X, Y)$, dont la définition ne dépend pas du choix de W_k et

de V_k ; l'application $\bar{p}_k : \bar{{}_2J^k(X, Y)} \longrightarrow \bar{{}_2X}$ déduite de ${}_2P_k$ par prolongement

continu est différentiable et a pour restriction au bord la projection standard

sur SX ; pour tout $f \in C^r(X, Y)$ avec $r \geq 2k+1$, on peut, via p et q_k , écrire

${}_2J^k f$ sous la forme

$$(r, (x, u)) \longmapsto (r, (x, u), (f(x), E^0 f(r, x, u)), (D^j f(x))_{1 \leq j \leq k}, (E^j f(r, x, u))_{1 \leq j \leq k})$$

dans un voisinage de ΔX , où

$$E^k f(r, x, u) = r^{-1} (D^k f_x(ru) - D^k f(x))$$

et

$$E^{k-j}f(r, x, u) = \frac{(2j+1)!}{2^{j+1}} (D^{k-j}f_x(ru) - \sum_{i=0}^j \frac{r^i}{i!} D^{k-j+i}f(x) \cdot u^i + \\ - \sum_{i=1}^j \frac{r^{j+i}}{(j+i)!} E^{k-i+1}f(x, r, u) \cdot u^{j-i+1}) .$$

En posant

$$E^{k-j}f(0, x, u) = D^{k+j+1}f(x) \cdot u^{2j+1} \quad (0 \leq j \leq k) ,$$

on prolonge évidemment ${}_2j^k f$ en une C^{r-2k-1} -section $\overline{{}_2j^k f}$ de $\overline{{}_2P_k}$.

(A4.4) Si X est compacte et Y de dimension finie, $\overline{{}_2X}$ est compacte, et l'application

$$C^r(X, Y) \times \overline{{}_2X} \ni (f, z) \xrightarrow{\rho} \overline{{}_2j^k f}(z) \in \overline{{}_2j^k(X, Y)}$$

est de classe C^{r-2k-1} pour $r \geq 2k+1$. De plus, pour $r > 2k+1$, c'est une submersion. ■

En particulier,

$$(i) f \longmapsto \overline{{}_2j^k f} \in C^{r-2k-1}(\overline{{}_2X}, \overline{{}_2j^k(X, Y)})$$

est continue.

(ii) ρ vérifie les hypothèses du théorème de transversalité (A3.3)

de l'appendice 3 pour toute sous-variété de $\overline{{}_2j^k(X, Y)}$. ■

A titre d'exemple, voici deux applications :

(A4.5) Sous les hypothèses de (A 4.4),

(i) les plongements de X dans Y forment un ouvert de $C^r(X, Y)$ pour $r \geq 1$, dense pour $\dim Y > 2 \dim X$;

(ii) les fonctions de Morse excellentes forment un ouvert dense de $C^r(X, \mathbb{R})$ pour $r > 2$.

Démonstration. Point (i). Avec les notations de (A 4.2), soit Z la sous-variété fermée de $\overline{{}_2j^0(X, Y)}$ constituée

- de $\{(x,y), (x',y')\} \in {}_2J^0(X,Y) : y = y'\}$ pour l'intérieur ;
- de $SX \times {}_0TY$ pour le bord.

Dire que $f \in C^1(X,Y)$ est un plongement équivaut à affirmer que $\overline{{}_2J^0f}(\overline{{}_2X})$ est contenu dans le complémentaire de Z , d'où l'ouverture par (A 4.4) (i). La densité provient de (A4.4) (ii) appliqué à $C^s(X,Y)$, $s > 1$, Z ayant pour codimension $\dim Y$.

Point (ii). On considère de même, avec les notations de (A4.3), la sous-variété fermée Z de $\overline{{}_2J^1(X, \mathbb{R})}$ constituée

- de $\{(j_x^1 f, j_x^1 f') \in {}_2J^1(X, \mathbb{R}) : f(x) = f'(x') \text{ et } Df(x) = Df'(x') = 0\}$ pour l'intérieur ;
- de $SX \times {}_0T\mathbb{R} \times_{X \times \mathbb{R}} ({}_0L(TX, T\mathbb{R})) \times {}_2X \times \mathbb{R}$ pour le bord (c'est-à-dire la sous-variété définie par

$$Df(x) = D^2f(x).u = 0 \text{ et } D^3f(x).u^3 = 0).$$

Dire que $f \in C^3(X, \mathbb{R})$ est une fonction de Morse excellente équivaut à affirmer que c'est une fonction de Morse et que $\overline{{}_2J^1f}(\overline{{}_2X})$ ne rencontre pas Z , d'où l'ouverture. Pour la densité (déjà prouvée au chapitre 1), on peut appliquer (A4.4) (ii) à $C^k(X, \mathbb{R})$ pour $k > 3$. ■

La construction de $\overline{{}_2J^k(X,Y)}$ dépend pour $k > 0$ du choix des métriques riemanniennes sur X et Y , mais (comme le montre l'exemple précédent) les sous-variétés de ${}_2J^k(X,Y)$ intéressantes en théorie des singularités ont une adhérence dans $\overline{{}_2J^k(X,Y)}$ qui s'exprime de la même façon quel que soit ce choix.

APPENDICE 5 - TRANSVERSALITÉ ET PROBLÈMES BIEN POSÉS

Nous allons maintenant voir que, pour les (systèmes d') équations différentielles ordinaires, la notion de "problème bien posé" n'est qu'un avatar de la transversalité. Cette idée est due, sous une forme assez différente de la présentation que nous allons en donner, à M.M. Peixoto.

Nous nous plaçons dans un cadre un peu restrictif, afin de ne pas compliquer l'exposé d'une idée simple.

(A5.1) Soient E un espace vectoriel euclidien, $I = [0,1]$, et, pour chaque $r \in \mathbb{N}$,

- \mathcal{B}^r l'espace de Banach des applications de classe C^r de $E \times I$ dans E , bornées ainsi que leurs r premières dérivées
- Y^r l'espace de Banach des applications de classe C^r de I dans E .

Quels que soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, r\}$, on définit une application

$$\rho : \mathcal{B}^r \times E \longrightarrow Y^{k+1}$$

par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho(f,x)(t) = f(\rho(f,x)(t), t) \text{ pour tout } t \in I \\ \rho(f,x)(0) = x \end{cases}$$

(A5.2) L'application ρ est de classe C^{r-k} ; pour $r > k$, sa dérivée est la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (D\rho(f,x) \cdot (\hat{f}, \hat{x}))(t) = D_1 f(\rho(f,x)(t), t) \cdot (D\rho(f,x) \cdot (\hat{f}, \hat{x}))(t) + \\ \quad + \hat{f}(\rho(f,x)(t), t) \text{ pour tout } t \in I \\ (D\rho(f,x) \cdot (\hat{f}, \hat{x}))(0) = \hat{x} \end{array} \right.$$

quel que soit $(\hat{f}, \hat{x}) \in \mathcal{B}^r \times E$. De plus, pour tout $(f, x) \in \mathcal{B}^r \times E$, $D\rho(f, x)$ est d'image dense et de noyau facteur direct. En particulier, ρ est transverse à toute sous-variété Z de codimension finie de Y^{k+1} .

Preuve. - Les deux premières assertions sont faciles. Etant donné $(f, x) \in \mathcal{B}^r \times E$, le noyau de $D\rho(f, x)$ est donc formé des $(\hat{f}, 0)$ tels que $\hat{f} \in \mathcal{B}^r$ vérifie $\hat{f}(\rho(f, x)(t), t) = 0$ pour tout $t \in I$. Un supplémentaire fermé de ce noyau est donc $A_r Y^r$, où $A_r : Y^r \rightarrow \mathcal{B}^r$ est l'injection définie par $A_r \varphi(y, t) = \varphi(t)$. Prouvons maintenant que $D\rho(f, x)$ est d'image dense : étant donné $\varphi \in Y^r$, soit g l'élément de Y^{r-1} défini par

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = D_1 f(\rho(f, x)(t), t) \cdot \varphi(t) + g(t).$$

Lorsque $h \in Y^r$ tend vers g dans Y^{r-1} , la théorie des équations différentielles linéaires entraîne que $D\rho(f, x)(A_r h, \varphi(0))$ tend vers φ dans Y^r . Notre assertion résulte donc de ce que l'injection canonique de Y^r dans Y^{k+1} est continue et d'image dense. ■

(A5.3) Soit f un élément de \mathcal{B}^r . Considérons le problème

$$P(f, Z) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), t) \text{ pour tout } t \in I \\ \varphi \in Z, \end{array} \right.$$

où Z est une sous-variété de Y^k , avec $\text{codim } Z = \dim E$. Nous dirons que le problème $P(f, Z)$ est bien posé en l'une de ses solutions φ lorsque

$$\rho_f \nmid_{\varphi(0)} Z.$$

D'après (A5.2), cela s'exprime aussi en disant que la seule solution $\hat{\varphi}$ de l'équation aux variations

$$\dot{\hat{\varphi}}(t) = D_1 f(\varphi(t), t) \cdot \hat{\varphi}(t) \text{ pour tout } t \in I$$

vérifiant $\hat{\varphi} \in T_{\varphi} Z$ est $\hat{\varphi} = 0$.

De la dernière assertion de (A5.2) et du théorème de transversalité prouvé dans l'appendice 3, on déduit aussitôt le résultat suivant :

(A5.4) Sous les hypothèses de (A5.3), l'ensemble des $f \in \mathcal{B}^r$ tels que $P(f, Z)$ soit bien posé en chacune de ses solutions est résiduel pour $r > k$. ■

L'intérêt de ce qui précède pour la théorie de la transversalité est de montrer qu'une application ρ qui n'est pas une submersion peut néanmoins être transverse à toute sous-variété de codimension finie.

Notre construction permet en outre de ramener en principe l'étude de la bifurcation des solutions d'un problème aux limites à la théorie des singularités d'applications différentiables.

(A5.5) EXERCICES. 1 - Etant donné Z comme dans (A5.3), expliciter la remarque précédente : soit f_λ une famille d'éléments de \mathcal{B}^r dépendant au sens C^r du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$; décrire les défauts de transversalité génériques de ρ_{f_λ} à Z .

2 - Prouver que tout ce qui précède subsiste lorsqu'on y remplace les éléments de \mathcal{B}^r (vus comme des chemins dans l'espace des champs de vecteurs C^r -bornés sur E) par des chemins dans l'espace des automorphismes infinitésimaux (au choix) du volume standard de $E = \mathbb{R}^n$, de la forme symplectique standard de $E = T^*\mathbb{R}^n$ ou de la structure de contact standard de $E = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (remarquer que, dans chacun de ces trois cas, l'espace \mathfrak{A} d'automorphismes infinitésimaux considéré est tel que $\{\xi(a) : \xi \in \mathfrak{A}\} = E$ pour tout $a \in E$) qui sont en outre dans \mathcal{B}^r .

3 - Montrer de même que tout ce qui précède reste vrai lorsqu'on remplace les équations du premier ordre par des équations d'ordre quelconque. En particulier, on peut appliquer notre point de vue aux classiques problèmes de Dirichlet, de Neumann, etc. pour les équations du second

ordre.

4 - Appliquer la même idée :

- aux équations différentielles d'ordre quelconque (*) sur une variété compacte ;

- aux isotopies infinitésimales d'une variété compacte qui préservent (au choix) une forme-volume, une structure symplectique ou une structure de contact.

Références. - M.M. Peixoto. "On a generic theory of end-point boundary value problems" - Anais de Academia Brasileira de Ciências, vol.41 (1969) p. 1.6.
" On end-point boundary value problems" , J. of Diff. Eq. (1982), vol.44 , 273-280.

(*) Une équation différentielle d'ordre k sur une variété M est une sous-variété S de $J^k(\mathbb{R}, M)$. Dire qu'elle est "résolue par rapport à $\frac{d^k y}{dt^k}$ " revient à dire que la restriction $S \rightarrow J^{k-1}(\mathbb{R}, M)$ de la projection canonique est bijective.

APPENDICE 6 - COMPLÉMENTS D'ANALYSE

(A6.1) Généralisation des résultats de (4.2.2).

On se donne une variété riemannienne M , dont on suppose qu'elle est le produit d'une variété riemannienne compacte M_0 et d'un espace euclidien V . On désigne par E un espace vectoriel euclidien, par F un sous-espace vectoriel de E , et l'on pose

$$Q = M \times E, \quad W = M \times F \subset Q \quad \text{et} \quad \Sigma = M \times \{0\} \subset W.$$

On appelle d la distance géodésique sur Q pour la métrique riemannienne produit G , et, pour chaque $r > 0$, on note

$$B_r = \{(\theta, x) \in Q : |x| < r\} = \{y \in Q : d(y, \Sigma) \leq r\} \quad \text{et} \quad W_r = W \cap B_r.$$

Les B_r engendrent un filtre \mathfrak{F} sur Q , et les W_r engendrent un filtre \mathcal{W} sur W .

On désigne par x_- la projection orthogonale de $x \in Q$ sur F , d'où en particulier $|x_-| = d(x, \Sigma)$ pour $x \in W$. Etant donné un réel $r > 0$, un réel β , une partie U de Q contenant W_r et deux applications f et g de U dans Q , nous poserons

$$\begin{cases} \bar{\beta} = \max\{0, \beta\} \\ d_{r, \bar{\beta}}^0(f, g) = \sup\{|x_-|^{-\bar{\beta}} d(f(x), g(x)) : x \in W_r \setminus \Sigma\} \leq \infty. \end{cases}$$

De même, si X est une application de U dans un espace normé^(*),

(*) Nous aurons plus généralement à considérer le cas où X est une section d'un fibré vectoriel π de base U muni d'une structure de Finsler, ce qui signifie la chose suivante : chaque fibre $\pi^{-1}(a)$ est équipée d'une norme, et celle-ci "dépend continûment de a " en ce sens que, pour toute section locale continue Y de π , l'application $x \mapsto |Y(x)|$ est continue.

$$|X|_{r,\beta} = \sup \{ |x_-|^{-\beta} |X(x)| : x \in W_r \setminus \Sigma \} \leq \infty ,$$

et, étant donnée $H : V \longrightarrow Q$, avec $B_r \subset V \subset Q$, nous désignerons par $\text{Lip}_r H$ la constante de Lipschitz de $H|_{B_r}$.

On se donne un germe $\zeta : [W]_{\mathcal{W}} \longrightarrow J^\infty(Q,Q)$ d'application, de la forme $\zeta = [(j^\infty f)|_W]_{\mathcal{W}}$, où f est un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert U de Q sur un ouvert U' de Q , possédant les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } U \cap W \text{ et } U' \cap W \text{ appartient à } \mathcal{W} \\ \text{(ii) } f(U \cap W) = U' \cap W . \\ \text{(iii) Il existe un difféomorphisme } \varphi \text{ de } M_0, \text{ un automorphisme } B \text{ de } \\ V \times E \text{ et un borné } K \text{ de } U \text{ tels que} \\ \forall \theta \in M_0, \forall v \in V \times E, \text{ si } (\theta, v) \in U \setminus K, \text{ alors } f(\theta, v) = (\varphi(\theta), Bv). \\ \text{(iv) } \exists c \in]0,1[: \forall x \in U \cap W, d(x, \Sigma) \leq cd(f(x), \Sigma). \end{array} \right.$$

On pose

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = f^{-1}|_W, \quad A_-(x) = A(x)_- \text{ pour } x \in U' \cap W, \\ c_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |A_-|_{r,1}, \quad R = 1 - c_0, \\ K_0 = \sup \{ |Df(x)| : x \in \Sigma \}, \\ L_0 = \sup \{ |D(f^{-1})(x)| : x \in \Sigma \}. \end{array} \right.$$

D'après (1)(iv), on a

$$(3) \quad 0 < c_0 \leq c < 1$$

et, d'après (1) (iii), en notant $\nu A_- : \Sigma \longrightarrow L(F,F)$ la dérivée de A_- normalement à Σ (c'est-à-dire la restriction à Σ de la dérivée de A_- par rapport au second facteur de $W = \Sigma \times F$),

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = \sup \{ |\nu A_-(x)| : x \in \Sigma \} \\ K_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |Df|_{r,0} \\ L_0 = \lim_{r \rightarrow 0} |D(f^{-1})|_{r,0} . \end{array} \right.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons

$$(5) \quad \begin{cases} s(k) = \begin{cases} k + 1 + \left[\frac{\text{Log } K_o + k \text{ Log } L_o}{-\text{Log } c_o} \right] & \text{pour } \text{Log } K_o + k \text{ Log } L_o > 0 \\ \left[(\text{Log } K_o) / -\text{Log } L_o \right] + 1 & \text{sinon,} \end{cases} \\ t(k) = \max \{k, s(k)\} , \end{cases}$$

où $[.] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la partie entière, et

$$(6) \quad s(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(k) , \quad t(\infty) = \infty .$$

Il est clair que c_o , R , K_o , L_o , s et t sont bien définis par ζ , indépendamment du choix de f .

Si l'on note $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^k(Q)$ le groupe des germes de C^k -difféomorphismes $[Q]_{\mathcal{H}} \hookrightarrow$, le résultat suivant contient les théorèmes 1 et (pour l'essentiel) 3 de (4.2.2) :

THÉOREME 1. - Soit Ψ un élément de $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{t(k)}(Q)$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, admettant un représentant g tel que

$$(i) \quad \begin{cases} j_{\Sigma}^{s(k)} g = j_{\Sigma}^{s(k)} f ; \\ g = f \text{ en dehors d'un borné.} \end{cases}$$

Il existe alors un réel $r_o > 0$ et une section holonome H de la projection-source $\mathcal{J}^k(Q, Q) \rightarrow Q$ au-dessus de W_{r_o} tels que, pour tout $r \in]0, r_o]$, la suite $(j_{W_r}^k (g^n \circ f^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie, converge uniformément vers $H|_{W_r}$ et ne dépende que de $j_{W_r}^k (f^{-1})$ et de $g|_{B_r}$.

Le germe $\eta = [H]_{\mathcal{W}}$ ne dépend donc que de ζ et de Ψ , et non du choix de f et de g ; en outre, il existe $h \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^k(Q)$ tel que $\eta = (j^k h)|_W$, et l'on a

$$\begin{aligned} (ii) \quad j_{\Sigma}^k h &= j_{\Sigma}^k \text{id}_Q ; \\ (iii) \quad (j^k h^{\Psi})|_W &= [(j^k f)|_W]_{\mathcal{W}} \end{aligned}$$

(Ces deux conditions ne dépendent que de ζ , ψ et η , et non du choix de f et h , introduits par commodité d'écriture).

Démonstration. C'est celle de (4.2.2), Théorème 1, à quelques détails près : étant donné un représentant g de ψ , de classe $C^{t(k)}$, voici d'abord ce qui ne change pas par rapport à (4.2.2) :

- Les notations c_r , K_r , L_r définies par (7).
- Le lemme 1 .
- La définition de $Y_{r,\alpha}^0$ et de Φ_0 .
- Le lemme 3.

Passons à ce qui change (ou plutôt à ce qu'on doit spécifier en passant du tore plat à une variété riemannienne plus générale) :

pour chaque entier $j > 0$, soit

$$\mathcal{L}^j = S_j T^* Q \otimes_Q TQ \text{ (resp. } \mathcal{L}^j = L_S^j(TQ, TQ))$$

le fibré vectoriel de base Q (resp. $Q \times Q$) dont la fibre au-dessus de chaque $x \in Q$ (resp. $(x,y) \in Q \times Q$) est

$$\mathcal{L}_x^j = L_S^j(T_x Q, T_x Q) \text{ (resp. } \mathcal{L}_{x,y}^j = L_S^j(T_x Q, T_y Q)) ,$$

muni de la norme induite par la métrique de Q . D'après l'appendice 2 ,

la dite métrique induit un isomorphisme de $Q \times Q$ -fibrés entre $J^k(Q, Q)$ et

$$\mathcal{L}^k = \bigoplus_{j=1}^k Q \times Q \mathcal{L}^j$$

pour chaque entier $k \geq 0$.

Nos hypothèses sur Q et W impliquent les deux faits suivants :

SCOLIE 1. -(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque $x \in Q$, la boule $\{y \in Q : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ soit strictement géodésiquement convexe.

(ii) La sous-variété W de Q est totalement géodésique. ■

PROPOSITION 1.- Si $U_\varepsilon = \{(x,y) \in Q \times Q : d(x,y) < \varepsilon\}$, on définit pour chaque entier $k > 0$ un isomorphisme

$$\bigoplus_k : \mathcal{I}_k|_{U_\varepsilon} \longrightarrow (\mathcal{I}_k \times Q)|_{U_\varepsilon}$$

de U_ε -fibrés vectoriels par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x,y) \in U_\varepsilon, \forall A = (A^1, \dots, A^k) \in \mathcal{I}_{x,y}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_{x,y}^k = (\mathcal{I}_k)_{x,y}, \\ \quad \bigoplus_k A = (\bigoplus^1 A^1, \dots, \bigoplus^k A^k), \\ \text{où } \bigoplus^j A^j = P_{y,x} \circ A^j, \end{array} \right.$$

$P_{y,x} : T_y Q \rightarrow T_x Q$ désignant l'isométrie obtenue par transport parallèle le long de l'unique géodésique minimale joignant y à x . ■

COROLLAIRE 1.- Etant donnés $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, soient $H : W_r \rightarrow \mathcal{I}_k$ une section de la projection-source $p_k : \mathcal{I}_k \rightarrow Q$ au-dessus de W_r , et $H_o : W_r \rightarrow \mathcal{I}_o = Q \times Q$ la section de $pr_1 : Q \times Q$ qui s'en déduit par projection. Si l'on a

$$H_o(W_r) \subset U_\varepsilon,$$

on peut identifier H à la section $\bigoplus_k \circ H$ de la composée $\mathcal{I}_k \times Q \rightarrow Q$ des projections canoniques $\mathcal{I}_k \times Q \rightarrow \mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_k \rightarrow Q$. En d'autres termes, la donnée de H équivaut à celle de (H^0, \dots, H^k) , où

$$H^0 = pr_2 \circ H_o = pr_2 \circ \bigoplus_k \circ H : Q \rightarrow Q,$$

et où

$$(H^1, \dots, H^k) = pr_1 \circ \bigoplus_k \circ H : Q \rightarrow \mathcal{I}_k = \mathcal{I}_Q^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_Q^k$$

est une section de la projection canonique $\mathcal{I}_k \rightarrow Q$. ■

Sous les hypothèses du corollaire 1, étant donnée une autre section F de p_k au-dessus de W_r , vérifiant

$$F_o(W_r) \subset U_\varepsilon,$$

on peut définir pour chaque réel α

$$d_{r,\alpha}^k(H,F) = \max\{d_{r,\alpha}^0(H^0,F^0), \max\{|H^j - F^j|_{r,\alpha-j} : 1 \leq j \leq k\}\}.$$

SCOLIE 2.- Pour tout réel $\alpha > 0$, si l'on a $r < \rho(\alpha)$, où

$$\rho(\alpha) = (\varepsilon/R)^{1/\alpha},$$

et si la section H de p_k au-dessus de W_r vérifie

$$H^0 \in Y_{r,\alpha}^0,$$

on a $H_o(W_r) \subset U_\varepsilon$. ■

Cette remarque permet de définir, comme dans (4.2.2) pour

$0 < r < \rho(\alpha)$,

$$Y_{r,\alpha}^k = \{H \in C_{W_r}^0(p_k) : H^0 \in Y_{r,\alpha}^0 \text{ et } d_{r,\alpha}^k(H, j^k \text{id}_Q) < \infty\}.$$

Le lemme 2 de (4.2.2) est alors évidemment satisfait. Il en va de même - mais de manière moins évidente - du lemme 4 (toujours pour $r < \rho(\alpha)$) ; ici encore, nous nous bornerons à signaler ce qui change par rapport à (4.2.2) : pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $Z_{r,\alpha}^j$ l'espace de Banach

$$\{H^j \in C_{W_r}^0(\mathcal{L}^j) : |H^j|_{r,\alpha-j} < \infty\},$$

muni de la norme $|\cdot|_{r,\alpha-j}$, et, comme dans (4.2.2), on identifie $Y_{r,\alpha}^i$ à $Y \times Z$, où $Y = Y_{r,\alpha}^{i-1}$ et $Z = Z_{r,\alpha}^i$. Du fait que les "dérivées" introduites dans l'appendice 2 vérifient la formule de Faa-di Bruno, la démonstration est alors la même que dans (4.2.2), aux différences suivantes près :

- L'application linéaire $Z \rightarrow Z$ associée à l'application affine v_H :

$z \mapsto \hat{\Phi}^i(H, z)$ est cette fois-ci

$$z \mapsto (x \mapsto P_{\hat{\Phi}^0(H^0)(x), x} \cdot \text{Dg}(H^0(A(x))) \cdot P_{A(x), H^0(A(x))} \cdot z(A(x)) \cdot (D(f^{-1})(x))^{\otimes i}).$$

Le transport parallèle étant isométrique, on en déduit la même majoration que précédemment pour $\text{Lip}(v_H)$.

- Dans la définition des applications B et C du lemme 5, il faut de même remplacer $D^j g(H^0(A(x)))$ par

$$P_{\hat{H}^0(H^0)(x), x} \cdot D^j g(H^0(A(x))) \cdot (P_{A(x), H^0(A(x))})^{\otimes j}.$$

Je laisse le lecteur s'assurer que, grâce à l'hypothèse (i) du théorème et à (1)(iii), le lemme 5 reste vrai. ■

(A6. 2) Preuve directe du théorème 2 de (4.2.3).

Les hypothèses et les notations sont celles de (4.2.3), théorème 2 (ii). Nous allons expliquer rapidement comment éviter la procédure d'extension employée dans sa preuve, et donc se dispenser de l'hypothèse supplémentaire nécessaire à cette extension. Pour simplifier l'exposé, nous supposons que $k = \infty$. Nous ferons également l'hypothèse (non restrictive : cf. (4.2.3)) que h_0 est le germe de l'identité.

Soient $U \supset \Sigma$ un ouvert de Q et $f : U \rightarrow Q$ un représentant de ψ , $g : U \rightarrow Q$ un représentant de ψ et $H : U \setminus W^- \rightarrow Q$ un représentant de h . Nous supposons (ce qui revient à restreindre éventuellement U) que f et g sont des plongements. Pour chaque réel $r > 0$, nous poserons

$$\begin{cases} B_r = \left\{ x \in Q : \max \{ |x_+|, |x_-| \} \leq r \right\} \\ W_r^\pm = W^\pm \cap B_r. \end{cases}$$

Si r est assez petit, nous noterons

$$D_r = B_r \setminus f(B_r),$$

et définirons C_r^+ , c_r^+ , C_r^- et c_r^- comme les constantes optimales telles que, pour tout $x \in B_r$, on ait

$$(1) \quad \begin{cases} e^{-C_r^+} |x_+| \leq |f(x)_+| \leq e^{-c_r^+} |x_+| \\ e^{c_r^-} |x_-| \leq |f(x)_-| \leq e^{C_r^-} |x_-|. \end{cases}$$

De même, nous poserons

$$\begin{cases} K_r = \max \{ \text{Log Lip}(f|_{W_r}), \text{Log Lip}(g|_{W_r}) \} \\ L_r = \max \{ \text{Log Lip}(f^{-1}|_{W_r}), \text{Log Lip}(g^{-1}|_{W_r}) \} . \end{cases}$$

Soient c^+, C^+, c^-, C^-, K, L les constantes - dépendant seulement de $j_\Sigma^1 \varphi$ - définies par

$$\begin{cases} c^\pm = - \max \{ \text{Log} \left| \frac{\partial(f_\pm^{\pm 1})}{\partial x_\pm}(x) \right| : x \in \Sigma \} \\ C^\pm = \max \{ \text{Log} \left| \frac{\partial(f_\pm^{-(\pm 1)})}{\partial x_\pm}(x) \right| : x \in \Sigma \} \\ K = \max \{ \text{Log} |Df(x)| : x \in \Sigma \} , \quad L = \max \{ \text{Log} |D(f^{-1})(x)| : x \in \Sigma \} , \end{cases}$$

où $f_\pm(x) = f(x)_\pm$. On a par hypothèse

$$(2) \quad K \geq C^- \geq c^- > 0 < c^+ \leq C^+ \leq L$$

et

$$(3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} c_r^\pm = c^\pm, \quad \lim_{r \rightarrow 0} C_r^\pm = C^\pm \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} L_r = L, \quad \lim_{r \rightarrow 0} K_r = K.$$

Si r est assez petit, on définit donc une application $m_r : B_r \setminus W^- \longrightarrow \mathbb{N}$ et une application $y_r : B_r \setminus W^- \longrightarrow D_r$ par

$$(4) \quad y_r(x) = f^{-m_r(x)}(x) \in D_r,$$

et l'on a, d'après (1),

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\text{Log}(r/|x_+|)}{C_r^+} - 1 < m_r(x) \leq \frac{\text{Log}(r/|x_+|)}{c_r^+} \\ |x_-| (|x_+|/r)^{C_r^-/c_r^+} \leq |y_r(x)_-| \leq e^{C_r^-} |x_-| (|x_+|/r)^{C_r^-/c_r^+} . \end{cases}$$

Du fait que, pour r assez petit, on a

$$(6) \quad (i) \quad j_{W_r^+ \cup W_r^-}^\infty f = j_{W_r^+ \cup W_r^-}^\infty g$$

$$(6) \quad \begin{cases} (ii) & j_{W_r^+ \setminus W^-}^\infty H = j_{W_r^+ \setminus W^-}^\infty \text{id}_Q \\ (iii) & H(f(x)) = g(H(x)) \quad , \quad x \in B_r \setminus W^- \end{cases}$$

nous déduirons le résultat cherché :

THÉORÈME. - Pour tout $r > 0$ assez petit et tout entier $k \geq 0$, le jet $j_x^k H$ tend vers $j_y^k \text{id}$ quand $x \in B_r \setminus W^-$ tend vers $y \in W_r^-$, et ce uniformément par rapport à x et y .

I - Preuve du théorème si $k = 0$.

Soient $R > r > 0$ deux réels assez petits pour que m_r soit définie et que $H|_{B_r} = g \circ H \circ f^{-1}|_{B_r}$, et vérifiant $H(B_r) \subset B_R \subset U$ (inclusion "a priori" justifiable par les calculs ci-dessous). Etant donné x dans $B_r \setminus W^-$, posons

$$\begin{cases} m = m_r(x) \\ u^j = f^{-j}(x) \in B_r \setminus W^- \quad , \quad 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} d(H(u^j), u^j) &= d(g(H(u^{j+1})), f(u^{j+1})) \leq \\ &\leq d(g(H(u^{j+1})), g(u^{j+1})) + d(g(u^{j+1}), f(u^{j+1})) \leq \\ &\leq e^{KR} d(H(u^{j+1}), u^{j+1}) + d(g(u^{j+1}), f(u^{j+1})) \end{aligned}$$

pour $0 \leq j \leq m-1$, d'où

$$(7) \quad d(H(x), x) \leq e^{mKR} d(H(u^m), u^m) + \sum_{j=0}^{m-1} e^{jKR} d(g(u^{j+1}), f(u^{j+1})) .$$

Pour chaque réel $\alpha > 0$, soit $K_{r,\alpha}$ un réel vérifiant

$$d(H(u), u) \leq K_{r,\alpha} |u_-|^\alpha \quad , \quad u \in D_r .$$

Si

$$\mu(u) = \min \{ |u_+| , |u_-| \} \quad , \quad u \in Q \quad ,$$

il existe pour tout $\beta > 0$ un réel $K'_{r,\beta}$ tel que l'on ait

$$d(g(u), f(u)) \leq K'_{r, \beta} \mu(u)^\beta, \quad u \in B_r.$$

Or (d'après (1)-(3) et puisque r est petit), la suite $(|u_+^j|)$ (resp. $(|u_-^j|)$) est strictement croissante (resp. décroissante). Donc, de trois choses l'une :

(a) Pour $|x_+| > |x_-|$, on a $\max_j \mu(u^j) = |x_-|$, et (7) entraîne donc

$$(8_a) \quad d(H(x), x) \leq e^{mK_R} K_{r, \alpha} |u_-^m|^\alpha + (e^{mK_R} - 1) K'_{r, \beta} |x_+|^\beta / (e^{K_R} - 1)$$

(b) Pour $|u_-^m| \geq |u_+^m|$, on a $\max_j \mu(u^j) = |u_+^m|$, d'où

$$(8_b) \quad d(H(x), x) \leq \left(e^{mK_R} K_{r, \alpha} + (e^{mK_R} - 1) K'_{r, \alpha} / (e^{K_R} - 1) \right) |u_-^m|^\alpha.$$

(c) Dans le cas restant, il existe un (unique) $k \in \{1, \dots, m\}$ vérifiant $|u_+^{k-1}| \leq |u_-^{k-1}|$ et $|u_+^k| > |u_-^k|$, d'où, d'après (1),

$$\begin{cases} \frac{\text{Log}(|x_-|/|x_+|)}{c_r^+ + c_r^-} < k \leq \frac{\text{Log}(|x_-|/|x_+|)}{c_r^+ + c_r^-} + 1 \\ \max_j \mu(u^j) \leq |u_-^{k-1}| \leq e^{c_r^-(1-k)} |x_-|, \end{cases}$$

et donc, si $\lambda_r = c_r^- / (c_r^+ + c_r^-)$,

$$\max_j \mu(u^j) \leq e^{c_r^-} |x_+|^{\lambda_r} |x_-|^{1-\lambda_r},$$

d'où

$$(8_c) \quad d(H(x), x) \leq e^{mK_R} K_{r, \alpha} |u_-^m|^\alpha + (e^{mK_R} - 1) K'_{r, \beta} e^{\beta c_r^-} r^{\beta(1-\lambda_r)} |x_+|^{\beta \lambda_r} / (e^{K_R} - 1).$$

Comme $u^m = y_r(x)$ et $m = m_r(x)$, on déduit de (3), (5) et (8_a)-(8_c) le lemme suivant, qui précise le théorème si $k = 0$:

LEMME 0. - Pour tout réel $r > 0$ assez petit et tout $\alpha > 0$, la fonction
 $x \mapsto d(H(x), x) / |x_+|^\alpha$ est bornée sur $B_r \setminus W^-$. □

II - Preuve du théorème pour $k > 0$.

Etant donnés $x, y \in Q$ assez proches, notons $P_{x,y} : T_y Q \longrightarrow T_x Q$ l'isométrie obtenue par transport parallèle le long de l'unique géodésique minimale joignant y à x , et $I_x = P_{x,x} = \text{id}_{T_x Q}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur y , on note P_x au lieu de $P_{x,y}$. Nous allons établir par récurrence sur k le résultat suivant, ce qui impliquera le théorème :

LEMME k. - Pour tout réel $r > 0$ assez petit et tout $\alpha > 0$, la fonction

$x \mapsto |P_x D^k H(x) - D^k \text{id}_Q(x)| / |x_+|^\alpha$ est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

Preuve du lemme 1. Avec les hypothèses et les notations de I-, on a, pour

$0 \leq j < m$,

$$\begin{aligned} |P_{u^j} DH(u^j) - I_{u^j}| &= |P_{u^j} D(g \circ H \circ f^{-1})(u^j) - D(f \circ f^{-1})(u^j)| = \\ &= |P_{u^j} \circ Dg(H(u^{j+1})) \circ DH(u^{j+1}) - Df(u^{j+1})| D(f^{-1})(u^j)| \\ &\leq \left(|P_{u^j} Dg(H(u^{j+1})) P_{H(u^{j+1}), u^{j+1}}(P_{u^{j+1}} DH(u^{j+1}) - I_{u^{j+1}})| + \right. \\ &\quad \left. + |P_{u^j} Dg(H(u^{j+1})) P_{H(u^{j+1}), u^{j+1}} - P_{u^j} Dg(u^{j+1})| + \right. \\ &\quad \left. + |P_{u^j} Dg(u^{j+1}) - Df(u^{j+1})| \right) |D(f^{-1})(u^j)|. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{cases} |P_{u^j} Dg(H(u^{j+1})) P_{H(u^{j+1}), u^{j+1}}| = |Dg(H(u^{j+1}))| \leq e^{K_R} \\ |D(f^{-1})(u^j)| \leq e^{L_R} \end{cases}$$

et (puisque r et R sont petits) il existe des constantes $k_{r,R}$ et, pour tout $\beta > 0$, $K''_{r,\beta}$ telles qu'on ait

$$\begin{cases} |P_{f(u)} Dg(v) P_{v,u} - P_{f(u)} Dg(u)| \leq k_{r,R} d(u,v), & u \in B_r, v \in B_R \\ |P_{f(u)} Dg(u) - Df(u)| \leq K''_{r,\beta} \mu(u)^\beta, & u \in B_r, \end{cases}$$

d'où

$$|P_{u^j} DH(u^j) - I_{u^j}| \leq \left(e^{K_R} |P_{u^{j+1}} DH(u^{j+1}) - I_{u^{j+1}}| + k_{r,R} d(H(u^{j+1}), u^{j+1}) + K''_{r,\beta} \mu(u^{j+1})^\beta \right) e^{L_R}.$$

On déduit donc de I- que, pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $C_{r,\alpha}$ telle que, pour $x \in B_r \setminus W^-$ et $0 \leq j < m$, on ait

$$|P_{u^j} DH(u^j) - I_{u^j}| \leq e^{K_R + L_R} |P_{u^{j+1}} DH(u^{j+1}) - I_{u^{j+1}}| + C_{r,\alpha} |x_+|^\alpha,$$

d'où

$$|P_x DH(x) - I_x| \leq e^{m(K_R + L_R)} (|P_{u^m} DH(u^m) - I_{u^m}| + C'_{r,R,\alpha} |x_+|^\alpha),$$

où $C'_{r,R,\alpha}$ est une constante. On obtient donc le lemme 1 en remarquant que, pour tout $\beta > 0$, la fonction $u \mapsto |P_u DH(u) - I_u|/|u_-|^\beta$ est bornée sur D_r .

Idee de la preuve du lemme k pour $k > 1$. Supposant le lemme i prouvé pour $0 \leq i < k$, la formule de Faa-di Bruno implique, pour $0 \leq j < m$,

$$\begin{aligned} |P_{u^j} D^k H(u^j) - D^k \text{id}_Q(u^j)| &= |D^k H(u^j)| = |D^k (g \circ H \circ f^{-1})(u^j)| \leq \\ &\leq |Dg(H(u^{j+1})) \cdot D^k H(u^{j+1}) \cdot D(f^{-1})(u^j) \otimes k| + \\ &\leq e^{K_R + kL_R} |D^k H(u^{j+1})| + B_j(x), \end{aligned}$$

où tous les $B_j(x)/|x_+|^\beta$, $0 \leq j < m$, sont majorés par une même constante sur $B_r \setminus W^-$ pour tout $\beta > 0$. Du fait que $u \mapsto |D^k H(u)|/|u_-|^\beta$ est bornée sur D_r pour tout $\beta > 0$, on conclut comme dans la preuve du lemme 1. ■

EXERCICE. - Détailler la fin de la démonstration précédente, et préciser les différentiabilités et les contacts requis pour que H se prolonge en une application C^k lorsqu'elle n'a qu'un contact d'ordre fini avec l'identité en $W^+ \setminus W^-$.

(A6.3) Preuve d'une généralisation du théorème 2 de (4.2.4); conséquences.

Les hypothèses et les notations sont celles de (A6.2); nous allons indiquer rapidement comment prouver le

THEOREME. - Pour tout nombre complexe $\lambda \neq 0$, il existe une application $m: \mathbb{N} \cup \{\infty\} \ni$ telle que $m^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la propriété suivante soit vérifiée: quel que soit le germe $\alpha_o: [Q]_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ de fonction $C^{m(k)}$ satisfaisant

$$0 = \left(j^{m(k)} (\alpha_o \circ \varphi - \lambda \varphi) \right) \Big|_{W^+ \cup W^-} ,$$

tout germe $\alpha: [Q \setminus W^-]_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ de fonction $C^{m(k)}$ vérifiant

$$\begin{cases} \lambda \alpha = \alpha \circ \varphi|_{Q \setminus W^-} \\ 0 = \left(j^{m(k)} (\alpha - \alpha_o) \right) \Big|_{W^+ \setminus W^-} \end{cases}$$

se prolonge en un unique germe $\hat{\alpha}: [Q]_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ de fonction continue, qui est de classe C^k et satisfait

$$\begin{cases} \hat{\alpha} \circ \varphi = \lambda \hat{\alpha} \\ 0 = \left(j^k (\hat{\alpha} - \alpha_o) \right) \Big|_{W^-} . \end{cases}$$

Démonstration. Comme elle est tout à fait semblable (en plus simple) à celle de (A6.2), nous nous contenterons de quelques indications, en nous bornant au cas où $k = \infty$.

Soient a et a_o des représentants de α et α_o respectivement. Etant donnés $r > 0$ assez petit et $x \in B_r \setminus W^-$, on a, avec les notations de (A6.2) I-, pour $0 \leq j < m$,

$$\begin{aligned} |(a - a_o)(u^j)| &= |\lambda a(u^{j+1}) - a_o(f(u^{j+1}))| \leq \\ &\leq |\lambda| \cdot |(a - a_o)(u^{j+1})| + |(\lambda a_o - a_o \circ f)(u^{j+1})| . \end{aligned}$$

La fonction $u \mapsto |(\lambda a_o - a_o \circ f)(u)| / \mu(u)^\beta$ est bornée sur B_r pour tout $\beta > 0$. Pour tout $\delta > 0$, il existe donc une constante $C_{r,\delta}$ telle qu'on ait

$$|(\lambda a_o - a_o \circ f)(u^j)| \leq C_{r,\delta} |x_+|^\delta, \quad 1 \leq j \leq m ,$$

d'où

$$|(a - a_0)(x)| \leq |\lambda|^m \cdot |(a - a_0)(u^m)| + (1 + |\lambda| + \dots + |\lambda|^{m-1}) C_{r,\delta} |x_+|^\delta.$$

Comme la fonction $u \mapsto |(a - a_0)(u)|/|u_-|^\beta$ est bornée sur $D_r \setminus W^+$ pour tout $\beta > 0$, on en déduit le

LEMME 0. - Quels que soient $r > 0$ assez petit et $\beta > 0$, la fonction $x \mapsto |(a - a_0)(x)|/|x_+|^\beta$ est bornée sur $B_r \setminus W^-$. \square

Comme dans (A6.2), on démontre alors le théorème en prouvant par récurrence sur l'entier $k > 0$ le

LEMME k. - Quels que soient $r > 0$ assez petit et $\beta > 0$, la fonction $x \mapsto |D^k(a - a_0)(x)|/|x_+|^\beta$ est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

Je laisse le lecteur s'en assurer. ■

COROLLAIRE. - Soient \mathcal{E} l'algèbre complexe des germes $[Q]_\Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonctions C^∞ , et φ^* l'automorphisme $\alpha \mapsto \alpha \circ \varphi$ de \mathcal{E} . Tout nombre complexe $\lambda \neq 0$ est valeur propre de φ^* , et le sous-espace propre associé est de dimension infinie.

Démonstration. Etant donné un nombre complexe $\lambda \neq 0$, nous allons voir que l'espace E_λ des vecteurs propres $\hat{\alpha}$ de φ^* associés à λ et tels que

$$0 = (j^\infty \hat{\alpha})|_{W^+ \cup W^-}$$

est de dimension infinie. D'après le théorème (avec $\alpha_0 = 0$), il suffit de construire les germes $\alpha : [Q \setminus W^-]_\Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonctions C^∞ avec $0 = (j^\infty \alpha)|_{W^+}$ et $\lambda \alpha = \alpha \circ \varphi|_{Q \setminus W^-}$. Pour tout représentant a d'un tel α et tout $r > 0$ assez petit, $a|_{B_r \setminus W^-}$ est déterminé par $a|_{D_r}$ et la relation $\lambda a = a \circ f|_{B_r \setminus W^-}$. Pour construire $a|_{D_r}$, remarquons que, si $\partial_0 D_r = D_r \cap \{|x_+| = r\}$ et $\partial_1 D_r = B_r \cap f(\partial_0 D_r)$, les seules conditions requises sont les suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i)} & 0 = j_{D_r \cap W^+}^\infty a \\ \text{(ii)} & j_{\partial_1 D_r}^\infty a = \lambda (j_{\partial_0 D_r}^\infty a) \circ j_{\partial_1 D_r}^\infty (f^{-1}) . \end{cases}$$

Il suffit donc de prendre pour $j_{\partial_0 D_r}^\infty a$ le jet en $\partial_0 D_r$ de n'importe quelle fonction $Q \rightarrow \mathbb{C}$ plate en W^+ , de définir $j_{\partial_1 D_r}^\infty a$ par (ii) et $j_{D_r \cap W^+}^\infty a$ par (i), et d'obtenir $a|_{D_r}$ en remarquant ((1.3), théorème 2) que la section s de la projection-source $J^\infty(Q, \mathbb{C}) \rightarrow Q$ au-dessus de $A = (D_r \cap W^+) \cup \partial_0 D_r \cup \partial_1 D_r$ ainsi définie est holonome, puis (exercice, d'ailleurs clairement inutile) en étendant à $\overline{D_r}$ un germe de fonction ayant s pour jet en A . Comme les $[j_{\partial_0 D_r}^\infty a]|_{\partial_0 D_r \cap W^+}$ forment un espace vectoriel de dimension infinie, il en va a fortiori de même des $\alpha \in E_\lambda$. ■

EXERCICE (autre démonstration du théorème de linéarisation de Sternberg). -

Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, formellement linéarisable et de partie linéaire

$\varphi^1 = D\varphi(0)$ semi-simple et hyperbolique, se ramener d'abord (comme toujours)

au cas où $j^\infty(\varphi - \varphi^1)|_{W^+ \cup W^-} = 0$, puis (dans le domaine de Siegel) utiliser

la même méthode que dans la preuve du corollaire pour établir le fait suivant :

il existe des germes $x^1, \dots, x^n : [\mathbb{R}^n]_0 \rightarrow \mathbb{C}$ de fonctions C^∞ vérifiant

$\{\overline{x^1}, \dots, \overline{x^n}\} = \{x^1, \dots, x^n\}$ et $\varphi^* x^i = \lambda_i x^i$, $1 \leq i \leq n$, où les λ_i sont les

valeurs propres (du complexifié) de φ^1 , et tels qu'en outre les $Dx^i(0)$

forment une base de l'espace vectoriel complexe $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (le corollaire

montre donc combien la linéarisation est loin d'être unique).

(A6.4) Une version (semi-) locale du théorème (6.2.1).

Nous allons commencer par énoncer et prouver ce résultat, dont nous montrerons ensuite qu'il implique le théorème (6.2.1). Nous terminerons par quelques commentaires sur ses applications aux germes d'actions de groupes élémentaires.

On se donne une variété N , un compact $B \subset N$, un ensemble fini $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ de sous-variétés compactes $M \subset B$ de N , et un germe $\nu: [N]_B \rightarrow \mathbb{R}$ de C^∞ -difféomorphisme possédant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, on a $\nu(M) = M$, et il existe deux espaces euclidiens $E_M^+ = E^+$ et $E_M^- = E^-$ et un germe $\mathcal{C}_M: [N]_M \rightarrow [Q]_\Sigma$ de C^∞ -difféomorphisme, où $Q = M \times E^+ \times E^-$ et $\Sigma = M \times \{0\} \times \{0\} \subset Q$, tels que $\varphi = \mathcal{C}_M \circ \nu|_M$ vérifie les hypothèses de (4.2.3), théorème 2 (ii).

(ii) Pour chaque $M \in \mathfrak{M}$, il existe deux germes Z_M^+ et Z_M^- en B de parties de N possédant la propriété suivante : quels que soient l'ouvert $U \supset B$ de N et le plongement $\psi: U \rightarrow N$ représentant ν , il existe un voisinage ouvert de B dans U tel que, pour tout voisinage ouvert W de B dans V et tout $M \in \mathfrak{M}$, la variété stable (resp. instable) de $\psi|_W$ en M ait germe Z_M^+ (resp. Z_M^-).

(iii) Il existe une fonction $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, si $\beta_1 < \dots < \beta_m$ désignent les valeurs de f et si l'on note

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_i^+ = \bigcup_{f(M) \leq \beta_i} Z_M^+ & \text{et} & \hat{\mathcal{H}}_i^- = \bigcup_{\beta_i \leq f(M)} Z_M^- , & 1 \leq i \leq m \\ \hat{\mathcal{H}}_{m+1}^- = \hat{\mathcal{H}}_0^+ = \emptyset , \end{cases}$$

les $\hat{\mathcal{H}}_i^+$, $\hat{\mathcal{H}}_i^-$, $1 \leq i \leq m$ et les $\hat{\mathcal{H}}_i^+ \setminus Z_M^+$, $\hat{\mathcal{H}}_i^- \setminus Z_M^-$ avec $f(M) = \beta_i$, $1 \leq i \leq m$, soient des germes d'ensembles fermés, vérifiant

$$(9) \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_i^+ \cap \hat{\mathcal{H}}_i^- = \bigcup_{f(M) = \beta_i} Z_M^+ \cup Z_M^- , & 1 \leq i \leq m \\ \hat{\mathcal{H}}_i^+ \cap \hat{\mathcal{H}}_{i+1}^- = \emptyset , & 0 \leq i \leq m . \end{cases}$$

On pose

$$\mathcal{H}_i = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} (Z_M^+ \cup Z_M^-) \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{H}}_{i,k} = \hat{\mathcal{H}}_i^+ \cup \hat{\mathcal{H}}_k^- , \quad 0 \leq i < k \leq m .$$

THÉORÈME. - Sous les hypothèses précédentes, quels que soient les entiers i
et k avec $0 \leq i < k \leq m+1$, il existe une application $u_{i,k} : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \ni$ avec
 $u_{i,k}^{-1}(\infty) = \infty$, possédant la propriété suivante : pour chaque $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,
chaque germe $\mu : [N]_B \ni$ de $C^{u_{i,k}(q)}$ -difféomorphisme vérifiant
 $j_{\mathcal{H}}^{u_{i,k}(q)} \mu = j_{\mathcal{H}}^{u_{i,k}(q)} \nu$ et chaque germe $h_0 : [N]_B \ni$ de $C^{u_{i,k}(q)}$ -difféomor-
phisme tel que

$$(10) \quad \begin{cases} j_{\mathcal{H}}^{u_{i,k}(q)} (h_0^* \nu) = j_{\mathcal{H}}^{u_{i,k}(q)} \nu \\ h_0(Z_M^+) = Z_M^+ \text{ et } h_0(Z_M^-) = Z_M^-, \quad M \in \mathbb{M}, \end{cases}$$

la propriété suivante est vérifiée : tout germe $h : [N]_B \setminus \hat{\mathcal{H}}_{i,k} \longrightarrow N$ d'appli-
cation $C^{u_{i,k}(q)}$ satisfaisant

$$(11) \quad \begin{cases} j_{\mathcal{H} \setminus \hat{\mathcal{H}}_{i,k}}^{u_{i,k}(q)} h = j_{\mathcal{H} \setminus \hat{\mathcal{H}}_{i,k}}^{u_{i,k}(q)} h_0 \\ \mu \circ h = h \circ \nu \mid [N]_B \setminus \hat{\mathcal{H}}_{i,k} \end{cases}$$

se prolonge en un unique germe $\bar{h} : [N]_B \ni$ d'application continue, qui est en
fait un germe de C^q -difféomorphisme vérifiant

$$\begin{cases} j_{\mathcal{H}}^q \bar{h} = j_{\mathcal{H}}^q h_0 \\ \bar{h}^* \mu = \nu. \end{cases}$$

Démonstration. Par récurrence "descendante" sur $k-i$: si $k-i = m+1$, on
 a $\hat{\mathcal{H}}_{i,k} = \emptyset$, et il n'y a rien à prouver - l'application $u_{0,m+1}$ peut être
 choisie égale à l'identité.

Etant donné un entier p avec $0 < p < m+1$, supposons donc construites
 les applications $u_{i,k}$ du théorème pour $k-i = p+1$.

Soient i et k deux entiers vérifiant $0 \leq i < k \leq m+1$ et $k-i = p$.
 On a $i > 0$ ou $k < m+1$. Supposons donc par exemple $k < m+1$ (l'autre cas se
 traite exactement de même, en remplaçant ν par ν^{-1}). Soit

$u_k = \max \{ u_M : f(M) = \beta_k \}$, où u_M désigne l'application u associée à

$\varphi = \mathfrak{C}_M * [\nu]_M$ par le théorème 2 (ii) de (4.2.3). Par le même argument que dans la preuve du théorème (6.2.1), nous allons voir que $u_{i,k} = u_k \circ u_{i,k+1}$ vérifie les conditions de notre théorème : étant donnés $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et μ , h_0 et h vérifiant (10) et (11) pour ce choix de $u_{i,k}$, considérons pour chaque $M \in f^{-1}(\beta_k)$ le germe $[h]_M$; d'après (9), on a $[\hat{\mathcal{H}}_{i,k}]_M = [Z_M^-]_M$ et, avec les notations de (i), $\mathfrak{C}_M([Z_M^-]_M) = [M \times \{0\} \times E^-]_\Sigma$. Il résulte donc de (4.2.3), théorème 2 (ii) que $[h]_M$ se prolonge en un unique germe $[N]_M \curvearrowright$ de $C^{u_{i,k+1}(q)}$ - difféomorphisme, ayant un contact d'ordre $u_{i,k+1}(q)$ avec h_0 en $[Z_M^-]_M$. Par définition de Z_M^- et d'après (10)-(11), h se prolonge donc en un unique germe $[N]_B \setminus \hat{\mathcal{H}}_{i,k} \setminus Z_M^- \rightarrow N$ d'application $C^{u_{i,k+1}(q)}$ (ce qui a un sens car $\hat{\mathcal{H}}_{i,k} \setminus Z_M^-$ est un germe de fermé), ayant un contact d'ordre $u_{i,k+1}(q)$ avec h_0 en Z_M^- . En appliquant le même traitement à tous les $M \in f^{-1}(\beta_k)$, on voit donc que h se prolonge en un unique germe $h' : [N]_B \setminus \hat{\mathcal{H}}_{i,k+1} \rightarrow N$ d'application $C^{u_{i,k+1}(q)}$, tel que (10)-(11) soient vérifiés lorsqu'on y remplace (k, h) par $(k+1, h')$. D'après l'hypothèse de récurrence, cela achève la démonstration. ■

EXERCICE. - Expliciter la phrase "Par définition de Z_M^- et d'après (10)-(11), h se prolonge..." dans la démonstration précédente.

Pourquoi le résultat précédent implique le théorème (6.2.1).

Sous les hypothèses et avec les notations de celui-ci, il est clair que

$$B = \bigcup_{I \in \mathfrak{J}} Y_I^+ \cap \bigcup_{J \in \mathfrak{J}} Y_J^- = \bigcap_{q \in \mathbb{Z}} \Phi^q \left((f_{\mathcal{H}})^{-1}([Y_1, Y_m]) \right)$$

est compact. Pour prolonger H à N toute entière, il suffit évidemment de prolonger $[H]_B$ à $[N]_B$, puis d'utiliser la définition des Y_I^+ , Y_I^- et la relation $\psi \circ H = H \circ \varphi$.

Pour déduire le théorème (6.2.1) du résultat "local" que nous venons de prouver, il n'y a donc qu'à remarquer que les hypothèses de celui-ci sont

vérifiées par $v = [\phi]_B$ en prenant $\mathfrak{M} = \{M_I : I \in \mathfrak{J}\}$ et $Z_{M_I}^\pm = [Y_I^\pm]_B$, $I \in \mathfrak{J}$: c'est évidemment le cas de l'hypothèse (i); pour (ii) et (iii), il suffit d'ajouter à la proposition (6.2.1) les faits suivants : les

$$U_n = \bigcap_{-n \leq k \leq n} \phi^k \left((f|_{\mathcal{U}})^{-1} \left([\gamma_1 - \frac{1}{n+1}, \gamma_m + \frac{1}{n+1}] \right) \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

constituent une base du filtre des voisinages de B dans \mathcal{U} et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $I \in \mathfrak{J}$, on a $\phi(U_n \cap Y_I^+) \subset U_n \cap Y_I^+$ et $\phi^{-1}(U_n \cap Y_I^-) \subset U_n \cap Y_I^-$. ■

Pourquoi cet énoncé "germique" intervient très naturellement dans le chapitre trois et (8.4), et à quoi il peut servir dans ce contexte.

Commençons par une remarque importante :

PROPOSITION. - Avec les notations de (5.2), $\mathcal{V}_j \cap Q_c = \bigcup_{I \in \mathfrak{J}_c} W_{c,I}^+ \cap \bigcup_{J \in \mathfrak{J}_c} W_{c,J}^-$.

Preuve. Comme $\mathcal{V}_j \cap Q_c$ est compact et invariant par le flot (ϕ_c^t) , le théorème 2 de (5.2) entraîne l'inclusion du membre de gauche dans celui de droite. Inversement, étant donnés $I, J \in \mathfrak{J}_c$, de deux choses l'une : si $I = J$, on a bien $W_{c,I}^+ \cap W_{c,I}^- = \Sigma_{c,I} \subset \mathcal{V}_j$ ((5.2), proposition 6) ; pour $I \neq J$, on a $W_{c,I}^+ \cap W_{c,J}^- \subset E_{I_0^+ \cap J_0^-}$ ((5.2), théorème 1) ; or, pour tout $i \in I_0^+ \cap J_0^-$, on a par définition $\langle c_i, u - g_I \rangle \leq 0 \leq \langle c_i, u - g_J \rangle$ et donc $\langle c_i, g_J - g_I \rangle \leq 0$. Comme $g_J - g_I \in H_j \setminus \{0\}$, il résulte bien de (4.4.1), Proposition 1 que $E_{I_0^+ \cap J_0^-}$ est contenu dans une v.f.i. de σ_j . ■

L'application typique du théorème (6.2.1) est la proposition 1 de (6.2.2) ; sous les hypothèses de celle-ci, la proposition que nous venons de prouver implique que le compact B n'est autre que $(\mathcal{V}_j \cap Q_c) \times (H_j / \Gamma)$; il est donc clair que, dans toute la section (6.2.2), on peut remplacer (par "germification" le long des divers \mathcal{V}_j) le théorème (6.2.1) par le résultat "local" ci-dessus.

Bien plus, celui-ci permet en fait d'obtenir le théorème de la section

6- en évitant complètement la procédure d'extension (6.1.2). Lorsqu'il s'agit comme dans 6- de linéarisations, la preuve donnée dans le chapitre 3 est probablement plus simple ; il n'en va sans doute plus de même du théorème plus général suivant (démontré dans ma thèse par la méthode de la section 6-, et qui sera publié ultérieurement), pour lequel l'analogue de (6.1.2) est un peu délicat :

THÉOREME. - Soient G un groupe élémentaire et ρ, ρ' deux germes faiblement hyperboliques d'actions C^∞ de G sur des variétés de dimension finie. Si ρ et ρ' sont formellement isomorphes, ils sont C^∞ -isomorphes.

(A6-5) Version infinitésimale du théorème (A6-1).

Les notations $M, M_0, V, E, F, Q, W, \Sigma, d, G, B_r, W_r, \mathfrak{F}, \mathcal{W}, x_-$ ont la même signification que dans (A6-1) ; pour chaque vecteur v tangent en x à Q , on désigne par v_- la projection orthogonale de v sur $T_{x_-}F = F$, c'est-à-dire l'image de v par la différentielle en x de $y \mapsto y_-$. On notera $J^k(TQ)$ l'espace des jets d'ordre k de champs de vecteurs sur Q , et $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire riemannien dans chaque espace tangent à Q .

On se donne un germe $\beta : [W]_{\mathcal{W}} \rightarrow J^\infty(TQ)$ d'application, de la forme $\beta = [(j^\infty X)|_{\mathcal{W}}]_{\mathcal{W}}$, où X est un champ de vecteurs C^∞ sur un ouvert U de Q , possédant les propriétés suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad U \cap W \text{ appartient à } \mathcal{W}. \\ \text{(ii)} \quad \text{Pour tout } x \text{ dans } U \cap W, X(x) \text{ appartient à } T_x W. \\ \text{(iii)} \quad \text{Il existe un borné } K \text{ de } U \text{ et un endomorphisme } b \text{ de } V \times E \text{ tels que,} \\ \text{si } \tau \in M_0 \text{ et } v \in V \times E \text{ vérifient } (\tau, v) \in U \setminus K, \text{ alors } X(\tau, v) = (0, bv). \\ \text{(iv)} \quad \text{Il existe } \lambda > 0 \text{ tel que, pour tout } x \text{ dans } U \cap W, \text{ on ait} \\ (X(x)_- | x_-) \geq \lambda |x_-|^2, \text{ où } |x_-|^2 = (x_- | x_-). \end{array} \right.$$

On pose

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \liminf_{r \rightarrow 0} \{ (X(x) - |x_-|) / |x_-|^2 : x \in U \cap W \text{ et } 0 < |x_-| < r \} = \\ = \inf \{ (DX(x)y|y) / |y|^2 : x \in \Sigma \text{ et } y \in F \setminus \{0\} \} \geq \lambda > 0 ; \\ \mu^+ = \sup \{ L_X G(x)(y,y) / |y|^2 : x \in \Sigma \text{ et } y \in T_x Q \setminus \{0\} \} \geq \lambda_0 > 0 ; \\ \mu^- = \inf \{ L_X G(x)(y,y) / |y|^2 : x \in \Sigma \text{ et } y \in T_x Q \setminus \{0\} \} , \end{array} \right.$$

où L_X est la dérivée de Lie ((12)(iii) entraîne $\mu^+ \geq \lambda_0$) et, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(k) = \begin{cases} k+1 + \lceil (\mu^+ - k\mu^-) / \lambda_0 \rceil & \text{pour } \mu^+ > k\mu^- \\ \lfloor \mu^+ / \mu^- \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ t(k) = \max \{k, s(k)\} , \end{array} \right.$$

où $\lceil . \rceil$ désigne la partie entière, et

$$(15) \quad s(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(k) \text{ et } t(\infty) = \infty .$$

Si l'on note \underline{d}^k (resp. \underline{p}^k) l'espace des germes suivant \mathfrak{Y} de C^k -champs de vecteurs (resp. le groupe des germes $[Q]_{\mathfrak{Y}}^k$ de C^k -difféomorphismes), voici la version infinitésimale annoncée de (A6-1), théorème 1 :

THÉOREME. - Soit σ un élément de $\underline{d}^{t(k)}$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, admettant un représentant Y tel que

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{\Sigma}^{s(k)}(Y-X) = 0 \text{ et} \\ Y = X \text{ en dehors d'un borné.} \end{array} \right.$$

Si (f^{τ}) et (g^{τ}) désignent respectivement les flots de X et de Y , il existe alors un réel $r_0 > 0$ et une section holonome H de la projection-source

$J^k(Q, Q) \rightarrow Q$ au-dessus de W_{r_0} tels que, pour tout $r \in]0, r_0[$, la famille

$(j_{W_r}^k(g^{\tau} \circ f^{-\tau}))_{\tau \geq 0}$ soit bien définie, converge uniformément vers $H|_{W_r}$ quand

τ tend vers l'infini, et ne dépende que de $j_{W_r}^k X$ et de $Y|_{B_r}$.

Le germe $\eta = [H]_{W_r}$ ne dépend donc que de β et de σ , et non du choix de

X et Y . En outre, il existe $h \in \underline{d}^k$ tel que $\eta = (j^k h)|_W$, et l'on a

$$(ii) \quad j_{\Sigma}^k h = j_{\Sigma}^k \text{id}_Q$$

$$(iii) \quad j^k (h^* \sigma - [X]_{\mathfrak{F}}) |_W = 0.$$

(Ces deux conditions ne font intervenir que β , σ et η : on n'y a introduit X et h que par commodité d'écriture).

Idée de la démonstration. Remarquons d'abord que, d'après (12)(iv), on a forcément $X(x)_- = 0$ pour tout $x \in \Sigma$, ce qui prouve que X est tangent à Σ en chacun de ses points, en vertu de (12)(ii). Par (3.1.3) Corollaire 2 et (12)(iii), il en résulte que, pour chaque $x \in \Sigma$, $f^{\tau}(x)$ est bien défini et appartient à Σ quel que soit le réel τ . Par conséquent, (12)(iii) et l'hypothèse (i) du théorème impliquent l'existence d'un ouvert $U \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $\tau \in [0, 1]$, $f^{\tau}|_U$ et $g^{\tau}|_U$ soient des plongements bien définis, ayant pour germes suivant \mathfrak{F} des éléments de \underline{D}^{∞} et $\underline{D}^{t(k)}$ respectivement.

Pour tout τ dans $]0, 1[$, les hypothèses du théorème (A6-1) sont vérifiées par $(f, g) = (f^{\tau}, g^{\tau})$, avec $c \leq e^{-\lambda \tau}$, $c_0 \leq e^{-\lambda_0 \tau}$, $K_0 \leq e^{\mu^+ \tau}$ et $L_0 \leq e^{-\mu^- \tau}$, comme on le voit en utilisant le

LEMME. - Pour tout réel $T > 0$ et toute fonction $\varphi : [0, T] \rightarrow [0, +\infty[$ de classe C^1 , s'il existe un réel α tel qu'on ait $\varphi'(\tau) \leq \alpha \varphi(\tau)$ pour tout $\tau \in [0, T]$, alors on a $\varphi(\tau) \leq e^{\alpha \tau} \varphi(0)$ pour $0 \leq \tau \leq T$.

(En effet, pour $\alpha \geq 0$, notre hypothèse entraîne que chacune des fonctions de classe C^1 $\tau \mapsto \text{Log}(\varphi(\tau) + \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ a une dérivée majorée par α ; pour $\alpha < 0$, si φ s'annule en un point p , alors elle s'annule sur $[p, T]$, puisqu'on y a $0 \leq \varphi(\tau) = \int_p^{\tau} \varphi'(u) du \leq \alpha \int_p^{\tau} \varphi(u) du \leq 0$; par conséquent, pour $\varphi(p) \neq 0$, la fonction $\tau \mapsto \text{Log} \varphi(\tau)$ est bien définie et de classe C^1 sur $[0, p]$, et sa dérivée est majorée par α , d'où le lemme.)

Voici comment on utilise ce lemme pour déduire de (12)(iv) que la condition (1)(iv) de (A6.1) est vérifiée sur W_r par $f = f^{\tau}$ avec $c \leq e^{-\lambda \tau}$ pour tout $\tau > 0$ et tout $r > 0$ avec $W_r \subset U$: quels que soient $x \in W_r$ et $T > 0$ tel que $f^{\tau}(x)$ soit défini pour tout $\tau \in [0, T]$, on a $\frac{d}{d\tau} |f^{-\tau}(x)_-|^2 = -2(X(f^{-\tau}(x))_-, |f^{-\tau}(x)_-| <$

$\leq -2\lambda |f^{-\tau}(x)_-|^2$ pour $0 \leq \tau \leq T$, et donc $|f^{-T}(x)_-|^2 \leq e^{-2\lambda T} |x_-|^2$ d'après le lemme.

On en déduit, grâce à (12)(ii), que $f^{-\tau}(x)$ est défini, appartient à W_r et vérifie

bien $|f^{-\tau}(x)_-| \leq e^{-\lambda \tau} |x_-|$ pour tout $\tau \geq 0$. En outre, il est clair que l'on peut

dans ce qui précède remplacer λ par le plus grand réel λ_r tel qu'on ait

$(X(x)_- |x_-) \geq \lambda_r |x_-|^2$ pour tout x dans W_r .

De même, quels que soient $x \in \Sigma$ et $\tau \geq 0$, on a

$$(16) \quad \begin{aligned} |Df^{\tau}(x)|^2 &= \sup \{ |Df^{\tau}(x).y|^2 / |y|^2 : y \in T_x Q \setminus \{0\} \} = \\ &= \sup \{ (f^{\tau*} G)(x).y^2 / |y|^2 : y \in T_x Q \setminus \{0\} \}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in T_x Q$, on a, par définition de la dérivée de Lie,

$$\frac{d}{d\tau} (f^{\tau*} G)(x).y^2 = (f^{\tau*} L_X G)(x).y^2 = L_X G(f^{\tau}(x)).(Df^{\tau}(x).y)^2$$

et donc, par (13),

$$\frac{d}{d\tau} (f^{\tau*} G)(x).y^2 \leq \mu^+ |Df^{\tau}(x).y|^2 = \mu^+ (f^{\tau*} G)(x).y^2,$$

d'où, grâce au lemme,

$$(f^{\tau*} G)(x).y^2 \leq e^{\mu^+ \tau} |y|^2;$$

On déduit donc de (16) que le nombre K_0 défini par (A6.1) (2) si $f = f^{\tau}$ avec

$\tau \geq 0$ vérifie $K_0 \leq e^{\mu^+ \tau}$. Sous les mêmes hypothèses, le même argument montrera au

lecteur que l'on a $L_0 \leq e^{-\mu^- \tau}$ et $c_0 \leq e^{-\lambda_0 \tau}$ (pour ce dernier point, utiliser la définition (4) de c_0).

Pour chaque réel $\tau \geq 0$, les applications s et t associées à $f = f^{\tau}$ dans (A6.1) par (5) sont donc majorées par les applications s et t que nous venons de définir par (14). La preuve de (A6.1), théorème 1, appliquée à $(f, g) = (f^{\tau}, g^{\tau})$ pour $0 < \tau \leq 1$, nous dit donc la chose suivante : il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $\tau \in]0, 1]$, la suite $(j_{W_{r_0}}^k (g^{n\tau} \circ f^{-n\tau}))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie et converge uniformément vers une section holonome H_{τ} de la projection-source $J^k(Q, Q) \rightarrow Q$ au-dessus de W_{r_0} (l'existence d'un r_0 qui soit le même pour tout τ se déduit de majorations utilisant comme les précédentes le lemme ; de manière précise, les nombres ainsi majorés sont les K_r , L_r , c_r et $d_{r, \alpha}^0(f, g)$ définis dans (4.2.2)). En outre,

pour $0 < \tau \leq 1$ et $0 < r \leq r_0$, la restriction $H^\tau|_{W_r}$ ne dépend que de $j_{W_r}^k X$ et de $Y|_{B_r}$; enfin, une version à paramètre de (4.2.1) (exercice) montre que H_τ dépend continûment de τ .

Quels que soient l'entier $m > 0$ et $\tau \in]0, \frac{1}{m}]$, on a évidemment $H_{m\tau} = H_\tau$; par conséquent, les H_τ avec τ rationnel sont tous égaux, et la dépendance continue de H_τ par rapport à τ entraîne donc que tous les H_τ sont égaux à une même section holonome H de la projection-source $J^k(Q, Q) \rightarrow Q$; la convergence uniforme de la famille $(j_{W_{r_0}}^k (g^\tau \circ f^{-\tau}))_{\tau > 0}$ vers H (qui au fond nous importe assez peu) résulte de la version "à paramètre τ " de (4.2.1) que l'on utilise.

Par construction, $H \circ j_{W_{r_0}}^k f^\tau = (j_{W_{r_0}}^k g^\tau) \circ H$ pour $0 < \tau \leq 1$ (le \circ désignant la composition des jets); la différenciation de cette relation par rapport à τ en $\tau = 0$ donne (iii), et (ii) est évident. ■

APPENDICE 7. - COMMENT ÉTENDRE LES RÉSULTATS DU CHAPITRE 3
AU CAS NON SEMI-SIMPLE.

(A7-1) Soient $G_{\mathbf{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension finie r , et $\tilde{\rho}^1$ une représentation linéaire continue du groupe $G_{\mathbf{R}}$ dans un espace vectoriel réel E de dimension finie ; on suppose que l'action ρ^1 de $G_{\mathbf{R}}$ sur E définie par $\tilde{\rho}^1$ est faiblement hyperbolique, dans le domaine de Siegel, et l'on appelle σ sa partie semi-simple et ν sa partie nilpotente.

Soit $(x_j^{\ell})_{\substack{1 \leq \ell \leq m_j \\ 1 \leq j \leq n}}$ un système de coordonnées \mathbb{R} -linéaires complexes sur E adapté à ρ^1 , et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L(G_{\mathbf{R}}, \mathbb{C})$ et $c_1, \dots, c_n \in L(G_{\mathbf{R}}, \mathbb{R})$ les formes linéaires données par

$$x_j^{\ell} \circ \tilde{\sigma}(g) = e^{\alpha_j(g)} x_j^{\ell} \quad \text{et} \quad c_j = \Re \alpha_j, \quad 1 \leq \ell \leq m_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Définissons enfin des $e_{j,m}^{\ell} \in L(G_{\mathbf{R}}, \mathbb{C})$, $1 \leq m < \ell \leq m_j$, $1 \leq j \leq n$, par

$$x_j^{\ell} \circ \nu(g) = \sum_{1 \leq m < \ell \leq m_j} e_{j,m}^{\ell}(g) x_j^m.$$

Pour pouvoir utiliser telles quelles les notations du chapitre 3, il est commode de faire varier ρ^1 en fonction d'un paramètre $\varepsilon > 0$ (au lieu d'effectuer l'opération plus naturelle - mais équivalente - qui consisterait à faire varier les coordonnées x_j^{ℓ} en fonction de ε , l'action ρ^1 étant fixée). De manière précise, pour chaque $\varepsilon > 0$, on considère l'automorphisme T_{ε} de E défini par

$$x_j^{\ell} \circ T_{\varepsilon} = \varepsilon^{\ell-1} x_j^{\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq m_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

et l'on pose

$$\rho_{\varepsilon} = T_{\varepsilon*} \rho^1 \quad \text{et} \quad \nu_{\varepsilon} = T_{\varepsilon*} \nu.$$

Il est clair que $T_{\varepsilon*} \sigma = \sigma$, et que ν_{ε} tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Quel que soit $i \in I_n = \{1, \dots, n\}$, on pose

$$E_i = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} (x_j^\ell)^{-1}(0) ,$$

et l'on munit chaque E_i de la norme euclidienne $|\cdot|$ donnée par

$$|v|^2 = \sum_{\ell} |x_i^\ell(v)|^2 .$$

Les notations sont alors celles de 5-; on se donne :

- Une suite (H_j) de sous-espaces vectoriels de $G_{\mathbf{R}}$ satisfaisant aux hypothèses de (5.2), Proposition 1.

- Un $b \in G'_{\mathbf{R}}$ satisfaisant aux hypothèses de (5.2), Proposition 2.

THÉOREME.- Il existe une suite $\varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_r > 0$ de réels telle que, si l'on pose $\varepsilon_0 = +\infty$, les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) Pour $0 \leq j \leq r$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_j$, Q_{b_j} est un quotient de E_{b_j} par

$$\rho_{j,\varepsilon} = \rho_\varepsilon|_{H_j \times E} .$$

(ii) Pour $0 \leq j < r$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{j+1}$, soit $(\Phi_{b_j,\varepsilon}^t)_{t \in \mathbf{R}}$ le flot sur Q_{b_j} associé (étant donné un choix de $u \in H_{j+1} \setminus H_j$) à $\rho_{j+1,\varepsilon}$ comme $(\Phi_{b_j}^t)$ l'est à

σ_{j+1} dans (5.2), Proposition 3. Alors :

a) Pour chaque $I \in \mathfrak{I}_{b_j}$, le flot $(\Phi_{b_j,\varepsilon}^t)$ est simplement hyperbolique normalement à $\Sigma_{b_j,I}$, de variétés stable $W_{b_j,I}^+$ et instable $W_{b_j,I}^-$.

b) Les propriétés (ii)-(iii) de (5.2), théorème 2 sont satisfaites lorsqu'on y remplace $(\Phi_{b_j}^t)$ par $(\Phi_{b_j,\varepsilon}^t)$.

La démonstration se fait par récurrence : (i) est trivial si $j = 0$, et on a le

LEMME 1.- Etant donné $j \in \{0, \dots, r-1\}$ si $\varepsilon_j > 0$ satisfait (i) et qu'en outre $\varepsilon_{j+1} \in]0, \varepsilon_j]$ est tel que a) et b) soient satisfaites pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_{j+1}]$, alors ε_{j+1} satisfait (i) - c'est-à-dire que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{j+1}$, $Q_{b_{j+1}}$ est un quotient de $E_{b_{j+1}}$ par $\rho_{j+1,\varepsilon}$.

Preuve. - Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_{j+1}]$. Comme

$$f_{b_j}(\Sigma_{b_j, I}) = \{b_j(g_I)\} \text{ pour}$$

tout $I \in \mathcal{I}_{b_j}^+$, il résulte de a) et b) que $Q_{b_{j+1}}$ est un quotient par $(\Phi_{b_j, \varepsilon}^t)$ de

$$Q_{b_j, b_{j+1}} = Q_{b_j} \setminus \left(\bigcup_{b_j(g_I) < b_{j+1}(u)} W_{b_j, I}^+ \cup \bigcup_{b_j(g_I) > b_{j+1}(u)} W_{b_j, I}^- \right).$$

Par conséquent, $Q_{b_{j+1}}$ est un quotient par $\rho_{j+1, \varepsilon}$ de $\rho_\varepsilon(H_j \times Q_{b_j, b_{j+1}})$; en effet,

d'après l'analogie de (5.2), Proposition 3 pour $\rho_{j+1, \varepsilon}$, les orbites de $(\Phi_{b_j, \varepsilon}^t)$ sont les intersections avec Q_{b_j} de celles de $\rho_{j+1, \varepsilon}$. Pour chaque

$I \in \mathcal{I}_{b_j}^+$, $W_{b_j, I}^\pm$ est un quotient par $\rho_{j, \varepsilon}$ de l'ensemble ρ_ε -invariant

$E_{b_j, I} \cap E_{I_0^\pm}$, et l'on a donc

$$\rho_\varepsilon(H_j \times Q_{b_j, b_{j+1}}) = E_{b_j} \setminus \left(\bigcup_{b_j(g_I) < b_{j+1}(u)} (E_{b_j, I} \cap E_{I_0^+}) \cup \bigcup_{b_j(g_I) > b_{j+1}(u)} (E_{b_j, I} \cap E_{I_0^-}) \right)$$

Le même raisonnement, appliqué à σ au lieu de ρ_ε , montre donc que

$$\rho_\varepsilon(H_j \times Q_{b_j, b_{j+1}}) = \sigma(H_j \times Q_{b_j, b_{j+1}}) = \sigma(H_{j+1} \times Q_{b_{j+1}}).$$

Comme on sait que $\sigma(H_{j+1} \times Q_{b_{j+1}}) = E_{b_{j+1}}$ d'après (5.1), Corollaire 3, on a

donc $\rho_\varepsilon(H_j \times Q_{b_j, b_{j+1}}) = E_{b_{j+1}}$, ce qui prouve que $Q_{b_{j+1}}$ est un quotient de

$E_{b_{j+1}}$ par $\rho_{j+1, \varepsilon}$. \square

Commençons donc par montrer l'existence de ε_1 :

LEMME 2. - Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$, les propriétés a)
et b) soient satisfaites par le flot $(\Phi_{o, \varepsilon}^t) = (\Phi_{b_o, \varepsilon}^t)$.

Preuve. - La propriété a) est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, puisqu'elle signifie que le flot linéaire $(\Phi_{o, \varepsilon}^t)$ est hyperbolique, de variétés stable W_o^+ et W_o^- données par $W_o^\pm = \bigoplus_{\pm c_i(u) < 0} E_i$. De plus, pour chaque $v \in E_{b_o} = E$,

$$\frac{d}{dt} f_o(\Phi_{o,\varepsilon}^t(v)) = (Q + R_\varepsilon)(\Phi_{o,\varepsilon}^t(v)),$$

où Q est la forme quadratique définie positive

$$v \longmapsto df_o(v) \cdot \xi(u)v = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i(u)^2 |x_i(v)|^2,$$

et R_ε la forme quadratique $v \longmapsto df_o(v) \cdot v_\varepsilon(u)v$, qui tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Il existe donc $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $Q + R_\varepsilon$ soit définie positive. □

Etant donné $j \in \{1, \dots, r-1\}$, supposant l'existence d'un $\varepsilon_j > 0$ satisfaisant (i), nous allons établir l'existence de $\varepsilon_{j+1} \in]0, \varepsilon_j]$, vérifiant l'hypothèse du lemme 1, ce qui achèvera la démonstration. Comme dans (5.2), nous poserons

$$c = b_j.$$

LEMME 3.- Pour tout $I \in \mathcal{I}_c$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_j]$, la sous-variété $Q_{c,I}$ est un quotient de $E_{c,I}$ par $\rho_{j,\varepsilon}$. Soit $(\Phi_{c,I,\varepsilon}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot sur $Q_{c,I}$ associé à $\rho_{j+1,\varepsilon}$ comme $(\Phi_{c,I}^t)$ l'est à σ_{j+1} dans (5.2), Proposition 6. Il existe $\varepsilon_I \in]0, \varepsilon_j]$ tel que, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_I]$, $(\Phi_{c,I,\varepsilon}^t)$ soit simplement hyperbolique normalement à $\Sigma_{c,I}$, de variétés stable $W_{c,I}^+$ et instable $W_{c,I}^-$. Plus précisément, il existe alors des constantes m_I^+ , m_I^- , M_I^+ , $M_I^- < 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_I]$, tout $x \in Q_{c,I}$ et tout $t > 0$, on ait

$$\begin{cases} |x|_{I^+} e^{M_I^+ t} \leq |\Phi_{c,I,\varepsilon}^t(x)|_{I^+} \leq |x|_{I^+} e^{m_I^+ t} \\ |x|_{I^-} e^{M_I^- t} \leq |\Phi_{c,I,\varepsilon}^{-t}(x)|_{I^-} \leq |x|_{I^-} e^{m_I^- t} \end{cases}$$

Preuve. Pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_j$, le générateur infinitésimal de $(\Phi_{c,I,\varepsilon}^t)$ est

$$x \longmapsto (\xi + v_\varepsilon)(u - g_{I,\varepsilon}(x_I))(x),$$

où $g_{I,\varepsilon} : \Sigma_{c,I} \longrightarrow H_j$ est définie par

$$df_c(x) \cdot (\xi + v_\varepsilon)(u - g_{I,\varepsilon}(x))(x) = 0.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $v_\varepsilon \rightarrow 0$ et $g_{I,\varepsilon}$ tend vers la constante g_I . Il en résulte que

$$\frac{d}{dt} \left(\left| \mathfrak{t}_{c,I,\varepsilon}^{(x)} \right|_{I^\pm}^2 \right) \Big|_{t=0} = \pm (-Q_\varepsilon^\pm(x_I) - R_\varepsilon^\pm(x_I))(x_{I^\pm}) ,$$

où Q_ε^\pm et R_ε^\pm sont deux applications analytiques sur la variété compacte $\Sigma_{c,I}$ à valeurs dans les formes quadratiques sur E_{I^\pm} , et telles que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, R_ε^\pm tende vers l'application nulle et Q_ε^\pm vers une application constante ayant pour valeur une forme définie positive. \square

Choisissons des normes euclidiennes $|\cdot|$ sur H_{j+1} et sur E , soient $S_j \subset H_{j+1}$ et $S \subset E$ les boules-unité correspondantes. Nous aurons besoin du

LEMME 4. - (i) Pour chaque $I \in K_j$, $F_j|_{E_I}$ ne s'annule qu'en 0.

(ii) L'ouvert $U_c = S \setminus F_j^{-1}(\mathbf{R}_+^c)$ de S contient tous les $E_I \cap S$ avec $I \in K_j \setminus \mathcal{J}_c$.

(iii) Pour chaque $I \in \mathcal{J}_c$, les $Q_c \cap \mathbf{R}_+ U$, où U est un voisinage de $E_I \cap S$ dans S , forment une base du filtre des voisinages de $\Sigma_{c,I}$ dans Q_c .

Preuve. (i) Du fait que σ_{j+1} est faiblement hyperbolique, on a $C_{j+1,I} \neq V_{j+1,I}$.

La projection canonique $\gamma \mapsto \gamma|_{H_j}$ de H_{j+1}' sur H_j' induisant un isomorphisme $V_{j+1,I} \rightarrow H_j'$, on a donc $C_{j,I} \neq H_j'$. Par conséquent, E_I est inclus dans une v.f.i. de σ_j , et il existe donc $g \in H_j$ tel que $x \mapsto \langle F_j(x), g \rangle$ soit une norme sur E_I .

(ii) S'il existait $I \in K_j \setminus \mathcal{J}_c$, $x \in E_I \cap S$ et $\lambda \geq 0$ tels que $F_j(x) = \lambda c$, on aurait forcément $\lambda = 0$ (car sinon $\lambda^{-1/2} x$ appartiendrait à $E_I \cap Q_c = \Sigma_{c,I} = \emptyset$), et donc $x = 0$ d'après (i).

(iii) Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite (x_k) dans S , de limite $x \in E_I \cap S$, et une suite (λ_k) dans \mathbf{R}_+ telles que l'on ait $F_j(\lambda_k x_k) = c$ pour tout k et qu'en outre aucune suite extraite de $(\lambda_k x_k)$ ne tende vers $\Sigma_{c,I}$. La suite (λ_k) tendrait alors forcément vers $+\infty$, et la suite $(F_j(x_k)) = (c\lambda_k^{-2})$ vers 0. On aurait donc $F_j(x) = 0$, ce qui est impossible d'après (i). \square

LEMME 5. - Pour tout voisinage V de Σ_c dans Q_c , il existe $\varepsilon_V \in]0, \varepsilon_j]$ tel que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_V$, l'application

$$Q_c \ni x \longmapsto \frac{d}{dt} f_c(\Phi_{c,\varepsilon}^t(x))|_{t=0}$$

soit strictement positive sur $Q_c \setminus V$.

Preuve. Pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_j]$, soit $g_{c,\varepsilon} : Q_c \rightarrow H_j$ l'application qui est à $\rho_{j+1,\varepsilon}$ ce que g_c est à σ_{j+1} ; en d'autres termes, le générateur infinitésimal de $(\Phi_{c,\varepsilon}^t)$ est

$$x \longmapsto (\xi + \nu_\varepsilon)(u - g_{c,\varepsilon}(x))(x) ,$$

et $g_{c,\varepsilon}(x)$ est déterminée en chaque $x \in Q_c$ par

$$DF_j(x) \cdot (\xi + \nu_\varepsilon)(u - g_{c,\varepsilon}(x))(x) = 0 .$$

On a donc, pour tout $x \in Q_c$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_c(\Phi_{c,\varepsilon}^t(x))|_{t=0} &= \langle DF(x) \cdot (\xi + \nu_\varepsilon)(u - g_{c,\varepsilon}(x))(x), u \rangle = \\ (1) \quad &= \langle DF(x) \cdot (\xi + \nu_\varepsilon)(u - g_{c,\varepsilon}(x))(x), u - g_{c,\varepsilon}(x) \rangle = \\ &= (Q + R_\varepsilon)(u - g_{c,\varepsilon}(x))(x) , \end{aligned}$$

où Q et R_ε sont les applications quadratiques de H_{j+1} dans l'espace des formes quadratiques sur E définies par

$$\begin{cases} Q(g)(x) = \langle DF(x) \cdot \xi(g)x , g \rangle \\ R_\varepsilon(g)(x) = \langle DF(x) \cdot \nu_\varepsilon(g)x , g \rangle \end{cases}$$

Pour tout $g \in H_{j+1}$ et tout $x \in E$. Quel que soit l'ouvert U de S contenant tous les $E_I \cap S$, $I \in K_j$, l'application continue

$$(S \setminus U) \times S_j \ni (x, g) \longmapsto Q(g)(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i(g)^2 |x_i|^2$$

est à valeurs > 0 sur le compact $(S \setminus U) \times S_j$, et y est donc minorée par un nombre > 0 . Comme

$$S \times S_j \ni (x, g) \longmapsto R_\varepsilon(g)(x)$$

tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il existe donc $\varepsilon_U \in]0, \varepsilon_j]$ tel que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_j$, on ait

$$\forall (x, g) \in (S \setminus U) \times S_j, \quad (Q + R_\varepsilon)(g)(x) > 0$$

et donc, par homogénéité,

$$(2) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_U], \forall (x, g) \in (E \setminus R_+ U) \times (H_{j+1} \setminus \{0\}), \quad (Q + R_\varepsilon)(g)(x) > 0.$$

En appliquant (2) aux U de la forme $U_c \cup U'$, où U' est un voisinage ouvert de $\bigcup_{I \in J_c} (E_I \cap S)$ dans S , on obtient, d'après (1) et le lemme 4, le résultat cherché (rappelons que $u - g_{c, \varepsilon}$ ne peut s'annuler, car on a $g_{c, \varepsilon}(Q_c) \subset H_j \not\supset u$). \square

LEMME 6. - Il existe un voisinage V de Σ_c dans Q_c et un $\varepsilon'_V \in]0, \varepsilon_j]$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'_V$, l'application $\Psi_\varepsilon : Q_c \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\Psi_\varepsilon(x) = \frac{d}{dt} f_c(\Phi_{c, \varepsilon}^t(x)) \Big|_{t=0}$$

soit strictement positive sur $V \setminus \Sigma_c$.

Preuve. Nous allons montrer que, pour chaque $I \in J_c$, la dérivée de Ψ_ε s'annule sur $\Sigma_{c, I}$, et que sa dérivée seconde est définie positive normalement à $\Sigma_{c, I}$ pour ε assez petit. Comme Ψ_ε est évidemment nulle sur $\Sigma_{c, I}$, le lemme en découlera. On a

$$\Psi_\varepsilon(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle c_{i, u} \rangle (x_i | (\xi + v_\varepsilon)(u - g_{c, \varepsilon}(x))x_i),$$

où $(.|.)$ désigne le produit scalaire euclidien associé à la norme $||.$ sur chaque E_i . Par définition de $g_{c, \varepsilon}$, on a

$$\forall x \in Q_c, \forall g \in H_j, \quad \langle dF(x) \cdot (\xi + v_\varepsilon)(u - g_{c, \varepsilon}(x))x, g \rangle = 0, \text{ soit}$$

$$\forall x \in Q_c, \forall g \in H_j, \quad \sum_{1 \leq i \leq n} \langle c_{i, g} \rangle (x_i | (\xi + v_\varepsilon)(u - g_{c, \varepsilon}(x))x_i) = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned}\Psi_{\varepsilon}(x) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \langle c_i, u - g_I \rangle (x_i, |(\xi + v_{\varepsilon})(u - g_{c, \varepsilon}(x))x_i|) = \\ &= \sum_{i \in \hat{I}} \langle c_i, u - g_I \rangle (x_i, |(\xi + v_{\varepsilon})(u - g_{c, \varepsilon}(x))x_i|) .\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que Ψ_{ε} et sa différentielle sont nulles sur $\Sigma_{c, I}$.

En outre, quand ε tend vers 0, la hessienne $D^2 \Psi_{\varepsilon}|_{\Sigma_{c, I}}$ converge uniformément vers l'application $D^2 \Psi_0|_{\Sigma_{c, I}}$ donnée par

$$\begin{aligned}D^2 \Psi_0(x) \cdot h^2 &= \sum_{i \in \hat{I}} \langle c_i, u - g_I \rangle (h_i, |\xi(u - g_I)h_i|) = \\ &= \sum_{i \in \hat{I}} \langle c_i, u - g_I \rangle^2 |h_i|^2\end{aligned}$$

pour tout $x \in \Sigma_{c, I}$ et tout $h \in T_x Q_c$. Comme $D^2 \Psi_0(x)$ est définie positive normalement à $\Sigma_{c, I}$ pour tout $x \in \Sigma_{c, I}$, $D^2 \Psi_{\varepsilon}|_{\Sigma_{c, I}}$ vérifie la même propriété dès que ε est assez petit. \square

Des lemmes 3, 5 et 6, on déduit que, si l'on prend

$$(3) \quad \varepsilon_{j+1} = \min(\{\varepsilon'_V, \varepsilon_V\} \cup \{\varepsilon_I : I \in \mathcal{I}_c\}),$$

la propriété (ii) de (5.2), Théorème 2 est satisfaite lorsqu'on remplace

Φ_c^t par $\Phi_{c, \varepsilon}^t$, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{j+1}$. Nous allons voir que la propriété (iii)

de (5.2), théorème 2 est également vérifiée, ce qui achèvera la démonstration :

LEMME 7. - Etant donné $\varepsilon \in]0, \varepsilon_{j+1}]$, où ε_{j+1} est défini par (3), pour chaque

$x \in Q_c$, la fonction

$$R \ni t \xrightarrow{\Psi_{x, \varepsilon}} f_c \circ \Phi_{c, \varepsilon}^t(x)$$

ne peut être bornée supérieurement (resp. inférieurement) que si x appartient à $W_{c, I}^+$ (resp. $W_{c, I}^-$) pour un $I \in \mathcal{I}_c$.

Preuve. Il suffit de montrer que, si $\Psi_{x, \varepsilon}$ est bornée (par exemple) supérieurement, alors $x \in \mathcal{V}_{j+1}$ (le même argument que dans la preuve du théorème 2 de (5.2) permet alors de conclure). D'après l'analogie de (5.2), Proposition 3, on a

$$(4) \quad \Phi_{c,\varepsilon}^t(x) = \rho_\varepsilon(tu - \int_0^t g_{c,\varepsilon} \circ \Phi_{c,\varepsilon}^s(x) \, ds, x) .$$

Du fait que $g_{c,\varepsilon}$ est à valeurs dans $H_j \not\cong u$, il est clair que

$$g_t = tu - \int_0^t g_{c,\varepsilon} \circ \Phi_{c,\varepsilon}^s(x) \, ds$$

tend vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$.

Soit $|\cdot|$ une norme sur H_{j+1} . Il existe une suite réelle croissante $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$, telle que $g_{t_k}/|g_{t_k}|$ tende vers une limite h . Du fait que la suite $(F_j(\Phi_{c,\varepsilon}^{t_k}(x)))$ est constante (de valeur c), si la suite $(f_c(\Phi_{c,\varepsilon}^{t_k}(x)))$ est bornée, alors c'est le cas de la suite $(F_{j+1}(\Phi_{c,\varepsilon}^{t_k}(x)))$, et donc de la suite $(\langle F_{j+1}(\Phi_{c,\varepsilon}^{t_k}(x)), h \rangle)$, qui, d'après (4), s'écrit

$$(5) \quad \langle F_{j+1}(\Phi_{c,\varepsilon}^{t_k}(x)), h \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle c_i, h \rangle |\exp v_\varepsilon(g_{t_k}) x_i|^2 e^{2\langle c_i, g_{t_k} \rangle} .$$

Pour chaque $i \in I_n$, $|\exp v_\varepsilon(g_t) x_i|^2$ est évidemment minoré par $|x_i^j(x)|^2$, où $j = \min\{\ell : x_i^\ell(x) \neq 0\}$. En écrivant

$$g_{t_k} = |g_{t_k}| \left(\left(\frac{g_{t_k}}{|g_{t_k}|} - h \right) + h \right) ,$$

on voit que la suite (5) ne peut être bornée que si

$$\forall i \in I_n, \langle c_i, h \rangle > 0 \implies x_i = 0 ,$$

d'où le résultat cherché. ■

(A7-2) Je laisse le lecteur vérifier que le résultat suivant se prouve, mutatis mutandis, exactement comme (5.2), Théorème 3 :

PROPOSITION. - Avec les notations de (A7-1), pour chaque $j \in \{0, \dots, r\}$ et chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_j]$, si U_0 est un voisinage ouvert du compact $\mathcal{V}_j \cap Q_{b_j}$ dans Q_{b_j} , alors $\mathcal{V}_{b_j} \cup \rho_\varepsilon(H_j, U_0)$ est un voisinage ouvert de \mathcal{V}_j dans E . ■

La démonstration du théorème suivant est un utile exercice de relecture de la section 6. - , les points qui pouvaient poser un problème étant résolus dans (A7-1) :

(A7-3) THÉORÈME. - Soient X une variété, b un point de X et $\tilde{\rho}^1$ une re-
présentation linéaire continue d'un groupe élémentaire G dans E , telle
que l'action $\rho^1 : (g, x) \mapsto \tilde{\rho}^1(g) \cdot x$ de G sur E soit faiblement hyperbolique,
dans le domaine de Siegel. Il existe $s : \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \hookrightarrow$ telle que $s^{-1}(\infty) = \{\infty\}$
et que, pour $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, la propriété suivante soit vérifiée : si
 $\rho \in \text{Act}_b^{s(\ell)}(G, X)$, de partie linéaire ρ^1 , est formellement linéarisable (à
l'ordre $s(\ell))$, alors ρ est C^ℓ -linéarisable. ■

APPENDICE 8. COMPLÉMENTS SUR LA LINÉARISATION DES

GERMES D'ACTIONS.

Nous poursuivons ici un double but :

- donner une idée de méthodes permettant de linéariser "à la main" les germes d'actions C^∞ de groupes abéliens élémentaires ;
- démontrer - et préciser - le

THÉORÈME. Soient X une variété de dimension 2 , p un point de X , G un groupe élémentaire tel que $G_{\mathbf{R}}$ soit de dimension 1 . Tout germe (faiblement) hyperbolique $\rho \in \text{Act}_p^\infty(G, X)$ est C^1 -linéarisable.

Soient a_1 et a_2 les deux morphismes continus de G dans \mathbb{C}^* associés à ρ^1 comme dans (4.3.1.), et c_1 , c_2 les deux formes linéaires sur $G_{\mathbf{R}}$ définies par

$$c_i(g_{\mathbf{R}}) = \text{Log} |a_i(g)| \quad , \quad i = 1, 2,$$

où $g \mapsto g_{\mathbf{R}}$ est le morphisme canonique $G \rightarrow G_{\mathbf{R}}$.

D'après (4.4.2), théorème 2 et (4.4.3), théorème 2, un calcul facile montre que

ρ admet une linéarisation C^∞ , sauf dans les deux cas suivants :

(i) Il existe un entier $k > 1$ tel que (quitte à échanger a_1 et a_2) on ait $a_2(g) = a_1(g)^k$ pour tout $g \in G$. Les morphismes a_1 et a_2 sont alors à valeurs réelles, et (du fait que $c_2 = k c_1$) l'action ρ^1 est dans le domaine de Poincaré.

(ii) Il existe un (unique) couple (n, q) d'entiers > 0 premiers entre eux tel que $a_1(g)^n a_2(g)^q = 1$ pour tout $g \in G$. Les morphismes a_1 et a_2 sont

alors à valeurs réelles, et (du fait que $nc_1 + qc_2 = 0$) l'action ρ^1 est dans le domaine de Siegel.

Dans les deux cas, il existe donc sur $E = T_p X$ un système de coordonnées linéaires réelles (x, y) tel que

$$(1) \quad \forall g \in G, \quad x \circ \tilde{\rho}^1(g) = a_1(g)x \quad \text{et} \quad y \circ \tilde{\rho}^1(g) = a_2(g)y.$$

(A8.1) Preuve du théorème dans le cas (i).

D'après (4.4.2), théorème 2 et un calcul facile, il existe une forme linéaire b sur $G_{\mathbf{R}}$ telle que ρ soit \mathbb{C}^∞ -isomorphe au germe en $G \times \{0\}$ de l'action R_b de G sur E donnée par

$$(2) \quad \widetilde{R}_b(g) = \widetilde{U}(g) \circ \widetilde{S}_b(g_{\mathbf{R}}) = \widetilde{S}_b(g_{\mathbf{R}}) \circ \widetilde{U}(g),$$

où U et S_b sont les actions de G et $G_{\mathbf{R}}$ respectivement sur E données par

$$(3) \quad \begin{cases} x \circ \widetilde{U}(g) = a_1(g)x/|a_1(g)|, & y \circ \widetilde{U}(g) = a_2(g)y/|a_2(g)|, \\ x \circ \widetilde{S}_b(t) = e^{c_1 t} x & \text{et} \quad y \circ \widetilde{S}_b(t) = e^{c_2 t} (y + bt x^k). \end{cases}$$

Le cylindre $Q = \{v \in E : |x(v)| = 1\}$ est un quotient ((5.1), Corollaire 3) de $F = E \setminus x^{-1}(0)$ par S_b : pour chaque $v \in F$, l'unique intersection de Q avec l'orbite $\widetilde{S}_b(G_{\mathbf{R}})(v)$ est $S_b(-\tau(v), v)$, où

$$(4) \quad \tau(v) = c_1^{-1} \text{Log}|x(v)|.$$

Tout ce qui vient d'être dit de S_b vaut évidemment pour l'action S_0 obtenue en prenant $b = 0$ dans (3). Chaque homéomorphisme $H : E \rightarrow E$ vérifiant

$$(5) \quad H^* S_b = S_0$$

est déterminé par $H|_F$, et donc par $H|_Q = h$; de manière précise, pour tout $v \in F$, on a alors

$$(6) \quad H(v) = S_b(\tau(v), h(S_0(-\tau(v), v))).$$

Pour $h = \text{id}_E|_Q$, (6) donne, d'après (4)

$$x \circ H = x \quad \text{et} \quad y \circ H = y + b c_1^{-1} x^k \text{Log}|x| ;$$

il est clair que le H ainsi défini vérifie (5) et est un C^{k-} -difféomorphisme (c'est-à-dire un C^{k-1} -difféomorphisme tel que $D^{k-1}H$ et $D^{k-1}(H^{-1})$ soient localement hölderiennes d'exposant α pour tout $\alpha \in]0,1[$).

Du fait que $\tilde{U}(g)$ commute à $\tilde{S}_b(t)$ et à $\tilde{S}_0(t)$ quels que soient $g \in G$ et $t \in G_{\mathbf{R}}$, et vérifie en outre $\tau \circ \tilde{U}(g)|_F = \tau$, on a

$$H^* U = U ,$$

d'où, d'après (1),(2),(3) et (5),

$$\forall g \in G, H^* \tilde{R}_b(g) = \tilde{U}(g) \circ \tilde{S}_0(g) = \tilde{\rho}^1(g) .$$

Nous avons donc prouvé l'amélioration suivante du théorème :

PROPOSITION 1. Dans le cas (i), ρ est C^{k-} -linéarisable. ■

REMARQUE. Ce résultat est un peu un exercice de style, dans la mesure où ρ est déjà C^∞ -équivalent à quelque chose d'aussi simple et explicite que le germe de R_b en $G \times \{0\}$.

(A8.2) Preuve du théorème dans le cas (ii).

Nous allons expliquer comment se démontre un résultat plus précis :

PROPOSITION 2. Dans le cas (ii), ρ est C^{k-} -linéarisable, où $k = \max\{n,q\}$ pour $n \neq q$ et $k = n+1 = q+1$ sinon.

Comme précédemment, soit U l'action de G sur E donnée par

$$(7) \quad x \circ \tilde{U}(g) = a_1(g) x / |a_1(g)| \quad \text{et} \quad y \circ \tilde{U}(g) = a_1(g) y / |a_2(g)| .$$

Posons $z = x^n y^q$. Quels que soient l'entier $s > 0$ et les $2s$ formes linéaires $b_1, \dots, b_s, e_1, \dots, e_s$ sur $G_{\mathbf{R}}$, soient $b = (b_1, \dots, b_s)$, $e = (e_1, \dots, e_s)$ et $\xi_{b,e}$ le morphisme de l'algèbre de Lie de $G_{\mathbf{R}}$ (identifiée à $G_{\mathbf{R}}$) dans

l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur E donné par

$$(8) \quad \begin{cases} L_{\xi_{b,e}(\gamma)} x = (c_1 \gamma + \sum_{1 \leq j \leq s} b_j \gamma z^j) x \\ L_{\xi_{b,e}(\gamma)} y = (c_2 \gamma + \sum_{1 \leq j \leq s} e_j \gamma z^j) y . \end{cases}$$

Pour chaque $v_0 \in E$ et chaque $\gamma \in G_{\mathbf{R}}$, notons $t \mapsto S_{b,e}(t\gamma, v_0)$ l'unique solution maximale $t \mapsto v(t)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = \xi_{b,e}(\gamma)(v(t)) \\ v(0) = v_0 . \end{cases}$$

Il est clair que le domaine de définition de $g \mapsto S_{b,e}(g, v_0)$ est un segment ouvert $J_{v_0} \ni 0$ de $G_{\mathbf{R}}$. Comme $\xi_{b,e}$ est invariant par U , on a $J_{U(g,v)} = J_v$ quels que soient $v \in E$ et $g \in G$, et, pour tout $t \in J_v$,

$$(9) \quad S_{b,e}(t, U(g, v)) = U(g, S_{b,e}(t, v)) .$$

Du fait que $\xi_{b,e}(0) = 0$ et du théorème de redressement résulte que $V_{\mathbf{R}} = \bigcup_{v \in E} J_v \times \{v\}$ est un voisinage ouvert de $G_{\mathbf{R}} \times \{0\}$ dans $G_{\mathbf{R}} \times E$. Par conséquent,

$$V = \{(g, v) \in G \times E : (g_{\mathbf{R}}, v) \in V_{\mathbf{R}}\}$$

est un voisinage ouvert de $G \times \{0\}$ dans $G \times E$. D'après (9), la formule

$$(10) \quad R_{b,e}(g, v) = U(g, S_{b,e}(g_{\mathbf{R}}, v))$$

définit une application analytique $R_{b,e} : V \rightarrow E$, et

$$\rho_{b,e} = [R_{b,e}]_{G \times \{0\}}$$

est un germe d'action analytique de G sur E fixant 0 .

On déduit de (4.4.3), théorème 3 l'existence d'un entier $s > 0$ et de $2s$ formes linéaires $b_1, \dots, b_s, e_1, \dots, e_s$ sur $G_{\mathbf{R}}$ telles que ρ soit C^k -isomorphe à $\rho_{b,e}$. Il s'agit donc de prouver que $\rho_{b,e}$ est C^k -linéarisable.

Pour cela, comme dans (A.8.1), il suffit d'après (9) et (10) de linéariser

$$\sigma_{b,e} = [S_{b,e}]_{G_{\mathbf{R}}} \times \{0\}$$

par un germe de C^{k^-} -difféomorphisme conservant le germe de U en $G \times \{0\}$, ce que nous allons faire maintenant suivant l'idée qui a présidé (entre autres) à (A.8.1).

Le théorème de Cauchy sur l'analyticité du flot d'un champ analytique réel implique, en égard à la forme particulière (8) des champs considérés ici, le résultat suivant : il existe deux segments ouverts

$I_1 \subset \mathbf{R}$ et $I_2 \subset G_{\mathbf{R}}$, centrés en 0, et deux fonctions analytiques

$f_{b,e}$ et $g_{b,e} : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbf{R}$, égales à 1 sur $I_1 \times \{0\}$, tels que, pour tout $v \in z^{-1}(I_1)$ et tout $t \in G_{\mathbf{R}}$ vérifiant $tz(v) \in I_2$, on ait $t \in J_v$ et

$$(11) \quad \begin{cases} x \circ S_{b,e}(t,v) = x(v) f_{b,e}(z(v), tz(v)) e^{c_1 t} \\ y \circ S_{b,e}(t,v) = y(v) g_{b,e}(z(v), tz(v)) e^{c_2 t} \end{cases}.$$

a) Cas où n et q sont distincts.

Quitte à échanger x et y , on peut supposer $n > q$. Soit $\sigma^1 = S_{o,o}$ la partie linéaire de $\sigma_{b,e}$. Le cylindre $Q = \{v \in E : |x(v)| = 1\}$ est un quotient de $F = E \setminus x^{-1}(0)$ par σ^1 ; pour chaque $v \in F$, l'unique intersection de Q avec l'orbite $\hat{\sigma}^1(G_{\mathbf{R}})(v)$ est $\sigma^1(-\tau(v), v)$, où

$$(12) \quad \tau(v) = c_1^{-1} \operatorname{Log}|x(v)|$$

Nous allons prouver que la formule

$$(13) \quad H(v) = \begin{cases} S_{b,e}(\tau(v), \sigma^1(-\tau(v), v)) & \text{pour } x(v) \neq 0 \\ v & \text{sinon} \end{cases}$$

définit un C^{k^-} -difféomorphisme H d'un voisinage ouvert U -invariant de 0 dans E sur un voisinage ouvert U -invariant de 0 dans E , envoyant $\xi_{o,o}$ sur $\xi_{b,e}$. Comme H préserve U , le germe de H^{-1} en 0 enverra bien $\rho_{b,e}$

$$\text{sur } \rho_{0,0} = [\rho^1]_{\mathbf{G}} \times \{0\} .$$

Posons

$$(14) \quad u(v) = \begin{cases} \tau(v)z(v) & \text{pour } v \in F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $u : E \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ est de classe C^{k^-} , et l'ensemble

$$W = \{v \in E : z(v) \in I_1 \text{ et } u(v) \in I_2\}$$

est un voisinage ouvert de $z^{-1}(0) = \mathcal{V}$ (réunion des v.f.i. de σ^1). D'après

(11) et (13), H est bien défini dans W par

$$\begin{cases} x \circ H(v) = x(v) f_{b,e}(z(v), u(v)) \\ y \circ H(v) = y(v) g_{b,e}(z(v), u(v)) , \end{cases}$$

et donc de classe C^{k^-} dans W . Comme il est tangent à l'identité en \mathcal{V} , il existe un voisinage U -invariant W' de \mathcal{V} dans E tel que H induise un C^{k-1} -difféomorphisme de W' sur l'ouvert U -invariant $H(W')$. Enfin, pour tout $v \in W'$ et tout $t \in G_{\mathbf{R}}$ assez petit, on déduit de (12) et (13) que

$$H(\sigma^1(t, v)) = S_{b,e}(t, H(v)) ,$$

ce qui prouve que $(H^* \xi_{b,e} - \xi_{0,0})|_{W'} = 0$.

Il reste donc seulement à établir que H^{-1} est de classe C^{k^-} au voisinage de 0. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage W' de \mathcal{V} dans E et une unique application continue $v : W' \rightarrow G_{\mathbf{R}}$ nulle sur \mathcal{V} et vérifiant

$$(15) \quad \forall v \in W' , |f_{b,e}(z(v), -u(v) - v(v)z(v))| = e^{c_1 v(v)} ,$$

avec la notation (14); en outre, v est de classe C^{k^-} . De (15), on déduit que $\tau' = \tau|_{W' \cap F} + v|_{W' \cap F}$ vérifie

$$\begin{cases} \forall v \in W' \cap F , |x(S_{b,e}(-\tau'(v), v))| = 1 \\ \tau'(v) = 0 \text{ si } |x(v)| = 1 . \end{cases}$$

Du fait que $S_{b,e}$ est un flot, il existe donc d'après (11) et (13) un voisinage de 0 dans E où l'on a

$$H^{-1}(v) = \begin{cases} \sigma^1(\tau(v), S_{b,e}(-\tau'(v), v)) & \text{si } v \in F \\ v & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x \circ H^{-1}(v) = x(v) f_{b,e}(z(v), -u'(v)) \\ y \circ H^{-1}(v) = y(v) g_{b,e}(z(v), -u'(v)) \end{cases},$$

où u' , définie par

$$u'(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \mathcal{V} \\ z(v)\tau'(v) & \text{si } v \in W' \setminus \mathcal{V}, \end{cases}$$

est de classe C^{k^-} , d'où le résultat cherché.

b) Cas où $n = q$.

L'idée est exactement la même que précédemment, mais il faut ici procéder en deux temps : on prouve d'abord que la formule

$$H_1(v) = \begin{cases} S_{b,e}(\tau(v), S_{o,e}(-\tau(v), v)) & \text{pour } x(o) \neq 0 \\ v & \text{sinon} \end{cases}$$

définit un C^{k^-} -difféomorphisme H_1 d'un voisinage ouvert U -invariant de 0 dans E sur un voisinage ouvert U -invariant de 0 dans E , préservant U et envoyant $\xi_{o,e}$ sur $\xi_{b,e}$: la démonstration est la même qu'en (a). On pose ensuite

$$\tau_1(v) = c_2^{-1} \operatorname{Log}|y(v)| \quad \text{pour } y(v) \neq 0,$$

et l'on montre de même que la formule

$$H_2(v) = \begin{cases} S_{o,e}(\tau_1(v), S_{o,o}(-\tau_1(v), v)) & \text{pour } y(v) \neq 0 \\ v & \text{sinon} \end{cases}$$

définit un C^{k^-} -difféomorphisme H_2 d'un voisinage ouvert U -invariant de 0

dans E sur un autre, préservant U et envoyant $\xi_{o,o}$ sur $\xi_{o,e}$. Le germe en 0 de $H_2^{-1} \circ H_1^{-1}$ envoie alors bien $\rho_{b,e}$ sur $\rho_{o,o} = [\rho^1]_{G \times \{0\}}$. ■

(A8.3) Remarques. Il n'est pas difficile de vérifier que les propositions 1 et 2 sont optimales, en ce sens que ρ n'est pas en général C^k -linéarisable.

La même méthode s'applique aux germes d'actions de groupes élémentaires généraux, pour lesquels je renvoie aux travaux de l'auteur cités dans la bibliographie des chapitres 2 et 3. On ne sait pas par exemple prouver autrement l'analogue suivant du théorème de Grobman-Hartman :

THÉORÈME. Tout germe d'action holomorphe de \mathbb{C} sur une variété holomorphe M de dimension finie, fixant $a \in M$ et de partie linéaire hyperbolique, est C^1 -linéarisable.

Il convient de remarquer que ce résultat est faux dans le cas faiblement hyperbolique ; ainsi, le germe ρ en $\mathbb{C} \times \{0\}$ de l'action R de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^2 donnée par

$$R(t, (x, y)) = (x e^t, (y + tx^2) e^{2t})$$

n'est pas C^0 -linéarisable : le seul germe en 0 de courbe holomorphe de \mathbb{C}^2 qui soit ρ -invariant est celui de $x^{-1}(0)$, alors que les deux axes de coordonnées sont ρ^1 -invariants.

Néanmoins, la classification topologique des germes faiblement hyperboliques d'actions de \mathbb{C} ne présente pas plus de difficulté que la preuve du théorème précédent.

APPENDICE 9 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES IMPLICITES

Sauf mention du contraire, les applications considérées sont de classe C^∞

(A.9.1) Soit sur $E = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le système de coordonnées (x, u, p) défini par

$$x(j_y^1 g) = y, \quad u(j_y^1 g) = g(y), \quad p(j_y^1 g) = g'(y)$$

quels que soient $y \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Etant donnée $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, considérons le problème suivant : étudier les fonctions $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, satisfaisant l'équation différentielle implicite

$$(1) \quad f \circ j^1 \varphi = 0.$$

Conformément à (7.2.2), E étant muni de la structure de contact \mathcal{K} engendré par la 1-forme

$$c = du - p dx,$$

nous allons étudier les solutions géométriques de (1), c'est-à-dire les courbes intégrales de c contenues dans

$$S = f^{-1}(0)$$

Soit (cf. (7.2.2), proposition 1)

$$\Sigma = (H_c f)^{-1}(0) = \{v \in E : f(v) = f_p(v) = (f_x + pf_u)(v) = 0\},$$

où l'on a noté $f_p = \frac{\partial f}{\partial p}$, etc. Le fermé Σ est contenu dans S , et contient les $v \in S$ où $df(v) = 0$. Les solutions géométriques de (1) contenues dans $S \setminus \Sigma$ sont ici exactement les feuilles du feuilletage caractéristique de S , c'est-à-dire

les courbes intégrales de $H_c f$ contenues dans $S \setminus \Sigma$ (cf. (7.2.2), corollaire 2). De manière plus géométrique, ce sont les courbes intégrales du champ de droites sur la sous-variété $S \setminus \Sigma$ égal en chaque point v à l'intersection des deux plans $T_v(S \setminus \Sigma)$ et $c(v)^{-1}(0)$, qui sont distincts par définition de Σ .

Nous allons préciser le lien entre solutions géométriques et "vraies" solutions (locales) de (1).

(A9.2) Etant donnés deux espaces de Banach B_1 et B_2 , rappelons que $J^1(B_1, B_2)$ s'identifie canoniquement à $B_1 \times B_2 \times L(B_1, B_2)$ par l'application $j_y^1 g \longmapsto (y, g(y), Dg(y))$, et se trouve donc canoniquement muni d'une structure d'espace de Banach. De même, $J^0(B_1, B_2)$ s'identifie canoniquement à l'espace de Banach $B_1 \times B_2$.

Nous supposons donc $E = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $E_0 = J^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ munis de leurs structures canoniques d'espaces vectoriels réels ; la projection canonique $\pi_1 : E \rightarrow E_0$ est alors linéaire.

Dans le problème qui nous occupe, le fermé

$$C = f_p^{-1}(0) \cap S$$

joue évidemment un rôle fondamental : pour tout $z \in S \setminus C$, le théorème des fonctions implicites affirme en effet l'existence d'une fonction $g : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$[S]_z = [(p - g \circ \pi_1)^{-1}(0)]_z.$$

En d'autres termes, au voisinage de z , les solutions géométriques de (1) sont de la forme $j^1 \psi(J)$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait $\psi' = g \circ j^0 \psi$, et donc (1).

Pour étudier, sous des hypothèses de généricité, ce qui se passe au voisinage de C , nous aurons besoin de la généralisation suivante du théorème des fonctions implicites (pour une preuve, voir les ouvrages de Golubitsky-Guillemin, Malgrange et Tougeron cité au chapitre 1) :

THEOREME DE PREPARATION C^∞ (Malgrange). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout germe
 $f : [\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n]_{(0,0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $D_1^j f(0,0) = 0$ pour $0 \leq j \leq k$ et $D_1^{k+1} f(0,0) \neq 0$
(où D_1 désigne la dérivation par rapport au premier facteur), il existe $a_0, \dots, a_k :$
 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, nulles en 0, et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, non nulle en $(0,0)$, telles que
 $f = [F]_{(0,0)}$, où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$F(x,y) = g(x,y) (x^{k+1} + \sum_{j=0}^k a_j(y) x^{k-j}) . \blacksquare$$

Soient $\mathfrak{J} = C^\infty(E, \mathbb{R})$, muni de la topologie fine, et $J^k = J^k(E, \mathbb{R})$,

$0 \leq k \leq \infty$. Considérons les sous-variétés fermées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = \{j_z^0 \mid g \in J^0 : g(z) = 0\} \\ V_1 = \{j_z^1 \mid g \in J^1 : g(z) = g_p(z) = 0\} \\ V_2 = \{j_z^2 \mid g \in J^2 : g(z) = g_p(z) = g_p^2(z) = 0\} \\ V_3 = \{j_z^3 \mid g \in J^3 : g(z) = g_p(z) = g_p^2(z) = g_p^3(z) = 0\} \end{array} \right.$$

THÉOREME 1. L'ensemble des $f \in \mathfrak{J}$ vérifiant $j^k f \cap V_k$ pour $0 \leq k \leq 3$ est un ouvert
dense \mathcal{U}_1 . Pour tout $f \in \mathcal{U}_1$, on a les propriétés suivantes :

- (i) 0 est une valeur régulière de f .
- (ii) Le fermé $C = S \cap f_p^{-1}(0)$, ensemble des points critiques de $\pi = \pi_1|_S$, est
une courbe C^∞ .
- (iii) Le fermé $C_1 = C \cap f_p^{-1}(0)$, ensemble des points critiques de $\pi|_C$, est formé
de points isolés.

(iv) Chaque $v \in C \setminus C_1$ est un point-pli de π : il existe un germe
 $[E]_v \xrightarrow{h} [E]_0$ d'automorphisme de π_1 tel que $h([S]_v) = [(x-p^2)^{-1}(0)]_0$.

(v) Chaque $v \in C_1$ est un point-fronce de π : il existe un germe
 $[E]_v \xrightarrow{h} [E]_0$ d'automorphisme de π_1 tel que $h([S]_v) = [(x+up+p^3)^{-1}(0)]_0$.

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement du théorème de transversalité de Thom. Etant donné $f \in \mathcal{U}_1$, (i) exprime que $j^0 f \nparallel V_0$, et (ii) (resp.(iii)) provient de ce que $j^1 f \nparallel V_1$ (resp. $j^2 f \nparallel V_2$) et $C = (j^1 f)^{-1}(V_1)$ (resp. $C_1 = (j^2 f)^{-1}(V_2)$) - cf.(2.2), proposition 1.

Pour tout $v \in C$, une translation de E (qui est un automorphisme de π_1) permet de supposer que $v = 0$.

- Si $v \in C \setminus C_1$, le théorème de préparation affirme l'existence de $a_0, a_1 : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$, nulles en 0 , telles que $[S]_0 = [(p^2 + (a_0 \circ \pi_1)p + a_1 \circ \pi_1)^{-1}(0)]_0$. En d'autres termes, si $P = p + \frac{1}{2} a_0 \circ \pi_1$, il existe $X : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$, nulle en 0 , telle que $[S]_0 = [(P^2 - X \circ \pi_1)^{-1}(0)]_0$. Comme $df(0)$ est non nul, c'est le cas de $dX(0)$; on en déduit (iv) avec $(x, u, p) \circ h = [(X \circ \pi_1, U \circ \pi_1, P)]_0$, où $U : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est choisie arbitrairement de façon que $U(0) = 0$ et $dX \wedge dU(0) \neq 0$.

- Si $v \in C_1$, il existe de même $P : E \rightarrow \mathbb{R}$, de la forme $P = p + a \circ \pi_1$, où $a : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule en 0 , et $X, U : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$, nulles en 0 , telles que $[S]_0 = [(P^3 + (U \circ \pi_1)P + X \circ \pi_1)^{-1}(0)]_0$. Comme 0 est valeur régulière de f et que $j^2 f \nmid v_2$, on a $dX \wedge dU(0) \neq 0$, d'où l'on déduit (v) comme précédemment. ■

Le théorème 1 est un résultat sur les surfaces de E et leurs projections linéaires, sans référence à la structure de contact; celle-ci intervient dans le

THÉORÈME 2. Il existe un ouvert dense $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{U}$, le fermé Σ soit formé de points isolés de $C \setminus C_1$, et qu'en outre, pour tout $z \in \Sigma$, $d(H_C f)(z) \in gl(E)$ (ou plutôt son complexifié) ait ses valeurs propres distinctes et extérieures à $i\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $h\ell(E)$ l'ensemble des $M \in gl(E)$ à valeurs propres distinctes et extérieures à $i\mathbb{R}$. Je laisse le lecteur s'amuser à prouver que le fermé

$$K = \{j_z^2 g \in J^2 : H_C g(z) = 0 \text{ et } (g_2)_p(z) = 0 \text{ ou } d(H_C g)(z) \notin h\ell(E)\}$$

est réunion d'un nombre fini de sous-variétés K_i de codimension > 3 . Par conséquent, l'ouvert $\mathcal{U}_2 = \{f \in \mathfrak{F} : j^2 f(E) \cap K = \emptyset\}$ est dense, d'après le théorème de transversalité de Thom, appliqué aux K_i ; c'est donc aussi le cas de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. ■

DANS TOUTE LA SUITE, f DESIGNÉ UN ÉLÉMENT DE \mathcal{U}_1 , ET LES NOTATIONS SONT CELLES DES THÉOÈMES 1 ET 2.

(A9.3) Points réguliers et points - plis de Clairaut de (1)

Appelons points réguliers de (1) les points de $S \setminus \Sigma$, et commençons par une remarque essentielle : pour chaque $v \in E_0$, $\pi_1^{-1}(v) \cap S$ est discret ; par conséquent, les pentes des solutions $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de (1) telles que $j^0 \varphi(J) \ni v$ et $j^1 \varphi(J) \cap C = \emptyset$ sont toutes distinctes et forment un ensemble discret, ce qui permet de prolonger chacune d'entre elles sans ambiguïté au plus grand intervalle ouvert $\bar{J} \supset J$ tel que la solution géométrique $j^1 \varphi(\bar{J})$ correspondante ne rencontre pas C . En d'autres termes, les singularités des solutions de (1) sont (contenues dans) celles de l'équation, ce qui est tout à fait particulier aux équations différentielles du premier ordre (cf.(7.2.2), exercice 2).

PROPOSITION 1. (i) Pour tout $z \in S \setminus C$, il existe un germe $h : [E]_z \rightarrow [E]_0$ d'automorphisme C^∞ de π_1 préservant K tel que $h([S]_z) = [p^{-1}(0)]_0$.

(ii) Pour tout $v \in \pi(S) \setminus \pi(C)$ ayant un voisinage U tel que $\pi^{-1}(w)$ ait deux éléments pour tout $w \in U$, il existe un germe $h : [E]_{\pi^{-1}(v)} \rightarrow E$ d'automorphisme C^∞ de π_1 préservant K , tel que

$$h([S]_{\pi^{-1}(v)}) = [(p^2 - 1)^{-1}(0)]_{h(\pi^{-1}(v))}.$$

Démonstration. Nous utiliserons le trivial

LEMME 1. (a) Tout germe h en $v \in E_0$ de difféomorphisme $E_0 \rightarrow E_0$ détermine un unique germe en $\pi_1^{-1}(v) \setminus (D_1(x \circ h)(v) + pD_2(x \circ h)(v))^{-1}(0)$ d'automorphisme de π_1 préservant K , où D_1 et D_2 désignent les dérivées par rapport au premier et au second facteur de $E_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Pour tout germe C de courbe dans E_0 tel que $p_0|_C$ soit de rang maximal (où $p_0 : J^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la projection-source), il existe un unique germe \tilde{C} de courbe de Legendre dans E tel que $\pi_1(\tilde{C}) = C$. \square

L'affirmation (i) n'est donc qu'une reformulation du théorème de redressement ((3.1.3), théorème 2) - pour se ramener en 0, on utilise le fait que

$$t_z : E \rightarrow E, \text{ donné par } x \circ t_z = x - x(z), u \circ t_z = u - u(z) - p(z)(x - x(z)) \text{ et } p \circ t_z =$$

$= p - p(z)$, conserve c et π_1 et envoie z sur 0 .

Sous l'hypothèse de (ii), on peut évidemment supposer que $v = 0$ et $\pi^{-1}(v) = \{z_+, z_-\}$, où $p(z_+) = 1$ et $p(z_-) = -1$. Soient S_+ et S_- les germes de S en z_+ et z_- respectivement. Le lemme 1 et le théorème de redressement (appliqué après rotation dans E_0) montrent d'abord l'existence d'un germe $h_+ : [E]_{\{z_+, z_-\}} \rightarrow [E]_{\{z_+, z_-\}}$ d'automorphisme de π_1 préservant K et tel que $h_+(S_+) = [p^{-1}(1)]_{z_+}$, puis celle d'un germe $h_- : [E]_{\{z_+, z_-\}} \rightarrow [E]_{\{z_+, z_-\}}$ d'automorphisme de π_1 préservant K , tel que $h = h_- \circ h_+$ vérifie $h(S_-) = [p^{-1}(-1)]_{z_-}$, et possédant en outre la propriété suivante : le germe h_- de difféomorphisme de E_0 sous-jacent à h_- préserve le germe en 0 du feuilletage de E_0 défini par les solutions de $p = 1$. D'après le lemme 1, ceci implique que $h(S_+) = h_+(S_+) = [p^{-1}(1)]_{z_+}$, d'où (ii). ■

L'affirmation (ii) de la proposition 1 admet la limite suivante quand on tend vers un point-pli :

THÉORÈME 3 (Tricomi (1923), Lak Dara (1975), Brodsky (197?)). Pour tout point-pli régulier z de S , il existe un germe $h : [E]_z \rightarrow [E]_0$ d'automorphisme C^∞ de π_1 , préservant K et tel que $h([S]_z) = [(x-p^2)^{-1}(0)]_0$.

Démonstration. Soit J' l'involution C^∞ de $S' = (x-p^2)^{-1}(0)$ donnée par $p \circ J' = -p|_{S'}$, et $\pi_1 \circ J' = \pi_1|_{S'}$. D'après le théorème 1 (iv), il existe de même un unique germe $J : [S]_z \rightarrow [S]_0$ d'involution C^∞ tel que $\pi \circ J = [\pi]_z$ et $J \neq [\text{id}_S]_z$.

LEMME 2. L'existence d'un germe h satisfaisant la conclusion du théorème 3 équivaut à celle d'un germe $h_1 : [S]_z \rightarrow [S']_0$ de difféomorphisme C^∞ possédant les deux propriétés suivantes :

- (i) $h_1^* [J']_0 = J$
- (ii) h_1 envoie le germe en z du feuilletage caractéristique de S sur le germe en 0 de celui de S' .

Preuve. Si h existe, $h_1 = h|_S$ satisfait (i) et (ii). Réciproquement, pour tout h_1 vérifiant (i), il existe un germe $h_0 : [E_0]_{\pi(z)} \rightarrow [E_0]_0$ de difféomorphisme

C^∞ tel que $\pi_1 \circ h_1 = h_0 \circ \pi$: l'existence, l'unicité et la bijectivité de $h_0|_{\pi([S]_z)}$ résultent du théorème 1 (iv), ainsi que le caractère C^∞ de $h_0|_{\pi([S \setminus C]_z)}$ et de $h_0|_{\pi([C]_z)}$. Pour voir que $h_0|_{\pi([S]_z)}$ est de classe C^∞ , on utilise le théorème 1 (iv) et l'on prouve par récurrence sur k que $h_0|_{\pi([S]_z)}$ est de classe C^k pour tout entier k , et il ne reste plus qu'à le prolonger de manière C^∞ pour obtenir h_0 . Si de plus h_1 satisfait (ii), il résulte du lemme 1(b) que l'unique germe h d'automorphisme de π_1 au-dessus de h_0 qui préserve K est tel que $h|_S = h_1$; en effet, h_0 envoie évidemment l'image par π_1 du germe en z du feuilletage caractéristique de S sur l'image par π_1 du germe en 0 de celui de S' . \square

Sous l'hypothèse du théorème 3, un germe $[E]_z \rightarrow [E]_0$ d'automorphisme de π_1 préservant K permet évidemment de supposer que $[C]_z = [C']_0$, où C' est la ligne de pli $x = p = 0$ de S' ; en d'autres termes, S a alors pour équation locale $x = p^2 g(u, p)$, où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ , et l'on se ramène (en multipliant u et x par des constantes) au cas où $g(\mathbb{R} \times \{0\}) = 1$. On ne perd rien à supposer en outre (ce que nous ferons) que S a pour équation globale $x = p^2 g(u, p)$; si $F = x^{-1}(0)$ et si $s : E \rightarrow F$ désigne la projection linéaire parallèlement à $u = p = 0$, les applications $\alpha' = s|_{S'}$ et $\alpha = s|_S$ sont donc des cartes (*) de S' et S respectivement. En notant $U = u|_F$ et $P = p|_F$, il existe un unique germe φ (resp. φ') en C' de difféomorphisme de F égal à l'identité sur C' , conservant chaque feuille du feuilletage $P = \text{constante}(\ast)$ et envoyant l'image par α (resp. α') du germe en C' du feuilletage caractéristique de S (resp. S') sur le germe en C' du feuilletage $U = \text{constante}(s)$. On vérifie sans peine que $U \circ (\varphi'_\ast \alpha'_\ast [J']_0) = [U + 4P^3/3]_0$, que $P \circ (\varphi'_\ast \alpha'_\ast [J']_0) = [-P]_0$, que $U \circ (\varphi_\ast \alpha_\ast J) = [U + 2P^3(1+b)/3]_0$ et que $P \circ (\varphi_\ast \alpha_\ast J) = [-Pa]_0$, où $a, b \in C^\infty(F, \mathbb{R})$ sont égales à 1 sur C' . Si $\psi : [F]_0 \rightarrow$ est le germe de difféomorphisme défini par $U \circ \psi = [U]_0$ et $P \circ \psi = [P((1+b)/2)^{1/3}]_0$, il est clair que ψ conserve le germe du feuilletage $U = \text{constante}(s)$ et envoie $\varphi_\ast \alpha_\ast J$ sur $\varphi'_\ast \alpha'_\ast [J']_0$. En d'autres termes, par définition de φ et φ' , $h_1 = \alpha'^{-1} \circ \varphi'^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ \alpha$ vérifie les conditions (i) et (ii) du lemme 2. \blacksquare

(*) voir figure page suivante

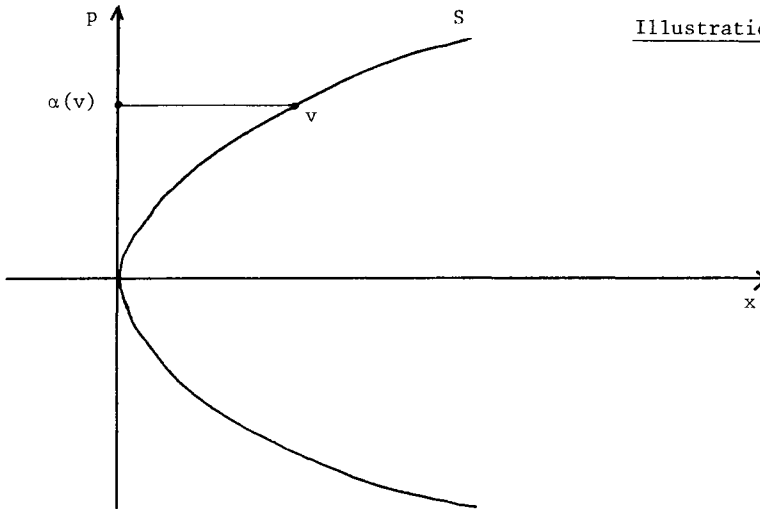
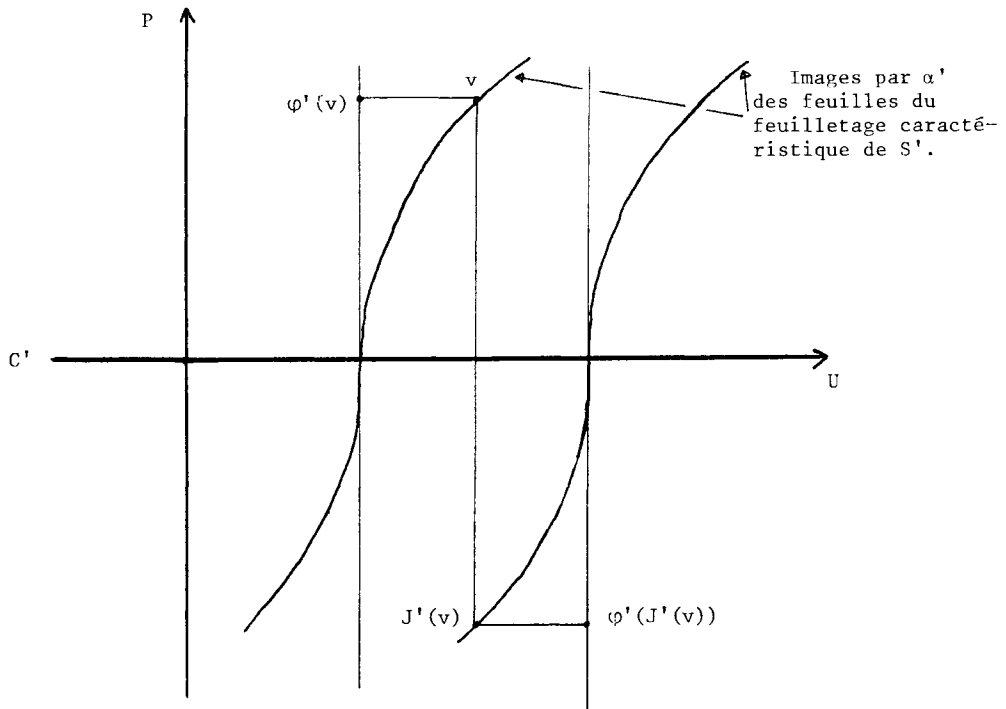


Illustration de la page 389

Le difféomorphisme α (dans chaque plan $u = \text{constante}$)



Le difféomorphisme φ'

Appelons point-pli de Clairaut de (1) tout $z \in C \setminus C_1$ tel que $[C]_z$ soit un germe d'intégrale singulière (7.2.3) de S , situation évidemment fort peu générique. Les mêmes techniques vont nous permettre de prouver le

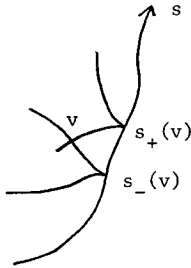
THEOREME 3bis (Tricomi, Lak Dara) Pour tout point-pli de Clairaut z de S , il existe un germe $h : [E]_z \rightarrow [E]_0$ d'automorphisme C^∞ de π_1 , préservant κ et tel que $h([S]_z) = [(u-p^2)^{-1}(0)]_0$.

Démonstration. Posons $S' = (u-p^2)^{-1}(0)$; il est clair que $C' = u^{-1}(0) \cap p^{-1}(0)$ est une intégrale singulière de S' . D'après le corollaire (8.4), $[S]_z$ et $[S']_0$ sont tous deux équivalents, par un germe de transformation de contact de κ , au germe en 0 de l'équation ridicule $u = 0$, et donc équivalents entre eux. En particulier, les feuilletages caractéristiques de S et de S' se prolongent, au voisinage de z et de 0 respectivement, en des feuilletages C^∞ de S et de S' transverses à C et C' respectivement - mais dont les feuilles n'ont pas cette fois-ci une tangente verticale pour π_1 lorsqu'elles traversent C (ou C'). A partir de cette remarque, la démonstration est, mutatis mutandis, celle du théorème 3. ■

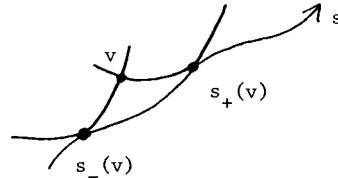
REMARQUES.1 - Les théorèmes 3 et 3 bis n'ont été démontrés par Tricomi "que" pour les équations de la forme $a(x,u)p^2 + b(x,u)p + c(x,u) = 0$, mais le théorème de préparation nous dit précisément que, localement, toutes les équations (1) admettant un point-pli sont de ce type. Le cas particulier du théorème de préparation utilisé pour mettre le pli sous forme normale s'obtient d'ailleurs très facilement à l'aide du germe d'involution J .

2 - Géométriquement, la construction de h dans les théorèmes 3 et 3bis peut être racontée comme suit : on cherche un germe $h_0 : [E]_{\pi(z)} \rightarrow [E]_0$ de difféomorphisme envoyant les images par π_1 des caractéristiques de $[S]_z$ sur celles de $[S']_0$. Pour cela, choisissons une abscisse $s : \pi([C]_z) \rightarrow [\mathbb{R}]_0$ de classe C^∞ , notons en encore s un représentant, et remarquons (ce qui est facile) qu'il existe un voisinage U de z dans S tel que tout point v de $\pi(U)$ soit repéré sans ambiguïté par les abscisses $s_+(v) \geq s_-(v)$ des points d'intersections avec $\pi(C)$ des deux

(graphes de) solutions de U passant par v ; on obtient ainsi un homéomorphisme de $\pi(U)$ sur un ouvert du demi-plan $s_+ \geq s_-$. Bien entendu, un homéomorphisme analogue est associé à S' , et h_0 est obtenu en composant l'un avec l'inverse de l'autre ; le point non évident des théorèmes 3 et 3bis est donc la différentiabilité de h_0 .



cas régulier (théorème 3)



cas singulier (théorème 3bis)

3 - La simplicité de la proposition 1 et des théorèmes 3 et 3bis provient de ce que, dans les situations considérées, le revêtement ramifié π a au plus deux feuillets ; par exemple, la proposition 1(ii) affirme que tous les couples de feuilletages de dimension 1 du plan, transverses l'un à l'autre, sont localement difféomorphes, mais il est facile de voir que les (germes de) n -uples, $n > 2$, de feuilletages de dimension 1 du plan, deux à deux transverses sont partagés en une infinité de classes d'équivalence par la relation "être localement homéomorphes". En particulier, du fait que π a trois feuillets dans un ouvert de tout voisinage d'un point-fronce de S , la classification des points-fronces réguliers à germe d'automorphisme de π_1 préservant K près (et même à germe d'homéomorphisme de E_0 près) fournit, elle aussi, une infinité de classes d'équivalence - ce qui n'empêche pas une description de l'allure des solutions de (1), que nous allons faire, pour l'amusement du lecteur, en termes de fonctions génératrices.

Soit z un point-frontière régulier de S ; l'application t_z introduite dans la preuve du lemme 1 permet de supposer que $z = 0$; on a alors $f_p(0) = 0$ (car $0 \in C$) et donc $f_x(0) \neq 0$, puisque $0 \notin \Sigma$. L'involution de Legendre $J : E \rightarrow E$ définie par $p \circ J = x$, $x \circ J = -p$ et $u \circ J = u - p \cdot x$ est donc telle que le point régulier 0 de $J(S)$ n'appartienne pas au lieu critique de $\pi_1|_{J(S)}$. D'après la proposition 1 (i), il existe un germe $h : [E]_0 \rightarrow$ d'automorphisme de π_1 , préservant K et tel que $h(J([S]_0)) = [p^{-1}(0)]_0$, et il est clair que h^{-1} admet une fonction génératrice ((7.2.1), corollaire 3) $\Phi(x, u, p)$, de la forme $a(x, u) + p \cdot b(x, u)$. En d'autres termes, chaque solution géométrique de (1) au voisinage de $z = 0$ s'obtient en fixant une valeur $a \in \mathbb{R}$ de U et en éliminant X entre les relations

$$\begin{cases} u = \Phi(X, a, x) \\ p = \Phi_x(X, a, x) \\ 0 = \Phi_X(X, a, x) \end{cases}.$$

Désignons encore par (x, u) le système de coordonnées linéaires sur E_0 obtenu en prenant les images de x et u par π_1 . Soient $\pi' : E_0 \times E_0 \rightarrow E_0 \times \mathbb{R}$ la projection donnée par $\pi'(v, w) = (v, u(w))$, et $\pi'' : E_0 \times \mathbb{R} \rightarrow E_0$ la projection canonique. Si $S' = \{(v, w) \in E_0 \times E_0 : u(v) = \Phi(x(w), u(w), x(v))\}$, le résultat précédent s'exprime de la manière suivante : chaque solution géométrique de (1) au voisinage de $z = 0$ se projette par π suivant $\pi''((E_0 \times \{a\}) \cap \pi'(C'))$, où C' est le lieu critique de $\pi'|_{S'}$, et $a \in \mathbb{R}$ désigne une constante. Je laisse le lecteur établir la

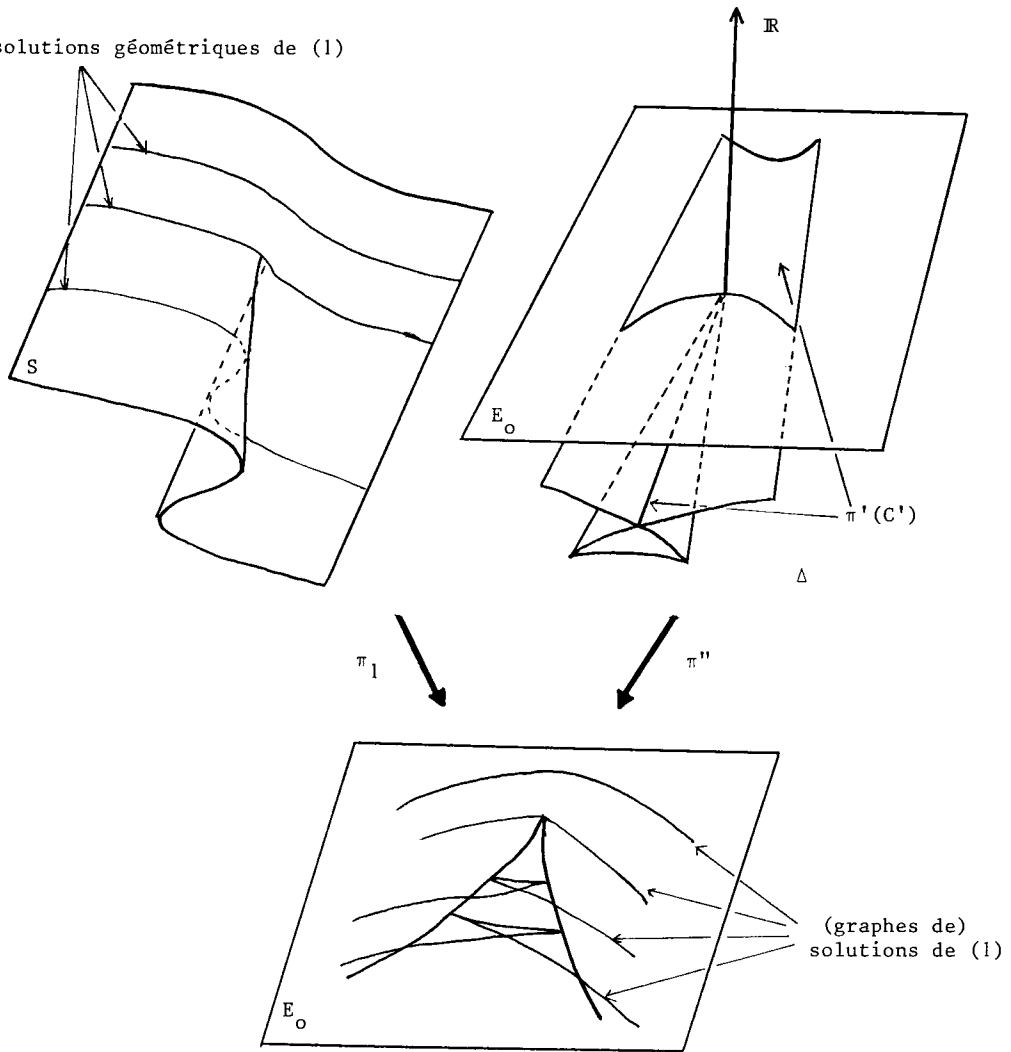
PROPOSITION 2 - Avec les hypothèses et notations précédentes, l'application $\pi'|_{S'}$ admet une singularité-queue d'aronde : il existe un germe $h : (E_0 \times E_0)_{(0,0)} \rightarrow$ d'automorphisme de π' tel que $h([S']_{(0,0)})$ soit le germe en $(0,0)$ de l'hypersurface

$$\{(v, w) \in E_0 \times E_0 : u(v) = x(w)^4/4 + u(w) \cdot x(w)^2/2 + x(v) \cdot x(w)\}.$$

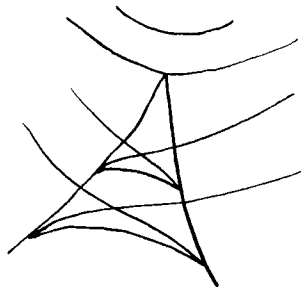
En outre, la tangente en $(0,0)$ à l'arête de points doubles Δ de $\pi'(C')$ n'est contenue ni dans le plan $E_0 \times \{0\}$, ni dans $\pi''^{-1}(0)$. ■

La figure suivante résume notre étude :

solutions géométriques de (1)



La situation en projection dans E_0 peut également être la suivante :

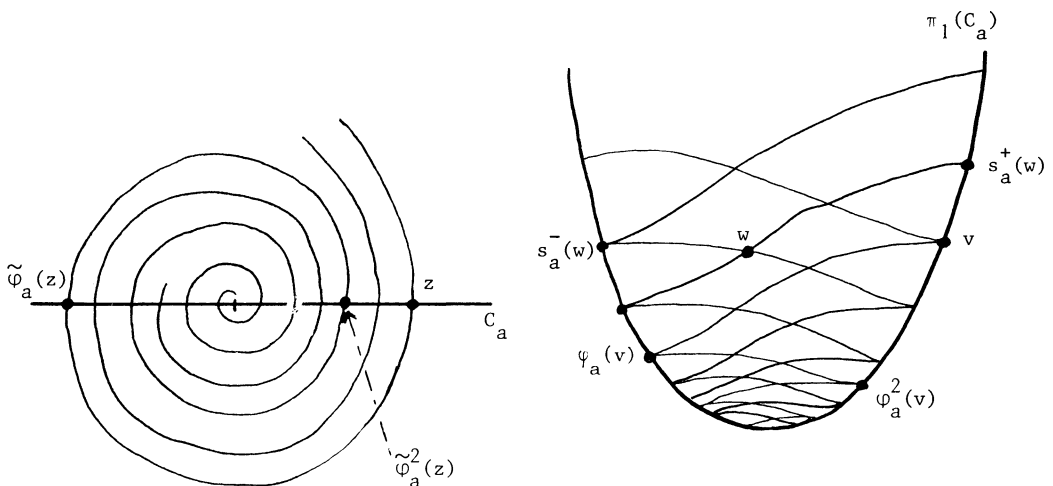


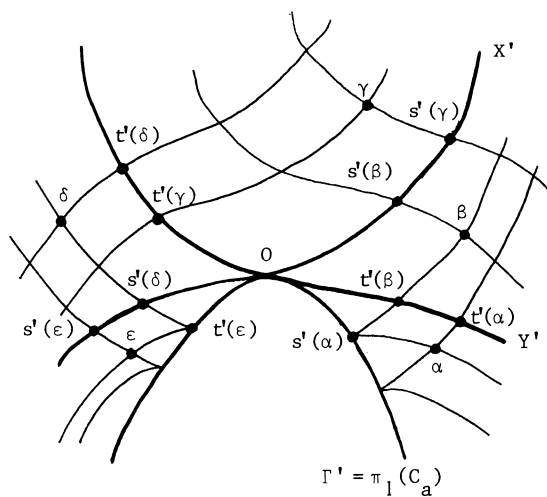
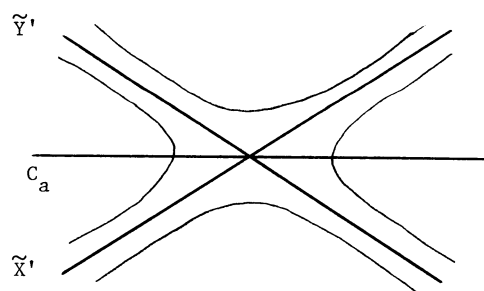
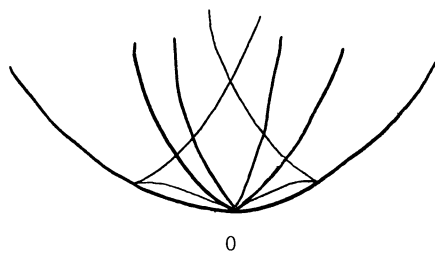
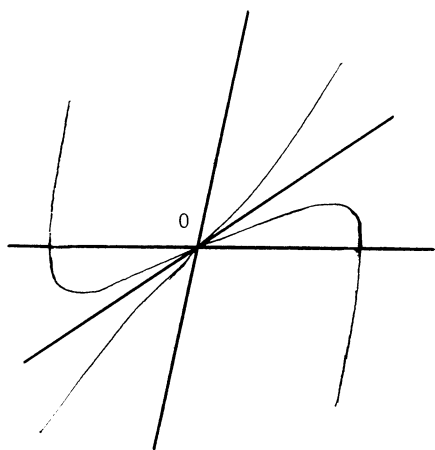
(A9-4) Points singuliers génériques de (1) .

Avec les notations du théorème 2 , on suppose ici que $f \in \mathcal{U}$, et l'on se place en un point $z \in \Sigma$. La (complexifiée de la) différentielle $d(H_C f)(z)$ admet la valeur propre $f_u(z)$ - qui est non nulle parce que $H_C f(z) = 0$ et $df(z) \neq 0$ - et deux valeurs propres λ et μ , de somme $f_u(z)$. Par définition de \mathcal{U} , et λ et μ sont distinctes et différentes de $f_u(z)$, donc non nulles. On dit que z - qui est un point-pli par hypothèse sur f - est un pli-foyer si $\lambda = \bar{\mu}$, un pli-col si $\lambda \mu < 0$ et un pli-nœud dans le cas restant.

THÉOREME 4. Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique $a \in \{-2, 1/8, 1/2\}$ et un germe $h : [E_0]_{\pi(z)} \rightarrow [E_0]_0$ d'homéomorphisme envoyant l'image par π_1 du germe en z du feuilletage caractéristique de S sur l'image par π_1 du germe en 0 de celui de $S_a = (2u - ax^2 - p^2)^{-1}(0)$. Le point singulier z de (1) est un pli-col si $a = -2$, un pli nœud si $a = 1/8$ et un pli-foyer si $a = 1/2$.

Démonstration. Si C_a désigne le lieu singulier de $\pi_1|_{S_a}$, la figure suivante représente (à gauche) le feuilletage caractéristique de S_a - vu dans la direction de projection Ou - et (à droite) son image par π_1 , successivement pour $a = 1/2$, $a = 1/8$ et $a = -2$:





Supposant prouvée l'existence de a et de h , l'unicité de a est claire, car (exercice facile) ces trois situations ne sont pas homéomorphes.

Pour établir l'existence de h , commençons par le cas du pli-foyer. La situation, pour le modèle S_a , $a = 1/8$, est la suivante : l'application $\tilde{\varphi}_a : C_a \rightarrow C_a$ définie sur la figure est (calcul explicite) un difféomorphisme fixant 0 ; comme $\pi_1|_{C_a}$ est un plongement, il envoie $\tilde{\varphi}_a$ sur $\varphi_a : \pi_1(C_a) \rightarrow \pi_1(C_a)$; enfin, tout point w de $\pi_1(S_a)$ est repéré sans ambiguïté par deux points $s_a^-(w)$ et $s_a^+(w)$ de $\pi_1(C_a)$, eux aussi définis sur la figure précédente - avec $s_a^+(0) = s_a^-(0) = 0$. Or, au voisinage de z , on voit facilement que S possède des propriétés tout à fait analogues : le théorème de Sternberg montre en effet que le germe en z de $H_c f|_S$ admet une linéarisation C^∞ (en fait, C^1 suffirait), ce qui permet de définir des difféomorphismes locaux $\tilde{\varphi}$ et φ de C et $\pi(C)$ respectivement de la même manière qu'on a défini $\tilde{\varphi}_a$ et φ_a . Comme z est un point-pli, on en déduit l'existence d'un voisinage U de z dans S et de deux applications s^+ et s^- de $\pi(U)$ dans $\pi(C)$, faisant pendant à s_a^+ et s_a^- . En vertu du théorème de Hartman-Grobman, il existe un germe $h_o : \pi([C]_z) \rightarrow [\pi_1(C_a)]_o$ d'homéomorphisme (de classe C^∞ en dehors de $\pi(z)$, et tel que h_o^{-1} soit de classe C^∞ en dehors de 0) vérifiant $h_o^*[\varphi_a]_o = [\varphi]_{\pi(z)}$. Le germe h d'homéomorphisme cherché peut donc être défini par $s_a^+ \circ h = h_o \circ [s^+]_{\pi(z)}$ et $s_a^- \circ h = h_o \circ [s^-]_{\pi(z)}$. Du théorème 3 et de la remarque 2, on en déduit le

SCOLIE 1. Lorsque z est un pli-foyer, h peut être choisi dans le théorème 4 de manière que h et h^{-1} soient respectivement de classe C^∞ en dehors de $\pi(z)$ et de 0. \square

- Cas du pli-col. Si \tilde{X}' et \tilde{Y}' désignent les deux courbes de Legendre de K contenues dans S'_a , $a = -2$, et passant par 0, alors $X' = \pi_1(\tilde{X}')$ et $Y' = \pi_1(\tilde{Y}')$ sont des paraboles, tangentes en 0 à la parabole $\Gamma' = \pi_1(C_a)$. Soient \tilde{X}'_+ , \tilde{Y}'_+ et C_{a+} (resp. \tilde{X}'_- , \tilde{Y}'_- et C_{a-}) les intersections de \tilde{X}' , \tilde{Y}' et C_a avec $x^{-1}([0, \infty[)$ (resp. $x^{-1}]-\infty, 0])$, et X'_+ , Y'_+ et Γ'_+ (resp. X'_- , Y'_- et Γ'_-) leurs images par π_1 . La figure précédente définit deux applications $s' : \pi_1(S_a) \rightarrow \Gamma'_+ \cup X'_+ \cup Y'_-$ et $t' : \pi_1(S_a) \rightarrow \Gamma'_- \cup X'_- \cup Y'_+$, évidemment continues, et il est clair que tout point v de $\pi_1(S_a)$ est déterminé de manière unique par $s'(v)$ et $t'(v)$. Comme $H_c f|_S$

est C^1 -linéarisable au voisinage de z (appendice 8), on n'a aucun mal à voir que la situation est tout à fait analogue pour S près de z : à \tilde{X}' et \tilde{Y}' correspondent les germes \tilde{X} et \tilde{Y} des v.f.i. de $H_c f$ en z , et à C_a le germe $[C]_z$; on pose $X = \pi(\tilde{X})$, $Y = \pi(\tilde{Y})$, $\Gamma = \pi([C]_z)$, et le choix d'orientations de X , Y et Γ identiques en $\pi(z)$ permet de définir les analogues X_+ , Y_+ , Γ_+ , X_- , Y_- , Γ_- de X'_+ , Y'_+ , Γ'_+ , X'_- , Y'_- , Γ'_- respectivement, puis les germes $s : \pi([S]_z) \rightarrow \Gamma_+ \cup X_+ \cup Y_-$ et $t : \pi([S]_z) \rightarrow \Gamma_- \cup X_- \cup Y_+$ d'applications continues correspondant à s' et t' . Il existe évidemment un germe $h_o : \Gamma \cup X \cup Y \rightarrow [\Gamma' \cup X' \cup Y']_o$ d'homéomorphisme tel que $h_o|_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, $h_o|_X : X \rightarrow X'$ et $h_o|_Y : Y \rightarrow Y'$ soient des germes de difféomorphismes C^∞ , envoyant l'orientation choisie à la source sur l'orientation au but définie par x ; le germe h d'homéomorphisme cherché peut donc être défini par $s' \circ h = h_o \circ s$ et $t' \circ h = h_o \circ t$, d'où le

SCOLIE 2. Lorsque z est un pli-col, h peut être choisi dans le théorème 4 de manière que h et h^{-1} , avec les notations précédentes, soient respectivement de classe C^∞ en dehors de $X \cup Y$ et en dehors de $X' \cup Y'$, et qu'en outre $h|_X$, $h|_Y$, $h^{-1}|_{X'}$ et $h^{-1}|_{Y'}$ soient des germes de difféomorphismes C^∞ sur leurs images $[X']_o$, $[Y']_o$, X et Y respectivement.

- Cas du pli-nœud. L'idée est exactement la même : représenter un point de $\pi_1(S_a)$ par les deux projections de feuilles caractéristiques qui s'y coupent. Je laisse les détails au lecteur. ■

REMARQUE. Si l'on considère des familles à paramètre $f_\lambda \circ j^1\varphi = 0$ d'équations du type (1), telles que 0 soit valeur régulière de f_λ pour tout λ , les considérations du début de (A9.4) montrent que la bifurcation de Hopf est un phénomène impossible pour le feuilletage caractéristique de $f_\lambda^{-1}(0)$. Un beau théorème de Daniel Bennequin (bibliographie du chapitre 4) montre en fait que, pour toute surface S de classe C^∞ plongée dans E , le feuilletage caractéristique de S n'admet pas de feuille compacte bordant un disque de S .

Références.

Y. Brodsky, cité par V.I. Arnold ([2], bibliographie du chapitre 2)

Y.L. Kergosien et R. Thom. Sur les points paraboliques des surfaces, C.R.
Acad. Sc. 290 (1980), série A, 705

Lak Dara. Singularités génériques des équations différentielles multiformes,
Bol. Soc. Bras. Mat.6 (1975), P.95-128.

R. Thom. Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales
singulières, Bol. Soc. Bras. Mat.3 (1972).

F. Tricomi. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine,
di tipo misto, Rendiconti, Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Série 5,
14, 134-247 (1923).

CONCLUSION : SINGULARITÉS DE SYSTÈMES DYNAMIQUES.

*Aimai-je un rêve ?
Mon doute, amas de nuit ancienne, s'achève
En maint rameau subtil, qui, demeuré les vrais
Bois mêmes, prouve, hélas ! que bien seul je m'offrais
Pour triomphe la faute idéale de roses.
Réfléchissons...*

Mallarmé

Nous allons maintenant donner quelques indications supplémentaires sur les systèmes dynamiques et leurs singularités, ce qui montrera en particulier des exemples de situations auxquelles appliquer les résultats de cet ouvrage.

Sauf mention du contraire, les variétés et applications considérées sont de classe C^∞ , une surface est une sous-variété de dimension 2, et une courbe est une sous-variété de dimension 1. Nous allons commencer par montrer que, même en partant du point de vue "myope" selon lequel les singularités d'un système dynamique sont ses équilibres, on est rapidement conduit à envisager des singularités plus globales.

(C 1) Défauts d'hyperbolicité génériques des points fixes d'une famille à un paramètre de difféomorphismes.

Soient M une variété de dimension finie n , et $J^k = J^k(\mathbb{R} \times M, M)$, $0 \leq k < \infty$; pour chaque application $f : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ et chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, définissons $f_\lambda : M \rightarrow M$ par $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$; de même, étant donné $A \subset \mathbb{R} \times M$ on note $A_\lambda = \{x \in M : (\lambda, x) \in A\}$. Soient

$$\Sigma_0 = \{j_{(\lambda, x)}^0 f \in J^0 : f_\lambda(x) = x\}$$

$$\Sigma_1 = \{j_{(\lambda, x)}^1 f \in J^1 : f_\lambda(x) = x \text{ et } \sigma(T_x f_\lambda) \cap S^1 \neq \emptyset\}.$$

Le fermé Σ_1 admet une stratification possédant la propriété (a) de Whitney, et dont la strate de dimension maximale est la sous-variété $\Sigma_{1,0}$ formée des $j_{(\lambda, x)}^1 f \in \Sigma_1$ tels que l'on ait $\#\{\{\alpha, \bar{\alpha}\} : \alpha \in \sigma(T_x f_\lambda) \cap S^1\} = 1$ et qu'en outre

chaque $\alpha \in \sigma(T_x f_\lambda) \cap S^1$ soit valeur propre simple de $T_x f_\lambda$. Il est clair que $\Sigma_{1,0}$ est la réunion disjointe des sous-variétés Σ_1^+ , Σ_1^- et Σ_1^C définies par

$$\Sigma_1^+ = \{j_{(\lambda,x)}^1 f \in \Sigma_{1,0} : \sigma(T_x f_\lambda) \cap S^1 = \{+1\}\}$$

$$\Sigma_1^C = \Sigma_{1,0} \setminus (\Sigma_1^+ \cup \Sigma_1^-).$$

D'après le théorème de transversalité de Thom (2.3.1), l'ensemble des $f :$

$\mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tels que $j^0 f$ soit transverse à la sous-variété Σ_0 et $j^1 f$, au fermé stratifié Σ_1 , est un ouvert dense \mathcal{U} de la topologie fine ; l'ouvert

$\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \text{Diff}^\infty(M, M)$ est donc dense dans $\text{Diff}^\infty(M, M)$. Comme Σ_j est de codimension $j + n$ pour $j = 0, 1$, on déduit de (2.2), proposition 1 que, pour tout $f \in \mathcal{V}$,

- le fermé $C(f) = \{(\lambda, x) : f_\lambda(x) = x\} = (j^0 f)^{-1}(\Sigma_0)$ est une courbe ;
- l'ensemble $C_1(f)$ des $(\lambda, x) \in C(f)$ tels que le point fixe x de f_λ ne soit pas hyperbolique est formé de points isolés, car on a $C_1(f) = (j^1 f)^{-1}(\Sigma_1)$.

On en déduit que $C_1(f)$ comporte trois sortes de points :

- Ceux où x est un point fixe dégénéré de f_λ , qui forment l'ensemble $C_1^+(f) = (j^1 f)^{-1}(\Sigma_1^+)$.
- Ceux où -1 est valeur propre de $T_x f_\lambda$, qui forment l'ensemble $C_1^-(f) = (j^1 f)^{-1}(\Sigma_1^-)$.
- Ceux où $T_x f_\lambda$ a un couple de valeurs propres imaginaires conjuguées de module 1, qui forment l'ensemble $C_1^C(f) = (j^1 f)^{-1}(\Sigma_1^C)$.

UN ÉLÉMENT f DE \mathcal{V} ÉTANT DÉSORMAIS FIXE, ON POSE $C = C(f)$, $C_1 = C_1(f)$, etc. On peut par exemple appliquer le théorème de Hartman-Grobman à paramètre (3.2.4) pour trivialisier la famille (f_λ) au voisinage de chaque composante connexe de $C \setminus C_1$. Si intéressant que soit ce résultat, nous allons voir que la taille du voisinage où il s'applique ne suffit pas à rendre compte des phénomènes intéressants survenant près des points de C_1 ; pour étudier ceux-ci, il sera commode d'utiliser le résultat suivant, que nous admettrons (cf. Chenciner-Ioos) :

THÉORÈME DE LA VARIÉTÉ CENTRALE. - Etant donné un point a d'une variété X et un germe $\varphi : [X]_a \rightarrow$ de difféomorphisme, soit E^0 le plus grand sous-espace vectoriel

$T_a\varphi$ -invariant E de T_aX vérifiant $\sigma(T_a\varphi|_E) \subset S^1$. Il existe un germe W^0 en a de
sous-variété, φ -invariant et tangent à E^0 . ■

Avec les notations du théorème, on dit que E^0 est le sous-espace central
de $T_a\varphi$, et l'on a $T_aX = E^0 \oplus E^+ \oplus E^-$, où E^+ et E^- sont les sous-espaces stable
et instable de $T_a\varphi$. Le germe W^0 est une variété centrale de φ .

REMARQUES. - L'énoncé correspondant est vrai lorsqu'on remplace les germes d'actions
de \mathbb{Z} par des germes d'actions de \mathbb{R} .

- La variété centrale n'est pas en général unique; ainsi le germe
en $0 \in \mathbb{R}^2$ d'action de \mathbb{R} engendré par le germe du champ de vecteurs $(x,y) \mapsto (x^2, y)$
laisse invariants les germes de toutes les courbes $y = \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, où $\varphi_c(x) = 0$
pour $x \leq 0$ et $\varphi_c(x) = c e^{-1/x}$ pour $x > 0$.

I - Etude des points de C_1^+ (points catastrophiques).

Etant donné $a = (\lambda_0, x_0) \in C_1^+$, la transversalité de $j^1 f$ à Σ_1^+ implique
(exercice) que C a un contact d'ordre 1 en a avec l'hypersurface $\{\lambda_0\} \times M$ de $\mathbb{R} \times M$;
par conséquent, il existe un voisinage V de a dans C entièrement contenu
dans l'un des "demi-espaces" $H_+ = [\lambda_0, \infty[\times M$ et $H_- =]-\infty, \lambda_0] \times M$. Si l'on a
 $V \subset H_+$ (resp. H_-), il y a donc pour $\lambda = \lambda_0$ naissance (resp. mort) en x_0 d'un
couple de points fixes de f_λ .

Appliquons le théorème de la variété centrale à $X = \mathbb{R} \times M$ et $\varphi = [F]_a$,
où $F(\lambda, x) = (\lambda, f_\lambda(x))$; si W^0 est une variété centrale de φ , alors, par défini-
tion de Σ_1^+ , elle est de dimension 2 et coupe transversalement $\{\lambda_0\} \times M$. Le germe
en a d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R} \times M$ du type $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, h_\lambda(x))$, avec
 $h(\lambda_0, x_0) = x_0$, permet donc de supposer que W^0 est le germe en a de $\mathbb{R} \times \Gamma$, où
 $\Gamma \ni x_0$ est une courbe de M . On voit alors facilement que $f|_{\mathbb{R} \times \Gamma}$ vérifie au
voisinage de a les mêmes hypothèses de transversalité que f , ce qui prouve
l'inclusion $[C]_a \subset W^0$. Voici donc un des deux comportements possibles de $F|_{\mathbb{R} \times \Gamma}$
au voisinage de a :

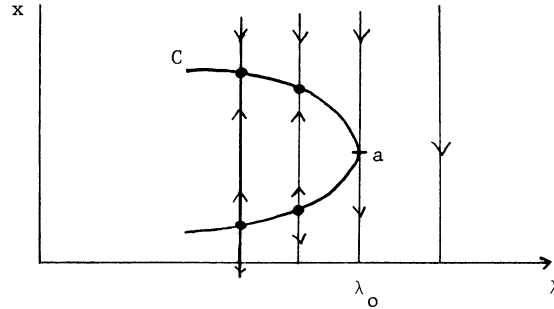


Figure 1

(les flèches indiquent de quel côté de x se trouve $f_\lambda(x)$; l'autre situation possible s'obtient en renversant l'orientation de l'axe des λ).

REMARQUE. - Soit \tilde{W}^0 un représentant du germe W^0 ; pour $\lambda \neq \lambda_0$ assez proche de λ_0 , si $x \in C_\lambda$ est un des deux points fixes de f_λ qui sont nés ou vont mourir en x_0 pour la valeur λ_0 du paramètre, on prouve sans peine que $[\tilde{W}_\lambda^0]_x$ est l'unique germe en x de courbe invariant par $[f_\lambda]_x$ et dont la tangente en x ne soit pas trop éloignée de la projection de $T_a C$. L'unicité de W^0 au voisinage de $C \setminus \{a\}$ étant ainsi prouvée, on en déduit immédiatement (cf. figure 1) son unicité au voisinage de $R \setminus \{a\}$, où R est le fermé de W^0 dessiné ci-dessous :

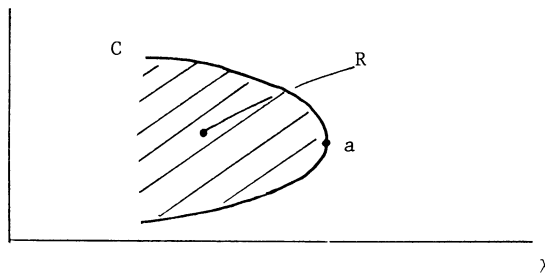


Figure 2

II - Cas des points de C_1^- (bifurcation de Poincaré-Hopf).

Etant donné $a = (\lambda_0, x_0) \in C_1^-$, la courbe C coupe cette fois $\{\lambda_0\} \times M$ transversalement. Pour voir le phénomène nouveau qui se produit, il est assez satisfaisant heuristiquement d'utiliser les concepts introduits dans l'appendice 4 : avec les notations de celui-ci (une métrique riemannienne étant choisie sur M) ,

soit Z la sous-variété de $\partial({}_2\overline{J}^0(M,M)) = SM \times TM$ définie par $Z = \{((x,u),(y,z)) : y = x \text{ et } z = -u\}$; par définition de Σ_1^- , la transversalité de $j_1^1 f$ à Σ_1^- se traduit comme suit : la restriction à $\mathbb{R} \times \partial({}_2\overline{M}) = \mathbb{R} \times SM$ de l'application $G : \mathbb{R} \times {}_2\overline{M} \rightarrow {}_2\overline{J}^0(M,M)$ donnée par $G(\lambda,y) = {}_2\overline{J}^0 f_\lambda(y)$ est transverse à Z ; en particulier, il existe un ouvert $U \supset \{\lambda_0\} \times S_{x_0} M$ de $\partial({}_2\overline{M})$ tel que $U \cap G^{-1}(Z) = \{\lambda_0\} \times \{v, -v\}$, où v et $-v$ sont les deux vecteurs propres unitaires de $T_{x_0} f_{\lambda_0}$ associés à la valeur propre -1 . De la transversalité de $G|_{\mathbb{R} \times \partial({}_2\overline{M})}$ à Z , on déduit aussitôt le fait suivant : pour toute sous-variété Y de ${}_2\overline{J}^0(M,M)$ telle que $\partial Y = Z$, il existe un ouvert $V \supset \{\lambda_0\} \times S_{x_0} M$ de U vérifiant $G \upharpoonright_V Y$. Or, l'exemple le plus naturel d'une telle sous-variété Y est défini par

$$Y \setminus Z = \{((x,y),(x',y')) \in {}_2J^0(M,M) : x' = y \text{ et } y' = x\}.$$

La sous-variété Y ainsi choisie, étant donné un ouvert V comme ci-dessus, $G^{-1}(Y) \cap V$ est donc une courbe $\tilde{\Gamma}$; soit $\pi : \mathbb{R} \times {}_2\overline{M} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ la composée de la projection naturelle $\mathbb{R} \times {}_2\overline{M} \rightarrow \mathbb{R} \times M^2$ et de l'une quelconque des deux projections canoniques $\mathbb{R} \times M^2 \rightarrow \mathbb{R} \times M$, et soit $\Gamma = \pi(\tilde{\Gamma})$. Nos hypothèses sur f entraînent que $[\Gamma]_a$ est un germe de courbe, transverse à C en a ; la restriction à Γ de $F : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, f_\lambda(x))$ est, au voisinage de a , une involution non triviale fixant a . Moyennant une condition de transversalité supplémentaire sur f (que je laisse le lecteur expliciter) et avec les conventions de la figure 1, voici comment se comporte la restriction de F^2 à une variété centrale de F au voisinage de a :

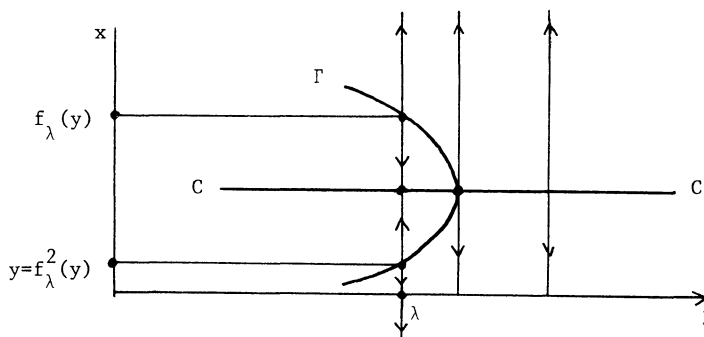


Figure 3

(les autres possibilités s'obtiennent en renversant l'orientation de l'axe des λ et/ou le sens de toutes les flèches verticales à la fois). Naturellement, si l'on requiert seulement la condition $f \in \mathcal{V}$, il est parfaitement possible (mais très exceptionnel...) que l'on ait $\Gamma \subset \{\lambda_o\} \times M$, comme lorsque $f_\lambda(x) = (-1+\lambda)x$ au voisinage de $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

La signification de ce très important phénomène sera discutée plus avant dans (C2).

III - Cas des points de C_1^C (bifurcation de Hopf-Naimark).

L'approche algébrique utilisée dans II - n'est plus ici pertinente, et nous avons tout intérêt à nous placer d'emblée dans une variété centrale W^O de F au point $a = (\lambda_o, x_o)$ de C_1^C considéré. Le même argument que dans I- montre que W^O contient le germe de C en a , lequel est transverse à $\{\lambda_o\} \times M$; comme $T_{x_o} f_{\lambda_o}$ a cette fois un couple de valeurs propres imaginaires conjuguées, W^O est de dimension 3. Nous allons voir que la théorie des formes normales (4.3.1) est ici fort utile :

LEMME 1 - Si $\sigma(T_{x_o} f_{\lambda_o})$ ne contient pas de racine k-ième de l'unité pour $k \leq 5$, il existe quatre fonctions $b, c, \alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, si $n: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$(1) \quad n(\lambda, z) = z(\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)|z|^2) e^{i(b(\lambda) + c(\lambda)|z|^2)},$$

les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) Il existe un germe $H: W^O \rightarrow [\mathbb{R} \times \mathbb{C}]_{(0,0)}$ de difféomorphisme de la forme
 $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, h(\lambda, x))$ envoyant $F|_{W^O}$ sur $[G]_{(0,0)}$, où $G: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrit
 $G(\lambda, x) = (\lambda, g(\lambda, x))$ et satisfait à l'égalité

$$j_o^4(g_\lambda - h_\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(en particulier, $H([C]_a) = [\mathbb{R} \times \{0\}]_{(0,0)}$).

(ii) On a $\alpha(0) = 1$ et $\alpha'(0) \neq 0$.

Preuve. (ii) résulte de (i) et de notre hypothèse sur f et a . Pour prouver (i),

On peut évidemment supposer d'emblée que $W^0 = [\mathbb{R} \times \mathbb{C}]_{(0,0)}$, que

$[C]_a = [\mathbb{R} \times \{0\}]_{(0,0)}$ et que le germe $F|_{W^0}$ admet un représentant $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow$

de la forme $\Phi(\lambda, x) = (\lambda, \psi(\lambda, x))$; on voit facilement qu'il s'agit en fait de prouver l'existence d'une application $\lambda \mapsto j_0^4 h_\lambda$ de \mathbb{R} dans $\mathcal{B}_0^4(\mathbb{C})$ telle que, pour λ assez proche de $\lambda_0 = 0$, le jet $j_0^4(h_\lambda^* \psi_\lambda)$ commute à la partie semi-simple de $j_0^4 \psi_0$. Or, ce résultat se déduit immédiatement de 1'

EXERCICE. Etant donné $\varphi_0 \in \mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^\ell) = \mathcal{B}$, $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert $U \ni \varphi_0$ de \mathcal{B} et une application analytique $h : U \rightarrow \mathcal{B}$ tels que, pour tout $\varphi \in U$, la partie semi-simple de φ_0 commute à $h(\varphi)^* \varphi$ (l'ingrédient clé est le suivant : si α est une valeur propre de $A \in GL(\mathbb{C}^m)$, si le sous-espace invariant correspondant $E = \text{Ker}(A - \alpha \text{id})^m$ est de dimension d et si \mathbb{G}_d désigne la grassmannienne des d -plans complexes de \mathbb{C}^m , alors (par le théorème des fonctions implicites) il existe un unique germe $V : [GL(\mathbb{C}^m)]_A \rightarrow [\mathbb{G}_d]_E$ d'application continue (et, en fait, holomorphe) V telle que $BV(B) = V(B)$ pour tout B assez proche de A . Le résultat s'en déduit par les méthodes de (4.3.1)). ■

Sous les hypothèses et avec les notations du lemme 1, supposons que f vérifie la condition de transversalité supplémentaire permettant d'affirmer que l'on a

$$(2) \quad \beta(0) \neq 0.$$

Modulo un difféomorphisme local de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la forme $(\lambda, x) \mapsto (\psi(\lambda), \Psi(\lambda, x))$,

$$(1\text{bis}) \quad n(\lambda, z) = z(1 + \varepsilon(\lambda - |z|^2))e^{i(b(\lambda) + c(\lambda)|z|^2)}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Il existe donc un disque ouvert D de centre 0 dans \mathbb{C} et un intervalle ouvert borné $J \ni 0$ tels que les propriétés suivantes soient vérifiées pour tout $\lambda \in J$:

(i) La restriction de n_λ à D est un plongement, et on a $n_\lambda^\varepsilon(D) \subset D$.

(ii) Pour $\lambda > 0$, le cercle n_λ -invariant $\Gamma_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = \lambda\}$ est contenu dans D .

(iii) Quel que soit $z \in D \setminus \{0\}$,

a) pour $\lambda < 0$, la suite $(|n_\lambda^{2k}(z)|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge exponentiellement vers 0 ;

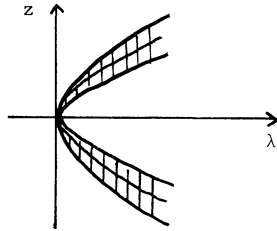
b) pour $\lambda = 0$, elle converge aussi (mais moins vite) vers 0 ;

c) pour $\lambda > 0$, la distance de $n_\lambda^{\varepsilon k}(z)$ à Γ_λ tend exponentiellement vers 0 quand $k \rightarrow \infty$; si de plus z est intérieur à Γ_λ , la distance de $n_\lambda^{-\varepsilon k}(z)$ à 0 tend exponentiellement vers 0 , et $n_\lambda(z)$ est intérieur à Γ_λ

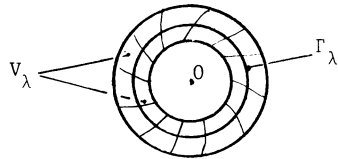
Nous allons maintenant expliquer sommairement pourquoi cet énoncé reste vrai lorsqu'on y remplace n par g , à condition de substituer à (Γ_λ) une famille $(\gamma_\lambda)_{\lambda > 0}$ de cercles plongés (dont la différentiabilité est une fonction décroissante de λ).

Pour cela, considérons le "voisinage" effilé de $\Gamma = \bigcup \{\lambda\} \times \Gamma_\lambda$ dans $J \times D$ défini, pour $\alpha > 0$ assez petit, par

$$V = \{(\lambda, z) : |\lambda - |z||^2 \leq \alpha |z|^3\} .$$



trace de V sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\alpha \in S^1$



trace V_λ de V sur $\{\lambda\} \times \mathbb{C}$, $\lambda > 0$

Figure 4

Par hypothèse, on a

$$(3) \quad |g(\lambda, z)| = |z| |1 + \varepsilon(\lambda - |z|)^2 + O(|z|^4)| \quad \text{uniformément par rapport à } \lambda \in J .$$

Supposons que $\varepsilon = 1$ (le cas où $\varepsilon = -1$ s'en déduit en remplaçant g_λ par g_λ^{-1}) ;

en restreignant éventuellement J et D , on déduit de (3) que, quels que soient

$$(\lambda, z) \in J \times D \setminus \overset{0}{V} , \text{ on a}$$

$$(4) \quad \begin{cases} |g_\lambda(z')| \geq (1 + \frac{\alpha}{2} |z'|^3) |z'| & \text{pour } \lambda - |z'|^2 \geq \alpha |z'|^3 \\ |g_\lambda(z)| \leq (1 - \frac{\alpha}{2} |z|^3) |z| & \text{pour } \lambda - |z|^2 < -\alpha |z|^3 \end{cases}.$$

Il ne reste donc plus, en restreignant éventuellement J , qu'à prouver les faits suivants, qui concernent exclusivement $g|_V$:

1) On a $G(V) \subset V$.

2) Pour tout $\lambda > 0$ dans J , l'intersection γ_λ des $g_\lambda^k(V_\lambda)$, $k > 0$, est un cercle plongé entourant 0 .

3) Plus précisément, pour tout $z \in V_\lambda$, la distance de $g_\lambda^k(z)$ à γ_λ tend exponentiellement vers zéro quand $k \rightarrow +\infty$.

L'idée de la preuve est essentiellement la suivante : étant donné un entier $k > 0$, on considère l'ensemble \mathcal{C}^k des cercles C^k -plongés dans D , et, pour chaque $\lambda \in J$, l'application naturelle $\tilde{g}_\lambda : \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^k$ définie par $\tilde{g}_\lambda(C) = g_\lambda(C)$.

L'application \tilde{g}_λ est continue pour la topologie définie sur \mathcal{C}^k par les cartes suivantes : pour chaque $\gamma \in \mathcal{C}^k$, on choisit un voisinage tubulaire de γ , c'est-à-dire un C^k -plongement $j : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow D$ tel que $j(S^1 \times \{0\}) = \gamma$. La carte $\Phi_{\gamma,j}$ correspondante a pour domaine l'ensemble des $j(\text{graphe}(f))$, $f \in C^k(S^1, \mathbb{R})$, et la topologie est l'image réciproque de la topologie C^k sur $C^k(S^1, \mathbb{R})$ (attention : les changements de cartes ne sont C^1 qu'en tant qu'applications $C^k(S^1, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k-1}(S^1, \mathbb{R})$). On se place alors, pour chaque $\lambda > 0$, dans le domaine d'une carte $\psi_\lambda = \Phi_{\gamma,j}$, où $\gamma = \Gamma_\lambda$ et $j(S^1 \times \mathbb{R}) \supset V_\lambda$, et l'on montre l'existence d'un sous-ensemble A_λ de $C^k(S^1, \mathbb{R})$ fermé pour la topologie C^0 , invariant par $\psi_{\lambda*} \tilde{g}_\lambda$, tel que $\psi_{\lambda*} \tilde{g}_\lambda|_{A_\lambda}$ soit une contraction pour la topologie C^0 , et vérifiant en outre $\bigcup \psi_\lambda^{-1}(A_\lambda) = V_\lambda$. Le cercle invariant γ_λ cherché est donc l'unique point fixe (attractif) de $\tilde{g}_\lambda|_{\psi_\lambda^{-1}(A_\lambda)}$. Je renvoie à Ioos, Chenciner et Chenciner-Ioos pour plus de détails.

REMARQUES IMPORTANTES. En dépit d'une analogie superficielle, la bifurcation de Hopf-Naimark n'est pas de la même nature que celle de Poincaré-Hopf : pour celle-

ci, le rôle de la condition de transversalité supplémentaire introduite était simplement de mettre en position générale la courbe Γ , dont l'existence était de toutes manières assurée. En revanche, la condition (2) intervient pour assurer l'existence même de la famille (v_λ) . Il existe en effet des difféomorphismes h du disque ouvert-unité \mathbb{D} de \mathbb{C} , préservant les aires, fixant 0 , tangents en 0 à une rotation d'angle $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ et tels que les seuls fermés h -invariants de \mathbb{D} soient $\{0\}$ et \mathbb{D} (difféomorphismes d'Anosov-Katok ; cf. Moser, p.56); étant donné un tel h , la famille (g_λ) donnée par $g_\lambda(z) = (1+\lambda)h(z)$ fournit le contre-exemple cherché.

- Nous avons montré une certaine ressemblance entre g et n au voisinage de $(0,0)$. On se gardera cependant de croire qu'il y a C^0 -isomorphisme entre les deux au sens de (3.2.4) : en général, il n'existe même pas d'application continue $\varphi : J \rightarrow J$ telle que $g_{\varphi(\lambda)}|_{\varphi(\lambda)}$ puisse être envoyé sur $n_\lambda|_{\Gamma_\lambda}$ par un homéomorphisme pour tout λ assez petit ; en effet, l'angle de la rotation $n_\lambda|_{\Gamma_\lambda}$ est une fonction C^∞ , en général strictement monotone, de λ , alors que ce qui en tient lieu pour $g_\lambda|_{\gamma_\lambda}$, à savoir $(2\pi \text{ fois})$ son nombre de rotation (cf. Herman 1979) ν_λ en général être une fonction discontinue de λ , localement constante pour ses valeurs rationnelles, d'où le résultat annoncé, le nombre de rotation étant un invariant topologique.

Pour comprendre ce phénomène, remarquons que, lorsque $\rho(n_\lambda|_{\Gamma_\lambda})$ est rationnel, il existe un entier $q > 0$ tel que $n_\lambda^q|_{\Gamma_\lambda}$ soit l'identité, situation extrêmement instable par perturbation ; au contraire, quand $\rho(g_\lambda|_{\gamma_\lambda})$ est rationnel, le difféomorphisme $g_\lambda|_{\gamma_\lambda}$ est en général structurellement stable, c'est à dire que tout difféomorphisme de γ_λ assez proche de g_λ est conjugué à g_λ dans le groupe des homéomorphismes de γ_λ ; par conséquent, pour tout λ' assez proche de λ , il existe un homéomorphisme $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma_{\lambda'}$ envoyant $g_\lambda|_{\gamma_\lambda}$ sur $g_{\lambda'}|_{\gamma_{\lambda'}}$, et on a donc en particulier $\rho(g_{\lambda'}|_{\gamma_{\lambda'}}) = \rho(g_\lambda|_{\gamma_\lambda})$.

(C2) Cas des champs de vecteurs.

(C2-1) Etant donnée une famille $(\xi_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de champs de vecteurs sur la variété M , l'ensemble des zéros de $\xi : (\lambda, x) \mapsto \xi_\lambda(x)$ est de même, génériquement, une courbe C , contenant deux ensembles disjoints C_1^r et C_1^c de points isolés qui possèdent les propriétés suivantes :

- Pour $a = (\lambda, x) \in C \setminus (C_1^r \cup C_1^c)$, le germe d'action de \mathbb{R} engendré par $[\xi_\lambda]_x$ est hyperbolique.

- Pour $a = (\lambda_0, x_0) \in C_1^r$, une valeur propre simple de la différentielle $d_x \xi_\lambda$, $(\lambda, x) \in C$, rencontre transversalement l'axe imaginaire $i\mathbb{R}$ en 0 pour $(\lambda, x) = a$, et $\sigma(d_{x_0} \xi_{\lambda_0}) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

- Pour $a = (\lambda_0, x_0) \in C_1^c$, un couple de valeurs propres simples imaginaires conjuguées de $d_x \xi_\lambda$, $(\lambda, x) \in C$ rencontre transversalement $i\mathbb{R}$ en $\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ pour $(\lambda, x) = a$, et $\sigma(d_{x_0} \xi_{\lambda_0}) \cap i\mathbb{R} = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$.

I - Aux points $a = (\lambda_0, x_0)$ de C_1^r , il y a catastrophe : la courbe C a un contact simple avec $\{\lambda_0\} \times M$ en a , et les courbes intégrales du champ X : $(\lambda, x) \mapsto (0, \xi_\lambda(x))$ sur $\mathbb{R} \times M$ présentent, au voisinage de a , l'aspect de la figure 1 dans une variété centrale (ici de dimension 2) de X en a .

II - En tout point $a = (\lambda_0, x_0)$ de C_1^c , la courbe C coupe au contraire $\{\lambda_0\} \times M$ transversalement. Si l'on appelle orbite de X l'image d'une courbe intégrale, il existe une surface S passant par a dans $\mathbb{R} \times M$ et possédant les deux propriétés suivantes :

- (i) X est tangent à S en chacun de ses points ;
- (ii) Les orbites de $X|_S$ sont $\{a\}$ et des cercles plongés entourant a (les courbes intégrales correspondantes de X sont donc périodiques).

Génériquement, S a un contact simple avec $\{\lambda_0\} \times M$ en a ; si W désigne (un représentant d') une variété centrale (ici de dimension 3) de X en a , voici comment se comportent au voisinage de x_0 , pour λ proche de λ_0 , les orbites de ξ_λ contenues dans W_λ (les autres cas possibles s'obtiennent en inversant le

sens de parcours sur toutes les orbites des ξ_λ et/ou l'ordre des λ) :

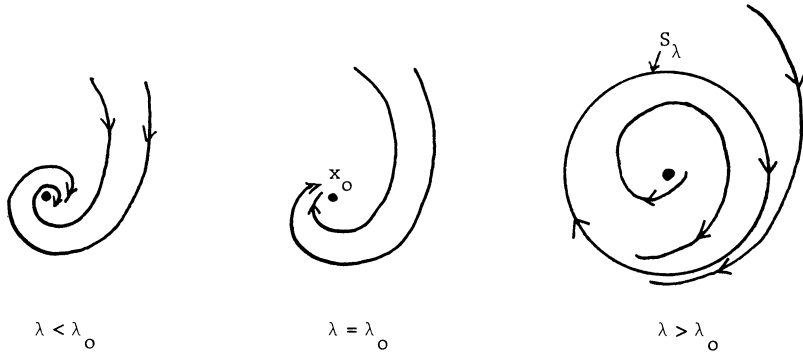


Figure 5

C'est la bifurcation d'Andronov-Hopf, phénomène dynamique remarquable, puisqu'il se traduit (dans le cas de la figure 5) par l'apparition, à partir d'un équilibre stable, d'un régime périodique stable - presque toutes les orbites de ξ_λ sont attirées "très vite" vers S_λ , du moins au voisinage de a . Le cas où il y a destruction d'un équilibre stable par collision avec une orbite périodique instable est également significatif (c'est la situation où toutes les flèches et l'ordre des λ sont inversés par rapport à la figure 5).

Pour prouver ce qui vient d'être avancé, restreignons-nous à W , ce qui, à (germe de) difféomorphisme près, revient à supposer que $M = \mathbb{C}$; on peut en outre supposer que C coïncide avec $\mathbb{R} \times \{0\}$ près de $a = (\lambda_0, 0)$. Pour chaque réel λ proche de λ_0 et chaque réel $x \neq 0$, assez petit, soit alors $\tau(\lambda, x) = \min\{t > 0 : \varphi_\lambda^t(x) \in \mathbb{R}\}$, où (φ_λ^t) est le flot de ξ_λ , et soit

$$f_\lambda(x) = \varphi_\lambda^{\tau(\lambda, x)}(x).$$

Si $p : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'éclatement orienté de l'origine défini par le passage en coordonnées polaires, c'est à dire par $p(u, r) = ru$, il existe une (unique) famille $(\tilde{\xi}_\lambda)$ de champs de vecteurs sur $S^1 \times \mathbb{R}$ dont l'image par p soit (ξ_λ) . Pour λ proche de λ_0 , $\tilde{\xi}_\lambda$ ne s'annule pas au voisinage de $S^1 \times \{0\}$, et admet $S^1 \times \{0\}$ pour orbite; soit alors $(\tilde{\varphi}_\lambda^t)$ le flot de $\tilde{\xi}_\lambda$; pour chaque $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

près de 0, si $\tilde{x} = (1, x) \in p^{-1}(x)$, on a $\tau_\lambda(x) = \min\{t > 0 : \psi_\lambda^t(x) \in \{-1\} \times \mathbb{R}\}$. On déduit donc du théorème des fonctions implicites que τ_λ se prolonge de manière C^∞ en 0, et que (f_λ) est, pour λ proche de λ_0 , une famille de difféomorphismes locaux $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, vérifiant

$$f_\lambda(0) = 0, \quad f'_\lambda(0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial x}(\lambda_0, 0) \neq 0.$$

La famille (f_λ) satisfait donc aux hypothèses du théorème de bifurcation de Poincaré-Hopf, d'où le résultat annoncé (exercice).

REMARQUE. - Dans les cas génériques, le théorème de bifurcation d'Andronov-Hopf peut se déduire de celui de Hopf-Naimark (en appliquant celui-ci pour chaque t à $F = \Phi^t$, où (Φ^t) est le flot de X). Le gros inconvénient de cette méthode (outre qu'elle fait appel à un résultat relativement difficile) est de masquer le fait que la surface S existe de toutes façons dès qu'un couple de valeurs propres imaginaires conjuguées traverse $i\mathbb{R}$.

(C2-2) Holonomie d'une orbite périodique.

Soit C un cercle plongé dans une variété M , orbite d'un champ de vecteurs ξ sur M , et soit H un germe en $c \in C$ d'hypersurface de M transverse à C (ou surface de section de C); si (ψ^t) désigne le flot de ξ et \tilde{H} un représentant de H , le théorème des fonctions implicites entraîne l'existence d'un voisinage V de c dans \tilde{H} et d'une unique application continue $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ tels que l'on ait $\psi^{\tau(x)}(x) \in \tilde{H}$ pour tout $x \in V$ et qu'en outre $\tau(c) > 0$ soit la période primitive de C , i.e. $\tau(c) = \min\{t > 0 : \psi^t(c) = c\}$. Le germe $\varphi : H \rightarrow H$ de difféomorphisme dont un représentant φ est donné par $\varphi(x) = \psi^{\tau(x)}(x)$ est l'holonomie (ou application de premier retour de Poincaré) de l'orbite périodique C de ξ (figure 6). A transport par un germe de difféomorphisme près, c'est un invariant du germe $[\xi]_C$: si l'on remplace H par une autre surface de section H' de C , et si $\varphi' : H' \rightarrow H'$ est l'holonomie associée, il existe un germe $f : H \rightarrow H'$ tel que $\varphi' = f_* \varphi$ (étant donné un représentant \tilde{H}' de H' , on peut évidemment prendre pour f le germe de l'application f qui à $x \in \tilde{H}$ associe la première intersection

avec H' de l'orbite de x - figure 6).

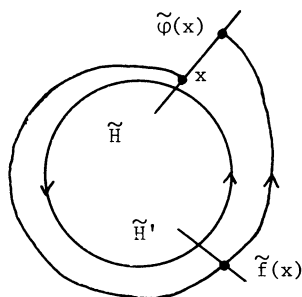


Figure 6

L'orbite C de ξ est dite non-dégénérée (resp. hyperbolique) lorsque le point fixe c de l'holonomie φ l'est. Les variétés stable $W^+(C)$ et instable $W^-(C)$ de l'orbite C de ξ sont les germes en C de sous-variétés de M obtenus comme suit : si W^+ et W^- sont des représentants des variétés stable et instable de φ , alors $W^\pm(C)$ a pour représentant la réunion des orbites de ξ issues de W^\pm . En particulier, C est hyperbolique si et seulement si $W^+(C)$ et $W^-(C)$ se coupent transversalement en C . Si $W^+(C) = [M]_C$ (resp. $W^-(C) = [M]_C$), on dit que l'orbite C est attractive (resp. répulsive).

On définit de même la notion de variété centrale $W^0(C)$ de l'orbite C de ξ .

L'holonomie φ de l'orbite périodique C de ξ ne dépend pas du paramétrage des orbites de ξ : on obtiendrait le même résultat en remplaçant ξ par $f\xi$, avec $f : M \rightarrow]0, \infty[$. Le germe ρ en C d'action de \mathbb{R} sur M obtenu en germifiant le flot (ψ^t) n'est donc déterminé qu'imparfaitement par φ . Si T est la période primitive de C , alors $T\mathbb{Z}$ est le stabilisateur des points de C , et il est intéressant de considérer le germe d'action $\rho|_{(T\mathbb{Z}) \times M}$, c'est-à-dire le germe $\tilde{\varphi} = \tilde{\rho}(T) = [\psi^T]_C$ de difféomorphisme. Tous les points de C sont des points fixes de $\tilde{\varphi}$; en outre, la relation $\tilde{\rho}(t) \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\rho}(t)$ implique le fait suivant : étant donnés $x \in C$ et $y = \psi^t(x) \in C$, les différentielles $T_x \tilde{\varphi}$ et $T_y \tilde{\varphi}$ sont conjuguées, et ont donc le même spectre σ ; les éléments de σ sont les multipli-

cateurs de Floquet de l'orbite C de ξ . Du fait que $\tilde{\psi}$ fixe tous les points de C , on a toujours $1 \in \sigma$; en outre, étant donnés $x \in C$ et l'holonomie ψ associée à une surface de section H de C passant par x , il est clair que $T_x \psi$ s'identifie canoniquement à l'automorphisme de $T_x M / T_x C$ induit par $T_x \tilde{\psi}$. Dire que C est une orbite non-dégénérée de ξ revient donc à affirmer que 1 est valeur propre simple de $T_x \tilde{\psi}$, ou encore, ce qui revient au même, à dire que l'application

$$]0, \infty[\times M \ni (t, y) \xrightarrow{\rho_{\xi}} (y, \psi^t(y)) \in M \times M$$

est transverse à la diagonale ΔM en (T, x) . L'orbite C de ξ est hyperbolique si et seulement si elle est non-dégénérée et $\sigma \cap S^1 = \{1\}$.

Lorsque M est compacte, le théorème de transversalité (façon Abraham, appendice 3) montre, par des techniques tout à fait similaires à celles de l'appendice 5 , le fait suivant : quels que soient les entiers $m > 1$ et $n > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{U}_{m,n} = \{ \xi : \rho_{\xi} \cap [1/m, n] \Delta M \}$$

est un ouvert dense . Etant donné $\xi \in \mathcal{U}_{m,n}$, l'image réciproque de ΔM par ρ_{ξ} est une courbe, dont les composantes connexes sont de deux types bien distincts :

- des $\{t\} \times C$, où C est une orbite périodique non dégénérée de ξ et $t \in]1/m, n[$ une de ses périodes .

- des $[1/m, n] \times \{y\}$, où $\xi(y) = 0$ et $\sigma(d\xi(y)) \neq 0$ (on dit que y est un point critique non dégénéré de ξ) .

Si l'on pose $\mathcal{U}_n = \bigcap_m \mathcal{U}_{m,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble $\mathcal{U} = \bigcap_n \mathcal{U}_n$, formé de ξ dont tous les éléments critiques (orbites périodiques et points critiques) sont non dégénérés, est donc résiduel . En outre, pour chaque entier $n > 0$, l'ensemble \mathcal{U}_n , formé de champs ξ dont tous les points critiques et toutes les orbites périodiques de période primitive au plus n sont non-dégénérés, est non seulement dense, mais ouvert ; en effet, M étant compacte, les éléments critiques d'un $\xi \in \mathcal{U}_n$ sont forcément en nombre fini (faute de quoi certains dégèneraient), et notre assertion résulte donc de ce que la transversalité est une propriété ouverte.

Toutes ces propriétés de densité, d'ouverture et de finitude subsistent lorsqu'on y remplace "non-dégénéré" par "hyperbolique" (la démonstration est identique).

REMARQUES. - Comme l'a montré Smale, il peut parfaitement arriver que la réunion des orbites périodiques d'un champ ξ sur une variété compacte M soit dense, et ce de manière stable par perturbation de ξ . Naturellement, l'intérêt de ce résultat n'est que théorique : une orbite périodique de très longue période est indiscernable dans la pratique, et, si grand que soit l'entier n , nous avons vu que les orbites périodiques de période au plus n formaient en général un ensemble fini.

- On dit que $x \in M$ est un point périodique de $h \in \text{Diff}^\infty(M)$ lorsque c'est un point fixe de h^m pour un entier $m > 0$; l'ensemble fini $C = \{h^m(x) : m \in \mathbb{Z}\}$ est alors une orbite périodique de h , de période (primitive) $p = \# C$. Elle est dite non-dégénérée (resp. hyperbolique) lorsque le point fixe x de h^p l'est (notion évidemment indépendante du choix de $x \in C$). Le théorème de transversalité dans les multijets implique immédiatement que l'ensemble des h dont tous les points périodiques sont hyperboliques est résiduel.

- Les notions d'hyperbolicité, d'attractivité ou de répulsivité pour une orbite périodique d'un champ ξ sur M sont des cas particuliers des notions correspondantes pour les sous-variétés compactes N de M invariantes par le flot (ψ^t) de ξ : grosso modo (cf. Chenciner-Ioos et, si l'on est très courageux, Hirsch-Pugh-Shub), on considère - voir la fin de (C1) - l'espace \mathcal{N} des sous-variétés plongées dans M et difféomorphes à N , et le germe ρ d'action de \mathbb{R} sur \mathcal{N} fixant N dont un représentant est $(t, S) \mapsto \psi^t(S)$; si la "différentielle" de $\tilde{\rho}(1)$ en N est hyperbolique, on dit que N est une variété invariante normalement hyperbolique du champ ξ . Les v.f.i. de ρ (c'est-à-dire les variétés stable W^+ et instable W^- de $\tilde{\rho}(1)$) existent et possèdent la propriété suivante : si $\tilde{W}^+, \tilde{W}^- \subset \mathcal{N}$ désignent des représentants des germes W^+ et W^- respectivement, alors

$W_N^+(\xi) = [\cup \tilde{W}^+]_N$ et $W_N^-(\xi) = [\cup \tilde{W}^-]_N$ sont des germes en N de sous-variétés de M , se coupant transversalement en N et indépendantes du choix de \tilde{W}^+ et \tilde{W}^- : on dit que $W_N^+(\xi)$ (resp. $W_N^-(\xi)$) est la variété stable (resp. instable) de N pour ξ . Si l'on perturbe un peu ξ , le champ perturbé ξ' aura près de N une variété normalement hyperbolique N' difféomorphe à N , et N' , $W_{\xi'}^+(N')$ et $W_{\xi'}^-(N')$ dépendent continûment de ξ' (tout cela se déduit aisément du théorème d'existence et d'unicité (et de bonne dépendance par rapport aux paramètres) des points fixes de contractions).

Si la variété stable (resp. instable) de N pour ξ est le germe de M tout entier, on dit que la variété invariante N de ξ est attractive (resp. répulsive).

La différence essentielle entre le cas où N est une orbite et le cas général (outre quelques menus problèmes de différentiabilité) est la suivante : dans la situation générale, les notions d'hyperbolicité normale et de "non-dégénérescence" coïncident pratiquement, car il est rare que le spectre de $d(\tilde{\rho}(1))(N)$ (spectrographe de ξ en N) rencontre S^1 sans contenir 1. Pour étudier les situations ainsi créées, il est fréquemment nécessaire de faire de l'Analyse difficile (cf. Herman 1983 et Chenciner 1984).

- Les techniques de (8.4) permettent (cf. Takens) la mise sous forme normale des champs de vecteurs au voisinage d'une orbite périodique hyperbolique.

(C2-3) Bifurcations d'orbites périodiques.

Avec les notations de (C2-1), pour chaque entier $N > 0$, la réunion P_N des orbites périodiques, de période au plus N , de X va génériquement comporter plusieurs sortes de points $a = (\lambda_o, x_o)$:

I - Des points réguliers, i.e. tels que par x_o passe une orbite périodique γ hyperbolique de π_{λ_o} . Au voisinage de $\Gamma = \{\lambda_o\} \times \gamma$, l'ensemble P_N est une surface S transverse à $\{\lambda_o\} \times M$, et chaque S_λ est une orbite hyperbolique de $\tilde{\xi}_\lambda$ pour λ assez proche de λ_o .

II - Des points catastrophiques : au voisinage de a , P_N est une surface S , mais celle-ci admet un contact "simple" avec $\{\lambda_0\} \times M$ le long de l'orbite $\Gamma = \{\lambda_0\} \times \gamma$ de X passant par a . En d'autres termes, un couple d'orbites périodiques hyperboliques de ξ_λ (de réunion S_λ) naît ou meurt en γ pour $\lambda = \lambda_0$.

III - Des points de bifurcation par doublement de période, au voisinage desquels P_N (ou en tous cas P_{2N}) est formé de deux surfaces S et S' se coupant en Γ . Au voisinage de Γ , la surface S est orientable, transverse à $\{\lambda_0\} \times M$ en Γ , la période primitive de l'orbite S_λ de ξ_λ varie continûment avec λ ; pour $\lambda \neq \lambda_0$, S_λ est hyperbolique, et la dimension de $W^+(S_\lambda)$ varie d'une unité quand $\lambda - \lambda_0$ change de signe. En revanche, S' n'est pas orientable : son modèle local est le ruban de Möbius obtenu par identification de $(-1, y)$ à $(1, -y)$ pour $-1 < y < 1$ dans $[-1, 1] \times]-1, 1[$; dans ce modèle, Γ serait le cercle image de $[-1, 1] \times \{0\}$, et les autres orbites périodiques de X contenues dans S' , les cercles images des $[-1, 1] \times \{-y, y\}$, $y \neq 0$. Quand y tend vers 0 (dans ce modèle), la période primitive de l'orbite correspondante de X tend donc vers le double de celle de Γ .

Génériquement, S' a un contact "simple" avec $\{\lambda_0\} \times M$ en Γ , et l'on peut donc (en inversant l'ordre des λ s'il le faut) supposer S'_λ vide pour $\lambda < \lambda_0$. Pour $\lambda > \lambda_0$, l'orbite périodique S'_λ de ξ_λ est alors hyperbolique, et $W^+(S'_\lambda)$ a la même dimension que $W^+(S_{-\lambda})$. Les deux phénomènes dynamiques les plus remarquables liés à cette situation sont les suivants : si S_λ est attractive pour $\lambda > \lambda_0$, il y aura catastrophe, aucune orbite périodique de X attractive et proche de Γ n'existant plus pour $\lambda < \lambda_0$; si S_λ est attractive pour $\lambda < \lambda_0$, un phénomène plus doux surviendra, puisque l'orbite attractive S'_λ prendra pour $\lambda > \lambda_0$ le relais de $S_{\lambda_0} = S'_{\lambda_0} = \Gamma$, mais avec un doublement de la période. Des cascades de bifurcations de ce dernier type sont, en notre fin de siècle, considérées comme des modèles de "marche au chaos".

IV - Des points de bifurcation de Hopf-Naimark : au voisinage de Γ , P_N est une surface S , transverse à $\{\lambda_0\} \times M$ en Γ , et la période de l'orbite

S_λ de ξ_λ varie continûment avec λ ; pour $\lambda \neq \lambda_0$, S_λ est hyperbolique, et la dimension de $W^+(S_\lambda)$ varie de deux unités quand $\lambda - \lambda_0$ change de signe. En outre, il existe une sous-variété $T \supset \Gamma$, de dimension 3, de $\mathbb{R} \times M$, ayant un contact "simple" avec $\{\lambda_0\} \times M$ en Γ , invariante par le flot de X , et possédant les propriétés suivantes : si l'on suppose T_λ vide pour $\lambda < \lambda_0$ (ce qui revient éventuellement à restreindre S et à inverser l'ordre des λ), alors, pour $\lambda > \lambda_0$ près de λ_0 , T_λ est un tore invariant normalement hyperbolique de ξ_λ , et $\dim W^+(T_\lambda) = \dim W^+(S_{-\lambda})$. En particulier, si S_λ est attractive pour $\lambda > \lambda_0$, il y a catastrophe ; si S_λ est attractive pour $\lambda < \lambda_0$, alors T_λ le sera pour $\lambda > \lambda_0$, et viendra donc remplacer "en douceur" l'orbite $S_{\lambda_0} = T_{\lambda_0} = \Gamma$. Ruelle et Takens ont proposé ce phénomène comme un modèle de transitions vers la turbulence.

La démonstration des assertions I à IV consiste à se ramener à (C1) : si $\Sigma \ni x_0$ est une surface de section de l'orbite périodique γ de ξ_{λ_0} passant par x_0 , alors $[\mathbb{R} \times \Sigma]_a$ est une surface de section de l'orbite périodique Γ de X . L'holonomie F de Γ pour X (ou plutôt un de ses représentants) définit une famille (f_λ) de difféomorphismes locaux d'un représentant Σ de Σ . Génériquement, les points fixes de F formeront près de a une courbe C passant par a , et, avec les notations de (C1) (en y remplaçant M par Σ), il se pourra seulement que a appartienne à $C \setminus C_1$ (cas I), à C_1^+ (cas II), à C_1^- (cas III) ou à C_1^C (cas IV). Je laisse le lecteur s'inspirer de (C2-2) pour formuler l'argument de transversalité conduisant à ce résultat.

(C3) Singularités d'actions différentiables.

(C3-1) Une classification et quelques exemples.

Soit ρ une action différentiable d'un groupe de Lie G sur une variété de dimension finie M . Au vu de ce qui précède, il est raisonnable de proposer plusieurs types de points singuliers de ρ , chaque type contenant les précédents (et correspondant donc à une notion plus faible de singularité) :

- Les points fixes de ρ , qui forment un ensemble $\Sigma_1(\rho)$.
- Les points dont le stabilisateur n'est pas trivial, qui forment un ensemble

$\Sigma_2(\rho)$.

- Les points x de M tels que, pour tout ouvert $U \ni x$ de M et tout voisinage relativement compact V de 1 dans G ne contenant pas de sous-groupe fermé, il existe $g \in G \setminus V$ vérifiant $U \cap \widetilde{\rho}(g)U \neq \emptyset$; ils forment un ensemble $\Sigma_3(\rho)$.

Les ensembles $\Sigma_1(\rho)$ et $\Sigma_3(\rho)$ sont fermés, alors que $\Sigma_2(\rho)$ peut ne pas l'être (il peut être dense dans M , comme nous l'avons déjà signalé). Une question intéressante et difficile (closing lemma de Pugh) est de savoir si, en général, $\Sigma_3(\rho) = \overline{\Sigma_2(\rho)}$. Il existe d'autres notions significatives de singularité, pour lesquelles je renvoie au début du livre de Shub (bibliographie du chapitre 2).

EXEMPLES.1. - Si G est compact, on a $\Sigma_2(\rho) = \Sigma_3(\rho)$. Les points de M peuvent être répartis en strates ρ -invariantes, chaque strate étant formée des points qui, à conjugaison dans G près, ont le même stabilisateur. L'image de cette stratification par la surjection canonique π de M sur l'espace Q des orbites de ρ fait de l'espace topologique Q un "bon" espace stratifié, et l'application π est alors une "bonne" fibration stratifiée.

2. - Si $G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , les éléments de $\Sigma_2(\rho)$ sont les points fixes et les orbites périodiques (c'est-à-dire compactes) de ρ . Si par exemple $G = \mathbb{Z}$ et $M = S^1$, on voit combien $\Sigma_3(\rho)$ est sensible aux perturbations de ρ : si le nombre de rotation α de ρ est irrationnel, alors (théorème de Denjoy, cf. Herman 1979) $\widetilde{\rho}(1)$ est conjugué dans $\text{Diff}^0(M)$ à la rotation d'angle α , et on a donc $\Sigma_3(\rho) = M$ et $\Sigma_2(\rho) = \emptyset$. Au contraire, si α est rationnel, $\Sigma_2(\rho) = \Sigma_3(\rho)$ sera en général la réunion d'un ensemble fini d'orbites périodiques hyperboliques de ρ . Naturellement il s'agit ici encore d'un résultat surtout théorique: si le rationnel α a un grand dénominateur, les orbites compactes de ρ auront une période si grande que rien ne les distinguera d'orbites denses dans la pratique.

REMARQUE. - Si l'on se place du point de vue des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire si l'on s'intéresse au flot (φ^t) d'un champ de vecteurs ξ sur une variété non compacte M , il est raisonnable d'appeler singuliers les points

x de M tels que $t^{-1}\psi^t(x)$ ne soit pas défini pour tout t (ou pour tout $t > 0$).
Même pour les problèmes les plus classiques, l'étude de ces singularités est encore dans un état embryonnaire, malgré son intérêt.

(C3-2) Quelques remarques sur les actions de \mathbb{R}^k .

Nous allons brièvement expliquer comment appliquer les résultats du chapitre 3 (§6) à l'étude des points de $\Sigma_2(\rho)$ lorsque ρ est une action de $G = \mathbb{R}^k$ sur une variété M .

Etant donné $a \in \Sigma_2(\rho)$, soient S le stabilisateur de a , E le sous-espace vectoriel de G engendré par S et F un sous-espace vectoriel supplémentaire de E dans G . L'ensemble $T = \rho(E \times \{a\})$ est donc un tore plongé dans M et difféomorphe à E/S . L'objet de ce qui suit est de décrire, dans les "bons" cas, à quoi ressemblent les orbites de ρ au voisinage de T .

I - Cas où S est connexe (ce qui va être dit s'applique dans tous les cas à l'étude du germe de ρ en a , à condition de prendre pour E la composante neutre de S , et pour F un supplémentaire). On a alors $T = \{a\}$, et on déduit facilement du théorème de redressement qu'il existe un germe $[M]_a \rightarrow [\mathbb{R}^n \times F]_{(0,0)}$ de difféomorphisme envoyant le germe de $\rho|_{F \times M}$ en $(0,a)$ sur le germe en $(0,0)$ de l'action σ de F sur $\mathbb{R}^n \times F$ donnée par $\sigma(g)(x,y) = (x,y+g)$. Puisque seul le germe en a de ρ nous intéresse, nous pouvons supposer que $(M,a) = (\mathbb{R}^n \times F, 0)$. Pour $(g,(x,y))$ assez proche de $E \times \{0\}$ dans $E \times (\mathbb{R}^n \times F)$, on a donc (G étant abélien) $\rho(g,(x,y)) = (\tau(g,x), y + f(g,x))$, et le germe $[\tau]_{E \times \{0\}}$ d'action de E sur \mathbb{R}^n fixant 0 détermine la forme des orbites de ρ au voisinage de a (puisqu'elles s'écrivent localement comme produits des "orbites" de τ par (un voisinage ouvert de 0 dans F)). Supposons que la partie linéaire τ^1 du germe de τ en 0 soit faiblement hyperbolique, et qu'en outre tout $\tau' \in \text{Act}_0^\infty(E, \mathbb{R}^n)$ de partie linéaire τ^1 soit C^k -linéarisable, où $k > 0$ est un entier fixé (théorèmes du §6 et de l'appendice 7) ; on peut en fait prouver (en linéarisant d'abord le germe de τ) le résultat suivant :

Si k est assez grand, il existe un entier $\ell > 0$ tel que l'on puisse envoyer
 $[\rho]_{E \times \{a\}}$, par un germe $[M]_a \rightarrow [\mathbb{R}^n \times F]_0$ de difféomorphisme, C^ℓ , sur le germe
en $E \times \{0\}$ de l'action ρ_0 de G sur $\mathbb{R}^n \times F$ donnée par

$$\rho_0(g+g', (x,y)) = (\tau^1(g,x), y+g'), \quad g \in E, \quad g', y \in F, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, si $k = \infty$, on peut prendre $\ell = \infty$.

En d'autres termes, on a mis le germe de $\rho|_{F \times M}$ sous forme normale, on a linéarisé le germe de τ , et en outre on a fait en sorte que $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ soit invariant par $\rho_0|_E$ (lorsque τ^1 est dans le domaine de Siegel, le choix de ce germe en a de sous-variété de dimension n invariant par le germe de $\rho|_{E \times M}$ est - exercice - loin d'être unique).

II - Cas où S est discret et $E = G$. L'orbite de a coïncide avec T , qui est un tore de dimension k . Soit $H \ni a$ une sous-variété de codimension k de M , transverse à T . L'holonomie de ρ en T (pour H) est le germe $\varphi \in \text{Act}_a^\infty(S, H)$ défini de la manière suivante : comme H est transverse à T , elle est transverse aux orbites de ρ dans un voisinage de a ; par conséquent, il existe un ouvert $U \ni a$ de H et un ouvert convexe $V \ni 0$ de G tels que $j = \rho|_{V \times U}$ soit un plongement. Pour tout $g \in S$, on a $\rho(g, a) = a$, et il existe donc un ouvert $U' \ni a$ de H vérifiant $\tilde{\rho}(g)U' \subset j(V \times U)$. On définit alors $\varphi(g) \in \mathcal{B}_a^\infty(H)$ comme le germe en a de l'application

$$U' \ni x \longmapsto \text{pr}_1(j^{-1}(\rho(g, x))) \in U$$

A transport par un germe de difféomorphisme près, l'holonomie ainsi définie est unique ; en particulier, l'existence d'une linéarisation C^ℓ de φ est une propriété intrinsèque du germe de ρ en T . On dit que l'orbite T de ρ est hyperbolique (resp. faiblement, fortement hyperbolique) lorsque φ^1 l'est. De même, les variétés fortement invariantes de ρ en T sont les germes en T des réunions des orbites de ρ issues (de représentants) des v.f.i. de φ .

Si l'on oublie le paramétrage des orbites de ρ , leur aspect est bien

décrit par φ au voisinage de T : supposons par exemple φ linéarisable ; soit $L = T_a H$, et soit ϕ la suspension de φ^1 définie comme suit : si Q est la variété quotient de $G \times L$ par la relation d'équivalence " $g-g' \in S$ et $\varphi^1(g'-g, x) = x$ " entre (g, x) et (g', x') , alors l'action $(g', (g, x)) \mapsto (g+g', x)$ de G sur $G \times L$ induit une action ϕ de G sur Q , et (exercice) il existe un germe de plongement $[Q]_{(G/S) \times \{0\}} \rightarrow [M]_T$ dont un représentant envoie localement les orbites de ϕ sur celles de ρ . (Cette construction peut d'ailleurs être effectuée quel que soit ρ , la linéarisabilité de φ n'y intervenant que pour simplifier un peu les notations ; cela dit, quand φ n'est pas linéarisable, on sait fort peu de choses en général sur la géométrie de ses "orbites").

Comme dans le cas où $k = 1$, il est possible d'affiner ce résultat en respectant le paramétrage des orbites : la clef est une mise sous forme normale de $[\rho]_{S \times M}^S \times T$, version à paramètre $\theta \in T$ du théorème prouvé dans le §6 (et, dans le domaine de Poincaré, dans (4.4.2)).

III - Cas général. Il peut être étudié par les méthodes introduites dans I et II.

(C4) Perspectives.

La théorie des systèmes dynamiques a connu depuis vingt-cinq ans d'extraordinaires développements, et continue d'abonder en problèmes ouverts de toutes sortes. Au terme d'un ouvrage surtout théorique, il n'est peut-être pas inutile d'affirmer qu'à mon avis les plus grands progrès en la matière viendront maintenant d'un retour aux origines : on ne peut manquer d'être frappé par le contraste entre l'extrême raffinement de certains résultats et l'absence presque totale d'une réflexion théorique sur la modélisation des phénomènes dynamiques ; une bonne partie de ce qui fait l'intérêt de notre science nous échappe ainsi complètement faute de concepts adéquats, que nous serions pourtant bien placés pour forger.

Bibliographie :

- A. Chenciner 1983. Bifurcations de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 au voisinage d'un point fixe elliptique, cours à l'Ecole des Houches (Juillet 1981), North Holland
1984. Bifurcations de points fixes elliptiques. I- Courbes invariantes, à paraître aux Publications de l'IHES.
- A. Chenciner G. Ioos. Bifurcations de tores invariants, Arch. for Rat.Mech. and Anal. 69 n°2 (1979), 109-198, et ibidem, vol.71 n°4 (1979), 301-306.
- M.R. Herman 1979. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publications de l'IHES 49.
1983. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Vol I , Astérisque 103-104.
- M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub. Invariant manifolds, Lect. Notes in Maths 583 (1977).
- G. Ioos. Bifurcations of maps and applications, North Holland, 1979.
- J. Moser. Stable and random motion in dynamical systems, Annals of Maths, study 77 (1973), Princeton.
- D. Ruelle, F. Takens. On the nature of turbulence, Comm. in math. Physics 20 (1971), 167-192.
- F. Takens. Partially hyperbolic fixed points, Topology 10 (1971), 133-

INDEX TERMINOLOGIQUE

Abraham (théorème d')	329	chemin dans un espace fonc-	307
adapté (système de coordonnées)	124,251,278	tionnel	
Andronov-Hopf (bifurcation de)	412	Clairaut (équation de)	230
atlas	323	- (points-plis de)	391
- équivalents	324	codimension	39,52,315
attractif (point fixe)	89	conforme symplectique (groupe)	242
attractive (orbite)	414	contact (forme de)	207
- (variété invariante)	417	- (structure de)	204,205,211
automorphisme		- (transformation de)	205
- d'une structure de contact	211	corang	51
- - - symplectique	214	courbe	401
automorphisme infinitésimal		critique (point, valeur)	37 ,325
- d'une structre de contact	212	crochet de Poisson	251
- - - symplectique	251	- de Lagrange	262
Baire (espace de)	38		
bien posé (problème)	338	Darboux (théorème de)	210 ,312,317
Bochner (théorème de)	73	déformation d'un germe	84
bord d'une variété	324	d'action	
Brodsky (théorème de)	388	dérivée de Lie	308
		difféomorphisme	324
		différentiel (problème)	227
caractéristique (feuilletage)	222,225	différentielle (relation)	227
- (variété)	228		
carte	323	élémentaire (groupe)	117
catastrophe	403,411,418,419	équation différentielle	
Cauchy (problème de)	223	d'ordre k	340
central (sous-espace)	403	-	
centrale (variété)	403,414	implicite	383
champ de vecteurs	60		

équation aux dérivées partielles du premier ordre	223	immersion	49
excellente (fonction de Morse)	49	indice de Fredholm	326
		instable (variété)	84 ,414 ,417
		intégrale première	152
Faa-di Bruno (formule de)	319	- - formelle	152
facteur direct (sous-espace)	324	intégrale singulière	230
fibré tangent	325	- - normalement	
Floquet (multiplicateurs de)	414,415	hyperbolique ou extrémale	231
flot, flot complet	65	intérieur (produit)	309
forme normale	12,126	invariante (variété)	140
formelle (action)	74	involution de Lagrange	214
formellement isomorphes	74,281	- - Legendre	212
- v-isomorphes	293	isomorphes	
formule d'homotopie	309	- germes d'actions	70,74
fortement invariants (variétés)	139	- - préservant	
Fredholm (morphisme de)	325,326	une structure symplec-	
fronce (point-)	385	tique ou de contact	281
		- déformations	85
		- structures de contact	211
		isotopies, isotopies infini-	
		tésimales	308
générateur infinitésimal	65,308		
génératrice (fonction)	217,219	jacobien (idéal)	313
germes	21	jets	23 ,26 ,73,205
- d'actions	68	K-jets	242,263
Gray (théorème de)	233	C-jets	263
		jets suffisants (théorème des)	313
hamiltonien	251		
- de contact	220	lagrangienne (variété)	213
Hartman-Grobman (théorème de)	76	Lak Dara (théorème de)	388 ,390
holonome (section)	27	Legendre (variété de)	212
holonomie	413 ,422	linéaire (action)	121
Hopf-Naimark (bifurcation de)	406 ,418		
hyperbolique			
- automorphisme, point fixe	59	Malgrange (théorème de)	385
- zéro	59	Mather (théorème de)	45
- orbite	414	maximale (solution)	64
- action	124	Milnor (nombre de)	315
- - faiblement	124	morphisme de variétés à bord	323,324
- - fortement	126	Morse (fonction de)	47
- - simplement	170		
- variété invariante norma-	416		
lement			

INDEX TERMINOLOGIQUE

Morse (lemme de)	48	semi-simple	120,126,127
multijets	45,332	- - (partie)	120,121,131,271
		Siegel (domaine de)	125
		solution géométrique	227
nilpotente (partie)	121,122	sous-variété	39,324
non-dégénéré (point-critique)	47	spectre	58
- (point fixe)	58	spectral (théorème en géomé-	243
- dégénérée (orbite)	414	trie symplectique)	
normalement hyperbolique	231,416	spectrographe	417
		stabilité structurelle	410
orbite d'un champ de vecteurs	411	stable (variété)	84,414,417
		Sternberg (théorème de)	87
		strate, stratification,	52
		stratifié	
partie linéaire	132	submersion	37,325
- K -linéaire	261,275	surface	401
période primitive	413	- de section	413
pli	385	suspension	423
- foyer, - nœud, - col	395		
plongement	54		
Poincaré (domaine de)	125	tangent (espace)	325
- (application de)	413	tangente (structure de	242
- -Hopf (bifurcation de)	404	contact)	
polynomiale (application)	118	Thom (théorème de transver-	41
propre (application)	52	salité de)	
		tiroir (théorème de point	90
quasi-quotient	165	fixe à)	
quotient	164	transversalité (théorème de)	40,41,329
		transverse	39,328
		triviale (déformation)	85
raisonnable (fermé)	34	variations (équation aux)	338
redressement (théorèmes de)	61,63,421	variété	324
réduction (théorème de)	49		
régulier (point)	387		
régulière (valeur)	37,325	Whitney (topologie de)	41
répulsive (orbite)	414	- (théorème de prolonge-	27
- (variété invariante)	417	ment de)	
résiduel	38	- (théorème de plonge-	55
ridicule (équation)	391	ment de)	
		- (condition (a) de)	210

PRINCIPALES NOTATIONS

E'	dual de l'espace vectoriel réel E	
pr_1, pr_2	première et seconde projections	
$T_x X$	espace tangent à X en x	page 325
$TX \xrightarrow{\tau_X} X$	fibré tangent de X	page 325
$T_x f$	application linéaire tangente à f en x	page 325
$C^r(p)$	espace des sections C^r de p	page 41
$[X]_A, [f]_A$	germes en A de l'ensemble X , de l'application f	page 21
$J^k(X, X')$	espace des jets d'ordre k d'applications de X dans X'	page 23
$j_x^k f$	jet d'ordre k de f en x	page 23
$j^k f$	application $x \rightarrow j_x^k f$	page 26
$j_A^k f$	restriction de $j^k f$ à A	page 27
$J^k(p)$	espace des jets d'ordre k de sections de p	page 26
$f \pitchfork Z$	transversalité de f à Z	page 39
${}_s J^k(p), {}_s j^k f$	multijets (multi = s)	page 45
$\overline{{}_2 J^k(X, Y)}, \overline{{}_2 j^k f}$	bijets "complétés"	page 332, 335
$gl(E)$	algèbre de Lie des endomorphismes d'un Banach E	page 58
$\sigma(A)$	spectre du complexifié de $A \in gl(E)$	page 58
$h_* V$	image d'un champ de vecteurs V par difféomorphisme h	page 61
$h^* V$	image inverse de V par h	
$Act_a^r(G, X)$	ensemble des germes d'actions C^r de G sur X fixant a	page 68
$\mathcal{D}_a^r(X)$	groupe des germes $[X]_a \curvearrowright$ de C^r -difféomor- phismes	page 67
\sim_ρ	morphisme $G \rightarrow \mathcal{D}_a^k(X)$ associé à $\rho \in Act_a^k(G, X)$	page 68
$Diff^r(X, Y)$	espace des C^r -difféomorphismes de X sur Y	
$Diff^r(X)$	groupe $Diff^r(X, X)$	

\sim_R	morphisme $G \rightarrow \text{Diff}^r(X)$ associé à une action R de G sur X	
$\mathcal{D}_{a,a'}^k(X,X')$	espace des germes $[X]_a \rightarrow [X']_{a'}$ de C^k -difféomorphismes	page 70
$\varphi * \rho$	image de $\rho \in \text{Act}_a^k(G,X)$ par $\varphi \in \mathcal{D}_{a,a'}^k(X,X')$	page 70
$\psi^* \rho$	image inverse $(\psi^{-1}) * \rho$ de ρ par $\psi \in \mathcal{D}_{a',a}^k(X,X')$	
$\mathcal{D}_a^k(X)$	groupe des $j_a^k \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}_a^k(X)$	page 71
$\wedge^k \rho$	jet d'ordre k de $\rho \in \text{Act}_a^k(G,X)$	page 73
ρ^1	partie linéaire de ρ	page 73
$\text{Act}_a^k(G,X)$	ensemble des actions formelles de G sur X en a	page 74
$G_{\mathbb{R}}$	"réélifié" d'un groupe élémentaire G	page 118
$\delta_b^s(X)$	algèbre de Lie des jets d'ordre s en $b \in X$ de champs de vecteurs sur X nuls en b	page 131
ρ^1	partie linéaire de $\rho \in \text{Act}_b^s(G,X)$	page 132
$g_{\mathbb{R}}$	projection de $g \in G$ dans $G_{\mathbb{R}}$	page 139

NOTATIONS DU CHAPITRE 3 :

σ , E_i , c_i , α_i , F , I_n , E_I	page 159,160
V_I , C_I , $J(x)$	page 161
\mathcal{V} réunion des v.f.i. de σ	page 163
$\hat{\mathcal{V}}_b$, E_b , Q_b	page 164
H_j , π_j , F_j	page 165
b_j , σ_j , \mathcal{V}_{b_j} , $\hat{\mathcal{V}}_{b_j}$, E_{b_j} , $\Phi_{b_j}^t$, Q_{b_j} , ξ	page 165,166
c , K_j , $V_{j,I}$, C_j , I , g_I , J_c , $\Sigma_{c,I}$	page 167
$E_{c,I}$, $Q_{c,I}$, \hat{I} , x_I , $\Phi_{c,I}^t$	page 168
Σ_c , f_c	page 172
a_i	page 176
α_i	page 177

σ, K_j, H_j, G_j		page 178
ρ_j		page 181
CHAPITRE IV		
s_k	projection $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathbb{R}^n$	page 203
$\kappa_{n,q}^k$	structure de contact de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$	page 204
$\kappa^k(p)$	structure de contact de $J^k(p)$	page 205
$J^k(Y, q)$	espace des jets d'ordre k de sous-variétés de codimension q de Y	page 205
$\kappa^k(Y, q)$	structure de contact de $J^k(Y, q)$	page 206
c_n	section canonique de $\kappa_{n,1}^1$	page 207
τ_x^*	projection $T^*X \rightarrow X$	page 207
κ^*	Complémentaire de la section nulle dans κ	page 210
Ω_n	forme symplectique standard de $T^*\mathbb{R}^n$	page 213
H_c^f	transformation de contact infinitésimale ayant f pour hamiltonien de contact par rapport à c	page 220
$\text{Car}(\xi)$	variété caractéristique de ξ	page 228
$T_a \kappa$	structure de contact tangente en a à la structure de contact κ sur X	page 242
$\mathcal{B}_a^k(\kappa)$	groupe des $\varphi \in \mathcal{B}_a^k(X)$ préservant κ	page 242
h_{κ}^1	κ -jet d'ordre 1 en a de $h \in \mathcal{B}_a^k(\kappa)$	page 242
$\text{GL}(T_a \kappa)$		page 242
$[f, g]_{\omega}$	crochet de Poisson de f et g pour la structure symplectique ω	page 251
H_{ω}^f	champ de hamiltonien f pour ω	page 251
$\mathcal{B}_b^k(\omega), \delta_b^k(\omega), [f, g]_{\omega}^k$		page 252
$\delta_a^{\infty}(\kappa) = \delta$	algèbre de Lie des germes en a d'automorphismes infinitésimaux de κ	page 261
δ_k, δ_{ℓ}		page 261
$\tilde{\xi}_{\kappa}^1$	κ -partie linéaire de $\xi \in \delta_o$	page 261
$[f, g]_c$	crochet de Lagrange de f et g pour la forme de contact c	page 262

$\widetilde{\delta}_a^k(K)$	espace δ/δ_a des K -jets d'ordre k en a d'éléments de δ	page 263
$\widetilde{\xi}^k$	K -jet d'ordre k de $\xi \in \widetilde{\delta}_a^k(K)$	page 263
$\mathcal{D}_a^k(K)$	groupe des K -jets d'ordre k en a d'éléments de $\mathcal{D}_a^{\infty}(K)$	page 265
APPENDICES		
(f_t)	chemin dans un espace (de germes) d'applications	page 307
(ψ_t)	isotopies	page 308
$(\dot{\psi}_t)$	générateur infinitésimal de (ψ_t)	page 308
$L_{\xi}\omega$	dérivée de Lie de ω par rapport à ξ	page 308
i_{ξ}	produit intérieur par ξ	page 309
$J(f)$	idéal jacobien de f	page 313
$\mu(f)$	nombre de Milnor de f	page 315
\bigotimes	produit tensoriel symétrique	page 319
$D^k f$	dérivée k -ième de f	page 321
∂X	bord de la variété X	page 324
$\text{Ind } (A)$	indice de Fredholm de A	page 326
SX	fibré en sphères-unités tangentes à X	page 331
$\overline{{}_2X}$	"complété" de ${}_2X$	page 331

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE 1.

1 - Référence Générale.

J. Dieudonné. Eléments d'Analyse (neuf volumes) Gauthier-Villars, Paris, 1965-1982.

2 - Ouvrages plus spécialisés

R. Abraham et J. Robbin. Transversal mappings and flows. Benjamin, New-York, 1967.

N. Bourbaki. Variétés différentielles et analytiques. Hermann, Paris, 1971

M. Golubitsky et V. Guillemin. Stable mappings and their singularities. Graduate texts in mathematics, Springer, New-York-Heidelberg-Berlin, 1973.

J. Milnor. Morse theory. Annals of mathematics, study 51, Princeton University Press, 1963-1969.

J.R. Munkres. Elementary differential topology. Annals of mathematics, study 54, Princeton, 1966.

E.H. Spanier. Algebraic topology. Mc Graw-Hill, New-York, 1966

J.C. Tougeron. Idéaux de fonctions différentiables, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York 1972.

(voir aussi B. Malgrange. Ideals of differentiable functions. Oxford University Press, 1966).

3 - Articles.

Le lecteur désireux d'en savoir davantage sur la topologie différentielle pourra consulter

R. Thom. "Quelques propriétés globales des variétés différentiables", Comment. Math. Helv., 28, 17-86 (1954).

La remarque de C. Robinson permettant de faire mieux fonctionner le théorème de transversalité façon Abraham figure dans

C. Robinson. "A global approximation theorem for Hamiltonian systems" dans Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math 14, 1970, p. 233-243, publié par l'A.M.S.

Pour un exposé clair sur la topologie fine, ainsi que pour tout l'arsenal de la théorie des singularités d'applications différentiables (théorème de préparation de Malgrange, ensembles stratifiés, etc.), on se reportera à l'article suivant et à ceux qui sont cités dans sa bibliographie :

J.N. Mather. "How to stratify mappings and jet spaces", dans Singularités d'Applications Différentiables, Plans sur Bex 1975, Burlet éd., Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1976.

(le même recueil contient un article de J. Martinet exposant certains points de la théorie de manière plus simple et plus claire).

CHAPITRE 2.

V.I. Arnold : [1] Equations différentielles ordinaires, Mir, Moscou, 1974.

[2] Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, Moscou, 1980.

C. Camacho, N.H. Kuiper, J. Palis : The topology of holomorphic flows with singularity, Publ. Math. I.H.E.S. 48 (1978) p. 5-38.

- M. Chaperon : On the local classification of holomorphic vector fields, to appear in Dynamical Systems, Proceedings of the International Symposium, Rio de Janeiro 1981, J. Palis ed. Springer lecture note in mathematics 1007 (1983).
- M.C. Irwin : Smooth Dynamical Systems, Academic Press, London, 1980.
- E. Nelson : Topics in dynamics, Part I, flows, Princeton, 1970.
- J. Palis : On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces, An. Acad. Brasil.Ciênc.40 (3) (1968), p. 263-266.
- C. Pugh : On a theorem of P. Hartman, Amer. J. Maths 91 (1969) p. 363-367.
- V.S. Samovol : Linearization of a system of differential equations in the neighborhood of a singular point, Soviet Math. Dokl. Vol.13 (1972), N°5, p. 1255-1259.
- M. Shub : Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque 56, Paris, 1978.
- S. Sternberg. Local contractions and a theorem of Poincaré, Amer. J. Maths 79 (1957), p.809-824.

CHAPITRE 3.

- C. Camacho. On $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$ - actions, in Differentiable dynamical systems, Peixoto ed. , IMPA/Academic press, 1973.
- M. Chaperon. [1] Linéarisation des germes hyperboliques d'actions différentiables de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m$: le domaine de Poincaré, C.R. Acad. Sc. Paris, t.289 (1979), série A, p.325-328.
- [2] Linéarisation C^∞ des germes d'actions C^∞ de $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^m$, C.R. Acad. Sc. Paris, t.290 (1980), série A, p.13-15.
- [3] Propriétés génériques des germes d'actions différentiables de groupes de Lie commutatifs élémentaires, thèse, Université Paris VII, octobre 1980.

F. Dumortier, R. Roussarie. Smooth linearization of germs of \mathbb{R}^2 -actions and holomorphic vector fields, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 1 (1980), p. 31-64.

Après la thèse de Camacho, plutôt orientée vers la généralisation du théorème de Hartman - Grobman à certains germes d'actions de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell$, Dumortier et Roussarie ont étendu le théorème de linéarisation de Sternberg aux germes d'actions de \mathbb{R}^2 , sous une hypothèse d'hyperbolicité générique, mais très forte, introduite par Camacho.

J'ai commencé, au premier semestre 1978, par simplifier leur démonstration - notamment grâce au théorème 1 de (4.4.2) - et la rendre entièrement géométrique, ce qui permettait d'affaiblir les hypothèses du théorème (la notion d'hyperbolicité forte date de cette époque) et de l'étendre aux actions de \mathbb{Z}^2 et de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, ainsi que d'en prouver l'avatar en géométrie de contact qui m'intéressait - voir le chapitre 4. J'ai ensuite utilisé le théorème 2 de (4.4.2) pour prouver ([1]) que, dans le domaine de Poincaré, tout germe fortement hyperbolique d'action de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^m$ était C^0 -linéarisable. Tous ces résultats ont été exposés à Dijon en mars 1979.

Le passage des germes d'actions de \mathbb{R}^2 aux germes d'actions de \mathbb{R}^r avec $r > 2$ n'était possible que si l'on savait construire les "quasi-quotients" d'un espace vectoriel par une action linéaire de \mathbb{R}^k avec $k > 1$, ce que j'ai fait au printemps 1979 à l'aide de la "fonction de Lyapounov" F introduite - mais peu utilisée - par Camacho. L'ensemble de la théorie - sous une forme un peu plus primitive que ce qui est présenté ici - a fait l'objet de deux exposés au séminaire Thom à l'automne 1979. La définition de l'hyperbolicité faible date de cette époque ([2]) , ainsi que l'idée du théorème (6.3) prouvant la minimalité de cette hypothèse. Le passage aux groupes élémentaires généraux ne posait dès lors aucun problème.

Pour ne pas surcharger ce cours d'un savoir trop spécialisé, je n'y ai fait figurer ni la généralisation de (4.4.3)-(4.4.4), ni son application à la linéarisation C^0 des germes d'actions. En attendant un article prochain contenant "toute" la théorie, le lecteur intéressé peut consulter mon exposé au symposium de Rio, et, s'il est courageux, ma thèse [3].

CHAPITRE 4.

- V.I. Arnold : Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Mir, Moscou, 1976 (traduction de la version russe parue en 1974).
- D. Bennequin : Entrelacement et équations de Pfaff, Astérisque 107-108 (1983) 87-161.
- E. Cartan : Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, Paris, 1922.
- M. Chapéron : [1] Modèles microlocaux pour certains opérateurs pseudodifférentiels fuchsien, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-1978, exposé n°11.
[2] Singularités en géométrie de contact, Journées singulières, Dijon, 1978, Astérisque 59-60, p. 95-118.
- P. Garabedian : Partial differential equations, John Wiley, New-York, 1964 .
- I.M. Gel'fand : Some problems in the theory of quasilinear equations A.M.S. translations séries 2, vol 29, 1963.
- M. Gromov : Partial differential relations, to appear (lire en attendant l'article de Burlet dans Singularités d'applications différentiables, bibliographie du chapitre 1).
- V. Guillemin : D.G. Schaeffer. A class of Fuchsian pseudo-differential equations, Duke Math. J. vol.44, 1 (1977) p.157.
- L. Hörmander : Fourier Integral Operators
I : Acta Math. 127 (1971) p. 79-183 .
II : (avec J. Duistermaat) : Acta Math. 128 (1972) p. 183-269 .
- P.D. Lax : The formation and decay of shock waves, Amer. Math. Monthly 79 (1972) p.227-241 .
- R. Lutz : Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27 (1977)

V.V. Lychagin : Local classification of non-linear first order partial differential equations, Russian Math-Surveys 30 : 1 (1975), 105-175 .

J. Martinet : Formes de contact sur les variétés de dimension 3, in Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture Notes in mathematics 192 (1971) p. 142-163, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York.

T. Oshima : Singularities in contact geometry, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t 21 (1974) p.43

M. Sato - T. Kawai - M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations, in Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations, Lecture Notes in Mathematics 287 (1973) p. 265-529, Springer, Berlin Heidelberg-New-York.

D.G. Schaeffer : A regularity theorem for conservation laws, Advances in Maths. II (1973) p. 368-386.

R. Thom : Remarques sur les problèmes comportant des inéquations différentielles globales, Bull. Soc. math. France 87 (1959) p. 455-461.

Les sections (7.1) et (7.2) reprennent pour l'essentiel la première partie d'un article antérieur [2], en y ajoutant des démonstrations.

Pour obtenir la forme "équivariante" du théorème de Gray dont j'avais besoin (théorèmes 1, 2 et 3 de (7.3)), je n'ai eu qu'à adapter la très belle démonstration de Martinet. Le théorème 2 bis de (7.3) est une version équivariante d'un lemme de Moser, qui a introduit la méthode infinitésimale pour le prouver.

Les concepts et une partie des résultats présentés dans (8.1)-(8.2.2) semblent nouveaux.

Les résultats de (8.4) et (8.5) ont été annoncés dans mes articles [1] et [2] (voir aussi la Note [2] citée dans la bibliographie du chapitre 3). Ceux de (8.4) répondent à une question de René Thom (le corollaire est dû à Oshima dans le cas analytique).

BIBLIOGRAPHIE

Enfin, il convient de signaler que Lyçagin a établi aux alentours de 1975 le corollaire de (8.3), théorème 2 que consitue sa formulation en termes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

ABSTRACT

This work is an expanded version of lectures given at Ecole Normale Supérieure (France) and Universidade Federal de São Carlos (Brasil) with the following two aims :

- Introduce some basic tools of differential geometry (Ehresmann's jets, Whitney's extension theorem, Thom's transversality theorem, Moser's infinitesimal method, contact and symplectic structures) in a fashion suitable for applications.
- Use these tools in the study of singularities of smooth actions (normal forms, various versions of Sternberg's theorem, linearisation of abelian group actions, singular integral manifolds of p.d.e's, etc...).

One of our goals was to show that rather deep results in the local theory of actions could be obtained using quite simple geometric ideas and very little analysis.

In addition to the examples included in the bulk of the text, a substantial conclusion and several appendices should enable the reader to appreciate the implications of our results and the richness of the subject as a whole.