B. Host
J.-F. Méla
F. Parreau

Analyse harmonique des mesures [Séminaire de Villetaneuse]

Astérisque, tome 135-136 (1986)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__135-136__1_0>

135-136 ASTÉRISQUE

1986

ANALYSE HARMONIQUE DES MESURES

B. HOST, J.-F. MÉLA, F. PARREAU

Séminaire de Villetaneuse*

* Centre Scientifique et Polytechnique, Université Paris-Nord, Laboratoire « Analyse et applications » (U.A. 742), av. J. B. Clément, 93430 VILLETANEUSE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 43, 42.

PRÉFACE

Dans l'exposé 534 du Séminaire Bourbaki consacré à l'algèbre de convolution M(G), on renvoyait à un "Séminaire sur l'Analyse Harmonique des mesures, de Villetaneuse" qui n'a existé qu'à l'état de chapitres épars ou inachevés. Par la suite divers auteurs y ont fait référence, ce qui a créé une situation embarassante. Le livre de C. GRAHAM et C. Mc GEHEE "Essays in Commutative Harmonic Analysis" (Springer-Verlag) y fait allusion mais est paru trop tôt pour en intégrer la matière. Il y avait donc un vide à combler.

Entre-temps le point de vue a un peu évolué. Nombre de questions peuvent être traitées maintenant de façon plus élémentaire et lisible par d'autres que des spécialistes étroits. D'où l'idée de réécrire une grande partie du séminaire de façon qu'elle puisse servir en même temps d'introduction au sujet. L'étude des transformées de Fourier-Stieltjes qui est présentée ici mérite, à notre avis, une place plus centrale et plus classique en Analyse de Fourier (dans la lignée du livre de W. RUDIN "Fourier Analysis on groups"). Malgré tout il s'agit d'un séminaire qui n'aborde que les questions où on apporte quelque chose de neuf, soit dans les résultats et les méthodes, soit dans le traitement.

L'approche qui est suivie ici, a été élaborée dans un groupe de travail comprenant B. HOST, M. QUEFFELEC, J.F. MÉLA, F. PARREAU avec, notamment, la participation de M. DECHAMPS-GONDIM, J. PEYRIERE, H. QUEFFELEC. A l'origine elle doit beaucoup aux travaux de G. BROWN et W. MORAN et aussi à ceux de J.L. TAYLOR (bien que la démarche adoptée ici s'écarte considérablement de la sienne). Ensuite les idées de B. HOST et F. PARREAU ont eu une influence prédominante.

Les quatre premiers chapitres ont été rédigés en continuité avec de nombreux renvois et références pour aider le cheminement de lecteurs non-avertis, mais qui peuvent être sautés par les autres. Le chapitre I, assez bref, contient des résultats un peu inhabituels sur les espaces $L^\infty(\mu)$, qui sont constamment utilisés par la suite. L'originalité consiste ici surtout à les dégager et à les étendre au dual d'un "L-espace de mesures".

Dans le chapitre II on montre comment l'introduction du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$ associé à une mesure μ permet d'obtenir avec une remarquable simplicité, une foule de résultats plus ou moins classiques ainsi que toutes leurs variantes, mais aussi des propriétés nouvelles des transformées de Fourier-Stieltjes qui sont approfondies dans les chapitres VI et VII notamment.

Le chapitre III est consacré aux mesures quasi-idempotentes, semi-idempotentes,pour lesquelles il y a eu des progrès récents très substantiels. L'étude des propriétés plus fines du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$ permet d'éclaircir des situations a priori assez complexes et fournit des résultats généraux très précis.

Le chapitre IV introduit les algèbres de convolution de mesures dans un cadre concret, et fait le lien entre le point de vue "local" des chapitres II et III et un point de vue "global" qui sera adopté dans la suite. Il y a une partie de "routine" indispensable qu'on a cherché à rendre aussi insignifiante que possible pour courir au plus concret. (Ceci a l'inconvénient de masquer les structures générales intéressantes ; on y reviendra dans un séminaire ultérieur). On fait une synthèse des propriétés des produits de Riesz ordinaires, des mesures à puissances indépendantes, de la propriété du "module constant", de la "tameness" .. A coté de quelques résultats nouveaux, il y a beaucoup de choses qui étaient déjà connues mais dont la présentation est notablement simplifiée. On y trouve également une théorie des points critiques de $\bar{\Gamma}$ avec des applications.

Les chapitres V à VIII adoptent le point de vue du chapitre IV mais constituent des exposés indépendants.

Le chapitre V est consacré aux produits de Riesz généralisés qui, outre leur intérêt propre, fournissent des outils puissants pour certaines constructions. Pour étendre à ces mesures les propriétés des produits de Riesz ordinaires (principalement la "tameness") on est conduit à des démonstrations générales encore plus simples.

Le chapitre VI établit des caractérisations des "ensembles de Rajchman" et des "ensembles de continuité" et donne des estimations quantitatives précises. Il met un point à peu près final à ces questions. Les méthodes introduites dans ce séminaire s'avèrent très bien adaptées pour élucider les rapports entre les propriétés des transformées de Fourier-Stieltjes et les propriétés arithmétiques des ensembles.

Dans un esprit voisin le chapitre VII fait une étude un peu systématique des L-idéaux de convolution de mesures qu'on peut définir par un comportement spécifique des transformées de Fourier-Stieltjes à l'infini. On revient ainsi notamment sur les mesures de Dirichlet introduites au chapitre II.

Le chapitre VIII a plusieurs objets. Tout d'abord on replace dans le contexte de ce séminaire la question des systèmes de Raikov et des topologies non localement compactes sur le groupe G. On démontre ensuite une extension d'un théorème de DUNKL et RAMIREZ sur les idempotents dans l'adhérence des caractères. Ceci conduit à la notion "d'algèbre de Bochner" qui joue un rôle intéressant (mais mal éclair-

éclairci) dans diverses questions et a été à l'origine de développements ultérieurs sur les "algèbres saturées".

Les chapitres I, II, III, IV et VIII ont été rédigés par J.F. MÉLA. Dans les chapitres II, III, IV les contributions des différents auteurs ne sont signalés que lorsqu'il s'agit de travaux publiés ailleurs. Dans le chapitre IV il y a des emprunts diffus, pas toujours explicites, à J.L. TAYLOR, G. BROWN et W. MORAN. Les chapitres V, VI, VII sont dus à B. HOST et F. PARREAU ; ils sont entièrement originaux et non publiés (seul le chapitre VI a fait l'objet d'une note résumée aux C.R.A.S.).

On nous pardonnera d'avoir limité notre point de vue et privilégié notre approche personnelle du sujet. Il manque des références historiques à la plupart des papiers antérieurs à 1970, qui ont ouvert la voie mais que nous n'utiliserons pas explicitement. De même certains travaux contemporains intéressants n'apparaissent pas, tout simplement parce qu'ils sont hors de notre propos ou qu'ils suivent une ligne différente. Le lecteur comblera ces lacunes en consultant le livre de GRAHAM et Mc GEHEE.

HOST Bernard
MÉLA Jean-François
PARREAU François

Laboratoire "Analyse et Applications" (U.A. 742)
Département de Mathématiques
Centre Scientifique et Polytechnique
Université Paris-Nord
Avenue J.B. Clément, 93430 VILLETANEUSE (France)

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

Nous avons trouvé commode de rassembler dans ce chapitre un certain nombre de propriétés des espaces $L^\infty(\mu)$, qui sont constamment utilisées dans la suite. Ces propriétés, intéressantes en elles-mêmes, ne sont pas vraiment nouvelles ni bien profondes. Ce qui l'est davantage c'est la présentation d'ensemble qu'on en fait et le rôle central de cette petite théorie dans l'étude des mesures sur les groupes abéliens localement compacts. On peut développer des considérations analogues pour les limites projectives d'espaces $L^\infty(\mu)$ et ainsi pour le dual d'un "L-espace de mesures". C'est ce qu'on fait à la fin de ce chapitre, mais sans rien rajouter d'essentiel.

On peut passer assez vite sur ce chapitre, quitte à y revenir par la suite, si besoin est.

1 - Généralités

1.1 - Nous utiliserons les notations usuelles de la théorie de la mesure. Nous considèrerons des mesures boréliennes complexes régulières sur un espace localement compact. Pour deux mesures complexes μ et ν, il est commode de dire que ν est absolument continue par rapport à μ et d'écrire $\nu<<\mu$ si ν est absolument continue par rapport à $|\mu|$. De même nous dirons μ-presque partout (μ-pp) au lieu de $|\mu|$-presque partout.

1.2 - Si on suppose ν finie et μ finie ou σ-finie, le théorème de Radon-Nikodym établit que $\nu \ll \mu$ si et seulement si $\nu = f\mu$, où f est une fonction μ-intégrable.

Nous noterons $L(\mu)$ l'espace des mesures complexes finies $\nu \ll \mu$, qui peut s'identifier à l'espace $L^1(\mu)$ des (classes de) fonctions μ-intégrables (On identifie la mesure $\nu = f\mu$ avec la fonction f ; mais attention ! cette identification dépend de la mesure de base considérée). $L(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\nu\| = \int d|\nu| = \int |f|\, d|\mu| \qquad (\text{si } \nu = f\mu)$$

Le dual de $L(\mu)$ s'identifie à $L^\infty(\mu)$ par le couplage

$$\int \phi\, d\nu = \int \phi\, f\, d\mu \qquad (\phi \in L^\infty(\mu),\ \nu = f\mu \in L(\mu))$$

1.3 - Remarque : Le théorème de Radon-Nikodym est valable dans un cadre plus général où μ peut ne pas être σ-finie. En particulier il est valable lorsque X est un groupe localement compact et μ sa mesure de Haar (cf [2]), et dans ce cas on a encore $L(\mu)' = L^\infty(\mu)$.

1.4 - Pour deux mesures boréliennes complexes μ et ν nous écrirons $\mu \perp \nu$ si μ et ν sont étrangères, c'est-à-dire si elles sont concentrées sur deux boréliens disjoints.

1.5 - Puisque $L(\mu) = L(|\mu|)$ et $L^\infty(\mu) = L^\infty(|\mu|)$ on peut toujours, si besoin est dans la suite, supposer que la mesure de base est positive.

2 - Formes linéaires et L-opérateurs de $L(\mu)$

Désormais et dans toute la suite, μ sera une mesure borélienne complexe finie sur un espace localement compact X.

2.1 - Définition 1 : Un opérateur linéaire continu Φ de $L(\mu)$

est un L-opérateur si, quel que soit $\nu \in L(\mu)$ on a $\Phi(\nu) << \nu$.

Proposition 1 : A tout L-opérateur Φ de $L(\mu)$ correspond un élément $\phi \in L^{\infty}(\mu)$ unique, tel que

$$\Phi(\nu) = \phi\nu \qquad (\nu \in L(\mu))$$

et inversement. ($\phi\nu$ est le produit au sens usuel de la fonction ϕ et de la mesure ν).

Démonstration : Soit Φ un L-opérateur de $L(\mu)$. Montrons d'abord que, pour tout $f \in L^{\infty}(\mu)$, on a

$$(2.1.1) \qquad \Phi(f\nu) = f\Phi(\nu) \qquad (\nu \in L(\mu))$$

Soit B un borélien quelconque de X. Ecrivons

$$\nu = 1_B\nu + 1_{X\setminus B}\nu$$

$$\Phi(\nu) = \Phi(1_B\nu) + \Phi(1_{X\setminus B}\nu)$$

Comme $\Phi(1_B\nu) << 1_B\nu$ et $\Phi(1_{X\setminus B}\nu) << 1_{X\setminus B}\nu$, les mesures $\Phi(1_B\nu)$ et $\Phi(1_{X\setminus B}\nu)$ sont concentrées respectivement sur les boréliens B et X\B. Par conséquent

$$\Phi(1_B\nu) = 1_B\Phi(\nu)$$

La propriété (2.1.1) est donc vraie pour toute fonction indicatrice de borélien. Une fonction quelconque $f \in L^{\infty}(\mu)$ est limite dans $L^{\infty}(\mu)$ d'une suite f_j de combinaisons linéaires de telles fonctions. On a évidemment

$$\Phi(f_j\nu) = f_j\Phi(\nu)$$

et les suites de mesures $f_j\nu$ et $f_j\Phi(\nu)$ ont pour limites dans $L(\mu)$, $f\nu$ et $f\Phi(\nu)$, respectivement ; ce qui démontre la relation (2.1.1) en passant à la limite.

A l'opérateur Φ on peut faire correspondre la forme linéaire

$$\nu \longrightarrow \int d\,\Phi(\nu) \qquad (\nu \in L(\mu))$$

Soit ϕ la fonction de $L^\infty(\mu)$, unique, telle que

$$\int d\Phi(\nu) = \int \phi \, d\nu \qquad (\nu \in L(\mu))$$

Alors, quelle que soit $f \in L^\infty(\mu)$, on a, en utilisant (2.1.1)

$$\int f \, d\Phi(\nu) = \int d(f\Phi(\nu)) = \int d(\Phi(f\nu)) = \int \phi \, d(f\nu) = \int f \, d(\phi\nu)$$

d'où l'on conclut

$$\Phi(\nu) = \phi\nu \qquad (\nu \in L(\mu)) \; .$$

Inversement, pour chaque $\phi \in L^\infty(\mu)$, la formule précédente définit de façon évidente un L-opérateur.

2.2 - <u>Conclusion</u> : Ainsi $L^\infty(\mu)$ peut être considéré à la fois comme le dual de $L(\mu)$ et comme l'espace des L-opérateurs de $L(\mu)$. Ce point de vue sera repris ultérieurement dans un cadre plus général. Ici cette double identification est particulièrement simple, un élément $\phi \in L^\infty(\mu)$ définissant à la fois la forme linéaire

$$\nu \to \int \phi \, d\nu \qquad (\nu \in L(\mu))$$

et l'opérateur de multiplication

$$\nu \to \phi\nu \qquad (\nu \in L(\mu)) \; .$$

Le produit des opérateurs n'est autre que le produit usuel de $L^\infty(\mu)$ et pour ϕ, $\Psi \in L^\infty(\mu)$ on a les relations évidentes

$$\int \phi \, d(\Psi\nu) = \int d(\phi\Psi\nu) = \int \Psi \, d(\phi\nu) \qquad (\nu \in L(\mu))$$

reliant produit et forme linéaire.

2.3 - Les <u>L-projecteurs</u> de $L(\mu)$ sont les éléments h <u>idempotents</u> de $L^\infty(\mu)$ (c'est-à-dire tels que $h^2 = h$), autrement dit les fonctions indicatrices de boréliens (modulo l'égalité μ-pp).

2.4 - <u>La partie polaire</u> d'un élément $\phi \in L^\infty(\mu)$ est l'élément $\phi_0 \in L^\infty(\mu)$ défini par

$$\phi_0(x) = \frac{\phi(x)}{|\phi(x)|} \qquad \text{si } \phi(x) \neq 0$$

$$\phi_0(x) = 0 \qquad \text{sinon} \; .$$

Elle est telle que $|\phi_o|^2 = |\phi_o|$ et

(2.4.1) $\qquad \phi = |\phi|\phi_o$

L'écriture (2.4.1) sera dite <u>décomposition polaire</u> de ϕ.

3 - <u>Relation d'ordre et topologies</u>

3.1 - On peut mettre sur $L^1(\mu)$ la relation d'ordre naturelle des (classes de) fonctions :

$$f \leqslant g \quad \text{si} \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \mu\text{-pp} .$$

On remarque que, si μ est positive, cette relation d'ordre coïncide sur $L(\mu)$ avec la relation d'ordre usuelle des mesures.

D'autre part, sur $L^\infty(\mu)$, c'est aussi la relation d'ordre naturelle des formes linéaires et des opérateurs sur l'espace ordonné $L(\mu)$. En effet les équivalences suivantes sont élémentaires :

<u>Lemme 1</u> : Pour $f, g \in L^\infty(\mu)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $f(x) \leqslant g(x) \quad \mu$-pp

b) pour toute mesure positive $\nu \in L(\mu)$, $f\nu \leqslant g\nu$

c) pour toute mesure positive $\nu \in L(\mu)$, $\int f d\nu \leqslant \int g d\nu$

3.2 - <u>Remarques</u>

a) pour $f,g \in L^\infty(\mu)$ on écrit $f < g$ si $f \leqslant g$ et $f \neq g$ dans $L^\infty(\mu)$ (et non pas si $f(x) < g(x) \quad \mu$-pp).

b) soient $f,g \in L^\infty(\mu)$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$. Pour que $f < g$ il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive $\nu \in L(\mu)$ telle que $\int f d\nu < \int g d\nu$.

3.3 - <u>Topologie faible et relation d'ordre</u>

Dans toute la suite la topologie $*$-faible de $L^\infty(\mu)$ dual de $L(\mu)$, sera dite tout simplement <u>topologie faible</u>.

Lemme 2 : Soit ϕ un élément positif de $L^\infty(\mu)$;

a) l'ensemble des $\Psi \in L^\infty(\mu)$ tels que $\Psi \leqslant \phi$,

b) l'ensemble des $\Psi \in L^\infty(\mu)$ tels que $\phi \leqslant \Psi$,

c) l'ensemble des $\Psi \in L^\infty(\mu)$ tels que $|\Psi| \leqslant \phi$,

sont des ensembles faiblement fermés.

Démonstration : a) et b) sont des conséquences immédiates du lemme 1. Pour prouver c) considérons une suite généralisée Ψ_j d'éléments de $L^\infty(\mu)$, telle que $|\Psi_j| \leqslant \phi$ et convergeant faiblement vers Ψ. Il suffit de montrer que, pour toute mesure positive $\nu << \mu$,

$$\int |\Psi| \, d\nu \leqslant \int \phi \, d\nu .$$

En utilisant la décomposition polaire $\Psi = |\Psi| \, \Psi_0$, on peut écrire

$$\int |\Psi| \, d\nu = \int \Psi \, d(\bar{\Psi}_0 \nu) = \lim \int \Psi_j \, d(\bar{\Psi}_0 \nu)$$

et comme $|\Psi_0| \leqslant 1$,

$$\left| \int \Psi_j \, d(\bar{\Psi}_0 \nu) \right| \leqslant \int |\Psi_j| \, d\nu \leqslant \int \phi \, d\nu$$

d'où le résultat. On démontrerait de même la propriété suivante.

(3.3.1) Exercice : Pour toute suite généralisée Ψ_j dans $L^\infty(\mu)$, qui converge faiblement ainsi que $|\Psi_j|$, $|\lim \Psi_j| \leqslant \lim |\Psi_j|$.

3.4 - Topologie forte

On peut également munir $L^\infty(\mu)$ de la topologie induite par $L^1(\mu)$ (qui n'est autre que la topologie simple-forte des opérateurs de $L(\mu)$) et que nous appellerons désormais simplement, topologie forte. Le résultat suivant sera constamment utilisé par la suite.

Lemme 3 : Soit ϕ_j une suite généralisée d'éléments de $L^\infty(\mu)$ convergeant faiblement vers $\phi \in L^\infty(\mu)$. La convergence a lieu également pour la topologie forte dans les deux cas suivants :

a) si, pour tout j, $|\phi_j| \leqslant |\phi|$;

b) si, pour tout j, $0 \leqslant \phi \leqslant \phi_j$.

Démonstration : Dans le premier cas on remarque que

$$\left(\int |\phi_j - \phi|\, d|\mu|\right)^2 \leqslant \left(\int d|\mu|\right) \int |\phi_j - \phi|^2\, d|\mu|$$

et d'autre part

$$\int |\phi_j - \phi|^2\, d|\mu| = \int |\phi_j|^2 d|\mu| + \int |\phi|^2\, d|\mu| - \int \phi_j \bar{\phi} d|\mu| - \int \bar{\phi}_j\, \phi\, d|\mu|$$
$$\leqslant 2 \int |\phi|^2\, d|\mu| - \int \phi_j\, \bar{\phi}\, d|\mu| - \int \bar{\phi}_j\, \phi\, d|\mu| \quad .$$

Comme ϕ_j converge faiblement vers ϕ

$$\lim \int \phi_j \bar{\phi}\, d|\mu| = \int |\phi|^2\, d|\mu| = \lim \int \bar{\phi}_j \phi\, d|\mu|$$

et, par conséquent $\lim \int |\phi_j - \phi|^2\, d|\mu| = 0$.

Dans le deuxième cas, on a plus simplement

$$\int |\phi_j - \phi|\, d|\mu| = \int (\phi_j - \phi)\, d|\mu| = \int \phi_j\, d|\mu| - \int \phi\, d|\mu|$$

et $\lim \int \phi_j\, d|\mu| = \int \phi\, d|\mu|$.

4 - Le semi-groupe $B(\mu)$

Notons $B(\mu)$ la boule unité de $L^\infty(\mu)$. C'est un semi-groupe pour le produit de $L^\infty(\mu)$. Il en est de même de $B_+(\mu)$ ensemble des éléments positifs de $B(\mu)$.

4.1 - Topologie faible

(4.1.1) Muni de la topologie $*$-faible de $L^\infty(\mu)$, $B(\mu)$ est un espace compact. Le produit est séparément continu pour cette topologie.

En effet si ϕ_j est une suite généralisée d'éléments de $B(\mu)$ convergeant $*$-faiblement vers ϕ, pour toute mesure $\nu \in L(\mu)$ et toute fonction $\Psi \in B(\mu)$, on peut écrire

$$\int \phi\Psi\, d\nu = \int \phi\, d(\Psi\nu) = \lim \int \phi_j\, d(\Psi\nu) = \lim \int \phi_j \Psi\, d\nu$$

Remarques :

(4.1.2) L'application $\phi \longrightarrow \bar{\phi}$ est continue dans $B(\mu)$ pour la topologie faible (évident).

(4.1.3) L'application $\phi \to |\phi|$ n'est pas continue pour la topologie faible, en général. En effet 0 peut très bien être faiblement adhérent aux éléments de module 1 ; on le verra plus loin dans de nombreux exemples.

(4.1.4) $B_+(\mu)$ qui est faiblement fermé dans $B(\mu)$ d'après le lemme 2, est également un semi-groupe semi-topologique compact.

(4.1.5) Soient ϕ_j et Ψ_k deux suites généralisées d'éléments de $B(\mu)$. Si ϕ est une valeur d'adhérence de ϕ_j et Ψ une valeur d'adhérence de Ψ_k, $\phi\Psi$ est une valeur d'adhérence de la suite généralisée $\phi_j\Psi_k$.

Il s'agit là d'une propriété générale d'un produit séparément continu, facile à vérifier. Nous allons donner des résultats plus précis qui seront très utiles. Ce sont des propriétés simples mais qui ne sont pas si familières. Aussi nous nous permettons de les détailler un peu.

4.2 - Le cas métrisable

On sait que $B(\mu)$ muni de la topologie faible, sera métrisable si $L^1(\mu)$ est séparable. Ce sera le cas si l'espace localement compact X est métrisable. Il suffit alors de considérer les suites ordinaires pour lesquelles on a les propriétés suivantes.

Lemme 4 : Soient ϕ_j et Ψ_j des suites convergeant faiblement dans $B(\mu)$ vers ϕ et Ψ, respectivement. On peut en extraire des suites ϕ_{j_ℓ} et Ψ_{j_ℓ} pour lesquelles

$$\phi\Psi = \lim_{\ell<m} \phi_{j_\ell} \Psi_{j_m}$$

(convergence au sens des suites doubles).

Démonstration : C'est une propriété plus générale, valable pour un produit séparément continu dans un espace métrisable. Soit d une distance compatible avec la topologie. On va voir qu'on peut construire des sous-suites ϕ_{j_ℓ} et Ψ_{j_ℓ} de façon que, pour tout $n \geqslant 1$,

(4.2.1) $\quad d(\phi_{j_\ell}\Psi,\ \phi\Psi) < 1/\ell \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant n)$

(4.2.2) $\quad d(\phi_{j_\ell}\Psi_{j_m},\ \phi\Psi) < 1/\ell \qquad (1 \leqslant \ell < m \leqslant n)$.

Le lemme résultera de la propriété (4.2.2), l'autre propriété étant introduite pour les besoins du raisonnement par récurrence. Les deux suites seront construites de proche en proche. Supposons que pour un entier $n \geqslant 1$, on ait déterminé $\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_n}$ et $\Psi_{j_1}, \ldots, \Psi_{j_n}$ $(j_1 < \ldots < j_n)$, telles que les propriétés (4.2.1) et (4.2.2) soient vérifiées. (Il est immédiat que c'est possible pour $n = 1$). On choisira alors $j_{n+1} > j_n$ assez grand pour que

(4.2.3) $\quad d(\phi_{j_{n+1}}\Psi,\ \phi\Psi) < 1/n+1$

(4.2.4) $\quad d(\phi_{j_\ell}\Psi_{j_{n+1}},\ \phi\Psi) < 1/\ell \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant n)$

Ce choix est possible compte-tenu de (4.2.1). On vérifie que les hypothèses de récurrence (4.2.1) et (4.2.2) sont alors satisfaites au rang n+1. Ceci démontre le lemme 4.

(4.2.5) Remarque : L'énoncé du lemme 4 fait jouer à ϕ et à Ψ des rôles disymétriques (qui dépendent formellement de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs du produit $\phi\Psi$ dans la démonstration). Il suffit d'appliquer successivement deux fois le lemme 4 en échangeant ϕ et Ψ pour obtenir des suites ϕ_{j_ℓ} et Ψ_{j_ℓ} telles qu'on ait

$$\phi\Psi = \lim_{\ell<m} \phi_{j_\ell}\Psi_{j_m} = \lim_{\ell>m} \phi_{j_\ell}\Psi_{j_m} = \lim_{\ell\neq m} \phi_{j_\ell}\Psi_{j_m}$$

Lemme 5 : Soit ϕ_j une suite convergeant vers ϕ dans $B(\mu)$. Quitte à remplacer ϕ_j par une sous-suite, on aura

$$\phi^2 = \lim_{j<k} \phi_j\phi_k = \lim_{j\to\infty} \phi_j\phi_{k(j)}$$

$$|\phi|^2 = \lim_{j<k} \bar{\phi}_j\phi_k = \lim_{j\to\infty} \bar{\phi}_j\phi_{k(j)}$$

où $k(j)$ désigne une suite quelconque telle que $k(j) > j$.

Exercices :

(4.2.6) Le lemme 4 peut s'étendre sans problème (autre que de complications d'écriture) à un produit d'un nombre fini de facteurs $\phi^{(1)}\phi^{(2)}\dots\phi^{(n)}$. Esquissons seulement la démonstration.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ soit $\phi_j^{(k)}$ une suite convergeant vers $\phi^{(k)}$. On construira par récurrence des sous-suites $\phi_{j_\ell}^{(k)}$ telles que

$$d(\phi_{j_{\ell_1}}^{(1)}\phi^{(2)}\dots\phi^{(n)},\ \phi^{(1)}\phi^{(2)}\dots\phi^{(n)}) < 1/\ell_1$$

$$d(\phi_{j_{\ell_1}}^{(1)}\ \phi_{j_{\ell_2}}^{(2)}\ \phi^{(3)}\dots\phi^{(n)},\ \phi^{(1)}\phi^{(2)}\dots\phi^{(n)}) < 1/\ell_1 \quad (\ell_1<\ell_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d(\phi_{j_{\ell_1}}^{(1)}\ \phi_{j_{\ell_2}}^{(2)}\dots\phi_{j_{\ell_n}}^{(n)},\phi^{(1)}\phi^{(2)}\dots\phi^{(n)}) < 1/\ell_1 \quad (\ell_1<\ell_2<\dots<\ell_n)$$

La remarque (4.2.5) reste valable dans ce contexte.

(4.2.7) En particulier soit ϕ_j une suite convergeant vers ϕ dans $B(\mu)$. Soient deux entiers $n \geqslant p \geqslant 1$. Quitte à remplacer ϕ_j par une sous-suite, on aura

$$\phi^p(\bar{\phi})^{n-p} = \lim_{j_1<\dots<j_n} \phi_{j_1}\dots\phi_{j_p}\ \bar{\phi}_{j_{p+1}}\dots\bar{\phi}_{j_n}$$

et même, par applications successives du lemme 4,

$$\phi^p(\bar{\phi})^{n-p} = \lim_{j_1<\dots<j_n} \phi_{j_1}^{(\varepsilon_1)}\dots\phi_{j_p}^{(\varepsilon_p)}\ \phi_{j_{p+1}}^{(\varepsilon_{p+1})}\dots\ \phi_{j_n}^{(\varepsilon_n)}$$

pour tout choix des $\varepsilon_k = \pm 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ où l'on prend p termes égaux à 1 et n-p égaux à -1, et où l'on convient de poser $\phi^{(1)} = \phi$ et $\phi^{(-1)} = \bar{\phi}$.

4.3 - Le cas non métrisable

Si l'on se borne à considérer des suites, il n'y a pas beaucoup de différences avec le cas métrisable, à cause du résultat suivant.

Lemme 6 : Toute partie dénombrable de $B(\mu)$ est contenue dans un compact métrisable pour la topologie faible.

Démonstration : On vérifie immédiatement que sur $B(\mu)$, la topologie $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ coïncide avec la topologie $\sigma(L^2(\mu)\ L^2(\mu))$ à cause de la densité de $L^2(\mu)$ dans $L^1(\mu)$. $B(\mu)$ est donc un compact de la boule unité faible de $L^2(\mu)$.

Soit D une partie dénombrable de $B(\mu)$ et H le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par D. En écrivant $L^2(\mu) = H \oplus H^\perp$, on s'assure aisément que la topologie faible de $L^2(\mu)$ induit sur H la topologie faible de H. $B(\mu) \cap H$ est donc un compact de la boule unité faible de H, laquelle est métrisable puisque H est séparable. Comme D est contenu dans $B(\mu) \cap H$, ceci prouve le lemme.

Remarques importantes :

On peut déduire du lemme les conséquences suivantes.

(4.3.1) Même quand $B(\mu)$ n'est pas métrisable, de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente.

(4.3.2) Toute partie dénombrable de $B(\mu)$ peut être inclue dans un semi-groupe compact métrisable, stable par conjugaison.

(4.3.3) Les résultats sur la convergence des suites établis en (4.2) sont valables en toute généralité.

4.4 - Topologie forte

(4.4.1) On peut munir $B(\mu)$ de la topologie forte (induite par $L^1(\mu)$). Il est immédiat de vérifier que le produit est continu pour cette topologie. En effet si ϕ_1, ϕ_2, Ψ_1, Ψ_2 sont des éléments de $B(\mu)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int |\phi_1\Psi_1 - \phi_2\Psi_2|\ d|\mu| &\leqslant \int |\phi_1 - \phi_2|\,|\Psi_1|\ d|\mu| + \int |\Psi_1 - \Psi_2|\,|\phi_2|\ d|\mu| \\ &\leqslant \int |\phi_1 - \phi_2|\ d|\mu| + \int |\Psi_1 - \Psi_2|\ d|\mu|\end{aligned}$$

(4.4.2) Il est également évident que l'application $\phi \longrightarrow |\phi|$ est continue pour la topologie forte puisque

$$\int \Big| |\phi_1| - |\phi_2| \Big| \, d|\mu| \leqslant \int |\phi_1 - \phi_2| \, d|\mu|$$

(4.4.3) Il est d'ailleurs commode de remarquer que la topologie forte coïncide sur $B(\mu)$ avec la convergence en mesure (pour la mesure $|\mu|$).

En effet soit ϕ_n une suite d'éléments de $B(\mu)$ convergeant en mesure vers $\phi \in B(\mu)$. Pour tout $\delta > 0$ notons

$$E(n,\delta) = \{x \; ; |\phi_n(x) - \phi(x)| > \delta\}$$

Il suffit de remarquer que

$$\int |\phi_n - \phi| \, d|\mu| \leqslant \int_{E(n,\delta)} |\phi_n - \phi| \, d|\mu| + \int_{X \setminus E(n,\delta)} |\phi_n - \phi| \, d|\mu|$$

$$\leqslant 2|\mu|(E(n,\delta)) + \delta \, \|\mu\|$$

ce qui prouve notre assertion.

(4.4.4) La convergence forte dans $B(\mu)$ implique la convergence dans tous les espaces $L^1(\nu)$ pour $\nu \ll \mu$. Celà résulte de façon claire de la remarque (4.4.3) et de la propriété d'absolue continuité.

On vérifie ainsi que sur $B(\mu)$ la convergence forte est effectivement plus forte que la convergence faible ! En effet, si ϕ_n tend fortement vers ϕ, pour toute mesure $\nu \ll \mu$ on aura $\lim \int |\phi_n - \phi| d|\nu| = 0$ et donc $\lim \int \phi_n \, d\nu = \int \phi \, d\nu$.

<u>Lemme 7</u> : Soit $\phi_o \in B(\mu)$. Sur l'ensemble des $\phi \in B(\mu)$ tels que $|\phi| = \phi_o$, les topologies forte et faible coïncident.

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence évidente du lemme 3 (a).

<u>Corollaire</u> : Soit $h \in B(\mu)$ tels que $h^2 = h$. L'ensemble des éléments $\phi \in B(\mu)$ tels que $|\phi| = h$, est un groupe topologique d'identité h, pour la topologie forte/faible.

Le résultat suivant est également utile à connaître.

<u>Lemme 8</u> : Soit $h \in B(\mu)$ tel que $h^2 = h$. Toute suite généralisée d'élé-

ments positifs $\phi_j \in B(\mu)$ qui converge faiblement vers h, converge aussi fortement.

Démonstration : Ecrivons $\phi_j = \phi_j h + \phi_j(1-h)$. La suite généralisée $\phi_j h$ converge faiblement vers $h^2 = h$ et comme $\phi_j h \leqslant h$, elle converge aussi fortement, d'après le lemme 3(a). D'autre part $\phi_j(1-h)$ converge faiblement vers $h(1-h) = 0$ avec $\phi_j(1-h) \geqslant 0$; donc elle converge fortement vers 0, d'après le lemme 3(b).

4.5 - Eléments minimaux

On considère $B(\mu)$ muni de la relation d'ordre de $L^\infty(\mu)$.

Lemme 9 : Toute partie faiblement fermée non vide de $B(\mu)$ possède au moins un élément de module minimal.

Démonstration : Pour toute partie Λ de $B(\mu)$ notons $|\Lambda|$ l'ensemble des éléments de $B(\mu)$ qui s'écrivent $|\phi|$ avec $\phi \in \Lambda$. Montrons que si Λ est faiblement fermée, donc faiblement compacte, $|\Lambda|$ possède un élément minimal.

Soit $\Lambda' \subset \Lambda$ tel que $|\Lambda'|$ soit totalement ordonné. La famille Λ' ordonnée suivant $|\Lambda'|$, possède une valeur d'adhérence faible ϕ_0 dans Λ. Quel que soit $\phi \in \Lambda'$, ϕ_0 est adhérent à l'ensemble des $\Psi \in \Lambda'$ tels que $|\Psi| \leqslant |\phi|$; donc $|\phi_0| \leqslant |\phi|$ d'après le lemme 2 (c). On obtient le lemme 9 en utilisant l'axiome de Zorn.

Remarques :

(4.5.1) Dans $B_+(\mu)$ le lemme 9 reste vrai même si on remplace "faiblement fermé" par "fortement fermé". En effet le même argument montre que ϕ_0 est fortement adhérent à Λ' d'après le lemme 3 (b).

(4.5.2) Si Λ est un sous-semi-groupe fermé de $B_+(\mu)$ il possède un élément minimal unique, idempotent. En effet soient ϕ et Ψ deux éléments minimaux de Λ. Comme $\phi\Psi \in \Lambda$ et que $\phi\Psi \leqslant \phi$ et $\phi\Psi \leqslant \Psi$, la minimalité de ϕ et Ψ entraîne nécessairement que $\phi\Psi = \phi = \Psi$ et aussi par suite, que

$\phi^2 = \phi$.

4.6 - Compléments

Lemme 10 : Soit ϕ_j une suite généralisée convergeant dans $B(\mu)$ vers un élément h idempotent. Etant donné un voisinage V de h, on peut extraire de ϕ_j une suite ϕ_{j_ℓ} $(\ell \geqslant 0)$, telle que V contienne tous les produits

$$\phi_{j_o} \prod_{1 \leqslant \ell \leqslant n} \phi_{j_\ell}^{(\varepsilon_\ell)} \qquad (n \geqslant 1)$$

pour tout choix des $\varepsilon_\ell = 0, \pm 1$, (avec la convention : $\phi^{(0)} = 1, \phi^{(1)} = \phi$, $\phi^{(-1)} = \bar{\phi}$). Si l'ensemble $\{\phi_j\}$ est infini, on peut choisir $\{\phi_{j_\ell}\}$ infini.

Démonstration : On peut supposer que V est ouvert. D'autre part l'ensemble W des $\chi \in V$ tels que $h\chi \in V$ est un voisinage ouvert de h tel que $hW \subset W$. On peut donc supposer au départ que $hV \subset V$.

Pour tout $\chi \in V$, $\phi_j\chi$ et $\bar{\phi}_j\chi$ convergent vers $h\chi$ et donc appartiennent à V pour j assez grand. Plus généralement, quel que soit l'ensemble fini $A \subset V$, on aura pour j assez grand

$$\phi_j A \subset V \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_j A \subset V \quad .$$

Partant d'un élément $\phi_{j_o} \in V$ on peut choisir $j_1 > j_o$ tel que

$$\phi_{j_o}\phi_{j_1} \in V \quad \text{et} \quad \phi_{j_o}\bar{\phi}_{j_1} \in V \quad .$$

Supposons qu'on ait déterminé $\phi_{j_1}, \ldots, \phi_{j_n}$ avec $j_1 < \ldots < j_n$, tels que l'ensemble

$$A_n = \{\phi_{j_o}\phi_{j_1}^{(\varepsilon_1)} \ldots \phi_{j_n}^{(\varepsilon_n)} ; \varepsilon_1 = 0, \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = 0, \pm 1\}$$

soit contenu dans V. On prendra $j_{n+1} > j_n$ et assez grand pour que

$$\phi_{j_{n+1}} A_n \subset V \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_{j_{n+1}} A_n \subset V$$

Alors l'ensemble

$$A_{n+1} = A_n \cup \phi_{j_{n+1}} A_n \cup \bar{\phi}_{j_{n+1}} A_n$$

est contenu dans V. Ceci démontre par récurrence la propriété du lemme. Il est clair que si l'ensemble $\{\phi_j\}$ est infini, on pourra choisir les ϕ_{j_ℓ} tous distincts.

5 - Dual d'un L-espace de mesures

On est nécessairement amené à introduire des espaces de mesures plus généraux que les espaces $L(\mu)$. Par la suite on considérera exclusivement des espaces de mesures qui sont des réunions (en général non dénombrables) d'espaces $L(\mu)$. La fin de ce chapitre n'a d'autre ambition que d'étendre les propriétés et remarques antérieures aux duals de tels espaces. On se bornera à considérer des sous-espaces d'un espace de mesures concret sans chercher à mettre en relief la notion abstraite de "L-espace" comme dans [3] et [1].

5.1 - L-sous-espaces de M(X)

X désigne un espace localement compact et M(X) l'espace de Banach des mesures boréliennes complexes finies sur X. (Ce qui suit resterait valable dans un cadre plus général d'espaces mesurables).

Définition 2 : Un sous-espace fermé N de M(X) est un L-sous-espace si, quel que soit $\mu \in N$, N contient $L(\mu)$.

(5.1.1) Un L-sous-espace de M(X) est lui-même un espace complètement réticulé.

(5.1.2) On se place désormais dans un L-sous-espace M de M(X) qui peut être M(X) tout entier. On note M^+ le cône des mesures positives. Un L-sous-espace de M est simplement un L-sous-espace de M(X), contenu dans M.

(5.1.3) Deux mesures étrangères sont dites aussi orthogonales. L'ensemble des mesures de M orthogonales à une partie N de M, appelé orthogonal de N et noté $N^\perp$, est clairement un L-sous-espace de M.

Proposition 2 : Soit N un L-sous-espace de M. M admet la décomposition en somme directe $M = N \oplus N^{\perp}$.

Démonstration : Il suffit de montrer que toute mesure positive $\mu \in M$ est somme d'une mesure de N et d'une mesure de $N^{\perp}$. L'ensemble des mesures de N, positives et $\leqslant \mu$, admet une borne supérieure $\nu \in N$ (5.1.1). On vérifie que la mesure $\mu-\nu$ est orthogonale à N, sans quoi on pourrait trouver $\omega \in N$ telle que $0 < \omega \leqslant \mu-\nu$; on aurait $\nu < \nu+\omega \leqslant \mu$ ce qui contredirait la définition de ν.

5.2 - Formes linéaires et L-opérateurs

Le dual de M peut être envisagé dans la limite projective des $L^{\infty}(\mu)$, $(\mu \in M)$. Soit $\phi \in M'$. Pour toute mesure $\mu \in M$, la restriction de ϕ à $L(\mu)$ définit un élément ϕ_{μ} de $L^{\infty}(\mu)$ tel que

(5.2.1) $$\langle\phi,\nu\rangle = \int \phi_{\mu}\, d\nu \qquad (\nu \in L(\mu))$$

La famille $(\phi_{\mu})_{\mu \in M}$ est telle que

(5.2.2) $$\sup_{\mu \in M} \|\phi_{\mu}\|_{L^{\infty}(\mu)} < +\infty$$

et vérifie les relations de compatibilité

(5.2.3) $$\phi_{\mu} = \phi_{\nu} \qquad \text{si } \nu << \mu \quad .$$

Inversement il est immédiat que toute famille $(\phi_{\mu})_{\mu \in M}$ vérifiant (5.2.2) et (5.2.3) permet de définir un unique élément ϕ de M' par la formule (5.2.1).

Définition 3 : Un opérateur linéaire continu Φ de M, est un L-opérateur s'il laisse stables les L-sous-espaces de M.

Proposition 3 : A tout L-opérateur Φ de M, correspond une forme linéaire unique $\phi \in M'$ telle que

$$\Phi(\mu) = \phi_{\mu}\, \mu \qquad (\mu \in M)$$

et inversement toute forme linéaire ϕ définit ainsi un L-opérateur.

Démonstration : Etant donné un L-opérateur Φ de M, sa restriction à chaque sous-espace $L(\mu)$ est un L-opérateur ; on peut donc lui associer par la proposition 1, un élément $\phi_\mu \in L^\infty(\mu)$ tel que

$$\Phi(\nu) = \phi_\mu \, \nu \qquad (\nu \in L(\mu))$$

$$\|\phi_\mu\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant \|\Phi\| \quad .$$

La famille $(\phi_\mu)_{\mu \in M}$ vérifie de façon claire les propriétés (5.2.2) et (5.2.3) et définit un élément de M'. La réciproque est évidente.

(5.2.4) On identifie désormais tout L-opérateur Φ avec la forme ϕ correspondante et on note $\Phi(\mu) = \phi\mu$. On peut ainsi écrire

$$<\phi,\mu> = \int \phi_\mu \, d\mu = \int d(\phi\mu) \quad .$$

(5.2.5) M' est ainsi muni de la structure d'algèbre des L-opérateurs. Le produit de deux éléments ϕ, $\Psi \in M'$ peut être défini directement par

(5.2.6) $$(\phi\Psi)_\mu = \phi_\mu \Psi_\mu \qquad (\mu \in M) \quad .$$

Il est tel que

(5.2.7) $$<\phi\Psi,\mu> = <\phi,\Psi\mu> = <\Psi,\phi\mu> = <1,\phi\Psi\mu> \quad .$$

La boule unité de M' est un semi-groupe qui joue le rôle de $B(\mu)$ dans le paragraphe 4.

(5.2.8) Eléments idempotents de M' : ce sont les L-projecteurs de M. Pour deux L-sous-espaces il est équivalent de dire qu'ils sont disjoints ou qu'ils sont orthogonaux. Les L-projecteurs correspondent aux décompositions en somme directe du type $M = N \oplus N^\perp$.

(5.2.9) Calcul fonctionnel : Toute fonction borélienne bornée F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, opère sur M' de façon triviale, $F(\phi)$ étant définie pour toute forme $\phi \in M'$ par

$$F(\phi)_\mu = F(\phi_\mu) \qquad (\mu \in M)$$

(5.2.10) En particulier on peut introduire ainsi (tout comme dans $L^\infty(\mu)$ la <u>conjuguée</u> $\bar{\phi}$, le <u>module</u> $|\phi|$, la <u>partie polaire</u> ϕ_0, la décomposition polaire d'une forme $\phi \in M'$ et également, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|\phi|^z$.

(5.2.11) <u>Relation d'ordre</u> : Elle peut se définir à partir de la relation d'ordre de M en disant que $\phi \leqslant \Psi$ dans M' si

$$<\phi,\mu> \leqslant <\Psi,\mu> \qquad (\mu \in M^+)$$

ou de façon équivalente

$$\phi_\mu \leqslant \Psi_\mu \qquad (\mu \in M) \quad .$$

(5.2.12) <u>Topologie faible</u> : La topologie $*$-faible sur M' est la limite projective des topologies $*$-faibles des espaces $L^\infty(\mu)$ $(\mu \in M)$. On l'appellera simplement topologie faible comme précédemment pour $L^\infty(\mu)$. Une suite généralisée ϕ_j converge faiblement vers ϕ dans M' si et seulement si $(\phi_j)_\mu$ converge faiblement vers ϕ_μ dans chaque espace $L^\infty(\mu)$, $(\mu \in M)$.

(5.2.13) <u>Topologie forte</u> : Nous appellerons ainsi sur M' la topologie simple forte des opérateurs : une suite généralisée ϕ_j converge fortement vers ϕ dans M' si et seulement si pour toute mesure $\mu \in M$, $\phi_j\mu$ tend vers $\phi\mu$ en norme. C'est la limite projective des topologies fortes (au sens de (3.4)) des espaces $L^\infty(\mu)$ $(\mu \in M)$.

(5.2.14) Le <u>produit</u> de M' est <u>séparément continu</u> dans la boule unité. La conjugaison est faiblement continue, l'application $\phi \longrightarrow |\phi|$ fortement continue.

5.3 - <u>Point de vue local et point de vue global</u>

Dans l'étude d'un L-espace de mesures M, nous entendrons improprement par "point de vue local", le point de vue qui consiste, pour chaque mesure $\mu \in M$, à se placer dans $L(\mu)$ ou dans son dual $L^\infty(\mu)$ (ce sera notamment celui des chapitres II et III). Par opposition on parlera du "point de vue global" où l'on introduit le dual M' (voir l'étude des algèbres de convolution de mesures au chapitre IV).

Le passage d'un point de vue à l'autre dans M' ne pose aucun problème en ce qui concerne les opérations, le calcul fonctionnel, la relation d'ordre, les topologies.

Remarques importantes :

(5.3.1) Les propriétés reliant topologie faible, topologie forte et relation d'ordre, que nous avons énoncées précédemment (lemmes 2 et 3, lemme 7 et corollaire, lemme 8) sont valables si l'on remplace $L^\infty(\mu)$ par M' et $B(\mu)$ par la boule unité de M'. (La vérification est fastidieuse mais immédiate).

(5.3.2) Eléments minimaux : le lemme 9, les remarques (4.5.1) et (4.5.2) sont également valables pour la boule unité de M'. On peut donner la version suivante précisée du lemme 9.

(5.3.3) Notation : Pour toute partie Λ de M' et toute mesure $\mu \in M$ on notera désormais $\Lambda(\mu) = \{\phi_\mu \,;\, \phi \in \Lambda\}$.

Lemme 11 : Soit Λ une partie faiblement fermée de la boule unité de M'. Soit $\mu \in M$ et Ψ un élément de module minimal de $\Lambda(\mu)$. Il existe dans Λ un élément ϕ de module minimal tel que $\phi_\mu = \Psi$.

Démonstration : On considère l'ensemble Λ_Ψ des éléments $\chi \in \Lambda$ tels que $\chi_\mu = \Psi$. C'est une partie faiblement fermée de Λ qui possède donc un élément de module minimal ϕ. Alors ϕ est de module minimal dans Λ car s'il existait $\chi \in \Lambda$ tel que $|\chi| < |\phi|$, χ ne serait pas dans Λ_Ψ et on aurait nécessairement $|\chi_\mu| < |\phi_\mu| = |\Psi|$ dans $L^\infty(\mu)$, ce qui démentirait la minimalité de $|\Psi|$ dans $\Lambda(\mu)$.

---

[1] HOST B. et PARREAU F. - Orthogonalité et propriétés spectrales dans les algèbres de convolution de mesures (à paraître).

[2] RUDIN W. - Fourier Analysis on groups. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics n°12. John Wiley and Sons.

[3] TAYLOR J.L. - Measure algebras. Regional Conference Series in Math. n°16, A.M.S. (1972).

CHAPITRE II

LE SEMI-GROUPE $\bar{\Gamma}(\mu)$

(ÉTUDE A L'INFINI DES TRANSFORMÉES DE FOURIER-STIELTJES)

1 - Généralités

1.1 - Dans toute la suite G désignera un groupe abélien localement compact et Γ son groupe dual. Bien que G et Γ jouent des rôles symétriques au vu du théorème de dualité de Pontryagin, il est commode dans les questions que nous allons traiter, de noter G additivement et Γ multiplicativement. A ceci près, nous adopterons les notations de [5].

1.2 - Nous noterons M(G) l'espace des mesures complexes boréliennes régulières finies sur G, qui s'identifient aussi aux mesures de Radon sur G. C'est une algèbre de Banach pour le produit de convolution et la norme $\|\mu\| = \int d|\mu|$.

La mesure de Dirac en un point $x \in G$ est notée δ_x. L'unité δ_0 de M(G) est notée plus simplement δ. La mesure de Haar normalisée de G est notée m_G ou plus simplement m s'il n'y a pas d'ambiguïté. La mesure m n'appartient à M(G) que si G est compact. En général le sous-espace L(m) des mesures $\mu \in M(G)$ absolument continues par rapport à m, est noté $L^1(G)$ (ou même L^1 s'il n'y a pas d'ambiguïté). $L^1(G)$ muni de la convolution est souvent appelée "l'Algèbre du groupe G". C'est un idéal de l'algèbre M(G). W. RUDIN [5] présente une étude générale détaillée de $L^1(G)$ à laquelle nous nous référerons le cas échéant.

1.3 - La transformée de Fourier(-Stieltjes) d'une mesure $\mu \in M(G)$ est la fonction notée $\hat{\mu}$, définie sur Γ par

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma \, d\mu \qquad (\gamma \in \Gamma) .$$

On sait que l'application $\mu \longrightarrow \hat{\mu}$ est un homomorphisme continu injectif de l'algèbre de convolution $M(G)$ dans l'algèbre des fonctions uniformément continues sur Γ (avec le produit ordinaire) [5]. En particulier une mesure μ est complètement déterminée par sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$. C'est ce qu'on appelle le "théorème d'unicité" qui sera constamment utilisé, notamment sous la forme du lemme suivant.

Lemme 1 : Soit $\mu \in M(G)$

a) L'ensemble Γ des caractères de G (resp. l'ensemble des mesures $\gamma\mu$, $\gamma \in \Gamma$) est total dans $L^1(\mu)$ (resp. $L(\mu)$).

b) Une suite généralisée ϕ_j d'éléments de $B(\mu)$ converge vers $\phi \in B(\mu)$ si et seulement si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\lim(\phi_j\mu)\hat{}\,(\gamma) = (\phi\mu)\hat{}\,(\gamma)$.

Démonstration : (a) n'est qu'une paraphrase du théorème d'unicité. En effet, si le système des caractères n'était pas total dans $L^1(\mu)$, il existerait $\phi \in L^\infty(\mu)$, $\phi \neq 0$, tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $(\phi\mu)\hat{}\,(\gamma) = \int \gamma\phi \, d\mu = 0$. On en déduirait que la mesure $\phi\mu$ serait nulle et donc que $\phi = 0$ μ-pp, ce qui fournit une contradiction. (b) est une conséquence immédiate de (a).

1.4 - Nous préférons, suivant la terminologie de J.L. TAYLOR [6], appeler L-sous-espace de $M(G)$ une bande au sens de N. BOURBAKI : un sous-espace fermé N de $M(G)$ est donc un L-sous-espace si, quelle que soit $\mu \in N$, N contient aussi $L(\mu)$ (cf chap.I-5). L'énoncé suivant est une conséquence évidente du lemme 1.

Lemme 2 : Un sous-espace fermé N de $M(G)$ est un L-sous-espace si et seulement si, quels que soient $\mu \in N$ et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\mu$ appartient à N.

1.5 - M(G) est munie d'une involution $\mu \longrightarrow \tilde{\mu}$, où $\tilde{\mu}$ est la mesure définie par $\tilde{\mu}(E) = \overline{\mu}(-E)$ pour tout borélien E de G. On vérifie aussitôt que

$$(\tilde{\mu})\hat{}(\gamma) = \overline{\hat{\mu}}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma) \ .$$

Ainsi μ est symétrique, c'est-à-dire $\mu = \tilde{\mu}$, si et seulement si sa transformée de Fourier est à valeurs réelles.

1.6 - On suppose désormais que G est <u>non discret</u> et on s'intéresse au comportement à l'infini des transformées de Fourier de mesures.

On désigne habituellement par $M_o(G)$ le sous-espace de M(G) constitué des <u>mesures dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini</u> dans Γ. On vérifie immédiatement, en utilisant le lemme 2, la proposition suivante.

<u>Proposition 1</u> : $M_o(G)$ est un L-sous-espace et un idéal de convolution de M(G).

$M_o(G)$ est, en somme, la classe triviale du point de vue du comportement asymptotique des transformées de Fourier. On va voir dans la suite comment, en général, les propriétés asymptotiques de $\hat{\mu}$ (mais aussi des propriétés plus profondes de μ) peuvent se lire dans un semi-groupe attaché à la mesure μ, qu'on note $\overline{\Gamma}(\mu)$ et qu'on va introduire maintenant.

2 - <u>Le groupe $\Gamma(\mu)$</u>

2.1 - <u>Groupe-support d'une mesure</u>

(2.2.1) Pour une mesure $\mu \in M(G)$, le sous-groupe fermé H engendré par le support de μ est aussi le plus petit sous-groupe fermé sur lequel μ est concentrée. H est appelé <u>groupe-support</u> de la mesure μ.

Lemme 3 : Le groupe-support d'une mesure $\mu \in M(G)$ est compact ou σ-compact.

Démonstration : Il suffit de vérifier qu'une mesure $\mu \in M(G)$ est concentrée sur un sous-groupe fermé σ-compact de G. Or μ étant régulière, est concentrée sur un ensemble σ-compact. De façon plus précise, on peut trouver un voisinage V de l'identité, σ-compact, sur lequel μ est concentrée. Le groupe engendré par V est ouvert et fermé et σ-compact.

(2.1.2) L'orthogonal d'un sous-groupe H de G est, par définition, le sous-groupe des caractères $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(x) = 1$ si $x \in H$; on le note $H^{\perp}$.

(2.1.3) On sait que, si H est un sous-groupe fermé quelconque de G et si $x_0 \notin H$, il existe un caractère $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) = 1$ si $x \in H$ et $\gamma(x_0) \neq 1$. Autrement dit, $(H^{\perp})^{\perp} = H$. On en déduit facilement le résultat suivant.

Lemme 4 : Une mesure $\mu \in M(G)$ est concentrée sur un sous-groupe fermé H de G si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est constante sur les classes modulo $H^{\perp}$.

Démonstration : Tout d'abord, si μ est concentrée sur H, pour tout $\gamma_0 \in H^{\perp}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a évidemment

$$\hat{\mu}(\gamma\gamma_0) = \int \gamma \; d(\gamma_0\mu) = \int \gamma \; d\mu = \hat{\mu}(\gamma) \quad .$$

Inversement, s'il en est ainsi pour une mesure μ et un sous-groupe fermé H, on en déduit par le théorème d'unicité, que pour tout $\gamma_0 \in H^{\perp}$, $\gamma_0\mu = \mu$ et donc que $\gamma_0(x) = 1$ sur le support de μ qui est ainsi nécessairement contenu dans H, d'après la remarque (2.1.3).

Il résulte du lemme 4 que le groupe support d'une mesure $\mu \in M(G)$ peut être facilement déterminé à partir de sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$.

Lemme 5 : Le groupe support d'une mesure $\mu \in M(G)$ est l'orthogonal du stabilisateur de $\hat{\mu}$. (Rappelons qu'on appelle stabilisateur d'une fonction f sur Γ, le sous-groupe des translations qui laissent f invariante).

2.2 - Le groupe $\Gamma(\mu)$ (définition)

On considère l'application naturelle de Γ dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$ qui à tout caractère $\gamma \in \Gamma$ fait correspondre sa classe γ_μ modulo l'égalité μ-presque partout. Cette application est un homomorphisme pour le produit dont le noyau n'est autre que l'orthogonal du groupe-support de la mesure μ. De façon générale on notera $\Gamma(\mu)$ l'image de Γ.

(2.2.1) Sur $\Gamma(\mu)$ la topologie faible de $B(\mu)$ coïncide avec la topologie forte définie par la distance $\int |\gamma - \gamma'| \, d|\mu|$. $\Gamma(\mu)$ est un groupe topologique métrisable (chap. 1 cor. lemme 7).

La topologie de dual sur Γ peut être décrite comme la topologie la moins fine qui rende continues les transformées de Fourier-Stieltjes. Sur $\Gamma(\mu)$ la topologie faible qui n'est autre que la topologie $*$-faible de $L^\infty(\mu)$, peut être décrite comme la topologie la moins fine qui rende continues les applications $\gamma_\mu \longrightarrow \int \gamma_\mu \, d\nu = \hat{\nu}(\gamma)$ pour toute mesure $\nu \in L(\mu)$. Il est donc clair que l'application $\gamma \longrightarrow \gamma_\mu$ est un homomorphisme continu de Γ sur le groupe topologique $\Gamma(\mu)$. S'il n'y a pas d'inconvénient, on pourra identifier dans les notations γ et γ_μ.

(2.2.2) Remarque : Il est important de remarquer que le groupe $\Gamma(\mu)$ ne dépend que de μ et de son groupe support. En effet soit H le groupe support de μ dans G. H étant fermé, on sait que tout caractère de H se prolonge en un caractère de G [5] ; de plus deux caractères de G qui coïncident sur H définissent le même élément de $\Gamma(\mu)$.

Dans la suite on peut donc si on le désire, et sans changer

$\Gamma(\mu)$, supposer que $G = H$. Par conséquent on peut se ramener au cas d'un groupe G compact ou σ-compact dont le dual Γ est métrisable [5].

(2.2.3) Exemple : Soit m la mesure de Haar d'un groupe compact infini G. Ici $\Gamma(m) \simeq \Gamma$ algébriquement puisque le groupe support de m est G, mais aussi topologiquement. En effet, comme $\hat{m}(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 1$, dès que $\varepsilon < 1$ on ne peut avoir $|\hat{m}(\gamma) - 1| \leqslant \varepsilon$ que si $\gamma = 1$. La topologie de $\Gamma(m)$ est bien la topologie discrète. Cette situation n'est pas propre à la mesure de Haar comme on va voir.

2.3 - Mesures de Dirichlet et mesures pleines

Soit μ une mesure de probabilité dont le groupe support est G tout entier, et pour laquelle on a donc $\Gamma(\mu) \simeq \Gamma$ algébriquement. A quelle condition a-t-on isomorphisme topologique ?

Si G est discret, Γ compact, ce sera évidemment toujours le cas. Si G n'est pas discret, supposons que μ ait la propriété

$$(2.3.1) \qquad \overline{\lim_{\gamma\to\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| < 1$$

Alors, comme

$$|\hat{\mu}(\gamma) - 1| \leqslant \int |\gamma - 1|\, d\mu$$

il est clair que pour $\varepsilon > 0$, assez petit, le voisinage de l'identité dans $\Gamma(\mu)$ défini par $\int |\gamma-1|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ est compact dans Γ. Or sur les compacts de Γ les topologies de Γ et de $\Gamma(\mu)$ coïncident. On en conclut aisément que Γ et $\Gamma(\mu)$ sont topologiquement isomorphes. La condition (2.3.1) est également nécessaire comme le montre le lemme suivant.

Lemme 6 : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure de probabilité ayant G comme groupe-support. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| = 1$

b) Il existe une suite γ_j de caractères tendant vers l'infini dans Γ et convergeant vers 1 dans $L^1(\mu)$.

Démonstration : Supposons que la propriété (a) soit vraie. Il existe une suite γ_j d'éléments de Γ, tendant vers l'infini dans Γ et telle que $\lim \hat{\mu}(\gamma_j) = c$ avec $|c| = 1$. Soit χ une valeur d'adhérence faible de γ_j dans $B(\mu)$. On aura $\int \chi \, d\mu = c$ et, μ étant une probabilité, ceci implique nécessairement que $\chi = c$ μ-pp. Il en résulte que γ_j tend vers c pour la topologie faible mais aussi pour la topologie forte (chap. 1 lemme 7). La suite $\bar{\gamma}_j \gamma_{j+1}$ converge vers $\bar{c}c = 1$ dans $L^1(\mu)$ et (quitte à remplacer γ_j par une sous-suite) vers l'infini dans Γ.
L'implication réciproque (b) $\Longrightarrow$ (a) est triviale.

On est ainsi conduit à la classification suivante.

Définition 1 : Pour une mesure positive $\mu \in M(G)$ on convient de dire

a) μ est une mesure de Dirichlet si $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| = \int d\mu$

b) μ est une mesure pleine si $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| < \int d\mu$.

Pour une mesure complexe $\mu \in M(G)$ on dira que μ est une mesure de Dirichlet ou une mesure pleine s'il en est ainsi de $|\mu|$.

Note : L'origine de la terminologie "mesure de Dirichlet" est la notion "d'ensemble de Dirichlet" introduite par KAHANE et SALEM [3]. Ce point sera précisé ultérieurement. La terminologie "mesure pleine" traduite de l'anglais "full measure" sera peu utilisée par la suite.

Proposition 2 : Pour une mesure $\mu \in M(G)$ de groupe support H, le groupe $\Gamma(\mu)$ est topologiquement isomorphe à $\Gamma/H^{\perp}$ si et seulement si μ est une mesure pleine dans H.

Démonstration : Dans le cas où H = G ceci a déjà été démontré. Dans le cas général il suffit de remarquer que le dual de H s'identifie au groupe quotient $\Gamma/H^{\perp}$ (cf [5]) et que, d'autre part, $\Gamma(\mu) \simeq \Gamma/H^{\perp}(\mu)$ suivant la remarque (2.2.2).

3 - Les semi-groupes $\bar{\Gamma}(\mu)$ et $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$

3.1 - Le semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$

Définition 2 : $\bar{\Gamma}(\mu)$ est l'adhérence de $\Gamma(\mu)$ dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$ munie de la topologie $*$-faible. $\bar{\Gamma}(\mu)_+$ est l'ensemble des éléments positifs de $\bar{\Gamma}(\mu)$.

(3.1.1) Tout comme $\Gamma(\mu)$, $\bar{\Gamma}(\mu)$ ne dépend en fait que de la mesure μ et du groupe support de μ.

(3.1.2) Si l'on se reporte au chapitre I-4, il est clair que $\bar{\Gamma}(\mu)$ et $\bar{\Gamma}(\mu)_+$ sont des sous-semi-groupes de $B(\mu)$, compacts pour la topologie faible, qui héritent des propriétés établies pour $B(\mu)$ et concernant le produit, la relation d'ordre, les topologies faible et forte, l'existence d'éléments minimaux, ...

(3.1.3) $\bar{\Gamma}(\mu)$ est stable pour la conjugaison puisque $\Gamma(\mu)$ est stable et que la conjugaison est continue. Il en résulte que, si $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$, il en est de même de $|\chi|^2 = \chi\bar{\chi}$; mais $|\chi|$ peut très bien ne pas être dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ comme le montre un peu plus loin l'exemple (7.3.2).

(3.1.4) Soit $\mu \in M(G)$. L'ensemble des valeurs de $\int \chi \, d\mu$ lorsque χ décrit $\bar{\Gamma}(\mu)$, n'est autre que $\overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$, adhérence dans $\mathbb{C}$ des valeurs de $\hat{\mu}$.

(3.1.5) Soit $\mu \in M(G)$ et $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$. On vérifie immédiatement

$$(\chi\mu)\hat{}\,(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$$

(3.1.6) Exemple : Déterminons $\bar{\Gamma}(m)$ dans le cas où m est la mesure de Haar (normalisée) d'un groupe compact G. On a vu qu'alors $\Gamma(m) \simeq \Gamma$ (2.2.3). Les éléments $\chi \in \bar{\Gamma}(m)$ qui ne sont pas des éléments de Γ, sont limites faibles d'une suite généralisée de caractères γ_j tendant vers l'infini dans Γ. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\gamma_j$ tend également vers l'infini et donc

$$(\chi m)\hat{}\,(\gamma) = \int \gamma\chi \, dm = \lim \int \gamma\gamma_j \, dm = \lim \hat{m}(\gamma\gamma_j) = 0$$

d'où l'on conclut par le théorème d'unicité, que $\chi m = 0$ et donc que $\chi = 0$. En conclusion $\bar{\Gamma}(m) = \Gamma \cup \{0\}$; $\bar{\Gamma}(m)$ est la compactification usuelle de Γ.

On s'aperçoit que l'argument précédent ne s'applique pas seulement à la mesure de Haar, mais aussi à toute mesure de $M_o(G)$.

<u>Proposition 3</u> : Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ dont le groupe-support est G, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mu \in M_o(G)$

b) $\bar{\Gamma}(\mu) = \Gamma \cup \{0\}$, (0 s'identifiant avec le point à l'infini de Γ).

<u>Démonstration</u> : Pour compléter la démonstration de la proposition 3 il suffit de remarquer que, si (b) est vraie, cela signifie que toute suite généralisée γ_j tendant vers l'infini dans Γ converge vers 0 dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ et qu'ainsi on a bien $\lim \hat{\mu}(\gamma_j) = \lim \int \gamma_j \, d\mu = 0$.

On verra que pour les mesures $\mu \notin M_o(G)$, $\bar{\Gamma}(\mu)$ est en général beaucoup plus riche.

3.2 - <u>Le semi-groupe $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. (G non discret)</u>

Au vu de ce qui précède il est naturel d'introduire l'objet suivant.

<u>Définition 3</u> : $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est l'ensemble des éléments de $\bar{\Gamma}(\mu)$ qui sont faiblement adhérents aux voisinages de l'infini dans Γ (plus exactement à leurs images dans $\Gamma(\mu)$ par l'application naturelle de Γ sur $\Gamma(\mu)$). $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)_+$ est l'ensemble des éléments positifs de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

<u>Proposition 4</u> : $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est un idéal fermé du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$ stable par conjugaison.

<u>Démonstration</u> : $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est évidemment fermé dans $\bar{\Gamma}(\mu)$, donc faiblement compact. Soit $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. Vérifions d'abord que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a encore $\chi\gamma \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. En effet si γ_j est une suite généralisée de caractères tendant vers l'infini dans Γ et vers χ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$, la suite gé-

néralisée $\gamma\gamma_j$ tend également vers l'infini dans Γ, et vers $\gamma\chi$ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. L'ensemble des $\phi \in \bar{\Gamma}(\mu)$ tels que $\phi\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est fermé et contient $\Gamma(\mu)$ d'après ce qui précède ; il est donc égal à $\bar{\Gamma}(\mu)$. Ceci démontre que $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est un idéal. Que $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est stable par conjugaison, est à peu près évident : si γ_j est une suite généralisée tendant vers l'infini dans Γ et vers χ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$, $\bar{\gamma}_j = \gamma_j^{-1}$ tendra également vers l'infini dans Γ, et vers $\bar{\chi}$ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$.

<u>Corollaire</u> : Si $\mu \notin M_o(G)$, $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un élément strictement positif.

<u>Démonstration</u> : Soit une mesure μ de $M(G)$ n'appartenant pas à $M_o(G)$. Il existe une suite généralisée de caractères γ_j tendant vers l'infini dans Γ et telle que $\lim \hat{\mu}(\gamma_j) = c \neq 0$. Soit χ une valeur d'adhérence de γ_j dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Elle est telle que $\int \chi \, d\mu = c$; donc nécessairement $\chi \neq 0$. D'après la proposition 4 l'élément $\phi = \chi\bar{\chi}$ appartient à $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

<u>Proposition 5</u> : Soit $\mu \in M(G)$.

a) Si μ est une mesure de Dirichlet, $\bar{\Gamma}(\mu) = \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

b) Si μ est une mesure pleine, $\bar{\Gamma}(\mu) = \Gamma(\mu) \cup \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ avec $\Gamma(\mu) \cap \bar{\Gamma}_\infty(\mu) = \emptyset$

<u>Démonstration</u> : On se ramène au cas d'une mesure de probabilité. On ne peut rencontrer que les deux situations suivantes qui s'excluent mutuellement:

a) Ou bien $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un élément χ de module 1. Il contient aussi $\chi\bar{\chi} = 1$ et donc $\bar{\Gamma}_\infty(\mu) = \bar{\Gamma}(\mu)$. On est dans le cas où $\overline{\lim} |\hat{\mu}(\gamma)| = 1$. Et inversement si μ est une mesure de Dirichlet, l'argument du lemme 6 montre que $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un élément de module 1.

b) Ou bien $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ ne contient aucun élément de module 1. En particulier $\bar{\Gamma}_\infty(\mu) \cap \Gamma(\mu) = \emptyset$. C'est le cas où μ est une mesure pleine.

(3.2.1) Avant d'aller plus il est utile de remarquer que la famille des $\bar{\Gamma}(\mu)$ (resp. $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$) lorsque μ décrit $M(G)$, constitue, de façon naturelle, un système projectif.

<u>Lemme 7</u> : Soient μ, $\nu \in M(G)$ telles que $\nu \ll \mu$. L'application naturelle de $L^\infty(\mu)$ sur $L^\infty(\nu)$ est un homomorphisme continu et surjectif de $\bar{\Gamma}(\mu)$ (resp. $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$) sur $\bar{\Gamma}(\nu)$ (resp. $\bar{\Gamma}_\infty(\nu)$).

<u>Démonstration</u> : Toute fonction borélienne essentiellement bornée μ-pp est aussi essentiellement bornée ν-pp. Il existe donc une application naturelle p de $L^\infty(\mu)$ dans $L^\infty(\nu)$ qui est surjective ; elle est continue pour les topologies $*$-faibles car $L(\nu) \subset L(\mu)$. L'image de $\bar{\Gamma}(\mu)$ (resp. $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$) est donc clairement contenue dans $\bar{\Gamma}(\nu)$ (resp. $\bar{\Gamma}_\infty(\nu)$). Inversement, soit $\chi \in \bar{\Gamma}(\nu)$ et γ_j une suite généralisée de caractères du groupe, tendant vers χ dans $\bar{\Gamma}(\nu)$. Soit ϕ une valeur d'adhérence de γ_j dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. L'image de ϕ par p n'est autre que χ (ce qu'on écrira plus simplement : $\phi = \chi$ ν-pp). Si l'on part de $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\nu)$ on peut supposer que γ_j tend vers l'infini dans Γ et donc $\phi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

(3.2.4) Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ notons $A(\mu)$ l'ensemble des <u>valeurs d'adhérence de</u> $\hat{\mu}(\gamma)$ lorsque γ tend vers l'infini dans Γ.

<u>Lemme 8</u> : Soit $\mu \in M(G)$

a) $A(\mu)$ est l'ensemble des valeurs de $\int \chi \, d\mu$ lorsque χ décrit $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

b) Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$, $A(\chi\mu) \subset A(\mu)$.

c) Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$, $(\chi\mu)\hat{}(\Gamma) \subset A(\mu)$.

<u>Démonstration</u> : La vérification de (a) est immédiate. (b) et (c) résultent de (a) et de la proposition 4.

4 - <u>Le théorème des idempotents</u>

4.1 - <u>Mesures dont la transformée de Fourier ne prend qu'un nombre fini de valeurs</u>

Une mesure $\mu \in M(G)$ est <u>idempotente</u> pour la convolution si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est à valeurs 0,1. Plus généralement nous pouvons considérer les mesures $\mu \in M(G)$ telles que $\hat{\mu}(\Gamma)$ soit fini. Il est facile de voir d'ailleurs, que ce sont des combinaisons linéaires finies de mesures idempotentes.

Supposons que $\hat{\mu}$ prenne les valeurs complexes distinctes $a_1, \ldots, a_n$. Pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$, soit $P_j(z)$ un polynôme tel que $P_j(a_k) = \delta_{jk}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$; on vérifie aussitôt que la mesure $\nu_j = P_j(\mu)$ est idempotente. On a clairement $\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_j \hat{\nu}_j(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, et donc $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \nu_j$.

Lemme 9 : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\Gamma)$ soit fini. Alors $\bar{\Gamma}(\mu)$ est discret pour la topologie forte.

Démonstration : Soit d la plus petite distance de deux éléments distincts de $\hat{\mu}(\Gamma)$. Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$ on a $(\chi\mu)\hat{}(\Gamma) \subset \hat{\mu}(\Gamma)$ (3.1.4). Soient χ et χ' deux éléments distincts de $\bar{\Gamma}(\mu)$. Les mesures $\chi\mu$ et $\chi'\mu$ étant distinctes, il existe au moins un caractère γ_0 pour lequel $(\chi\mu)\hat{}(\gamma_0) \neq (\chi'\mu)\hat{}(\gamma_0)$. On aura donc

$$0 < d \leqslant \left| \int \chi\gamma_0 \, d\mu - \int \chi'\gamma_0 \, d\mu \right| \leqslant \int |\chi - \chi'| \, d|\mu|$$

ce qui démontre la propriété.

(4.1.1) Remarque : Il résulte immédiatement du lemme 9 que $\Gamma(\mu)$ étant discret, est topologiquement isomorphe à $\Gamma/H^{\perp}$ et que H, groupe-support de μ, est compact.

4.2 - Mesures élémentaires

Considérons une mesure μ concentrée sur un sous-groupe compact H de G. Sa transformée de Fourier est constante sur les classes modulo $H^{\perp}$. Si $\hat{\mu}$ est nulle sauf sur un nombre fini de classes, on a affaire à une mesure du type précédent particulièrement simple. Supposons que $\hat{\mu}$ prenne les valeurs $a_1, \ldots, a_n$ non nulles sur les classes

$\gamma_1 H^{\perp}, \ldots, \gamma_n H^{\perp}$ distinctes. On vérifie aussitôt l'identité

$$\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_j \hat{m}_H(\gamma_j \gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

d'où

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j m_H \tag{4.2.1}$$

(4.2.2) Une mesure de la forme (4.2.1) sera dite mesure <u>élémentaire</u>.

(4.2.3) <u>Remarque</u> : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\Gamma)$ soit fini. Dans quel cas μ sera-telle une mesure élémentaire ? C'est évidemment le cas si le groupe-support H est fini ; on a alors trivialement

$$\bar{\Gamma}(\mu) = \Gamma(\mu) = \Gamma/H^{\perp} .$$

Si le groupe H n'est pas fini, il est équivalent de dire que μ est élémentaire ou que μ est dans $M_o(H)$, ou encore que

$$\bar{\Gamma}(\mu) = \Gamma(\mu) \cup \{0\} = (\Gamma/H^{\perp}) \cup \{0\}$$

compte-tenu de la proposition 3 et de la remarque (4.1.1).

4.3 - <u>Description de $\bar{\Gamma}(\mu)$</u>

Dans le cas général d'une mesure $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\Gamma)$ soit fini, on peut décrire complètement la structure du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$.

<u>Théorème 1</u> : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\Gamma)$ soit fini.

a) Tout élément de $\bar{\Gamma}(\mu)$ est de module idempotent.

b) Tout élément de $\bar{\Gamma}(\mu)_+$ est idempotent et $\bar{\Gamma}(\mu)_+$ est fini.

c) Tout élément de $\bar{\Gamma}(\mu)$ est de la forme $\chi = h\gamma$, où h est un élément idempotent de $\bar{\Gamma}(\mu)$ et $\gamma \in \Gamma$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$. La suite $|\chi|^{2n}$, $n \geqslant 1$, est une suite d'éléments positifs de $\bar{\Gamma}(\mu)$, décroissante et convergente (μ-presque-partout et a fortiori) pour la topologie forte vers un élément $h \in \bar{\Gamma}(\mu)$ qui sera tel que $h^2 = h$. D'après le lemme 9, nécessairement $|\chi|^{2n} = h$ à partir d'un certain rang, ce qui n'est possible que si $|\chi| = h$.

Ceci démontre (a).

$\overline{\Gamma}(\mu)_+$ est à la fois faiblement compact et fortement discret (lemme 9) ; de plus il est constitué d'éléments idempotents d'après (a). Or sur l'ensemble des éléments idempotents de $\overline{\Gamma}(\mu)$ les topologies faible et forte coïncident (chap. I, lemme 8). $\overline{\Gamma}(\mu)_+$ est donc fini.

Soit h un élément idempotent de $\overline{\Gamma}(\mu)$. Tout élément $\chi \in \overline{\Gamma}(\mu)$ tel que $|\chi| = h$ est limite faible d'une suite généralisée γ_j d'éléments de Γ. Mais on a aussi $\chi = h\chi = \lim h\gamma_j$. Donc l'ensemble des éléments de la forme $h\gamma$ avec $\gamma \in \Gamma$, est faiblement dense dans l'ensemble des éléments $\chi \in \overline{\Gamma}(\mu)$ de module $|\chi| = h$, sur lequel topologies faible et forte coïncident (chap. I, lemme 7). La topologie (forte) étant discrète (lemme 9), les deux ensembles coïncident. Ceci prouve (c).

(4.3.1) Remarque : Le théorème 1 nous dit que $\overline{\Gamma}(\mu)$ est réunion finie des groupes $h\Gamma(\mu)$ correspondant à tous les éléments idempotents h de $\overline{\Gamma}(\mu)$. Si on se réfère à (4.2.3), le cas d'une mesure élémentaire est celui où les seuls idempotents de $\overline{\Gamma}(\mu)$ sont 1 et (éventuellement) 0.

4.4 - Le théorème des idempotents

A partir du théorème 1, il n'est pas difficile d'établir le résultat suivant connu sous le nom de "théorème des idempotents"(cf [5]).

Théorème 2 (P.J. COHEN, H. HELSON, W. RUDIN) : Toute mesure $\mu \in M(G)$ dont la transformée de Fourier ne prend qu'un nombre fini de valeurs est une somme finie de mesures élémentaires, deux à deux étrangères.

Démonstration : On se ramène au cas des mesures dont la transformée de Fourier est à valeurs entières (cf (4.1)). Soit $\mu \neq 0$ une telle mesure. Soit h un élément non nul minimal dans $\overline{\Gamma}(\mu)_+$. Un tel élément existe puisque $\overline{\Gamma}(\mu)_+$ est fini et contient 1, et il est idempotent (th 1). Montrons que la mesure $\nu = h\mu$ est élémentaire.

Tout d'abord $\hat{\nu}$ est à valeurs entières car $(h\mu)\hat{}(\Gamma) \subset \hat{\mu}(\Gamma)$ (cf (3.1.5)). D'autre part, quelque soit $\phi \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$, on a $\phi h \leqslant h$ et la minimalité de h implique que ϕh est, soit nul, soit égal à h ; autrement dit, ou bien $\phi = 0$ ν-pp, ou bien $\phi = 1$ ν-pp. Or on sait que $\bar{\Gamma}(\nu)$ est l'image de $\bar{\Gamma}(\mu)$ par l'application naturelle de $L^\infty(\mu)$ sur $L^\infty(\nu)$. Au vu du th.1 les idempotents de $\bar{\Gamma}(\nu)$ sont les images de ceux de $\bar{\Gamma}(\mu)$ par cette application. Les seuls idempotents possibles de $\bar{\Gamma}(\nu)$ sont donc 0 et 1, et ν est élémentaire d'après (4.3.1).

Dans le cas où $\mu \neq \nu$, on peut appliquer le raisonnement précédent à la mesure $\mu-\nu$ dont la transformée de Fourier est encore à valeurs entières. Puisque $\nu \neq 0$, $|\hat{\nu}|$ prend des valeurs $\geqslant 1$ et, nécessairement, $\|\nu\| \geqslant 1$. Comme $\nu \perp \mu-\nu$ il en résulte que $\|\mu-\nu\| \leqslant \|\mu\|-1$ et ainsi on est assuré de conclure au bout d'un nombre fini d'étapes.

(4.4.1) Remarque : L'argument de minimalité utilisé pour démontrer le théorème 2, est important et sera repris souvent par la suite. Mais on peut remarquer que la récurrence n'est pas indispensable et qu'il est possible de décrire explicitement, à partir du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$, une décomposition de μ en mesures élémentaires. A tout $h \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$ on associe la mesure

$$\mu_h = (h - \sup_{\phi<h} \phi)\mu = \prod_{\phi<h} (h-\phi)\mu \quad .$$

où ϕ varie dans $\bar{\Gamma}(\mu)_+$. Chaque mesure μ_h est combinaison à coefficients entiers de mesures $\phi\mu$, $\phi \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$, et par suite, $\hat{\mu}_h$ est à valeurs entières. D'autre part, quelque soit $\phi \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$ on a, ou bien $\phi = 0$ μ_h-pp, ou bien $\phi = 1$ μ_h-pp ; ceci prouve, comme dans la démonstration précédente, que μ_h est élémentaire. Enfin il est clair que les mesures μ_h sont deux à deux étrangères et que μ est la somme des μ_h , $h \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$.

Note : La démonstration par minimalité s'apparente à celle de [8].

5 - Le théorème des idempotents à l'infini et extension

5.1 - On rappelle que, pour $\mu \in M(G)$, on note $A(\mu)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence à l'infini de $\hat{\mu}(\gamma)$. Il suffit d'apporter de légères modifications aux arguments de (4) pour caractériser les mesures pour lesquelles $A(\mu)$ est fini. L'idée est de remplacer dans les raisonnements $\bar{\Gamma}(\mu)$ par $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. On va voir que les démonstrations s'adaptent ainsi à simple lecture. La seule propriété supplémentaire qu'on utilisera sera la proposition 4. Tout d'abord le lemme 9 sera remplacé par le suivant.

Lemme 10 : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu)$ soit fini. Alors $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est discret pour la topologie forte.

Démonstration : Soit d la plus petite distance de deux éléments distincts de $A(\mu)$. Soient χ et χ' deux éléments distincts de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. Les mesures $\chi\mu$ et $\chi'\mu$ étant distinctes, il existe au moins un caractère $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $(\chi\mu)^\wedge(\gamma_0) \neq (\chi'\mu)^\wedge(\gamma_0)$. Compte tenu du lemme 8 (c), on en conclut que

$$d \leqslant |(\chi\mu)^\wedge(\gamma_0)-(\chi'\mu)^\wedge(\gamma_0)| \leqslant \int |\chi-\chi'| \, d|\mu|$$

ce qui démontre le lemme 10.

Théorème 3 : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu)$ soit fini.

a) Tout élément de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est de module idempotent.

b) Tout élément de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)_+$ est idempotent et $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)_+$ est fini.

c) Tout élément de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est de la forme $\chi = h\gamma$, où h est un idempotent de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ et $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration : C'est exactement la même que celle du théorème 1 où l'on remplace $\bar{\Gamma}(\mu)$ par $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ et le lemme 9 par le lemme 10. On utilise le fait que si $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$, il en est de même de $|\chi|^2$ (prop. 4).

(5.1.1) Remarque : Si on tient compte du fait que les éléments de $\overline{\Gamma}(\mu)$ qui ne sont pas dans $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ sont nécessairement dans $\Gamma(\mu)$ et de module 1 (et qu'en particulier 1 est le seul élément positif de $\overline{\Gamma}(\mu)$ qui peut ne pas être dans $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$), on pourrait très bien énoncer le théorème 3 avec $\overline{\Gamma}(\mu)$ au lieu de $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$. En fait $\overline{\Gamma}(\mu)$ a exactement la même structure que précédemment.

Théorème 4 : Toute mesure $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu)$ soit fini, est une somme finie de mesures élémentaires et d'une mesure de $M_o(G)$, deux à deux étrangères.

Démonstration : On adapte la démonstration du théorème 2. On peut se ramener comme auparavant au cas où $A(\mu) \subset \mathbb{Z}$. Il suffit seulement de prouver que si $\mu \notin M_o(G)$, elle a une partie élémentaire non nulle. Or on sait que, dans ce cas, $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)_+$ a un élément non nul (cor. prop. 4) ; comme il est fini il possède au moins un élément non nul minimal h idempotent (th 3 (b)). On peut remarquer que h est également non nul minimal dans $\overline{\Gamma}(\mu)_+$. Comme $(h\mu)\hat{}(\Gamma) \subset A(\mu)$ (lemme 8 (c)) l'argument du théorème 2 montre que la mesure $\nu = h\mu$ est élémentaire.

Dans le cas où $\mu-\nu \notin M_o(G)$ on peut lui appliquer le même raisonnement. Les mesures que l'on construit successivement sont deux à deux étrangères. Comme dans le théorème 2, on est assuré, au bout d'un nombre fini d'étapes, d'obtenir une mesure de $M_o(G)$.

Corollaire : Toute mesure $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu)$ soit fini, peut s'écrire

$$\mu = \nu+\sigma \qquad\qquad (\nu \perp \sigma)$$

où ν est une mesure dont la transformée de Fourier est à valeurs dans $A(\mu)$ et σ est une mesure de $M_o(G)$.

5.2 - Une extension des théorèmes 3 et 4

Les résultats de (5.1) reposent essentiellement sur le fait que $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est un idéal du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$. On peut sans grand effort, en donner l'extension suivante qu'on pourra utiliser dans d'autres contextes (on verra plus loin des exemples).

(5.4.1) Soit $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de $\bar{\Gamma}(\mu)$. Pour toute mesure $\nu \ll \mu$ on note $A(\nu,\mathfrak{J})$ l'ensemble des valeurs $\int \chi \, d\nu$ lorsque χ décrit $\mathfrak{J}$.

Lemme 11 : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu,\mathfrak{J})$ soit fini. Alors $\mathfrak{J}$ est discret pour la topologie forte.

Démonstration : De la propriété d'idéal résulte immédiatement que, pour tout $\chi \in \mathfrak{J}$, $(\chi\mu)\hat{}(\Gamma) \subset A(\mu,\mathfrak{J})$. Avec cette remarque la démonstration est la même que celle du lemme 10.

Théorème 5 : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu,\mathfrak{J})$ soit fini.

a) Tout élément de $\mathfrak{J}$ est de module idempotent.

b) Tout élément de $\mathfrak{J}_+$ est idempotent et $\mathfrak{J}_+$ est fini.

c) Tout élément de $\mathfrak{J}$ est de la forme $\chi = h\gamma$, où h est un idempotent de $\mathfrak{J}$ et $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration : C'est la même que celle du théorème 3. Ici encore on utilise le fait que si χ appartient à $\mathfrak{J}$, il en est de même de $|\chi|^2 = \chi\bar{\chi}$.

Théorème 6 : Toute mesure $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu,\mathfrak{J})$ soit fini, est une somme finie de mesures élémentaires et d'une mesure ν telle que $A(\nu,\mathfrak{J}) = \{0\}$, deux à deux étrangères.

Démonstration : On peut suivre la ligne de démonstration du théorème 4. Il suffit de prouver que si $A(\mu,\mathfrak{J}) \neq \{0\}$, μ a une partie élémentaire non nulle. Pour commencer on remarque que si $A(\mu,\mathfrak{J}) \neq \{0\}$, $\mathfrak{J}$ contient un élément $\chi \neq 0$ et que donc $\mathfrak{J}_+$ contient $\chi\bar{\chi} = |\chi|^2 \neq 0$.

D'autre part, si h est un élément minimal (idempotent) non nul dans $\mathfrak{J}_+$ il a la même propriété dans $\bar{\Gamma}(\mu)_+$ car tout élément positif $\phi \leqslant h$ est tel que $\phi = \phi h$ et appartient nécessairement à $\mathfrak{J}_+$. Le reste de la démonstration est identique et laissé au lecteur.

6 - Le lemme de Rajchman et ses extensions

6.1 - Le cas d'un groupe ordonné

Supposons que Γ soit un groupe ordonné (cf [5] chap. 8). Désignons par Γ^+ le semi-groupe des éléments positifs. $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ avec $\Gamma^- = (\Gamma^+)^{-1}$ et $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \{1\}$.

(6.1.1) Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ on notera $A^+(\mu)$ (resp. $A^-(\mu)$) l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\hat{\mu}(\gamma)$ lorsque γ tend vers l'infini avec $\gamma \in \Gamma^+$ (resp. $\gamma \in \Gamma^-$).

(6.1.2) De même on conviendra de noter $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ (resp. $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$) l'ensemble des éléments de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ qui sont adhérents à Γ^+ (resp. Γ^-).

(6.1.3) On vérifie immédiatement que $A^+(\mu)$ (resp. $A^-(\mu)$) est aussi l'ensemble des valeurs $\int \chi \, d\mu$ lorsque χ décrit $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ (resp. $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$).

Pour une transformée de Fourier-Stieltjes les propriétés à l'infini dans Γ^+ et dans Γ^- ne sont pas indépendantes. Le résultat le plus simple à ce sujet est le suivant.

Proposition 6 (Γ ordonné) : Soit $\mu \in M(G)$.

a) Les éléments positifs de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ appartiennent à la fois à $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ et à $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$.

b) $A^+(\mu) \cap A^-(\mu) \neq \emptyset$.

Démonstration : En effet, soit $\phi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)_+$. ϕ est limite dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ d'une suite généralisée de caractères γ_j tendant vers l'infini dans

Γ ; mais il est également limite de $\bar{\gamma}_j = \gamma_j^{-1}$. Ceci démontre (a). Le semi-groupe $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ n'est pas vide. Si $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ on a aussi $|\chi|^2 = \chi\bar{\chi} \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ et l'on déduit (b) de (a) compte-tenu de la remarque (6.1.3).

(6.1.4) Exercice : On peut donner des exemples de groupe ordonné Γ et de mesure $\mu \notin M_0(G)$ telle que $A^+(\mu) \cap A^-(\mu) = \{0\}$ (ce qui montre que la proposition 6 ne peut pas être améliorée en général).

Soient α et β deux nombres réels tels que α/β soit irrationnel. Le semi-groupe de $\mathbb{Z}^2$ des couples (m,n) tels que $\alpha m + \beta n \geqslant 0$ définit un ordre sur $\mathbb{Z}^2$. Partant d'une mesure $\nu \in M(\mathbb{R})$ on lui associe la mesure $\mu \in M(\mathbb{T})$ telle que $\hat{\mu}((m,n)) = \hat{\nu}(\alpha m + \beta m)$, $m,n \in \mathbb{Z}$. On peut montrer facilement que $A(\mu) = \overline{\nu(\mathbb{R})}$, $A^+(\mu) = \overline{\hat{\nu}(\mathbb{R}^+)}$, $A^-(\mu) = \overline{\hat{\nu}(\mathbb{R}^-)}$.
Par un choix convenable de ν on peut avoir le résultat annoncé. On peut même faire en sorte que $A(\mu)$ soit un intervalle par exemple.

6.2 - Le cas de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$

Dans la situation classique de $\Gamma = \mathbb{Z}$ ou $\Gamma = \mathbb{R}$, il est clair que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $A^+(\gamma\mu) = A^+(\mu)$ et $A^-(\gamma\mu) = A^-(\mu)$ puisque $\gamma\mu$ est une translatée de $\hat{\mu}$.

Supposons que $\mu \notin M_0(G)$ et soit ϕ un élément > 0 de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. Comme $\phi\mu \neq 0$ il existe au moins un $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\int \phi \, d(\gamma_0\mu) = (\phi\mu)\hat{}(\gamma_0) \neq 0$. Remplaçant μ par $\gamma_0\mu$, on peut donc supposer que $\int \phi \, d\mu \neq 0$. Or ϕ étant positif, est adhérent à la fois à Γ^+ et Γ^- ; donc $\int \phi \, d\mu$ appartient à $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$. En particulier, dans ce cas, $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ contient un élément non nul. On déduit de là aussitôt le résultat suivant connu sous le nom de "lemme de Rajchman".

Théorème 7 ($G = \mathbb{T}$, $\mathbb{R}$; $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$) : Pour une mesure $\mu \in M(G)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} \hat{\mu}(\gamma) = 0$

b) $\lim\limits_{\gamma\to-\infty} \hat{\mu}(\gamma) = 0$

c) $\mu \in M_0(G)$

On peut énoncer la version renforcée suivante du lemme de Rajchman.

<u>Théorème 8</u> ($G = \mathbb{T}, \mathbb{R}$; $\Gamma = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$) : Soit $\mu \in M(G)$.

a) $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ et $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$ sont des idéaux fermés du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$, qui contiennent les éléments positifs de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

b) Pour tout élément positif $\phi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$, $A^+(\mu) \cap A^-(\mu) \subset (\phi\mu)\hat{}\,(\Gamma)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\chi \in \overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$. Il existe une suite γ_j tendant vers $+\infty$ dans Γ et vers χ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\gamma_j$ tend vers $+\infty$ et vers $\gamma\chi$ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$; donc $\gamma\chi \in \overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$. On conclut que $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ est un idéal de $\bar{\Gamma}(\mu)$ comme dans la preuve de la proposition 4. Il en est de même de $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$. On sait déjà que $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu) \cap \overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$ contient les éléments positifs de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$; il contient donc l'idéal qu'ils engendrent.

Soit $\phi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)_+$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\phi\gamma$ appartient à $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu) \cap \overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$. $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ contient donc les valeurs de $\int \phi\gamma \, d\mu = (\phi\mu)\hat{}\,(\gamma)$, $(\gamma\in\Gamma)$. Ceci termine la démonstration du théorème.

On peut déduire du théorème 8 quelques conséquences intéressantes.

<u>Corollaire</u> ($G = \mathbb{T}, \mathbb{R}$; $\Gamma = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$) : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure de Dirichlet.

a) $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu) = \overline{\Gamma^-_\infty}(\mu) = \bar{\Gamma}_\infty(\mu) = \bar{\Gamma}(\mu)$

b) $A^+(\mu) = A^-(\mu) = A(\mu) = \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$

<u>Démonstration</u> : En effet si μ est une mesure de Dirichlet, 1 appartient à $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ et, comme élément positif, appartient aussi aux idéaux

$\overline{\Gamma^{+}_{\infty}}(\mu)$ et $\overline{\Gamma^{-}_{\infty}}(\mu)$, ce qui démontre le corollaire.

On peut appliquer le théorème 5 avec l'idéal $\mathfrak{J} = \overline{\Gamma^{+}_{\infty}}(\mu) \cap \overline{\Gamma^{-}_{\infty}}(\mu)$. Avec les notations de (5.2) on a $A(\mu,\mathfrak{J}) = A^{+}(\mu) \cap A^{-}(\mu)$. Si l'on suppose que $A^{+}(\mu) \cap A^{-}(\mu)$ est fini, le théorème 5 (b) nous permet d'affirmer que tout élément de $\mathfrak{J}$ est de module idempotent. Or quel que soit $\chi \in \overline{\Gamma}_{\infty}(\mu)$, $|\chi|^2$ étant positif, appartient à $\mathfrak{J}$; donc $|\chi|^2 = |\chi|$. Comme $|\chi| = 1$ là où $\chi \neq 0$, on peut écrire $\chi = |\chi|\ \chi$ ce qui prouve que χ est dans $\mathfrak{J}$. En conclusion l'idéal $\mathfrak{J}$ est égal à $\overline{\Gamma}_{\infty}(\mu)$ tout entier. On a ainsi établi le résultat suivant.

<u>Théorème 9</u> ($G = \mathbb{T}, \mathbb{R}$; $\Gamma = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$) : Soit $\mu \in M(G)$ telle que $A^{+}(\mu) \cap A^{-}(\mu)$ soit fini. Alors

a) $\overline{\Gamma^{+}_{\infty}}(\mu) = \overline{\Gamma^{-}_{\infty}}(\mu) = \overline{\Gamma}_{\infty}(\mu)$;

b) $A^{+}(\mu) = A^{-}(\mu) = A(\mu)$;

c) la mesure μ est une somme finie de mesures élémentaires et d'une mesure de $M_{o}(G)$, deux à deux étrangères.

La conclusion (c) est surtout intéressante quand $\Gamma = \mathbb{Z}$ et peut être obtenue via le théorème 4 ou le théorème 5. Elle contient un cas particulier du théorème des "semi-idempotents" de KESSLER dont on reparle plus loin.

6.3 - <u>Une extension du lemme de Rajchman</u> (Γ ordonné archimédien)

En reprenant l'exercice (6.1.4) par exemple, il est facile de se convaincre que le lemme de Rajchman n'est pas valable en général pour un groupe ordonné, même archimédien (ce qui est le cas en (6.1.4)). On sait (cf [5] p. 196) que si Γ est un groupe ordonné archimédien, ou bien $\Gamma = \mathbb{R}$, ou bien Γ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète et de l'ordre naturel. Dans ce cas on peut donner des résultats de (6.2) l'extension naturelle suivante.

(6.3.1) Notations : pour ne pas multiplier à l'excès les notations nous préférons, uniquement pour les besoins de la partie (6.3), modifier un peu les définitions antérieures : $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ désignera ici les éléments de $\bar{\Gamma}(\mu)$ qui sont limites de suites généralisées γ_j d'éléments de Γ, tendant vers l'infini dans $\mathbb{R}$ (autrement dit pour la topologie de l'ordre). On modifie de même les définitions de $\overline{\Gamma_\infty^+}(\mu)$, $\overline{\Gamma_\infty^-}(\mu)$, $A(\mu)$, $A^+(\mu)$, $A^-(\mu)$.

(6.3.2) Remarque : Avec les modifications de notations précédentes, le théorème 8 reste valable pour un groupe Γ ordonné archimédien quelconque. La démonstration est tout à fait identique.

On a de même l'analogue du théorème 9. $M_o(G)$ est remplacé ici par la classe des mesures μ telles que $A(\mu) = \{0\}$.

Théorème 10 (Γ ordonné archimédien) : Avec les notations (6.3.1), soit $\mu \in M(G)$ telle que $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ soit fini. Alors

a) $\overline{\Gamma_\infty^+}(\mu) = \overline{\Gamma_\infty^-}(\mu) = \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$

b) $A^+(\mu) = A^-(\mu) = A(\mu)$

c) La mesure μ est somme finie de mesures élémentaires et d'une mesure dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini pour la topologie de l'ordre, ces mesures étant deux à deux étrangères.

6.4 - Autre extension : les ensembles de Rajchman (Γ métrisable) (*)

On ne suppose plus que Γ est un groupe ordonné. On s'intéresse aux parties E de Γ pour lesquelles la propriété suivante est vraie, pour $\mu \in M(G)$:

(*) Cette restriction n'est pas essentielle suivant une remarque de R. LYONS [7] p. 223.

(6.4.1) $$\lim_{\substack{\gamma\to\infty \\ \gamma\in\Gamma\setminus E}} \hat{\mu}(\gamma) = 0 \Longrightarrow \lim_{\substack{\gamma\to\infty \\ \gamma\in E}} \hat{\mu}(\gamma) = 0$$

Les ensembles E qui possèdent cette propriété sont, en quelque sorte, les ensembles négligeables pour ce qui est de l'appartenance d'une mesure μ à la classe $M_o(G)$. On les appelle plus loin "ensembles de Rajchman". Il n'est pas difficile d'en donner des exemples, et même de les caractériser.

(6.4.2) Exercice : Soit E une partie de Γ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $E \cap \gamma E^{-1}$ soit compact. Alors E est un ensemble de Rajchman.

Démonstration : Supposons qu'il existe $\mu \notin M_o(G)$ avec cependant

(6.4.3) $$\lim_{\substack{\gamma\to\infty \\ \gamma\in\Gamma\setminus E}} \hat{\mu}(\gamma) = 0 \quad .$$

Il existe nécessairement une suite γ_j d'éléments de E, tendant vers l'infini dans Γ et telle que $\lim \hat{\mu}(\gamma_j) = c \neq 0$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ vers un élément χ qui est non nul puisque $\int \chi \, d\mu = c$. On a aussi $\bar{\chi} \neq 0$. Il existe donc au moins un γ_o tel que

$$(\bar{\chi}\mu)\hat{}\,(\gamma_o) = \int \gamma_o \bar{\chi} \, d\mu \neq 0$$

et comme

$$\int \gamma_o \bar{\chi} \, d\mu = \lim \int \gamma_o \bar{\gamma}_j \, d\mu$$

Ceci prouve que $\gamma_o \bar{\gamma}_j$ tombe dans E à partir d'un certain rang. C'est impossible à cause de l'hypothèse faite sur E, ce qui démontre le théorème.

(6.4.4) Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$ tout cône saillant vérifie l'hypothèse du théorème 11.

L'exercice précédent montre que si un ensemble E n'est pas de Rajchman il doit posséder une certaine symétrie et pouvoir contenir en même temps qu'une suite γ_j, une translatée de γ_j^{-1}. On peut beaucoup perfectionner cet argument et montrer que E doit aussi avoir une structure multiplicative assez riche.

Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ et tout $\varepsilon > 0$, on note

$$E(\mu,\varepsilon) = \{\gamma;\gamma \in \Gamma,\ |\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon\} .$$

Théorème 11 : Soit une mesure $\mu \notin M_0(G)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on peut trouver $\varepsilon > 0$, $\gamma_0 \in \Gamma$ et une suite θ_j tendant vers l'infini dans Γ, telle que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne tous les produits

$$\gamma_0\ \theta_{j_1}^{\varepsilon_1}\ldots\theta_{j_n}^{\varepsilon_1} \qquad (j_1 < \ldots < j_n,\ \varepsilon_1 = \pm 1,\ldots,\varepsilon_n = \pm 1)$$

Démonstration : $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un élément $\phi > 0$ (cor. prop. 4). On peut trouver une suite θ_j tendant vers l'infini dans Γ et vers ϕ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$, telle que

$$\phi^n = \lim_{j_1<\ldots<j_n} \theta_{j_1}^{\varepsilon_1}\ldots\theta_{j_n}^{\varepsilon_n}$$

pour tout choix de $\varepsilon_1 = \pm 1,\ldots,\varepsilon_n = \pm 1$ (chap. I (4.2.7)). On peut supposer (quitte à remplacer θ_j par une sous-suite) que cette suite multiple tend vers l'infini dans Γ.

Pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, comme $\phi^n \neq 0$, il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\int \gamma_0 \phi^n d\mu| > \varepsilon$. Le voisinage de $\gamma_0\phi^n$ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ défini par $|\int \chi\ d\mu| > \varepsilon$, $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$, contient tous les produits

(6.4.5) $$\gamma_0\theta_{j_1}^{\varepsilon_1}\ldots\theta_{j_n}^{\varepsilon_n} \qquad (j_1 < \ldots < j_n,\ \varepsilon_1 = \pm 1,\ldots\varepsilon_n = \pm 1)$$

dès que j_1 est assez grand, ce qui démontre le théorème 11. (En utilisant le procédé diagonal, on pourrait trouver une même suite θ_j pour toutes les valeurs de n ; mais γ_0 et ε dépendent de n).

(6.4.6) Si l'on considère une mesure $\mu \notin M_0(G)$ et une partie E de Γ vérifiant la propriété (6.4.3), on peut compléter l'argument du théorème 11 en remarquant que nécessairement tous les produits (6.4.5) tombent dans E à partir d'un certain rang. Par conséquent toute partie de Γ qui est "arithmétiquement trop pauvre" pour contenir tous ces produits (pour un certain entier $n \geqslant 1$ et quelle que soit la suite θ_j) est un ensemble de Rajchman. Ce critère utile dans la pratique, ne sera pas énoncé car on va voir qu'il peut être facilement renforcé en utilisant la remarque suivante que l'on trouve dans [2] (et où la structure de groupe ne joue aucun rôle).

Lemme 12 : Soit $\phi \in L^\infty(\mu)$, $0 \leqslant \phi \leqslant 1$. Quel que soit $\Psi_0 \in L^\infty(\mu)$, ou bien $\int \phi^n \Psi_0 d\mu = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$, ou bien l'ensemble Λ des entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $\int \phi^n \Psi_0 d\mu = 0$ est tel que $\sum_{n \in \Lambda} 1/n < +\infty$.

Démonstration : La fonction $f(z) = \int \phi^z \Psi_0 \, d\mu$ est analytique bornée dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ et non identiquement nulle. Le lemme découle directement de la formule de Jensen.

Il est clair que la conclusion du lemme reste valable si l'on considère simultanément un nombre fini de fonctions Ψ_0.

Reprenons l'hypothèse (6.4.3) et l'argument du théorème 11 mais au lieu de considérer ϕ^n avec n fixé, introduisons l'ensemble V des caractères $\gamma \in \Gamma$ pour lesquels $\int \gamma \, \phi^n d\mu \neq 0$ pour au moins un $n \geqslant 1$. Il découle du lemme que, pour toute partie finie A de V on peut trouver une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ tels que

$$\int \gamma \, \phi^n \, d\mu \neq 0 \qquad (\gamma \in A) \ .$$

Partant d'un élément γ_0 de V et d'un entier n_0 tel que $\int \gamma_0 \phi^{n_0} d\mu \neq 0$ on peut trouver n_1 tel qu'on ait aussi

$$\int \gamma_0 \, \phi^{n_0+n_1} d\mu = \int \gamma_0 \, \phi^{n_0} \phi^{n_1} d\mu \neq 0$$

et on peut choisir $j_1 < \ldots < j_{n_0}$ assez grands pour que, non seulement E contienne

$$\gamma_0 \theta_{j_1}^{\varepsilon_1} \ldots \theta_{j_{n_0}}^{\varepsilon_{n_0}} \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_{n_0} = \pm 1)$$

suivant la remarque (6.4.6), mais aussi pour que $\int \gamma_0 \theta_{j_1}^{\varepsilon_1} \ldots \theta_{j_{n_0}}^{\varepsilon_{n_0}} \phi^{n_1} d\mu \neq 0$

On peut ainsi poursuivre le raisonnement en considérant, au lieu de $\{\gamma_o\}$ l'ensemble fini

$$\{\gamma_o\} \cup \{\gamma_o \theta_{j_1}^{\varepsilon_1} \ldots \theta_{j_{n_o}}^{\varepsilon_{n_o}} \; ; \; \varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_{n_o} = \pm 1\}$$

qui est inclus dans V. Par récurrence on montre de cette façon que E contient tous les produits

$$\gamma_o \prod_{k=1}^{n} \Big(\prod_{j \in J_k} \theta^{\varepsilon_j} \Big)^{\varepsilon'_k} \qquad (n \geqslant 1) \tag{6.4.7}$$

pour tout choix des $\varepsilon_j = \pm 1$ et des $\varepsilon'_k = 0,1$ où les J_k sont des parties finies disjointes de $\mathbb{N}$, tendant vers l'infini. Nous passons sur les détails d'écriture. A strictement parler, E ne contient pas γ_o lui-même et pour que l'énoncé soit valable tel quel, il faut supposer que $\varepsilon'_1 = 1$, ou alors remplacer γ_o par $\gamma_o \prod_{j \in J_1} \theta_j$ et commencer le produit à k = 2. Si l'on pose

$$\theta'_k = \prod_{j \in J_k}^{n} \theta_j \qquad (k \geqslant 1)$$

E contient notamment tous les produits

$$\gamma_o \prod_{k=2}^{n} \theta'^{\varepsilon_k}_k \qquad (n \geqslant 2)$$

pour tout choix des $\varepsilon_k = 0, \pm 1$. C'est à priori, une propriété plus faible que la précédente mais qui permet d'énoncer, en sens inverse, le critère suivant dont on trouvera une preuve plus concise dans le chapitre VI.

<u>Théorème 12</u> (B. HOST et F. PARREAU [2]) : Soit E une partie de Γ ayant la propriété : quelle que soit la suite θ_j tendant vers l'infini, aucun translaté de E ne peut contenir tous les produits

$$\prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\varepsilon_j} \qquad (\varepsilon_j = 0, \pm 1, \; 1 \leqslant j \leqslant n \; ; \; n \geqslant 1)$$

Alors E est un ensemble de Rajchman.

(6.4.8) Note : Il s'avère que la condition du théorème 12 est également nécessaire dans le cas où Γ est discret, comme on le verra plus loin en (7.2). (Ainsi on n'a rien perdu d'essentiel en affaiblissant la propriété (6.4.7)).

Pour terminer cette partie, énonçons le résultat facile suivant qui est une extension des théorèmes 4 et 9 et illustre assez bien le fait que les ensembles de Rajchman sont négligeables pour la classe $M_o(G)$. Pour toute partie $E \subset \Gamma$ et toute mesure $\mu \in M(G)$, notons $A(\mu,E)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\hat{\mu}(\gamma)$ lorsque γ tend vers l'infini dans E.

Théorème 13 : Soit E le complémentaire d'un ensemble de Rajchman dans Γ. Toute mesure $\mu \in M(G)$ telle que $A(\mu,E)$ soit fini, est de la forme

$$\mu = \eta + \nu \qquad\qquad (\eta \perp \nu)$$

où η est une mesure telle que $\hat{\eta}(\Gamma) = A(\mu,E)$ et $\nu \in M_o(G)$.

Démonstration : On peut se ramener comme d'habitude au cas où $A(\mu,E) = \{0,1\}$. Dans ce cas on considère la mesure $\mu * \mu - \mu$ qui est telle que

$$\lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \gamma\in E}} (\mu * \mu - \mu)\hat{}\,(\gamma) = \lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \gamma\in E}} (\hat{\mu}(\gamma)^2 - \hat{\mu}(\gamma)) = 0 .$$

$\Gamma \setminus E$ étant de Rajchman, on en conclut que $\mu * \mu - \mu$ est dans $M_o(G)$ et que $A(\mu) = A(\mu,\Gamma) = \{0,1\}$. On applique alors le corollaire du théorème 4.

7 - L'exemple des produits de Riesz (G compact)

7.1. Rappels et notations

Les produits de Riesz constituent une classe très importante de mesures singulières sur lesquelles il est possible de faire des calculs explicites. Nous rappelons brièvement leur définition.

(7.1.1) Une partie $\Theta = \{\theta_j\}_{j\geq 1}$ de Γ est un <u>ensemble dissocié</u> si, pour tout $n \geq 1$ et tout choix de $\varepsilon_j = 0, \pm 1, \pm 2$ $(1 \leq j \leq n)$, la relation

$$\prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\varepsilon_j} = 1$$

implique $\theta_j^{\varepsilon_j} = 1$ $(1 \leq j \leq n)$. L'ensemble des éléments de Γ qui s'écrivent

$$\omega = \prod_{j\geq 1} \theta_j^{\varepsilon_j}$$

avec $\varepsilon_j = 0, \pm 1$ $(j \geq 1)$ et où $\varepsilon_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, admet une écriture unique dans le sens que les facteurs $\theta_j^{\varepsilon_j}$ sont uniquement déterminés (si aucun élément θ_j n'est d'ordre 2 les ε_j sont uniquement déterminés). Ces produits sont appelés les mots de $\Theta = \{\theta_j\}$ et les θ_j qui y figurent avec un exposant $\varepsilon_j \neq 0$ sont les <u>lettres</u> du mot et leur nombre la <u>longueur</u> du mot. L'ensemble des mots sera noté $\Omega = \Omega(\Theta)$ (même dans le cas où Θ n'est pas dissocié) et Ω_n désignera l'ensemble des mots écrits avec les lettres θ_j, $(1 \leq j \leq n)$.

(7.1.2) <u>Exercice</u> : Partant d'un ensemble infini quelconque $\{\theta_j\}$ dans Γ, on peut en extraire un sous-ensemble dissocié $\{\theta'_j\}$ sans élément d'ordre 2 si l'ensemble des carrés $\{\theta_j^2\}$ est infini. Sinon on peut en extraire un sous-ensemble infini pour lequel θ_j^2 est constant et $\{\bar{\theta}_{2j}\ \theta_{2j+1}\}$ contient alors un ensemble dissocié $\{\theta'_j\}$ dont tous les éléments sont d'ordre 2. (La preuve est laissée au lecteur). Dans les deux cas on aura $\Omega(\{\theta'_j\}) \subset \Omega(\{\theta_j\})$.

(7.1.3) Dans la suite $\Theta = \{\theta_j\}_{j\geq 1}$ est un ensemble dissocié qui, soit n'a <u>aucun</u> élément d'ordre 2, soit a <u>tous</u> ses éléments d'ordre 2. (Le plus souvent on peut se ramener à l'un de ces deux cas). Pour ne pas alourdir l'exposé on se contentera d'écrire les calculs dans le premier cas, le deuxième ne nécessitant que des modifications mineures.

(7.1.4) Dans le premier cas, soit $(a_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes tels que $|a_j|\leqslant 1/2$ $(j\geqslant 1)$. Pour tout $n\geqslant 1$

$$R_n = \prod_{1\leqslant j\leqslant n} (1+a_j\theta_j+\bar{a}_j\bar{\theta}_j)$$

est un polynôme trigonométrique positif et la suite de mesures $R_n = R_n.m_G$ converge vaguement vers une mesure de probabilité ρ dite <u>produit de Riesz</u> et notée

(7.1.5) $$\rho = \prod_{j\geqslant 1} (1+a_j\theta_j+\bar{a}_j\bar{\theta}_j).$$

La vérification est aisée : pour tout $n \geqslant 1$

$$\hat{R}_n(\omega) = \prod_{j=1}^{n} a_j^{(\varepsilon_j)} \qquad \text{si } \bar{\omega} = \prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\varepsilon_j}$$

$$\hat{R}_n(\gamma) = 0 \qquad \text{si } \gamma \notin \Omega_n$$

avec la convention que $a_j^{(1)} = a_j^{(-1)} = \bar{a}_j$, $a_j^{(0)} = 1$, $(j\geqslant 1)$. D'une part R_n est positive et $\hat{R}_n(1) = 1$; d'autre part il est clair que la suite $\hat{R}_n$ converge simplement puisque $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ et que

$$\hat{R}_{n+1}(\omega) = \hat{R}_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n).$$

La transformée de Fourier de ρ est telle que

$$\hat{\rho}(\omega) = \hat{R}_m(\omega) = \hat{R}_n(\omega) \qquad (\omega \in \Omega_n,\ m\geqslant n\geqslant 1).$$

Dans le deuxième cas où θ est constitué d'éléments d'ordre 2, il est naturel de prendre pour $(a_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de nombres réels tels que $|a_j| \leqslant 1$ et de définir ρ comme limite vague de $R_n.m_G$ où

$$R_n = \prod_{1\leqslant j\leqslant n} (1+a_j\theta_j)$$

On note de même

(7.1.6) $$\rho = \prod_{j\geqslant 1} (1+a_j\theta_j)$$

Dans les deux cas on peut écrire

$$(7.1.7) \qquad \hat{\rho}(\omega) = \prod_{j\geq 1} a_j^{(\varepsilon_j)} \qquad \text{si } \bar{\omega} = \prod_{j\geq 1} \theta_j^{\varepsilon_j}$$

pour toute suite $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, $(j\geq 1)$ où seuls un nombre fini de ε_j sont non nuls ; de plus

$$\hat{\rho}(\gamma) = 0 \qquad \text{si } \gamma \not\in \Omega .$$

Nous nous bornerons ici à faire quelques remarques sur les <u>produits de Riesz définis à l'aide d'une suite constante</u> $a_j = a$, $(j\geq 1)$ avec a réel $\neq 0$ que nous noterons ρ_a.

7.2 <u>Ensembles de Rajchman et produits de Riesz</u>

L'existence de la mesure ρ_a permet de vérifier que la propriété du théorème 12 est nécessaire pour qu'un ensemble soit de Rajchman, comme on l'a affirmé en (6.4.8), dans le cas où Γ est discret.

En effet si E est une partie de Γ qui contient $\gamma_o\Omega(\{\theta_j\})$ pour un $\gamma_o \in \Gamma$ et une suite θ_j tendant vers l'infini, on peut supposer, d'après (7.1.2) (quitte à remplacer θ_j par θ_j') que $\{\theta_j\}$ est dissocié. Alors la mesure $\bar{\gamma}_o\rho_a$ a sa transformée de Fourier nulle en dehors de E et $\bar{\gamma}_o\rho_a \not\in M_o(G)$ puisque $(\bar{\gamma}_o\rho_a)^{\wedge}(\gamma_o\theta_j) = \hat{\rho}_a(\theta_j) = a$, $j\geq 1$. Donc E n'est pas un ensemble de Rajchman.

7.3 - <u>Le semi-groupe $\overline{\Gamma_\infty}(\rho_a)$</u>

On va voir qu'on peut décrire complètement le semi-groupe $\overline{\Gamma_\infty}(\rho_a)$. On fait les démonstrations dans le cas où Θ n'a pas d'élément d'ordre 2.

<u>Proposition 7</u> : La suite θ_j converge dans $\bar{\Gamma}(\rho_a)$ vers la constante a.

<u>Démonstration</u> : Soit χ une valeur d'adhérence de θ_j dans $\bar{\Gamma}(\rho_a)$. Il existe une sous-suite θ_{j_ℓ} telle que, quels que soient les entiers $m\geq 0$ et $n\geq 0$ avec $m+n\geq 1$, on ait

$$\chi^m \bar{\chi}^n = \lim_{\ell_1 < \dots < \ell_{m+n}} \theta_{j_{\ell_1}} \dots \theta_{j_{\ell_m}} \bar{\theta}_{j_{\ell_{m+1}}} \dots \bar{\theta}_{j_{\ell_{m+n}}}$$

(cf chap. I (4.2.7)). Les produits en question sont des mots de $\{\theta_j\}$ de longueur m+n. On en déduit que

$$\int \chi^m \bar{\chi}^n d\rho_a = a^{m+n} .$$

Introduisons la mesure σ sur le disque unité du plan complexe, qui est l'image de ρ_a par χ (i.e. la loi de la variable aléatoire χ sur l'espace de probabilité (G,ρ_a)). La mesure σ est telle que

$$\int z^m \bar{z}^n \, d\sigma(z) = a^{m+n} \qquad (m \geq 0,\ n \geq 0) .$$

On en conclut que $\sigma = \delta_a$, ce qui se traduit par $\chi = a$ ρ_a-pp, ce qui démontre la proposition 7.

$\bar{\Gamma}_\infty(\rho_a)$ contient la constante a et donc toutes les constantes a^n, $(n \geq 1)$, ainsi que leur limite 0.

Proposition 8 : Tout élément non nul de $\bar{\Gamma}_\infty(\rho_a)$ est de la forme $\chi = a^n . \gamma$ où $\gamma \in \Gamma$ et $n \geq 1$.

Démonstration : Soit $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\rho_a)$, $\chi \neq 0$. Il existe au moins un $\gamma_o \in \Gamma$ tel que $\int \gamma_o \chi \, d\rho_a \neq 0$. Remplaçant χ par $\gamma_o \chi$ on se ramène au cas où $\int \chi \, d\rho_a \neq 0$. χ est nécessairement adhérent à Ω et, Ω étant dénombrable, il existe une suite ω_j de mots tendant vers l'infini dans Γ et convergeant vers χ dans $\bar{\Gamma}(\rho_a)$ (chap. I (4.3.2)). $\int \chi \, d\rho_a$ est une valeur d'adhérence à l'infini de $\hat{\rho}_a$. Or l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\hat{\rho}_a$ est $\{a^n\}_{n \geq 1} \cup \{0\}$. On a donc $\int \chi \, d\rho_a = a^p$ pour un entier $p \geq 1$ et

$$\lim_{j \to +\infty} \hat{\rho}_a(\omega_j) = \lim_{j \to +\infty} \int \omega_j \, d\rho_a = a^p .$$

A partir d'un certain rang, nécessairement $\hat{\rho}_a(\omega_j) = a^p$ ce qui prouve que les ω_j sont des mots de longueur p. Pour une sous-suite ω_{j_ℓ} on aura comme précédemment, pour $m \geq 0$, $n \geq 0$ et $m+n \geq 1$,

$$\chi^m \bar{\chi}^n = \lim_{\ell_1 < \dots < \ell_{m+n}} \omega_{j_{\ell_1}} \dots \omega_{j_{\ell_m}} \bar{\omega}_{j_{\ell_{m+1}}} \dots \bar{\omega}_{j_{\ell_{m+n}}} .$$

Mais ici les produits ne sont pas nécessairement des mots car deux ω_{j_ℓ} distincts peuvent avoir des lettres en commun. On fait alors la remarque contenue dans l'exercice suivant.

(7.3.1) <u>Exercice</u> : De toute suite ω_j de mots de longueur bornée, on peut extraire une sous-suite de la forme $\omega\omega'_j$ où ω est un mot fixé et les ω'_j sont des mots n'ayant aucune lettre en commun deux à deux, ni avec ω. La démonstration peut se résumer ainsi : ou bien on peut extraire de ω_j une sous-suite de mots qui n'ont deux à deux aucune lettre en commun, ou bien on peut en extraire une sous-suite de la forme $\theta_{j_o}^{\varepsilon_o} \cdot \omega'_j$ où θ_{j_o} est une lettre qui ne figure pas dans les mots ω'_j et $\varepsilon_o = \pm 1$. On obtient le résultat en itérant ce raisonnement, compte tenu du fait que les mots ω_j sont de longueur bornée.

On utilise (7.3.1) pour terminer la preuve de la proposition 8 : on remplace χ par $\bar{\omega}\chi$ et ω_j par ω'_j. On peut alors faire le même raisonnement que pour la proposition 7 ce qui nous donne $\bar{\omega}\chi = a^{p'}$ et $\chi = \omega\, a^{p'}$ où p' est la longueur des mots ω'_j.

(7.3.2) <u>Exemple</u> : Choisissons $a<0$. $\bar{\Gamma}_\infty(\rho_a)$ contient la constante a mais pas la constante $|a| = -a$. Ceci montre que le semi-groupe $\bar{\Gamma}(\rho_a)$ n'est pas stable pour le module, alors même que sa structure est très simple.

(7.3.3) <u>Remarque</u> : Les propositions 7 et 8 sont valables dans le cas où $\{\theta_j\}$ est constituée d'éléments d'ordre 2. Les démonstrations sont les mêmes si $|a| < 1$. Le cas $|a| = 1$ est en fait particulièrement simple. On peut noter qu'ici Ω est un groupe et si $a = 1$, ρ_a n'est autre que la mesure de Haar de $\Omega^\perp$; si $a = -1$, $\hat{\rho}_a$ ne prend que les valeurs 0, ± 1 et on vérifie aisément que ρ_a est une mesure élémentaire.

7.4 - Exemple de mesures à puissances de convolution orthogonales

La structure très particulière de $\overline{\Gamma}_\infty(\rho_a)$ a pour conséquences des propriétés remarquables de la mesure ρ_a, dont nous reparlerons. En particulier le résultat suivant est facile à établir.

Théorème 14 (G. BROWN et W. MORAN [1]) : (On suppose que $|a| < 1$ dans le cas où les éléments θ_j sont d'ordre 2). Quels que soient les entiers $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $p \neq q$, ρ_a^p est étrangère à toute translatée de ρ_a^q.

Démonstration : On peut remarquer d'abord que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la puissance de convolution ρ_a^p n'est autre que le produit de Riesz ρ_{a^p}. On le vérifie immédiatement sur les transformées de Fourier. Si $p \neq q$, on a $|a^p| \neq |a^q|$. Tout revient donc à démontrer que pour deux nombres réels, a,b avec $|a| \neq |b|$, et quel que soit $x_o \in G$, on a $\delta_{x_o} * \rho_a \perp \rho_b$.

Considérons la mesure $\omega = \delta_{x_o} * \rho_a + \rho_b$ et soit χ une valeur d'adhérence de la suite θ_j dans $\overline{\Gamma}(\omega)$. On a vu (Prop. 7) que θ_j tend vers la constante a dans la topologie $*$-faible de $L^\infty(\rho_a)$. On en déduit que la suite translatée $\theta_j(x+x_o)$ tend vers a dans la topologie $*$-faible de $L^\infty(\delta_{x_o} * \rho_a)$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\theta_j(x_o)$ tend vers un nombre complexe c de module 1. Alors la suite $\theta_j(x) = \overline{\theta}_j(x_o)\ \theta_j(x+x_o)$ converge vers la constante $\bar{c}\,a$ dans $\overline{\Gamma}(\delta_{x_o} * \rho_a)$. Comme d'autre part elle converge vers b dans $\overline{\Gamma}(\rho_b)$, on en conclut (cf lemme 7) que

$$\chi = \bar{c}\,a \qquad \delta_{x_o} * \rho_a - pp$$

$$\chi = b \qquad \rho_b - pp$$

Si $\delta_{x_o} * \rho_a$ n'était pas étrangère à ρ_b on devrait avoir $\bar{c}\,a = b$ et $|a| = |b|$, ce qui fournit une contradiction et termine la démonstration.

7.5 Compléments

Les produits de Riesz généraux ρ définis par (7.1.5) ou (7.1.6) à l'aide d'une suite (a_j) ont l'intérêt de fournir des exemples de mesures singulières dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini.

(7.5.1) ρ est dans $M_o(G)$ si et seulement si $\lim a_j = 0$. (C'est à peu près évident sur les formules (7.1.7)).

(7.5.2) ρ est dans $L^1(G)$ si et seulement si $\Sigma|a_j|^2 < +\infty$.

La question est traitée au chapitre IV-2. Bornons-nous à remarquer que la condition $\Sigma|a_j|^2 < +\infty$ est suffisante pour avoir ρ dans $L^1(G)$. En effet il résulte immédiatement de (7.1.7) qu'on a dans tous les cas

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\hat{\rho}(\gamma)|^2 = \sum_{\omega\in\Omega}|\hat{\rho}(\omega)|^2 \leqslant \prod_{j\geqslant 1}(1+2|a_j|^2) .$$

Les propositions 7 et 8 s'étendent à simple lecture comme suit.

(7.3.5) $\bar{\Gamma}_\infty(\rho)$ contient toute constante qui est une valeur d'adhérence de la suite (a_j).

(7.5.4) Avec l'hypothèse $\overline{\lim}|a_j| < 1$ (équivalente à $\overline{\lim}|\hat{\rho}(\gamma)| < 1$) tout élément de $\bar{\Gamma}_\infty(\rho)$ est de la forme $\chi = a\gamma$ où a est une valeur d'adhérence de $\hat{\rho}$ et $\gamma \in \Gamma$.

Nous n'envisagerons pas le cas où $\overline{\lim}|a_j| = 1$ (et où ρ est une mesure de Dirichlet). On sait alors (cf (7.3.3)) que le support de ρ n'est plus nécessairement (comme pour les produits de Riesz classiques sur le cercle) le groupe tout entier. Le résultat général suivant montre en tout cas que pour une mesure de Dirichlet μ, une telle propriété de support est incompatible avec la structure très particulière de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ décrite en (7.5.4).

Théorème 15 : (G. métrisable). Soit $\mu \in M(G)$ une mesure de Dirichlet qui n'est pas concentrée sur une classe modulo un sous-groupe fermé propre de G. Alors $\bar{\Gamma}(\mu)$ contient une fonction de module 1 qui n'est pas de la forme $c.\gamma$ avec c une constante de module 1 et $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration : Considérons le groupe $\bar{\Gamma}_1(\mu)$ des éléments de $\bar{\Gamma}(\mu)$ de module 1. $\bar{\Gamma}_1(\mu)$ sur lequel topologies faible et forte coïncident est un groupe topologique métrisable complet pour la topologie forte. Soit K le sous-groupe des fonctions constantes sur lequel la topologie de $\bar{\Gamma}(\mu)$ n'est autre que la topologie usuelle de $\mathbb{T}$; K est compact. Supposons que l'on ait $\bar{\Gamma}_1(\mu) = K.\Gamma(\mu)$. L'homomorphisme de $K \times \Gamma$ dans $K.\Gamma(\mu)$ qui à tout couple (c,γ) fait correspondre le produit $c.\gamma$ est continu et bijectif (il est injectif grâce à la condition de support sur μ).

G étant métrisable, $K \times \Gamma$ est σ-compact et $\bar{\Gamma}_1(\mu)$ est un espace de Baire. Il existe donc un compact de $K \times \Gamma$ qui est d'intérieur non vide dans $\bar{\Gamma}_1(\mu)$. On en conclut aisément que les groupes topologiques $K \times \Gamma$ et $\bar{\Gamma}_1(\mu) = K.\Gamma(\mu)$ sont isomorphes. On doit avoir en particulier $\Gamma \simeq \Gamma(\mu)$ ce qui est impossible si μ est une mesure de Dirichlet (cf chap. I (2.3)).

8 - Eléments idempotents de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$

8.1 - Eléments positifs et éléments idempotents

On a vu que pour une mesure $\mu \notin M_0(G)$, $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient toujours un élément $\phi > 0$. $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient aussi ϕ^n pour tout $n \geqslant 1$. La suite ϕ^n converge μ-presque-partout et donc aussi pour la topologie forte, vers un élément $h = h^2$. L'idempotent h prend la valeur 1 là où $\phi(x) = 1$ et la valeur 0 ailleurs (ceci ayant un sens à un ensemble de mesure nulle près). On a donc deux situations possibles :

a) $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un élément idempotent non nul.

b) Tout élément $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ est tel que $|\chi(x)| < 1$ μ-presque-partout (en considérant $\phi = |\chi|^2$). Ce cas se présente pour des mesures $\mu \not\in M_o(G)$, comme le montre l'exemple du produit de Riesz ρ_a (cf prop. 8).

Proposition 9 : Pour $\mu \in M(G)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un idempotent non nul.

b) $L(\mu)$ contient une mesure de Dirichlet non nulle.

Démonstration : Si $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un idempotent $h \neq 0$ soit $\nu = h\mu$. Comme $h = 1$ ν-pp, $\bar{\Gamma}_\infty(\nu)$ contient la constante 1 et ν est une mesure de Dirichlet (cf (3.2)). Inversement si on a une mesure de Dirichlet $\nu << \mu$, $\nu \neq 0$, $\bar{\Gamma}_\infty(\nu)$ contient 1 et on peut trouver $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ tel que $\chi = 1$ ν-pp (cf lemme 7). $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient l'idempotent $h = \lim_{n\to+\infty} |\chi|^{2n}$ qui vaut 1 ν-pp.

8.2 - Une caractérisation arithmétique

Il est remarquable que la situation précédente puisse être caractérisée simplement en termes de transformée de Fourier. Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ et tout $\varepsilon > 0$, rappelons la notation

$$E(\mu,\varepsilon) = \{\gamma ; \gamma \in \Gamma, |\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon\}$$

Théorème 16 (Γ métrisable) : Pour $\mu \in M(G)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un idempotent non nul.

b) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne un translaté d'un ensemble $\Omega(\{\theta_j\})$ où θ_j est une suite tendant vers l'infini dans Γ (avec les notations de (7.1)).

Démonstration : Montrons d'abord que (a) implique (b). Supposons que

$\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contienne $h = h^2$, $h \neq 0$. Puisque la mesure $h\mu$ est non nulle, il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $(h\mu)\hat{}(\gamma_0) \neq 0$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$|(h\mu)\hat{}(\gamma_0)| = \left|\int \gamma_0 h \, d\mu\right| > \varepsilon$$

Considérons le voisinage de h dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ défini par

$$\left|\int \gamma_0 \chi \, d\mu\right| > \varepsilon \qquad (\chi \in \bar{\Gamma}(\mu))$$

et soit γ_j une suite généralisée tendant vers l'infini dans Γ et vers h dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Suivant le lemme 10 du chapitre I, on peut en extraire une suite γ_{j_n} tendant vers l'infini et telle que

$$\left|\int \gamma_0 \gamma \, d\mu\right| > \varepsilon \qquad (\gamma \in \Omega(\{\gamma_{j_n}\})) .$$

Inversement, soit $\varepsilon > 0$ tel que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne un ensemble $\gamma_0 \Omega(\{\theta_j\})$ où θ_j est une suite tendant vers l'infini dans Γ et $\gamma_0 \in \Gamma$. Quitte à remplacer θ_j par une sous-suite, on peut supposer que θ_j converge dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ vers un élément $\chi \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ et que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|\chi|^{2n} = \lim_{j_1 < \cdots < j_{2n}} \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_n} \bar{\theta}_{j_{n+1}} \cdots \bar{\theta}_{j_{2n}}$$

(cf chap. I-(4.2.7)). Donc $|\chi|^{2n}$ est adhérent à $\Omega(\{\theta_j\})$ $(n \geqslant 1)$. Il en est de même de l'idempotent de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$, $h = \lim_{n \to +\infty} |\chi|^{2n}$. On a donc $\gamma_0 h$ adhérent à $E(\mu,\varepsilon)$ d'après l'hypothèse, et par suite $\left|\int \gamma_0 h \, d\mu\right| \geqslant \varepsilon$ ce qui assure en particulier que $h \neq 0$.

(8.2.3) Remarque : Pour une mesure $\mu \in M(G)$ étrangère à toute mesure de Dirichlet, $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ ne contient aucun idempotent $\neq 0$ (proposition 9) et la propriété (b) du théorème 13 n'est vraie pour aucun $\varepsilon > 0$. Cependant si μ n'est pas dans $M_0(G)$, $E(\mu,0)$ contient un translaté d'un ensemble $\Omega(\{\theta_j\})$ où θ_j est une suite tendant vers l'infini. En effet, sinon, par le théorème 12 ce serait un ensemble de Rajchman. Or ceci est contradictoire avec le fait que la mesure μ dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de $E(\mu,0)$, n'est pas dans $M_0(G)$.

(8.2.4) Exemple : Les produits de Riesz ρ_a introduits en (7.2) sont des exemples typiques de la situation précédente (à condition de supposer $|a| \neq 1$). Avec les notations de (7.1), on voit que, pour $|a|^{n+1} \leqslant \varepsilon < |a|^n$ $(n \geqslant 1)$, $E(\mu,\varepsilon)$ n'est autre que l'ensemble des mots de longueur $\leqslant n$ tandis que $E(\mu,0) = \Omega(\Theta)$. Les produits de Riesz généraux avec $\overline{\lim}|a_j| < 1$ sont également étrangers à toute mesure de Dirichlet d'après la remarque (7.5.4).

8.3 - Mesures discrètes

(8.3.1) Exercice : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure discrète qu'on peut écrire comme une somme finie ou infinie $\mu = \Sigma a_n \delta_{x_n}$, $\Sigma |a_n| < +\infty$, (où l'on convient que tous les coefficients a_n sont non nuls). On vérifie immédiatement que la topologie $*$-faible de $L^\infty(\mu)$ n'est autre que celle de la convergence simple bornée sur l'ensemble $\{x_n\}$. Ainsi tout élément de $\bar{\Gamma}(\mu)$ est limite simple sur $\{x_n\}$ de caractères du groupe (et réciproquement). En particulier tout élément de $\bar{\Gamma}(\mu)$ est de module 1 et $\bar{\Gamma}(\mu)$ est un groupe compact. On peut dire plus : si χ est limite simple sur $\{x_n\}$ d'une suite de caractères γ_j, cette suite converge également en tout point du groupe H engendré par $\{x_n\}$, vers un caractère $\tilde{\chi}$ de H (sans topologie) qui prolonge χ de façon unique.

Notons H_d le groupe H muni de la topologie discrète. Les considérations précédentes montrent que $\bar{\Gamma}(\mu)$ peut s'identifier, avec sa topologie, à un sous-groupe compact du groupe dual $\hat{H}_d$. En fait $\bar{\Gamma}(\mu) = \hat{H}_d$ car, sinon, il existerait $x \in H_d$, $x \neq 0$, tel que $\tilde{\chi}(x) = 1$ pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$; en particulier on aurait $\gamma(x) = 1$, $\gamma \in \Gamma$, ce qui est impossible. En résumé :

(8.3.2) $\bar{\Gamma}(\mu)$ est un groupe compact, dual du groupe discret engendré par $\{x_n\}$ dans G.

(8.3.3) Remarque : Toute mesure discrète est de Dirichlet car tout élément χ de $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ est de module 1 et $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient $|\chi|^2 = 1$.

Proposition 10 : Pour $\mu \in M(G)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) μ est discrète ;

b) $\overline{\Gamma}(\mu)$ est un groupe (compact).

Démonstration : Il reste à montrer que (b) implique (a). Quitte à remplacer μ par $|\mu|$, on peut supposer $\mu > 0$. Il est équivalent de dire que $\overline{\Gamma}(\mu)$ est un groupe ou que tout élément de $\overline{\Gamma}(\mu)$ est de module 1.

L'application naturelle de Γ dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ est continue d'image dense. Tout caractère de $\overline{\Gamma}(\mu)$ définit par composition, un caractère de Γ, c'est-à-dire un point x de G. Le caractère correspondant de $\overline{\Gamma}(\mu)$ est noté $\langle x,\chi\rangle$ et est tel que $\langle x,\gamma\rangle = \gamma(x)$ si $\gamma \in \Gamma$. $\overline{\Gamma}(\mu)\hat{}$ s'identifie ainsi injectivement à un sous-groupe H de G, avec la topologie discrète.

Considérons la fonction continue sur $\overline{\Gamma}(\mu)$: $\chi \longrightarrow \int \chi \, d\mu$. Elle est de type positif : pour tout entier $n \geq 1$, pour tout choix de $\chi_j \in \overline{\Gamma}(\mu)$, $(1 \leq j \leq n)$ et de coefficients complexes c_j, $(1 \leq j \leq n)$, on a bien

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} c_i \bar{c}_j \int \chi_i \chi_j^{-1} \, d\mu = \int \Big| \sum_{1\leq j\leq n} c_j \chi_j \Big|^2 d\mu \geq 0 \quad .$$

Par le théorème de Bochner, il existe une mesure discrète finie ν concentrée sur H, telle que

$$\int \chi \, d\mu = \int \langle x,\chi\rangle \, d\nu(x) \qquad (\chi \in \overline{\Gamma}(\mu)).$$

En particulier

$$\int \gamma \, d\mu = \int \gamma \, d\nu \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

ce qui prouve que $\mu = \nu$ est discrète et concentrée sur H.

8.4 - Projecteur sur la partie discrète d'une mesure

On notera μ_d la partie discrète d'une mesure μ et μ_c sa partie continue. Le projecteur de $L(\mu)$ sur $L(\mu_d)$ n'est autre que la multiplication par une fonction indicatrice borélienne h_d telle que

$$\nu_d = h_d \nu \qquad\qquad (\nu \in L(\mu))$$

<u>Théorème 17</u> : Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, h_d est un élément (idempotent) de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$. C'est le plus petit élément positif de $\bar{\Gamma}(\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Tout élément de $\bar{\Gamma}(\mu_d)$ est de module 1. Il s'ensuit que pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$ on a $\chi = 1$ μ_d-presque-partout ou, de façon équivalente $\chi \geqslant h_d . \bar{\Gamma}_\infty(\mu)_+$ est un semi-groupe faiblement fermé qui possède un élement minimal h unique et idempotent (cf chap.I-(4.5)). Notons que h est également minimal dans $\bar{\Gamma}(\mu)_+$. Considérons la mesure $\nu = h\mu$. Comme $h \geqslant h_d$ on a $hh_d = h_d$ et ν a pour partie discrète

$$\nu_d = h_d \nu = h_d h\mu = h_d \mu = \mu_d .$$

Nous allons démontrer que ν est purement discrète, ce qui prouvera que $h\mu = h_d\mu$ et donc que $h = h_d$. En effet quel que soit $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$, $|\chi|^2 \geqslant h$ par la minimalité de h, et $|\chi| = 1$ là où h vaut 1, c'est-à-dire ν-presque-partout. Par conséquent tout élément de $\bar{\Gamma}(\nu)$ est de module 1. Ceci prouve que ν est discrète d'après la proposition 10 et termine la démonstration.

<u>Corollaire 1</u> : Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, $\hat{\mu}_d(\mu) \subset A(\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Le résultat découle immédiatement du théorème 17 et du lemme 8 (c). (Il est facile de vérifier que les propriétés du théorème 17 et du corollaire 1 sont équivalentes ; mais la question est reprise au chapitre VIII).

(8.4.1) <u>Exercice</u> : On peut préciser les rapports qui existent entre $\hat{\mu}_d$ et $\hat{\mu}$, pour toute mesure $\mu \in M(G)$. Tout d'abord, $\hat{\mu}_d$ est limite uniforme sur tout compact de translatées de $\hat{\mu}$. En effet soit β_j une suite généralisée de caractères convergeant vers h_d dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\mu}_d(\gamma) = \int \gamma h_d \, d\mu = \lim \int \gamma \beta_j \, d\mu = \lim \hat{\mu}(\gamma\beta_j) \; .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit K un compact quelconque de Γ. Par un argument de compacité, on peut trouver j arbitrairement grand tel que

$$|\hat{\mu}_d(\gamma) - \hat{\mu}(\gamma\beta_j)| \leqslant \varepsilon \qquad (\gamma \in K) \; .$$

On peut dire plus car β_j tend (fortement) vers 1 dans $\bar{\Gamma}(\mu_d)$. Pour j assez grand,

$$|\hat{\mu}_d(\gamma) - \hat{\mu}_d(\gamma\beta_j)| \leqslant \int |\beta_j - 1| \, d|\mu_d| \leqslant \varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

(i.e. β_j est une ε-presque-période de la fonction presque-périodique $\hat{\mu}_d$). Finalement pour j arbitrairement grand,

$$|\hat{\mu}_d(\gamma\beta_j) - \hat{\mu}(\gamma\beta_j)| \leqslant 2\varepsilon \qquad (\gamma \in K).$$

Dans le cas où $G = \mathbb{T}, \mathbb{R}$, par exemple, cela veut dire que $\hat{\mu}$ et $\hat{\mu}_d$ coïncident à 2ε près sur des intervalles (d'entiers ou de réels) arbitrairement grands et arbitrairement loin. En particulier si μ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\hat{\mu}| \leqslant \varepsilon$ sur des intervalles arbitrairement grands, comme il est bien connu.

<u>Corollaire 2</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est continue si et seulement si 0 appartient à $\bar{\Gamma}(\mu)$.

<u>Démonstration</u> : On a vu que h_d est le plus petit élément $\geqslant 0$ de $\bar{\Gamma}(\mu)$. Il est donc équivalent de dire que $0 \in \bar{\Gamma}(\mu)$ ou que $h_d = 0$.

<u>Exercice</u> $(G = \mathbb{T}, \mathbb{R})$: Il est équivalent de dire que $\bar{\Gamma}(\mu)$ contient 0 ou que, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\hat{\mu}| \leqslant \varepsilon$ sur des intervalles arbitrairement grands. On a déjà vu la propriété directe. Inversement, notons γ_x le caractère correspondant à un entier ou un réel x ; supposons qu'il existe une suite d'intervalles $I_j = [x_j - \ell_j, x_j + \ell_j]$ avec ℓ_j tendant vers $+\infty$, et tels que $|\hat{\mu}| \leqslant 1/j$ sur I_j. Alors pour tout x entier ou réel, $x_j + x \in I_j$ pour j assez grand, et

$$\left|\int \gamma_{x_j}\gamma_x \, d\mu\right| = |\hat{\mu}(x_j+x)| \leqslant 1/j$$

ce qui prouve que γ_{x_j} tend vers 0 dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. (On peut naturellement formuler cette propriété pour un groupe quelconque).

(8.4.3) Exercice (Γ métrisable) : Soit une mesure positive $\mu \in M(G)$ et soit E l'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$. Supposons que E contienne tous les produits $\{\theta_j\bar{\theta}_k\}_{j<k}$ pour une suite θ_j tendant vers l'infini. Alors μ est nécessairement continue (on dit parfois que l'ensemble E "force la continuité" des mesures positives). En effet soit χ une valeur d'adhérence de θ_j dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Alors $|\chi|^2$ est adhérent à E et par suite $\int|\chi|^2 \, d\mu = 0$ ce qui implique $|\chi|^2 = 0$ grâce à la positivité de μ. On en conclut que μ est continue d'après le corollaire 2.

(8.4.4) Exemple : Soit n_j une suite d'entiers tendant vers l'infini dans $\mathbb{Z}$. L'ensemble $\{n_j-n_k\}_{j<k}$ force la continuité des mesures positives. C'est un ensemble corrélatif au sens de M. MENDES-FRANCE.

8.5 - Mesures concentrées sur les classes modulo un sous-groupe fermé.

(8.5.1) Soit H un sous-groupe fermé de G et p l'homomorphisme canonique de G sur $G/_H$. Notons ici $M_H(G)$ la classe des mesures $\mu \in M(G)$ telles que la mesure $p(|\mu|)$ (image de $|\mu|$ par p) soit discrète. Ce sont exactement les mesures concentrées sur des réunions finies ou dénombrables de classes modulo H. De même la classe des mesures $\mu \in M(G)$ telles que $p(|\mu|)$ soit continue, consiste des mesures pour lesquelles $|\mu|(x+H) = 0$ pour tout $x \in G$; autrement dit c'est la classe $M_H(G)^{\perp}$ des mesures qui sont étrangères à toute mesure de $M_H(G)$.

(8.5.2) Pour une mesure quelconque $\mu \in M(G)$, à la décomposition de $p(|\mu|)$ en partie discrète et partie continue, correspond une décomposition unique de $|\mu|$ et donc de μ :

$$\mu = \mu_H + \mu'_H \qquad (\mu_H \in M_H(G),\ \mu'_H \in M_H(G)^{\perp}).$$

(8.5.3) Il est clair que $M_H(G)$ et $M_H(G)^{\perp}$ sont des L-sous-espaces de $M(G)$ et que

$$M(G) = M_H(G) \oplus M_H(G)^{\perp} .$$

L'analogie avec la décomposition

$$M(G) = M_d(G) \oplus M_c(G)$$

en mesures discrètes et mesures continues est renforcée par le fait qu'ici aussi $M_H(G)$ est une sous-algèbre et $M_H(G)^{\perp}$ un idéal de l'algèbre de convolution $M(G)$. La vérification est laissée au lecteur, cette question étant systématiquement reprise au chapitre IV.

(8.5.4) Remarquons seulement que $M_H(G)$ peut se décrire en termes de topologie sur G. Soit τ_H l'unique topologie de groupe sur G qui coïncide sur H avec la topologie initiale et pour laquelle H est un sous-groupe ouvert. C'est une topologie localement compacte plus fine que la topologie initiale. De même que les mesures discrètes sont les mesures de Radon bornées de la topologie discrète, $M_H(G)$ est la classe des mesures de Radon bornée de la topologie τ_H. C'est pourquoi on peut la noter aussi $M(G_{\tau_H})$ comme dans les chapitres IV et VIII. La mesure de Haar de τ_H coïncide sur H avec la mesure de Haar de H que l'on continuera à noter m_H.

(8.5.5) Notons que $M_H(G) = M(G)$ si et seulement si H est un sous-groupe ouvert de G. En effet ceci revient à dire que G/H est discret et donc que toute mesure sur G/H est discrète. (τ_H est alors égale à la topologie initiale).

(8.5.6) $M_H(G)$ contient toujours $M_d(G)$. L'égalité correspond au cas où H est un sous-groupe discret.

Soit $\mu \in M(G)$. Considérons la décomposition en somme directe

$$L(\mu) = L(\mu_H) \oplus L(\mu'_H)$$

et le projecteur de $L(\mu)$ sur $L(\mu_H)$ qui n'est autre que la multiplication par un élément idempotent de $L^\infty(\mu)$ qu'on notera h_{τ_H} ou plus simplement h_H. On a l'extension suivante du théorème 17.

<u>Théorème 18</u> : Pour toute $\mu \in M(G)$ et tout sous-groupe H fermé non ouvert de G, h_H appartient à $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$.

<u>Démonstration</u> : L'hypothèse sur H assure que $G/_H$ n'est pas discret ; (dans le cas contraire $h_H = 1$). On peut supposer que μ est positive. Soit $\sigma = p(\mu)$; alors $\sigma_d = p(\mu_H)$ et il est clair que $h_H = h_d \circ p$, où h_d désigne l'élément de $L^\infty(\sigma)$ correspondant au projecteur de $L(\sigma)$ sur $L(\sigma_d)$. On identifie le dual de $G/_H$ au groupe $\Lambda = H^\perp$. D'après le théorème 17, h_d est dans $\bar{\Lambda}_\infty(\sigma)$: il existe une suite généralisée γ_j d'éléments de Λ, qui tend vers l'infini dans Λ et qui converge vers h_d pour la topologie $*$-faible de $L^\infty(\sigma)$. Pour toute mesure $\nu << \mu$, on a $p(\nu) << \sigma$ et

$$\lim \int \gamma_j \, d(p(\nu)) = \int h_d \, d(p(\nu))$$

$$\lim \int \gamma_j \, d\nu = \int (h_d \circ p) \, d\nu = \int h_H \, d\nu$$

ce qui démontre le théorème.

(8.5.7) <u>Remarque</u> : Le corollaire 1 du th. 7 reste valable avec μ_H au lieu de μ_d.

Les idempotents h_H possèdent une propriété de minimalité sur laquelle on reviendra au chapitre IV et dont on peut donner la version suivante.

<u>Lemme 13</u> : Soit H un sous-groupe fermé de G. Supposons que $L(\mu)$ contienne une mesure $\nu << m_H$ $(\nu \neq 0)$. Alors h_H est le plus petit des éléments positifs χ de $\bar{\Gamma}(\mu)$ tels que $\chi\nu \neq 0$.

Démonstration : Il est facile de voir que le groupe support H' de ν est ouvert dans H. Ainsi $\tau_H = \tau_{H'}$ et $h_H = h_{H'}$. On peut donc supposer que $H = H'$.

On sait que $\bar{\Gamma}(\nu) = \Gamma(\nu) \cup \{0\}$ et que $\Gamma(\nu) \simeq \Gamma/_{H^\perp}$ (prop. 2 et 3). Il est équivalent de dire que $\chi\nu \neq 0$ ou que $\chi = 1$ ν-pp. Le semi-groupe des $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)_+$ pour lesquels $\chi = 1$ ν-pp, est fermé et possède un élément minimal unique et idempotent $h \leqslant h_H$. Si on avait $h < h_H$ on pourrait trouver une mesure positive $\sigma << \mu_H << \mu$, $\sigma \neq 0$, concentrée sur une classe x_o+H et pour laquelle $h\sigma = 0$. Soit γ_j une suite généralisée de caractères convergeant vers h dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Elle converge fortement vers 1 dans $\bar{\Gamma}(\nu)$ c'est-à-dire en fait, dans $\Gamma(\nu) \simeq \Gamma/_{H^\perp}$. Du même coup, pour toute mesure ω concentrée sur H, γ_j converge vers 1 dans la topologie $*$-faible de $L^\infty(\omega)$. En prenant $\omega = \delta_{(-x_o)} * \sigma$ on aurait

$$\int d\sigma = \int d\omega = \lim \bar{\gamma}_j(x_o) \int \gamma_j \, d\sigma = \lim \bar{\gamma}_j(x_o) \int h \, d\sigma = 0$$

ce qui fournit une contradiction et démontre la proposition.

(8.5.8) Exemple : (cf (4.3) et (4.4)). Soit η une mesure idempotente de M(G) et soit h un idempotent minimal non nul dans $\bar{\Gamma}(\eta)$. On sait que $\nu = h\eta$ est une mesure élémentaire $\ll m_H$, où H est un sous-groupe compact de G. D'après la proposition 10, $h = h_H$ et $\nu = \eta_H$.

(8.5.9) Remarque : Dans le cas $G = \mathbb{T}$ ou $\mathbb{R}$, tout sous-groupe fermé propre H est fini ou dénombrable. Si $h_H \neq 1$ on a donc toujours $h_H = h_d$. Mais ce n'est pas le cas général. Si l'on considère par exemple $G = \mathbb{T}^2$ ou $\mathbb{R}^2$, on a une infinité de sous-groupes H fermés non discrets et il est facile d'imaginer des mesures μ dont le semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$ contienne une infinité d'idempotents h_H distincts. De ce point de vue on voit que la notion de mesure continue joue un rôle un peu particulier dans le cas de $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{R}$ et on est conduit à introduire la notion suivante.

Définition 4 : Une mesure $\mu \in M(G)$ est dite fortement continue si, pour tout sous-groupe H fermé non ouvert de G, $\mu_H = 0$.

Exemples :

(8.5.10) Une mesure orthogonale à toute mesure de Dirichlet est fortement continue. C'est une conséquence immédiate du th.18 et de la prop. 9. En particulier toute mesure de $M_o(G)$ est fortement continue.

(8.5.11) Les produits de Riesz ρ_a introduits en (7.2) (avec $|a| \neq 1$) sont des mesures fortement continues. Il en est de même des produits de Riesz généraux avec $\overline{\lim}|a_j| < 1$ suivant la remarque (7.5.4).

9 - Quelques remarques sur les ensembles de Sidon (Γ discret).

9.1 - On rappelle qu'une partie E de Γ est un ensemble de Sidon si tout élément de $\ell^\infty(E)$ se laisse prolonger sur Γ en une transformée de Fourier de mesure (cf [4]) ; (il est clair que cette propriété est stable par translation). On peut retrouver et replacer dans le cadre du présent chapitre, certaines propriétés des ensembles de Sidon.

Proposition 11 : Un ensemble de Sidon ne peut contenir aucun produit AB de deux ensembles infinis A et B.

Démonstration : Soit E un ensemble de Sidon qui contiendrait un ensemble AB. On pourrait trouver une suite α_j dans A et une suite β_k dans B, de telle sorte que les produits $\alpha_j\beta_k$ soient tous distincts, et une mesure $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\alpha_j\beta_k) = 0$ si $j<k$, $\hat{\mu}(\alpha_j\beta_k) = 1$ si $j>k$. Dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ soient χ et ϕ des valeurs d'adhérence de α_j et β_k, respectivement. Alors $\chi\phi$ est une valeur d'adhérence de $(\alpha_j\beta_k)_{j<k}$

aussi bien que de $(\alpha_j\beta_k)_{j>k}$. On devrait avoir $\int \chi\phi \, d\mu = 0$ d'une part et $\int \chi\phi \, d\mu = 1$ d'autre part, ce qui fournit une contradiction.

L'argument précédent, tout à fait élémentaire peut être utilisé dans d'autres contextes. A noter cependant que la proposition 11 n'interdit pas, a priori, à E de contenir un ensemble de la forme $\{\theta_j\bar{\theta}_k\}_{j<k}$. Il s'avère que c'est impossible, mais il s'agit d'une propriété un peu plus fine qu'on retrouve plus loin.

9.2 - Mesures de DRURY - Applications

(9.2.1) Exercice : Soit un ensemble de Sidon infini $E \subset \Gamma$. Il n'existe pas de mesure $\mu \in M(G)$ telle que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \varepsilon > 0$ si $\gamma \in E$ et $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin E$. Si c'était le cas, il est facile de voir qu'on pourrait trouver une mesure idempotente η telle que E soit le support de $\hat{\eta}$. Or le support de $\hat{\eta}$ est dans l'algèbre de Boole engendrée par les classes modulo les sous-groupes ouverts de Γ (simple reformulation du théorème des idempotents ; cf [5]). Ceci est incompatible avec la proposition 11. Cependant un des résultats les plus marquants sur les ensembles de Sidon est le suivant.

Théorème 19 (S. DRURY [4]) : Soit un ensemble de Sidon $E \subset \Gamma$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe une mesure $\mu \in M(G)$ telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = 1 \qquad (\gamma \in E)$$

$$\hat{\mu}(\gamma) \leqslant \varepsilon \qquad (\gamma \notin E)$$

(Une telle mesure sera dite dans la suite, pour abréger une mesure de Drury).

Voici quelques conséquences faciles de l'existence d'une mesure de Drury.

Lemme 14 : Soit un ensemble de Sidon $E \subset \Gamma$ et soit μ une mesure de Drury (pour un certain $\varepsilon < 1$). Dans $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ aucun élément limite de caractères de E, ne peut s'écrire comme un produit. (En particulier aucun idempotent de $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ ne peut être adhérent à E).

Démonstration : Soient ϕ,Ψ deux éléments de $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$, limites dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ de suites généralisées de caractères α_j et β_k tendant vers l'infini dans Γ. Supposons que le produit $\phi\Psi$ soit adhérent à E ; on aurait $\int \phi\Psi \, d\mu = 1$. En considérant la pseudo-métrique $\left|\int \chi \, d\mu - \int \chi' \, d\mu\right|$ $(\chi,\chi' \in \overline{\Gamma}(\mu))$, on peut extraire de α_j et β_k des suites α_{j_ℓ} et β_{k_m} de façon que

$$\lim_{\ell \neq m} \int \alpha_{j_\ell} \beta_{k_m} \, d\mu = \int \phi\psi \, d\mu = 1$$

(cf chap.I-(4.2.5)). Nécessairement les produits $\alpha_{j_{2\ell}} \beta_{k_{2m+1}}$ sont tous dans E à partir d'un certain rang. On peut naturellement faire en sorte que les ensembles $\{\alpha_{j_{2\ell}}\}$ et $\{\beta_{k_{2m+1}}\}$ soient infinis, ce qui contredit la proposition 11.

Proposition 12 : Soit un ensemble de Sidon $E \subset \Gamma$. Quel que soit l'ensemble infini $\{\theta_j\}_{j \geq 1}$, E ne peut contenir tous les produits $\theta_j \overline{\theta}_k$ $(1 \leq j < k)$.

Démonstration : Supposons que E contienne $\{\theta_j \overline{\theta}_k\}_{j<k}$. Soit μ une mesure de Drury. Quitte à remplacer θ_j par une sous-suite, on peut supposer qu'elle tend vers l'infini dans Γ, vers χ dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ et que $|\chi|^2 = \lim\limits_{j<k} \theta_j \overline{\theta}_k$ (chap.I-lemme 5). Ceci contredit le lemme 14.

Le résultat suivant généralise un théorème de S. HARTMAN et B. WELLS [4].

Théorème 20 : Soit un ensemble de Sidon $E \subset \Gamma$. Quel que soit H sous-groupe fermé de G, tout élément de $\ell^\infty(E)$ se laisse prolonger par la transformée de Fourier d'unemesure de $M_H(G)^\perp$.

Démonstration : $M_H(G)^\perp$ étant un idéal de convolution, il suffit de montrer que $M_H(G)^\perp$ contient une mesure ν telle que $\hat{\nu}(\gamma) = 1$, $(\gamma \in E)$, ou même seulement, une mesure ν telle que $|\hat{\nu}(\gamma)| \geqslant c > 0$, $(\gamma \in E)$. Partons d'une mesure de Drury $\mu \in M(G)$. Soit h_H le projecteur de $L(\mu)$ sur $L(\mu_H)$ (cf (8.5)). Si $h_H = 1$ il n'y a rien à démontrer. Sinon $h_H \in \bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ (théorème 15) et ne peut être adhérent à E (lemme 14). Et même, pour tout $\gamma \in \Gamma$, γh_H qui est dans $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ et peut s'écrire $\gamma h_H = (\gamma h_H) h_H$ ne peut être adhérent à E. Par conséquent

$$\left|\int \gamma \, d\mu_H\right| = \left|\int \gamma \, h_H d\mu\right| \leqslant \varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

et

$$|(\mu - \mu_H)\hat{}\,(\gamma)| \geqslant 1 - \varepsilon \qquad \text{si } \gamma \in E$$

ce qui donne la propriété.

---

[1] BROWN G., MORAN W. : On orthogonality of Riesz Products. Proc. Camb. Phil. Soc. 76 (1974), pp 173-181.

[2] HOST B., PARREAU F. : Sur les mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes ne tend pas vers 0 à l'infini. Coll. Math. 41-2 (1979).

[3] KAHANE J.P., SALEM R. : Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann.

[4] LOPEZ M., ROSS K. : Sidon sets. Lecture Notes 13. M. Dekker.

[5] RUDIN W. : Fourier Analysis on groups. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics n°12. John Wiley and Sons.

[6] TAYLOR J.L. : Measure Algebras. Regional Conference Series in Math n°15, A.M.S. (1972).

[7] LYONS R. : A charactérization of measures whose Fourier transforms vanish at infinity. Thèse (1982).

[8] AMEMIYA I., ITO T. : A simple proof of the theorem of P.J. COHEN. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 774-776.

CHAPITRE III

MESURES QUASI-IDEMPOTENTES, SEMI-IDEMPOTENTES

ET QUESTIONS CONNEXES

La technique du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$, convenablement mise en oeuvre peut éclairer des situations a priori plus compliquées que celles envisagées au chapitre II.

1 - Mesures quasi-idempotentes et ε-quasi-idempotentes

On va introduire et étudier des classes de mesures remarquables qui ressemblent à des mesures idempotentes. On verra que leur structure est plus complexe.

1.1 - Introduction

On sait que les convoluteurs (opérateurs commutant avec les translations) de $L^1(G)$ sont de la forme $Tf = \mu * f$ où μ est une mesure de $M(G)$ (cf. [19]). Le problème (posé vers 1970, notamment par E. HEWITT et I. GLICKSBERG) de savoir pour quelles mesures μ l'image de T est fermée, s'est avéré un problème difficile que les techniques classiques d'Analyse de Fourier ne permettaient pas de résoudre (ce problème est équivalent à la caractérisation des idéaux principaux fermés de M(G) comme l'affirme la proposition suivante). Nous n'exposerons pas ici la solution donnée par B. HOST et F. PARREAU, renvoyant à [6] [14] ainsi qu'aux travaux antérieurs [3] [4]. (Voir aussi le chapitre IV-7 où l'on donne une variante du lemme-clé de [6]).

Rappelons seulement comment le problème se pose.

<u>Proposition 1</u> (I. GLICKSBERG [3]) : Soit $\mu \in M(G)$. $\mu * L^1(G)$ est fermé si et seulement si $\mu * M(G)$ est fermé ; alors

a) il existe un réel $d > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq d$ si $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$;

b) $\mu * L^1(G)$ (resp. $\mu * M(G)$) est l'idéal de $L^1(G)$ (resp. $M(G)$) constitué des éléments dont la transformée de Fourier s'annule sur l'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$.

<u>Démonstration</u> : Cette proposition se démontre par des arguments classiques (cf. [3]). Contentons nous de remarquer que (a) est immédiat dans le cas où G est compact : en effet si l'on désigne par E le support de $\hat{\mu}$, $\mu * L^1$ contient tous les caractères $\bar{\gamma}$, $\gamma \in E$; si $\mu * L^1$ est fermé l'application $f \longrightarrow \mu * f$ est ouverte et il existe une constante $d > 0$ telle que l'on puisse écrire $\bar{\gamma} = \mu * f_\gamma$ avec $\|f_\gamma\|_1 \leq d^{-1}$; de là $1 \leq |\hat{\mu}(\gamma)| d^{-1}$, $\gamma \in E$, ce qui démontre (a).

<u>Théorème 1</u> (B. HOST, F. PARREAU [6]) : Soit $\mu \in M(G)$. $\mu * L^1(G)$ est fermé si et seulement si μ est le produit de convolution d'une mesure idempotente et d'une mesure inversible.

<u>Note sur la démonstration</u> : Il est facile de vérifier que $\mu * L^1$ est fermé dans le cas où $\mu = \eta * \nu$ avec η idempotente et ν inversible et alors $\hat{\mu}$ et $\hat{\eta}$ ont même ensemble de zéros. Pour démontrer la réciproque tout revient à prouver que si $\mu * L^1$ est fermé, il existe une mesure idempotente η dont la transformée de Fourier a les mêmes zéros que $\hat{\mu}$. En effet dans ce cas η appartiendra à $\mu * M(G)$ d'après le (b) de la proposition 1 et si l'on écrit $\eta = \mu * \nu$, on vérifie sans peine que $(\mu+\delta-\eta) * (\nu*\eta+\delta-\eta) = \delta$ ce qui prouve que la mesure $\sigma = \mu+\delta-\eta$ est inversible. De plus $\mu = \eta * \sigma$, ce qui démontre le théorème.

On déduit facilement de la caractérisation des mesures idempotentes (th. 2, chapitre II) que les ensembles de zéros de leurs transformées de Fourier constituent un anneau de Boole : l'anneau engendré par les classes modulo les sous-groupes ouverts de Γ, appelé communément "<u>l'anneau des classes</u>" (cf [19] chapitre 3).

Avec l'hypothèse $\mu * L^1$ fermé, on sait par la proposition 1 (a) que $\hat{\mu}$ a une allure analogue à la transformée de Fourier d'une mesure idempotente. Dans la suite on dira que μ est quasi-idempotente. La difficulté du théorème vient du fait qu'en général, il peut exister de telles mesures dont l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier n'est pas dans l'anneau des classes (cf plus loin (1.3.2)).

De même il existe des parties E de Γ telles que 1_E soit limite uniforme de transformées de Fourier-Stieltjes, mais qui ne sont pas dans l'anneau des classes. Cependant K. DE LEEUW et Y. KATZNELSON [1] avaient mis en évidence dans le cas du cercle, la propriété suivante de stabilité : si $\|1_E-\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour une mesure μ de masse $< C(\varepsilon)$, alors E est dans l'anneau des classes (i.e. dans le cas de $\mathbb{Z}$, une réunion finie de progressions arithmétiques plus ou moins un ensemble fini). Les méthodes développées ici permettent de démontrer un tel résultat pour tous les groupes (ce qui n'est pas une simple extension de [1]) et de préciser la valeur optimale de $C(\varepsilon)$ dont la connaissance peut être utile dans les applications (cf [17]).

On peut rapprocher toutes ces questions de la "conjecture de LITTLEWOOD". De fait beaucoup de travaux récents ont suivi cette idée et se sont inspirés de la "méthode de COHEN-DAVENPORT" (cf [2] [5] [16] [18]). Cette approche qui a finalement conduit à une solution positive de la conjecture de LITTLEWOOD [12], se révèle mal adaptée dans tous les problèmes où c'est le comportement à l'infini de $\hat{\mu}$ qui compte. La technique du semi-groupe $\overline{\Gamma}(\mu)$ fournit des arguments plus simples et des résultats plus précis. (Pour une présentation conjointe de la conjecture de LITTLEWOOD et des questions abordées ici, voir

[10] [11]).

Posons maintenant les définitions précises suivantes :

<u>Définition 1</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est dite quasi-idempotente si pour tout $\gamma \in \Gamma$, ou bien $\hat{\mu}(\gamma) = 0$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1$. (1 n'a pas ici de rôle essentiel et pourrait être remplacé par $d > 0$).

<u>Définition 2</u> : Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Une mesure $\mu \in M(G)$ est dite ε-idempotente si pour tout $\gamma \in \Gamma$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma) - 1| \leqslant \varepsilon$. (La transformée de Fourier de μ est uniformément voisine de celle d'une mesure idempotente).

La classe suivante de mesures contient les deux précédentes (à un détail formel près).

<u>Définition 3</u> : Soit $0 < \varepsilon < 1$. Une mesure $\mu \in M(G)$ est dite <u>ε-quasi-idempotente</u> si pour tout $\gamma \in \Gamma$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1$. (Là encore 1 ne joue qu'un rôle de normalisation). Nous conviendrons de dire que μ est <u>triviale</u> si $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

(1.1.1) <u>Remarque</u> : Les notions précédentes sont stables par translation de $\hat{\mu}$. Plus généralement, soit μ une mesure ε-quasi-idempotente ; quel que soit $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$, la mesure $\chi\mu$ a encore la même propriété puisque $\widehat{\chi\mu}(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$.

1.2 - <u>Une relation d'équivalence</u>

On peut s'intéresser suivant les cas aux mesures proprement dites ou aux <u>partitions</u> du groupe Γ qu'elles induisent.

(1.2.1) Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, ε-quasi-idempotente, convenons de noter

$$E_0(\mu) = \{\gamma \,;\, \gamma \in \Gamma \;,\; |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon\}$$

$$E_1(\mu) = \{\gamma \,;\, \gamma \in \Gamma \;,\; |\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1\} \;.$$

$E_0(\mu)$ et $E_1(\mu)$ pourront être aussi considérés, par commodité, comme des parties de $\Gamma(\mu)$ (ce qui peut créer des confusions lorsque Γ et $\Gamma(\mu)$ ne sont pas isomorphes). $E_o(\mu)$ et $E_1(\mu)$ constituent une partition de Γ en deux parties ouvertes et fermés. Il est clair qu'une même partition peut provenir de plusieurs mesures. On trouve utile d'introduire la terminologie suivante.

Définition 4 : Soit $0 < \varepsilon < 1$. Pour deux nombres complexes z et z' convenons de noter $z \sim z'$ si on a simultanément $|z| \leqslant \varepsilon$ et $|z'| \leqslant \varepsilon$, ou $|z| \geqslant 1$ et $|z'| \geqslant 1$. Pour deux mesures μ et ν, ε-quasi-idempotentes, nous dirons que $\hat{\mu}$ et $\hat{\nu}$ sont équivalentes et nous écrirons $\hat{\mu} \sim \hat{\nu}$ si $\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\nu}(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$ ou, de façon équivalente $E_j(\mu) = E_j(\nu)$ $(j = 0,1)$.

Remarques :

(1.2.2) Si μ est une mesure ε-quasi-idempotente il est clair que $\hat{\mu} \sim |\hat{\mu}|^2 = (\mu * \tilde{\mu})\hat{}$ et on peut se ramener ainsi, à une équivalence près, à une mesure ayant sa transformée de Fourier réelle positive.

(1.2.3) On peut envisager la situation générale suivante : soient E_o, E_1 une partition de Γ, K_o et K_1 deux compacts disjoints de $\mathbb{C}$ et une mesure μ telle que $\hat{\mu}(\gamma) \in K_j$ si $\gamma \in E_j$ $(j = 0,1)$. Si $P(z)$ est un polynôme tel que $|P(z)| \leqslant \varepsilon$ sur K_o et $|P(z)-1| \leqslant \varepsilon$ sur K_1, on pourra se ramener à considérer la mesure ε-idempotente $\nu = P(\mu)$ pour laquelle $E_j(\nu) = E_j$ $(j = 0,1)$. Mais ce faisant, on risque de perdre tout renseignement précis sur la mesure (notamment sur sa masse), ce qui rend la remarque un peu théorique. (cf plus loin (4.3)).

(1.2.4) Considérons deux mesures ε-quasi-idempotentes μ et ν absolument continues par rapport à une même mesure $\omega \in M(G)$ (on peut prendre par exemple $\omega = |\mu| + |\nu|$). Supposons que $\hat{\mu} \sim \hat{\nu}$, c'est-à-dire

$$\int \gamma \, d\mu \sim \int \gamma \, d\nu \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

Par passage à la limite dans $\bar{\Gamma}(\omega)$, on aura

$$\int \chi \, d\mu \sim \int \chi \, d\nu \qquad (\chi \in \bar{\Gamma}(\omega))$$

et encore

$$\int \gamma\chi \, d\mu \sim \int \gamma\chi \, d\nu \qquad (\gamma \in \Gamma, \ \chi \in \bar{\Gamma}(\omega))$$

$$\widehat{\chi\mu}(\gamma) \sim \widehat{\chi\nu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

<u>En conclusion</u>, on retient que pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}(\omega)$, $\widehat{\chi\mu} \sim \widehat{\chi\nu}$.

1.3 - <u>Exemples</u>

La première question qu'on peut se poser est de savoir si, étant donné une mesure μ (ε-)quasi-idempotente, il existe une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$, c'est-à-dire si $E_0(\mu)$ et $E_1(\mu)$ sont dans l'anneau des classes.

(1.3.1) Il est clair que c'est vrai si $E_1(\mu)$ est compact car la fonction indicatrice d'un compact ouvert de Γ est la transformée de Fourier d'un élément de $L^1(G)$. Mais sinon il est facile de donner des contre-exemples.

(1.3.2) Prenons $G = \mathbb{T}$; $\Gamma = \mathbb{Z}$. Soit $0 < \varepsilon < 1/2$; considérons le produit de Riesz

$$\rho = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + 2\varepsilon \cos n_j x)$$

où (n_j) est une suite dissociée d'entiers (par exemple $n_j = 3^j$). On sait que

$$\hat{\rho}(0) = 1$$

$$\hat{\rho}(\pm n_j) = \varepsilon \qquad (j \geqslant 1)$$

$$0 \leqslant \hat{\rho}(n) \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{sinon.}$$

On vérifie sans peine que la mesure $\mu = \varepsilon^{-1}(\rho - m)$ est ε-quasi-idempotente et même ε-idempotente. On aura une mesure quasi-idempotente en prenant $\nu = (1-\varepsilon)^{-1}(\delta - \mu)$.

On sait que pour une mesure idempotente $\eta \in M(\mathbb{T})$, $E_0(\eta)$ et $E_1(\eta)$ sont des réunions finies de progressions arithmétiques, à un ensemble fini près. On ne peut donc pas avoir $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$ ni $\hat{\nu} \sim \hat{\eta}$ puisque $E_1(\mu) = E_0(\nu) = \{\pm n_j\}_{j\geqslant 1}$ et qu'il est à peu près évident qu'une suite dissociée d'entiers ne peut contenir de progression arithmétique infinie.

(1.3.3) On peut faire une remarque supplémentaire sur les exemples qui précèdent. La mesure quasi-idempotente ν a une partie discrète non nulle. On va voir que c'est toujours le cas pour une mesure quasi-idempotente singulière sur $\mathbb{T}$. Par contre la mesure μ fournit un exemple de mesure ε-quasi-idempotente singulière purement continue.

(1.3.4) Exercice : Il n'existe sur $\mathbb{T}$ aucune mesure quasi-idempotente singulière purement continue.

Soit μ une mesure quasi-idempotente singulière. Son spectre de Fourier $E_1(\mu)$ est nécessairement infini. Si l'on suppose μ continue son complémentaire contient alors une suite d'intervalles d'entiers I_j deux à deux disjoints dont la longueur tend vers l'infini (d'après chap. II-(8.4.2) - ou un théorème classique de Wiener). Montrons que c'est impossible.

Pour retrouver la notation multiplicative, on notera γ_n le caractère de $\mathbb{T}$ défini par un entier $n \in \mathbb{Z}$. On peut supposer sans restriction que les intervalles I_j sont dans $\mathbb{Z}^+$ et que chaque $I_j=[m_j,n_j]$ est maximum : en particulier n_j+1 tombe dans $E_1(\mu)$. On peut supposer également que $n_j-m_j>2n_{j-1}$. On vérifie alors sans peine que, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ fixé, $n_j-n_{j-1}+m$ tombe dans I_j pour j assez grand. Plaçons-nous dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ et considérons la suite de caractères γ_{n_j}. Quitte à prendre une sous-suite, on peut admettre qu'elle converge dans $\overline{\Gamma}(\mu)$ vers un élément χ et que de plus

$$|\chi|^2 = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{n_{j+1}} \overline{\gamma}_{n_j} = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{n_{j+1}-n_j}$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_m |\chi|^2 = \lim_{j\to+\infty} \gamma_m \gamma_{n_{j+1}-n_j} = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{n_{j+1}-n_j+m}$$

et d'après ce qui précède,

$$\int \gamma_m |\chi|^2 \, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \hat{\mu}(n_{j+1}-n_j+m) = 0$$

$$(|\chi|^2\mu)\hat{}\,(m) = 0 \qquad (m \in \mathbb{Z}) .$$

On en déduit que $|\chi|^2\mu = 0$ ce qui implique que $\chi = 0$. Mais par ailleurs on a dit que n_j+1 est dans $E_1(\mu)$ et comme

$$\chi\gamma_1 = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{n_j}\gamma_1 = \lim_{j\to+\infty} \gamma_{n_j+1}$$

on a

$$\widehat{\chi\mu}(1) = \int \chi\gamma_1 \, d\mu = \lim_{j\to+\infty} \hat{\mu}(n_j+1) \geqslant 1$$

ce qui fournit une contradiction et conclut l'exercice (1.3.4).

1.4 - Mesures ε-quasi-idempotentes de norme bornée

Nous allons établir maintenant un résultat général de [13] par une méthode plus élémentaire. Auparavant rappelons que pour toute mesure $\mu \in M(G)$ et tout sous-groupe fermé H de G, μ_H désigne la partie de μ qui est concentrée sur les classes modulo H (cf chap. II-(8.5)). On sait qu'il existe $h = h^2 \in \bar{\Gamma}(\mu)$ tel que $h\mu = \mu_H$ (chap. II th.18). On vérifie ainsi que si μ est ε-quasi-idempotente, il en est de même de μ_H, d'après la remarque (1.1.1).

<u>Théorème 2</u> (J.F. MÉLA [13]) : Il existe une constante absolue $C > 0$, telle que pour toute mesure $\mu \in M(G)$, ε-quasi-idempotente non triviale, de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$, il existe un sous-groupe compact H de G pour lequel μ_H est non triviale et $\hat{\mu}_H \sim \hat{\eta}$, où η est une mesure idempotente élémentaire appartenant à $L(m_H)$.

(1.4.1) <u>Remarque</u> : Pour une mesure μ quasi-idempotente, la condition de norme est satisfaite (en prenant ε assez petit) et donc la conclusion du théorème est toujours vraie. Dans ce cas le résultat est établi par GLICKSBERG [4] avec des méthodes assez voisines mais un point de vue différent.

$E_o(\mu)$ et $E_1(\mu)$ constituent une partition de Γ en deux ensembles ouverts et fermés. Le stabilisateur Λ de $E_1(\mu)$ (et $E_o(\mu)$) est clairement un sous-groupe ouvert de Γ. Son orthogonal $H = \Lambda^{\perp}$ est compact. $\bar{\Gamma}(\mu)$ est une réunion disjointe des deux compacts

$$\overline{E_o(\mu)} = \{\chi \ ; \ \chi \in \bar{\Gamma}(\mu) \ , \ |\int \chi \, d\mu| \leqslant \varepsilon\}$$

$$\overline{E_1(\mu)} = \{\chi \ ; \ \chi \in \bar{\Gamma}(\mu) \ , \ |\int \chi \, d\mu| \geqslant 1\} \ .$$

<u>Lemme 1</u> : Soit μ une mesure ε-quasi-idempotente et soit Λ le stabilisateur de $E_1(\mu)$. Supposons que tout élément de $\overline{E_1(\mu)}$ soit de module 1. Alors $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$ où η est une mesure idempotente de la forme $\eta = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \, m_H$ avec $H = \Lambda^{\perp}$.

<u>Démonstration</u> : Il est équivalent de démontrer que $E_1(\mu)$ est réunion finie de classes mod Λ (cf chap. II-(4.2)). Si l'on considère la topologie forte, on remarque que deux classes distinctes sont à une distance $\geqslant 1-\varepsilon$. En effet soient $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$, tels que $\int |\gamma'-\gamma''| d|\mu| < 1-\varepsilon$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$|\hat{\mu}(\gamma\gamma') - \hat{\mu}(\gamma\gamma'')| \leqslant \int |\gamma'-\gamma''| \, d|\mu| < 1-\varepsilon \quad .$$

Vu la nature de $\hat{\mu}$, $\gamma\gamma'$ et $\gamma\gamma''$ sont simultanément dans $E_o(\mu)$ ou dans $E_1(\mu)$; autrement dit $\gamma' \sim \gamma''$ mod Λ. $E_1(\mu)$ est réunion de classes mod Λ et $\overline{E_1(\mu)}$ est compact pour la topologie faible. Maintenant avec l'hypothèse du lemme, les topologies faibles et fortes coïncident sur $\overline{E_1(\mu)}$. $E_1(\mu)$ ne contient donc qu'un nombre fini de classes. Ceci termine la démonstration du lemme 1.

Nous utiliserons le résultat suivant qui, bien que d'apparence un peu technique, est un lemme-clé dont l'intérêt dépasse le présent théorème. Il sera utilisé plusieurs fois par la suite (notamment dans le chapitre VI). Sa démonstration est renvoyée en (1.6).

Lemme 2 (J.F. MÉLA [13]) : Soient $0 < \varepsilon < 1$, $\mu \in M(G)$, $\chi \in L^\infty(\mu)$, $\|\chi\|_\infty \leqslant 1$, satisfaisant les conditions

$$\left|\int \chi \, d\mu\right| \geqslant 1$$

$$\left|\int \chi |\chi|^{2k} \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon \qquad (k \geqslant 1) .$$

Alors $\|\mu\| \geqslant C|\operatorname{Log} \varepsilon|$ où C est une constante absolue.

Démonstration du théorème 2 :

La mesure μ étant supposée non triviale, le compact $\overline{E_1(\mu)}$ est non vide et possède au moins un élément ϕ de module minimal. Montrons que $|\phi|^2 = |\phi|$. Dans le cas contraire nous aurions $|\phi|^2 < |\phi|$ et pour tout $k \geqslant 1$, $|\phi|\phi|^{2k}| < |\phi|$ ce qui, par la minimalité de $|\phi|$ entraîne que $\phi|\phi|^{2k}$ est dans $\overline{E_0(\mu)}$, c'est-à-dire que

$$\left|\int \phi|\phi|^{2k} \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon \qquad (k \geqslant 1)$$

tandis-que

$$\left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant 1 .$$

Ceci est impossible si $\|\mu\| < C|\operatorname{Log} \varepsilon|$ où C est la constante du lemme 2.

Notons désormais $h = |\phi| = |\phi|^2$ et considérons la mesure $\nu = h\mu$ qui est ε-quasi-idempotente puisque $h \in \overline{\Gamma}(\mu)$. Nous allons vérifier qu'elle satisfait l'hypothèse du lemme 1. Considérons un élément $\Psi \in \overline{\Gamma}(\nu)$ quelconque de module $|\Psi| < 1$ et soit $\chi \in \overline{\Gamma}(\mu)$ tel que $\chi = \Psi$ ν-pp. Comme $h = 1$ ν-pp, l'élément χh de $\overline{\Gamma}(\mu)$ prolonge Ψ et est tel que $|\chi h| < h$. Nécessairement χh est dans $\overline{E_0(\mu)}$ à cause de la minimalité de h. Autrement dit $\left|\int \chi h \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon$

et comme

$$\int \Psi \, d\nu = \int \chi \, d\nu = \int \chi h \, d\mu$$

ceci prouve que Ψ est dans $\overline{E_0(\nu)}$. En sens inverse, tout élément de $\overline{E_1(\nu)}$ est donc de module 1. L'hypothèse du lemme 1 est bien satisfaite par la mesure ν. Remarquons de plus que ν n'est pas triviale car $\overline{E_1(\nu)} \neq \emptyset$.

En effet

$$\left|\int \phi \, d\nu\right| = \left|\int \phi \, h \, d\mu\right| = \left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant 1$$

en remarquant que $\phi = \phi h$.

Soit H le sous-groupe compact de G et $\eta \in L(m_H)$ la mesure idempotente telle que $\hat{\nu} \sim \hat{\eta}$, dont l'existence est affirmée dans le lemme 1. Plaçons-nous dans $\bar{\Gamma}(\omega)$, où l'on pose $\omega = |\mu|+|\eta|$. Soit $\tilde{h} \in \bar{\Gamma}(\omega)$ tel que $\tilde{h} = h$ μ-presque-partout. D'après la remarque (1.2.4) $(\tilde{h}\nu)^\wedge \sim (\tilde{h}\eta)^\wedge$ et comme $\tilde{h}\nu = h\nu = \nu$, on a donc $\hat{\eta} \sim (\tilde{h}\eta)^\wedge$.

Or $\tilde{h}\eta$ est elle-même une mesure idempotente et l'équivalence précédente est en fait une égalité : $\eta = \tilde{h}\eta$. Notons h_H l'idempotent de $\bar{\Gamma}(\omega)$ tel que $h_H\omega = \omega_H$ (cf chap. II-(8.5)). On a évidemment $h_H\eta = \eta$. De plus le lemme 13 du chapitre II permet d'affirmer que $h_H \leqslant \tilde{h}$. Par conséquent $h_H\tilde{h} = h_H$,

$$\mu_H = h_H\mu = h_H\tilde{h}\mu = h_H\nu$$

et, toujours d'après (1.2.4)

$$\hat{\mu}_H = (h_H\nu)^\wedge \sim (h_H\eta)^\wedge = \hat{\eta} .$$

Ceci suffit à prouver le théorème 1. Mais on peut aisément s'assurer en plus que $h_H = \tilde{h}$ et que μ_H n'est autre que la mesure ν trouvée tout d'abord. En effet dans le cas contraire on aurait $h_H < \tilde{h}$ et comme $h_H = \tilde{h} = 1$ η-pp, nécessairement $h_H < h$ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ et donc aussi pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\gamma h_H| < h$. On en concluerait que

$$|\hat{\mu}_H(\gamma)| = \left|\int \gamma \, h_H d\mu\right| \leqslant \varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

ce qui est impossible puisque $\hat{\mu}_H \sim \hat{\eta}$ et que $\eta \neq 0$.

1.5 - Mesures ε-idempotentes

Dans le cas où μ est une mesure ε-idempotente (définition 2), ou plus généralement si la transformée de Fourier de μ est à valeurs entières à ε-près, la mesure $\mu' = (1-\varepsilon)^{-1}\mu$ est ε'-quasi-idempotente avec $\varepsilon' = (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon$. On peut appliquer le théorème 2 avec une condition $\|\mu\| < C'|\mathrm{Log}\varepsilon|$ où C' est une constante < C, qui peut être prise arbitrairement proche de C pour les petites valeurs de ε.

La conclusion peut être renforcée. On vérifie immédiatement que, dans le lemme 1, on peut prendre pour η, une mesure dont la transformée de Fourier est à valeurs entières et telles que $|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\eta}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$, $(\gamma \in \Gamma)$. Du coup la mesure μ_H du théorème 2 aura cette dernière propriété. La différence $\nu = \mu - \mu_H$ a sa transformée de Fourier à valeurs entières à 2ε-près et comme $\nu \perp \mu_H$ et que $\|\mu_H\| \geqslant 1-\varepsilon$, on a $\|\nu\| \leqslant \|\mu\| - (1-\varepsilon)$. Il s'avère que l'on peut ainsi itérer l'application du théorème 2 et obtenir au bout d'un nombre fini d'étapes le résultat suivant qui est une version quantitative précise et générale du théorème de DE LEEUW et KATZNELSON [1] pour le cercle.

<u>Théorème 3</u> (J.F. MELA [13]) : Il existe une constante absolue C > 0 telle que, pour toute mesure $\mu \in M(G)$ ε-idempotente de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\varepsilon|$, on a $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$ pour une certaine mesure idempotente η.

<u>Démonstration</u> : Soit C une constante pour laquelle le théorème 2 est valable. La preuve consiste simplement à vérifier qu'on peut effectivement itérer suffisamment de fois le théorème 2. Supposons qu'on puisse l'itérer n fois ; on obtient ainsi une décomposition

$$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n + \nu_n$$

en somme de mesures deux à deux étrangères avec, pour $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$|\hat{\mu}_j(\gamma) - \hat{\eta}_j(\gamma)| \leqslant 2^{j-1}\varepsilon < 1/2 \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

où η_j désigne une mesure non nulle dont la transformée de Fourier est à valeurs entières. En particulier $\|\mu_j\| \geqslant 1 - 2^{j-1}\varepsilon$ et par suite

$$\|\nu_n\| \leqslant \|\mu\| - \sum_{j=1}^{n}(1-2^{j-1}\varepsilon) = \|\mu\| - n + (2^n-1)\varepsilon$$

$$\|\nu_n\| \leqslant \|\mu\| - n + 1 - \varepsilon$$

On voit que nécessairement

$$n \leqslant \|\mu\| + 1 - \varepsilon < C|\mathrm{Log}\varepsilon| + 1/2 \quad .$$

On vérifie aisément que cette limitation implique (quitte, éventuellement, à diminuer la constante C)

$$2^n\varepsilon < 1/2$$

$$\|\mu\| - n + 1 - \varepsilon < C|\mathrm{Log}2^n\varepsilon| \quad .$$

La mesure ν_n a sa transformée de Fourier à valeurs entières à $2^n\varepsilon$-près. Si elle n'est pas triviale on peut lui appliquer à nouveau le théorème 2. Comme n est borné on finit donc par tomber sur une mesure ν_n triviale, c'est-à-dire pour laquelle $|\hat{\nu}_n(\gamma)| \leqslant 2^n\varepsilon \quad (\gamma \in \Gamma)$. On peut écrire alors

$$\mu = \eta_1 + \ldots + \eta_n + \nu$$

avec

$$|\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} 2^{j-1}\varepsilon = (2^{n+1}-1)\varepsilon < 1-\varepsilon \quad .$$

Compte-tenu de la nature de μ, on a forcément $|\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon \quad (\gamma \in \Gamma)$, ce qui démontre le théorème.

Note : Nous démontrerons au chapitre IV un résultat qui permet de déduire directement le théorème 3 du lemme 2.

1.6 - Existence et estimation de la constante C des théorèmes 2 et 3

Démonstration du lemme 2 :

Le lemme 2 ne doit rien à la structure de groupe, comme on va voir : il aurait très bien pu être inclus dans le chapitre I.

Soient $\mu \in M(G)$, χ une fonction borélienne complexe sur G, de module $|\chi| \leqslant 1$ et $\varepsilon > 0$, satisfaisant les hypothèses du lemme 2. Ecrivons $\chi = |\chi|\chi_0$ la décomposition polaire de χ. Nous introduirons la mesure σ sur l'intervalle $[0,1]$, qui est l'image de la mesure $\chi_0\mu$ par l'application $|\chi|$. Pour tout $k \geqslant 0$

$$\int |\chi|^{2k} \chi \, d\mu = \int |\chi|^{2k+1} d(\chi_o \mu) = \int_o^1 t^{2k+1} \, d\sigma(t)$$

Si l'on remarque de plus, que

$$\int_o^1 d|\sigma|(t) \leqslant \|\chi_o \mu\| \leqslant \|\mu\|$$

on voit que le lemme 2 sera une conséquence immédiate du résultat suivant d'analyse classique.

<u>Lemme 3</u> : Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que toute mesure σ sur l'intervalle $[0,1]$, vérifiant les conditions de moments

$$(1.6.1) \qquad \left|\int_o^1 t \, d\sigma(t)\right| \geqslant 1$$

$$(1.6.2) \qquad \left|\int_o^1 t^{2k+1} \, d\sigma(t)\right| \leqslant \varepsilon \qquad (k \geqslant 1)$$

avec $\varepsilon < 1$, a une masse

$$\int_o^1 d|\sigma|(t) \geqslant C|\mathrm{Log}\varepsilon| \; .$$

<u>Démonstration</u> : Ce lemme est facile à établir sous sa forme qualitative. Il suffit par exemple d'intégrer par rapport à σ le développement en série de $\sin(at)$, où a désigne un paramètre réel positif :

$$\int_o^1 \sin(at) \, d\sigma(t) = a \int_o^1 t \, d\sigma(t) - \frac{a^3}{3!} \int_o^1 t^3 \, d\sigma(t) + \ldots$$

$$\int_o^1 d|\sigma|(t) \geqslant \left|\int_o^1 \sin(at) \, d\sigma(t)\right| \geqslant a - \varepsilon e^a$$

et en choisissant $e^a = 1/\varepsilon$

$$\int_o^1 d|\sigma|(t) \geqslant |\mathrm{Log}\varepsilon| - 1 \; .$$

Pour les valeurs de ε proches de 1, on peut utiliser la minoration triviale

$$\int_o^1 d|\sigma|(t) \geqslant \left|\int_o^1 t \, d\sigma(t)\right| \geqslant 1$$

On vérifie sans peine que, pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\int_o^1 d|\sigma|(t) \geqslant 1/2 \, |\mathrm{Log}\varepsilon| \; .$$

On a donc établi le lemme 3 (et le lemme 2) avec une constante $C=1/2$.

Compléments :

(1.6.3) Meilleures estimations de C :

En réalité le théorème 2, tel qu'il est formulé, est surtout intéressant pour les petites valeurs de ε. La démonstration précédente montre qu'avec cette limitation, on peut choisir C voisin de 1. (Si on voulait que le théorème 2 soit significatif et précis pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, il faudrait l'énoncer en donnant pour $\|\mu\|$ une condition de majoration avec reste, comme dans [13] ou faire intervenir la fonction $C(\varepsilon)$ définie ci-dessous).

Au vu du lemme 3, on peut introduire pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la constante $C(\varepsilon)$ définie comme la borne inférieure des masses des mesures σ sur l'intervalle $[0,1]$, pour lesquelles les conditions (1.6.1) et (1.6.2) sont vérifiées. On pourrait remplacer dans les énoncés des lemmes 2 et 3 ainsi que du théorème 2, $C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ par la fonction $C(\varepsilon)$. Le problème (qui n'a plus rien à voir avec le groupe G) est ensuite de donner un équivalent de $C(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0. Notre démonstration du lemme 3 prouve que

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{C(\varepsilon)}{|\mathrm{Log}\,\varepsilon|} \geqslant 1 .$$

Dans [13] on parvient à montrer, en utilisant notamment les polynômes de Chebychev à la place des polynômes de Taylor de $\sin(at)$, (cf [13] lemmes 1 et 3),

$$\frac{1}{\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})} \leqslant \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{C(\varepsilon)}{|\mathrm{Log}\,\varepsilon|} \leqslant \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{C(\varepsilon)}{|\mathrm{Log}\,\varepsilon|} \leqslant 2 .$$

La minoration montre que la constante C des théorèmes 2 et 3 peut être prise arbitrairement proche par défaut de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pourvu qu'on se limite à considérer des valeurs de ε assez petites. La majoration permet par ailleurs, de construire une mesure μ ε-idempotente (en fait une moyenne intégrale de produits de Riesz) de norme $\leqslant 2|\mathrm{Log}\,\varepsilon| + 6$ et pour laquelle les conclusions des théorèmes 2 et 3 sont en défaut (cf [13] p. 144). N'ayant rien à ajouter là-dessus nous renvoyons à [13] pour les détails. On voit en tout cas que la seule amélioration qu'on puisse espérer pour les théorèmes 2 et 3, est une meilleure estimation de $C(\varepsilon)$.

(1.6.4) Problème : Il est raisonnable de conjecturer que $C(\varepsilon) \sim C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ et il serait intéressant de connaître cette constante C optimale, comprise entre $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ et 2.

2 - Mesures ε-quasi-idempotentes fortement continues

2.1 - Mesures de norme bornée

On peut compléter le théorème 2 par le corollaire suivant énoncé avec les mêmes notations et la même constante C.

Corollaire 1 : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure ε-quasi-idempotente de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$. Si $E_1(\mu)$ n'est pas compact, H est un sous-groupe propre non ouvert de G.

Démonstration : Si $E_1(\mu)$ n'est pas compact, en particulier μ est non triviale et le théorème 1 affirme l'existence d'un sous-groupe fermé H de G, tel que $\hat{\mu}_H \sim \hat{\eta}$ avec $\eta = \eta^2 \in L(m_H)$. Il suffit de dire que si H était ouvert on aurait $\mu_H = \mu$ et η serait dans $L(m)$ (cf chapitre II-(8.5.5) , d'où $E_1(\mu) = E_1(\mu_H) = E_1(\eta)$ avec $E_1(\eta)$ compact, ce qui fournit une contradiction.

On rappelle qu'une mesure $\mu \in M(G)$ est dite fortement continue au sens de la définition du chapitre II si, pour tout sous-groupe fermé non ouvert H et tout $x \in G$, $|\mu|(x+H) = 0$. Le résultat suivant qui est une conséquence évidente du corollaire 1, généralise et améliore [1] et [18].

Corollaire 2 : Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, ε-quasi-idempotente fortement continue de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\ \varepsilon|$, l'ensemble $E_1(\mu)$ est compact.

2.2 - Le cas où $E_1(\mu)$ est infini (G compact)

On a vu en (1.3.2) un exemple de mesure $\mu \in M(\mathbb{T})$, ε-quasi-idempotente purement continue pour laquelle $E_1(\mu) = \{\pm n_j\}$ est une partie infinie lacunaire de $\mathbb{Z}$. On peut vérifier que dans l'exemple en question $\|\mu\| = 2/\varepsilon$. En fait on peut trouver sur toute groupe compact des mesures ε-quasi-idempotentes fortement continues dont la norme n'excède pas $2|\mathrm{Log}\ \varepsilon| + 6$ et pour lesquelles $E_1(\mu)$ est effectivement infini : c'est l'exemple de [13], p. 144, déjà cité en (1.6.3). (Ce qui montre que le corollaire 2 ne peut guère être amélioré).

Cependant c'est un fait général que $E_1(\mu)$ est toujours une partie de Γ assez pauvre en relations arithmétiques. En reprenant la situation du théorème 2 et un argument de B. HOST et F. PARREAU, nous allons établir le résultat suivant qui améliore, pour les petites valeurs de ε, le théorème 2 de [7] (dans lequel une mesure ε-quasi-idempotente est dite "presque-idempotente").

Théorème 4 : (G compact). Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que si $\mu \in M(G)$ est une mesure ε-quasi-idempotente fortement continue, $E_1(\mu)$ ne peut contenir aucun sous-ensemble de la forme $A_1A_2\ldots A_n$ où chaque A_j est une partie infinie de Γ, $(1 \leqslant j \leqslant n)$, dès que

$$n > \frac{2(\|\mu\|-1)}{C|\mathrm{Log}\ \varepsilon|}$$

(C peut être prise arbitrairement proche par défaut, de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pour les petites valeurs de ε).

La démonstration du théorème 2 reposait sur l'existence dans $\overline{E_1(\mu)}$ d'un élément ϕ de module minimal et idempotent. Si l'on supprime la condition de norme sur μ, $|\phi|$ n'est plus nécessairement idempotent. On va voir que si μ est fortement continue, les seuls éléments de module idempotent de $\overline{E_1(\mu)}$ sont des caractères du groupe G. Plus précisément :

Lemme 4 : Soit $\mu \in M(G)$, ε-quasi-idempotente fortement continue. $\overline{E_1(\mu)}$ ne contient aucun élément de module idempotent de $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$.

Démonstration : Supposons qu'il existe dans $\overline{E_1(\mu)}$ un élément $\phi \in \overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ de module $|\phi| = |\phi|^2 = h$. Alors h appartient aussi à $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ et d'autre part, comme précédemment, la mesure $\nu = h\mu$ est ε-quasi-idempotente non triviale puisque $\phi = \phi h$ et que

$$\left|\int \phi \, d\nu\right| = \left|\int \phi \, h \, d\mu\right| = \left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant 1 .$$

Il existe donc $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $|\hat{\nu}(\gamma_0)| \geqslant 1$ et si l'on désigne par Λ le stabilisateur de $E_1(\nu)$, on aura

$$|(\gamma_0\nu)\hat{}\,(\gamma)| = |\hat{\nu}(\gamma_0\gamma)| \geqslant 1 \qquad (\gamma \in \Lambda) .$$

Λ s'identifie au dual de $G/_H$ avec $H = \Lambda^\perp$. L'image de la mesure $\gamma_0\nu$ par l'application canonique de G dans $G/_H$, a sa transformée de Fourier de module $\geqslant 1$. Elle a donc une partie discrète, par un théorème de Wiener. Ce qui veut dire que $\gamma_0\nu$ charge au moins une classe mod H. Comme $\nu \ll \mu$ il en est de même de μ. L'hypothèse que μ est fortement continue implique que H doit être un sous-groupe ouvert, donc que Λ est compact.

Considérons une suite généralisée de caractères γ_j tendant vers l'infini dans Γ et vers h dans $\overline{\Gamma}(\mu)$. On a aussi $h = \lim h\gamma_j$ et la convergence a lieu pour la topologie forte puisque $|h\gamma_j| = h$. A partir d'un certain rang

$$\int |\gamma_j - 1| \, d|\nu| = \int |\gamma_j h - h| \, d|\mu| < 1-\varepsilon$$

et pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$|\hat{\nu}(\gamma_j\gamma) - \hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \int |\gamma_j - 1| \, d|\nu| < 1-\varepsilon .$$

Compte tenu de la nature de ν, ceci implique que $\hat{\nu}(\gamma_j\gamma) \sim \hat{\nu}(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma)$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, γ_j appartient au stabilisateur Λ de $E_1(\nu)$. Λ étant compact ceci est une contradiction, ce qui termine la démonstration.

<u>Lemme 5</u> : Il existe une constante absolue $C > 0$, telle que, pour toute mesure μ ε-quasi-idempotente fortement continue et tout $\chi \in \overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ pour lequel $\chi\mu$ n'est pas triviale, on ait

$$\|\mu - |\chi|\mu\| \geq \frac{C}{2}|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\chi \in \overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ tel que $E_1(\chi\mu) \neq \emptyset$. Il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $|\int \gamma_0 \chi \, d\mu| \geq 1$ et donc $\chi \in \overline{E_1(\gamma_0\mu)}$. Comme

$$\|\gamma_0\mu - |\chi|\gamma_0\mu\| = \|\mu - |\chi|\mu\|,$$

quitte à remplacer μ par $\gamma_0\mu$ dans la démonstration, on peut supposer que $\chi \in \overline{E_1(\mu)}$.

D'après le lemme 4, on a nécessairement $|\chi|^2 < |\chi|$. La suite $|\chi|^{2k}$ converge dans $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ vers un élément h idempotent et tel que $|\chi h| = h$. L'élément χh est dans $\overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ et de module idempotent ; il appartient donc nécessairement à $\overline{E_0(\mu)}$. Comme $\chi h = \lim\limits_{k\to+\infty} \chi|\chi|^{2k}$ et que $\overline{E_0(\mu)}$ est ouvert, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que

$$\left|\int \chi|\chi|^{2k} \, d\mu\right| \leq \varepsilon \qquad (k > k_0)$$

On peut choisir pour k_0 le plus petit entier ayant cette propriété. On aura donc

$$\left|\int \chi|\chi|^{2k_0} \, d\mu\right| \geq 1$$

Considérons la mesure $\nu = |\chi|^{2k_0}(\mu - |\chi|^2\mu)$. Elle est telle que

$$\left|\int \chi \, d\nu\right| = \left|\int \chi|\chi|^{2k_0} \, d\mu - \int \chi|\chi|^{2k_0+2} \, d\mu\right| \geq 1-\varepsilon$$

tandis que, pour tout $\ell \geq 1$,

$$\left|\int \chi|\chi|^{2\ell} \, d\nu\right| = \left|\int \chi|\chi|^{2k_0+2\ell} d\mu - \int \chi|\chi|^{2k_0+2\ell+2} d\mu\right| \leq 2\varepsilon.$$

Si l'on suppose $2\varepsilon < 1-\varepsilon$, on est dans la situation du lemme 2 à ce détail près que l'on a $1-\varepsilon$ au lieu de 1. Remplaçant ν par $(1-\varepsilon)^{-1}\nu$, on aura en conclusion

$$\|\nu\| \geqslant C(1-\varepsilon)\left|\operatorname{Log}\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right|$$

où C est la constante du lemme 2. Si $2\varepsilon \geqslant 1-\varepsilon$ on peut utiliser la minoration évidente $\|\nu\| \geqslant 1-\varepsilon$ (*). Dans tous les cas

$$\|\nu\| \geqslant C'|\operatorname{Log}\varepsilon|$$

où C' une constante < C qui peut être prise arbitrairement voisine de C si l'on se borne à considérer des valeurs de ε assez petites. De là

$$\|\mu - |\chi|^2\mu\| \geqslant \|\nu\| \geqslant C'|\operatorname{Log}\varepsilon| .$$

Pour obtenir le lemme 5 il suffit d'utiliser l'inégalité suivante valable quel que soit χ :

$$\|\mu - |\chi|^2\mu\| = \int (1-|\chi|^2)\, d|\mu| \leqslant 2\int (1-|\chi|)\, d|\mu|$$
$$\leqslant 2\|\mu - |\chi|\mu\|$$

<u>Démonstration du théorème 4</u> :

Supposons que $E_1(\mu)$ contienne $A_1A_2\ldots A_n$ où les ensembles A_j sont des parties infinies de Γ, $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Soit $\phi_j \in \overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ adhérent à A_j dans $\overline{\Gamma}(\mu)$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Le produit $\phi_1\phi_2\ldots\phi_n$ est adhérent à $A_1A_2\ldots A_n$ et par suite $\left|\int \phi_1\phi_2\ldots\phi_n\, d\mu\right| \geqslant 1$.

Posons

$$\mu_0 = \mu$$
$$\mu_k = \phi_k\mu_{k-1} = \phi_1\ldots\phi_k\mu \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) .$$

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$ la mesure μ_k est non triviale. En effet $E_1(\mu_k)$ contient $\phi_{k+1}\ldots\phi_n$ puisque

---

(*) Cette minoration donnerait le résultat du théorème 4 avec $n > 2(\|\mu\|-1)/(1-\varepsilon)$ comme dans [7], ce qui est une bonne estimation pour les valeurs de ε proches de 1.

$$\int \phi_{k+1} \ldots \phi_n \, d\mu_k = \int \phi_1 \ldots \phi_n \, d\mu$$

Selon le lemme 5

$$\|\mu_{k-1} - |\phi_k| \mu_{k-1}\| \geqslant \frac{C}{2} \, |\mathrm{Log}\, \varepsilon|$$

$$\int d|\mu_{k-1}| - \int d|\mu_k| \geqslant \frac{C}{2} \, |\mathrm{Log}\, \varepsilon|$$

et en sommant,

$$\int d|\mu| - \int d|\mu_n| \geqslant n \frac{C}{2} |\mathrm{Log}\, \varepsilon|$$

On peut, en outre, remarquer que

$$\int d|\mu_n| = \int |\phi_1 \ldots \phi_n| \, d|\mu| \geqslant \left| \int \phi_1 \ldots \phi_n \, d\mu \right| \geqslant 1$$

On en conclut que, nécessairement,

$$\|\mu\| - 1 \geqslant n \frac{C}{2} |\mathrm{Log}\, \varepsilon|$$

Ceci termine la démonstration du théorème 4.

3 - Compléments et questions connexes

3.1 - Mesures ε-quasi-idempotentes à l'infini :

(3.1.1) Exercice : Soit $\mathfrak{J}$ un idéal fermé du semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$. On suppose qu'une mesure $\mu \in M(G)$ a la propriété suivante : pour tout $\chi \in \mathfrak{J}$, ou bien $\left|\int \chi \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon$, ou bien $\left|\int \chi \, d\mu\right| \geqslant 1$. On suppose de plus qu'il existe au moins un $\chi \in \mathfrak{J}$ pour lequel $\left|\int \chi \, d\mu\right| \geqslant 1$. Alors si $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\, \varepsilon|$ la conclusion du théorème 2 reste valable.

Dans la démonstration on considérera un élément ϕ de module minimal dans $\overline{E_1(\mu)} \cap \mathfrak{J}$. Le même argument que précédemment (compte-tenu de la propriété d'idéal) montre que $|\phi|^2 = |\phi|$. On remarque d'ailleurs que ϕ est également de module minimal dans $\overline{E_1(\mu)}$ car tout $\chi \in \bar{\Gamma}(\mu)$ de module $|\chi| \leqslant |\phi|$ s'écrit $\chi = \phi\bar{\phi}\chi$ et appartient donc à $\mathfrak{J}$. La fin de la démonstration est identique.

(3.1.2) Si l'on prend $\mathcal{J} = \overline{\Gamma}_\infty(\mu)$ la propriété envisagée pour μ revient à dire que l'ensemble des valeurs d'adhérence à l'infini de la transformée de Fourier de μ est constitué de deux parties disjointes, l'une contenue dans $|z| \leqslant \varepsilon$, l'autre dans $|z| \geqslant 1$. On dira que μ est <u>ε-quasi-idempotente à l'infini</u>. On dira aussi que μ est non triviale si la partie contenue dans $|z| \geqslant 1$ n'est pas vide. On peut donc énoncer :

(3.1.3) Le théorème 2 reste valable (avec la même constante C) pour une mesure μ ε-quasi-idempotente à l'infini, non triviale.

(3.1.4) Il existe une variante du théorème 3 pour les mesures <u>ε-idempotentes à l'infini</u> (définition naturelle cf (3.1.2)). Avec la même condition de norme on établirait par les mêmes méthodes, que $\hat{\mu} \sim \hat{\eta} + \hat{\nu}$ avec $\eta^2 = \eta$ et $\nu \in M_0(G)$, ou encore que $\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\eta}(\gamma)$ en dehors d'un compact de Γ.

3.2 - <u>Un lemme de Rajchman quantitatif</u>. <u>La notion d'ensemble de continuité</u>

On peut déduire du lemme 2 des résultats généraux qui sortent du cadre des mesures quasi-idempotentes ; ainsi le théorème suivant.

<u>Théorème 5</u> : $(G = \mathbb{T}, \mathbb{R})$. Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ de norme $\leqslant 1$, l'implication suivante est vraie :

$$\overline{\lim_{\gamma \to -\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon\, e^{-1/C\varepsilon} \implies \overline{\lim_{\gamma \to +\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon$$

où C est la constante du lemme 2 (qui peut être prise arbitrairement proche de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pour les petites valeurs de ε).

<u>Démonstration</u> : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure de norme $\leqslant 1$ pour laquelle la propriété du théorème est en défaut. En utilisant les notations et le résultat du théorème 8 chapitre II, on voit qu'il existerait alors $\chi \in \overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ pour lequel $\left|\int \chi \, d\mu\right| \geqslant \varepsilon$ tandis que, pour tout entier $m \geqslant 1$, $|\chi|^{2m}\chi$ étant dans $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$, on aurait

$$\left|\int |\chi|^{2m} \chi \, d\mu\right| < \varepsilon \, e^{-1/C\varepsilon} \qquad (m \geqslant 1)$$

Ceci est impossible si $\|\mu\| \leqslant 1$: on vérifie sans peine qu'il s'agit là d'une simple reformulation du lemme 2.

(3.2.1) Pour toute partie E de Γ et pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on note $\delta_E(\varepsilon)$ la borne inférieure des nombres $\delta > 0$ pour lesquels il existe une mesure $\mu \in M(G)$ de norme $\leqslant 1$, telle que $\overline{\lim}_{\gamma \notin E} |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta$ et $\overline{\lim} |\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \varepsilon$. Un ensemble pour lequel $\delta_E(\varepsilon) > 0$ est appelé <u>ensemble de continuité</u>. Cette terminologie apparaît plus naturelle si l'on reformule la propriété comme dans le théorème 5. De fait il résulte du théorème 5 que $\mathbb{Z}^+$ (ou $\mathbb{Z}^-$), $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}^-$) sont des exemples de tels ensembles dans les groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Les ensembles de continuité étudiés notamment par L. PIGNO et J. FOURNIER [15] [2] sont complètement caractérisés au chapitre VI. On y trouvera des estimés généraux précis de $\delta_E(\varepsilon)$. Bornons nous à faire ici la remarque suivante.

(3.2.2) <u>Remarque</u> : Le théorème 5 ne peut pas être substantiellement amélioré. De façon précise, pour $E = \mathbb{Z}^+$ (ou $\mathbb{Z}^-$) dans $\mathbb{Z}$ et pour $E = \mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}^-$) dans $\mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon(1+\sqrt{2})^{-1/\varepsilon^{-1}} < \delta_E(\varepsilon) < e^{-1/2\varepsilon^{+2}} .$$

La majoration résulte de la construction faite dans [13] p. 144 d'une mesure particulière qui est une intégrale de produits de Riesz.

On peut cependant renforcer un peu l'implication qui figure dans l'énoncé du théorème en remplaçant $\overline{\lim}_{\gamma \to -\infty} |\hat{\mu}(\gamma)|$ par le rayon de $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ où l'on désigne par $A^+(\mu)$ (resp. $A^-(\mu)$) l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\hat{\mu}(\gamma)$ lorsque γ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). En effet si l'on reprend l'argument du théorème, on voit que pour $m \geqslant 1$, $|\chi|^{2m}\chi$ appartient en fait à $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu) \cap \overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$ et que, par suite, $\int |\chi|^{2m}\chi d\mu$ est une valeur de $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$.

(3.2.3) <u>Exercice</u> : Le théorème 5 et la remarque (3.2.2) restent valables dans le cas où Γ est un groupe ordonné archimédien, si les limites vers $+\infty$ ou $-\infty$ s'entendent pour la topologie de l'ordre (ou ce qui revient au même, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ si l'on plonge Γ dans $\mathbb{R}$ (cf [19])). La démonstration est exactement la même si l'on convient de modifier les notations comme indiqué au chapitre II-(6.3.1).

3.3 - Une propriété générale des mesures continues ($G = \mathbb{T}$, $\mathbb{R}$)

Soient E et F des parties de Γ ($= \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$) avec $E \subset F$. Nous dirons que E est relativement dense dans F s'il existe $T > 0$ tel que $F \subset E + [-T,T]$.

On s'intéresse ici aux mesures μ continues dont la transformée de Fourier ne tend pas vers zéro à l'infini. On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\hat{\mu}| \leqslant \varepsilon$ sur des intervalles arbitrairement grands ; autrement dit l'ensemble $E(\mu,\varepsilon)$ n'est pas relativement dense dans Γ, où l'on note, comme dans le chapitre II,

$$E(\mu,\varepsilon) = \{\gamma \ ; \ \gamma \in \Gamma \ , \ |\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon\}$$

On peut donner une version beaucoup plus forte de cette propriété.

Théorème 6 : ($G = \mathbb{T},\mathbb{R}$). Soit $\mu \in M(G)$ une mesure continue dont la transformée de Fourier ne tend pas vers 0 à l'infini. Soient $0 < \varepsilon' < \varepsilon < \lim|\hat{\mu}(\gamma)|$. L'ensemble $E(\mu,\varepsilon)$ n'est pas relativement dense dans $E(\mu,\varepsilon')$ dès que $\varepsilon' < \varepsilon\, c^{-\|\mu\|/\varepsilon}$, où c est une constante absolue (qui peut être prise arbitrairement voisine par excès de $1+\sqrt{2}$ pour les petites valeurs de $\varepsilon/\|\mu\|$).

Démonstration : C'est la même pour la droite ou le cercle. Prenons $\mathbb{R}$ pour fixer les idées. Pour concilier la notation multiplicative du groupe des caractères avec la notation additive usuelle de $\mathbb{R}$, nous distinguerons un nombre réel x du caractère γ_x défini par $\gamma_x(t) = e^{ixt}$; mais nous écrirons $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(\gamma_x)$.

Supposons que l'on ait $E(\mu,\varepsilon') \subset E(\mu,\varepsilon) + [-T,T]$ pour un certain $T > 0$. Puisque μ est continue on peut trouver des intervalles disjoints arbitrairement grands $[a_j,b_j]$ sur lesquels $|\hat{\mu}(x)| \leqslant \varepsilon'$, séparés par des points où $|\hat{\mu}(x)| > \varepsilon$. on peut choisir les intervalles $[a_j,b_j]$ maximaux de telle sorte que les extrémités a_j et b_j seront à une distance $\leqslant T$ de $E(\mu,\varepsilon)$. On peut supposer par exemple que $\lim a_j = +\infty$ et (quitte à prendre une sous-suite) $a_j \leqslant b_j - 2b_{j-1}$, ce qui assure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on aura

$$(3.3.1) \qquad a_j \leqslant b_j - b_{j-1} + x \leqslant b_j$$

pour j assez grand. On peut également supposer que γ_{b_j} converge dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ vers un élément χ et que $\gamma_{b_j-b_{j-1}} = \gamma_{b_j}\bar{\gamma}_{b_{j-1}}$ converge vers $|\chi|^2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int |\chi|^2 \gamma_x \, d\mu = \lim \int \gamma_{b_j-b_{j-1}} \gamma_x \, d\mu = \lim \hat{\mu}(b_j-b_{j-1}+x) .$$

D'après (3.3.1) on aura donc

$$\left|\int |\chi|^2 \gamma_x \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon' \qquad (x \in \mathbb{R})$$

et par passage à la limite,

$$(3.3.2) \qquad \left|\int |\chi|^2 \Psi \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon'$$

pour tout $\Psi \in \bar{\Gamma}(\mu)$.

D'autre part, pour tout j, on peut trouver $t_j \in [-T,T]$ tel que $|\hat{\mu}(b_j+t_j)| > \varepsilon$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut admettre que t_j converge vers t pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$; a fortiori γ_{t_j} converge vers γ_t dans $L^1(\mu)$. Ecrivons

$$\left|\int \chi\gamma_t \, d\mu - \int \gamma_{b_j}\gamma_{t_j} \, d\mu\right| \leqslant \left|\int \chi\gamma_t \, d\mu - \int \gamma_{b_j}\gamma_t \, d\mu\right| + \int |\gamma_t - \gamma_{t_j}| \, d|\mu| .$$

Ceci montre que

$$\int \chi\gamma_t \, d\mu = \lim \int \gamma_{b_j}\gamma_{t_j} \, d\mu = \lim \hat{\mu}(b_j + t_j)$$

et, par suite,

$$\left|\int \chi\gamma_t \, d\mu\right| \geqslant \varepsilon \ .$$

L'élément $\phi = \chi\gamma_t$ de $\bar{\Gamma}(\mu)$ est donc tel que

$$\left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant \varepsilon$$

tandis qu'on déduit de (3.3.2) en prenant $\Psi = \phi^m(\bar{\phi})^{m-1}$

$$\left|\int |\phi|^{2m} \phi \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon' \qquad (m \geqslant 1) \ .$$

On conclut en utilisant le lemme 2 (où l'on remplace ε par ε'/ε et μ par μ/ε). On aura une contradiction si $\|\mu\|/\varepsilon < C|\mathrm{Log}(\varepsilon'/\varepsilon)|$ où C est une constante absolue pour laquelle le lemme 2 est valable. Ceci démontre le théorème 6 avec $c = e^{1/C}$. (Si on se reporte à la discussion (1.6.3) on voit qu'on peut prendre la constante C voisine par défaut de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pour les petites valeurs de ε'/ε, donc pour les petites valeurs de $\varepsilon/\|\mu\|$).

4 - Mesures semi-idempotentes (Γ ordonné archimédien)

4.1 - Le théorème de KESSLER

Définition 4 : Une mesure $\mu \in M(G)$ est dite semi-idempotente si $\hat{\mu}(\gamma)$ est à valeurs O ou 1 lorsque $\gamma \in \Gamma^+$. Plus généralement on peut considérer des mesures μ telle que $\hat{\mu}(\Gamma^+)$ soit fini. On conviendra de dire que μ est triviale si $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ $(\gamma \in \Gamma^+)$.

Théorème 5 (KESSLER [8]) : Toute mesure $\mu \in M(G)$ dont la transformée de Fourier ne prend dans Γ^+ qu'un nombre fini de valeurs est somme finie de mesures élémentaires et d'une mesure semi-idempotente triviale, deux à deux étrangères.

Démonstration : On sait (cf [19] p.196) que Γ peut être identifié à $\mathbb{R}$ ou à un sous-groupe de $\mathbb{R}_d$ (où $\mathbb{R}_d$ désigne le groupe des nombres réels avec la topologie discrète). Le théorème étant évident et sans intérêt dans le cas de $\mathbb{R}$, seul le deuxième cas sera considéré. Pour concilier la notation multiplicative de Γ et l'écriture additive usuelle de $\mathbb{R}$, nous conviendrons de noter γ_x l'élément de Γ correspondant à un nombre réel x.

Comme on l'a déjà remarqué ailleurs (chapitre II-(4.1)) on peut se ramener au cas où $\hat{\mu}(\Gamma^+) \subset \mathbb{Z}$, ce qui est commode pour faire une démonstration par récurrence.

Tout d'abord on peut utiliser le théorème 10 du chapitre II. Avec les notations de ce théorème, $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ est fini et μ est donc somme finie de mesures élémentaires et d'une mesure μ' dont la transformée de Fourier tend vers O à l'infini dans $\mathbb{R}$. Ici on voit par différence, que $\hat{\mu}'(\gamma)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans Γ^+ et donc, nécessairement,

$$\hat{\mu}'(\gamma_x) = 0 \qquad \text{si } x \geqslant a$$

pour un certain réel $a > 0$. On est ramené à démontrer le théorème 6 pour une mesure de cette forme.

Nous pouvons nous inspirer de la démonstration du théorème 2 et commencer par donner un analogue du lemme 1. Mais la situation est plus simple ici comme on va voir.

On introduit $\overline{\Gamma^+}(\mu)$ adhérence de Γ^+ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. C'est clairement un semi-groupe qui contient les éléments positifs (cf chap.II-(6.1)). Désignons par $E_0^+(\mu)$ et $E_1^+(\mu)$ les parties de Γ^+ dans lesquelles $\hat{\mu}(\gamma)=0$ et $\hat{\mu}(\gamma)=1$ (respectivement). $\overline{\Gamma^+}(\mu)$ est réunion disjointe de leurs adhérences.

$$\overline{E_0^+(\mu)} = \{\chi \ ; \ \chi \in \overline{\Gamma^+}(\mu), \ \int \chi \, d\mu = 0\}$$
$$\overline{E_1^+(\mu)} = \{\chi \ ; \ \chi \in \overline{\Gamma^+}(\mu), \ \int \chi \, d\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

<u>Lemme 6</u> : (Γ sous-groupe de $\mathbb{R}_d$) : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure dont la transformée de Fourier est à valeurs entières dans Γ^+ et nulle à droi-

te de $a > 0$, mais non triviale. Alors

a) $\Gamma(\mu)$ est discret et isomorphe à Γ ;

b) l'ensemble des éléments de $\bar{\Gamma}(\mu)$ de module 1 est réduit à $\Gamma(\mu)$.

Démonstration : Plus précisément, vérifions que, quels que soient γ et γ' éléments distincts de Γ, on a

$$\int |\gamma-\gamma'| \, d|\mu| \geqslant 1 . \tag{4.1.1}$$

Dans le cas contraire il existerait deux réels distincts x et x' tels que $\int |\gamma_x - \gamma_{x'}| \, d|\mu| < 1$. Supposons par exemple que $x < x'$ et posons $b = x'-x$. On en déduirait que, pour tout $\gamma_y \in \Gamma$,

$$|\hat{\mu}(\gamma_y) - \hat{\mu}(\gamma_{y+b})| \leqslant \int |\gamma_y - \gamma_{y+b}| \, d|\mu| < 1$$

et comme $\hat{\mu}(\Gamma^+) \subset \mathbb{Z}$

$$\hat{\mu}(\gamma_y) = \hat{\mu}(\gamma_{y+b}) \qquad \text{si } y \geqslant 0 .$$

Or $\hat{\mu}(\gamma_y) = 0$ si $y \geqslant a$; on en concluerait donc que μ est triviale contrairement à l'hypothèse. Ceci démontre (4.1.1) et ainsi (a). Pour établir (b) à partir de (4.1.1) il suffit de rappeler que sur l'ensemble des éléments de module 1 de $\bar{\Gamma}(\mu)$, les topologies forte et faible coïncident.

Fin de la démonstration du théorème 6 :

On considère une mesure $\mu \in M(G)$ dont la transformée de Fourier est à valeurs entières dans Γ^+ et nulle à droite de $a > 0$. On la suppose non triviale ; le compact $\overline{E_1^+(\mu)}$ n'est pas vide et possède un élément ϕ de module minimal. Vérifions que $|\phi|^2 = |\phi|$. Dans le cas contraire on aurait $|\phi|^2 < |\phi|$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $|\phi|\phi|^{2k}| < |\phi|$. L'élément $\phi|\phi|^{2k}$ étant dans $\overline{\Gamma^+}(\mu)$, appartiendrait nécessairement à $\overline{E_0^+(\mu)}$ à cause de la minimalité de $|\phi|$ et on aurait donc

$$\int \phi|\phi|^{2k} \, d\mu = 0 \qquad (k \geqslant 1)$$

tandis que

$$\left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant 1$$

ce qui est impossible d'après le lemme 2 (avec ε arbitrairement petit).

Notons désormais $h = |\phi| = |\phi|^2$ et considérons la mesure $\nu = h\mu$. Vérifions tout d'abord qu'elle est de même nature que μ. En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma^+$, γh appartient à $\overline{\Gamma^+}(\mu)$ et $\hat{\nu}(\gamma) = \int \gamma h \, d\mu$ est à valeurs entières. D'autre part h est limite dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ d'une suite généralisée γ_{x_j} d'éléments de Γ^+. Pour tout $\gamma_x \in \Gamma$ tel que $x \geqslant a$, on aura quel que soit j, $x + x_j \geqslant a$ et par suite

$$\hat{\nu}(\gamma_x) = \int \gamma_x h \, d\mu = \lim \int \gamma_{x+x_j} \, d\mu = 0.$$

Enfin ϕ est un élément de $\overline{\Gamma^+}(\mu)$ qui est tel que $\phi = \phi h$, ce qui permet d'écrire

$$\int \phi \, d\nu = \int \phi h \, d\mu \neq 0$$

et prouve que ν n'est pas triviale. La mesure ν vérifie donc les hypothèses du lemme 5. Toute suite généralisée de caractères γ_{x_j} convergeant vers h dans $\bar{\Gamma}(\mu)$, converge (fortement) vers 1 dans $\Gamma(\nu)$ et d'après le lemme 6-(a) $\gamma_{x_j} = 1$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $h = 1$ et que $\mu = \nu$; de plus tout élément de $\overline{E_1^+(\mu)}$ est de module 1. $\overline{E_1^+(\mu)}$ est compact et discret, $\overline{E_1^+(\mu)} = E_1^+(\mu)$ est une partie finie de Γ^+. Considérons alors la mesure

$$\eta = \sum_{\gamma \in E_1^+(\mu)} \hat{\mu}(\gamma) \bar{\gamma} \, m_G$$

Sa transformée de Fourier est à valeurs entières et coïncide avec $\hat{\mu}$ dans Γ^+. Ceci termine la démonstration du théorème 6.

4.2 - Compléments

L'intérêt des méthodes développées jusqu'ici est qu'il est facile de les adapter pour traiter un grand nombre de situations voisines et obtenir des variantes des résultats précédents. Nous ne détaillerons pas autant que nous l'avions fait au chapitre II, supposant que le lecteur est désormais familiarisé avec notre point de vue.

On peut envisager le cas de mesures semi-ε-quasi-idempotentes ou <u>semi-ε-idempotentes</u> (i.e. les propriétés des définitions 2 et 3 sont vérifiées sur Γ^+ seulement). Pour celà il est commode de reprendre un instant les notations du chapitre II-(6.3) et désigner par $\overline{\Gamma^+_\infty}(\mu)$ (resp. $\overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$ l'idéal de $\bar{\Gamma}(\mu)$ constitué des éléments qui sont limites de suites généralisées de caractères tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans Γ pour la topologie de l'ordre (i.e. dans $\mathbb{R}$ lorsqu'on identifie Γ à un sous-groupe de $\mathbb{R}$). De même on notera $A^+(\mu)$ (resp. $A^-(\mu)$) l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\hat{\mu}(\gamma)$ lorsque γ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans $\mathbb{R}$.

(4.2.1) <u>Exercice</u> : Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $\mu \in M(G)$ une mesure telle que $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ soit constitué de deux parties disjointes, l'une contenue dans $|z| \leqslant \varepsilon$, l'autre dans $|z| \geqslant 1$; on suppose que cette dernière est non vide, autrement dit que le rayon de $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ est $\geqslant 1$. Alors, si $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$, la conclusion du théorème 2 reste valable (avec la même constante C). Il suffit d'appliquer l'exercice (3.1.1) au cas de l'idéal $\mathfrak{J} = \overline{\Gamma^+_\infty}(\mu) \cap \overline{\Gamma^-_\infty}(\mu)$.

On peut remarquer que, si la condition de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ est réalisée, le rayon de $A^+(\mu) \cap A^-(\mu)$ sera $\geqslant 1$ si et seulement si le rayon de $A^+(\mu)$ (resp. $A^-(\mu)$) est $\geqslant 1$. Ceci résulte du théorème 5 et des remarques (3.2.2) et (3.2.3), (à la normalisation de la mesure près).

<u>Théorème 7</u> : Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que pour toute mesure $\mu \in M(G)$ semi-ε-idempotente de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$, il existe une mesure idempotente η pour laquelle

$$|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\eta}(\gamma)| \leqslant \varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma^+)$$

(C peut être prise arbitrairement proche par défaut de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$

pour les petites valeurs de ε).

<u>Démonstration</u> : On adapte les démonstrations du théorème 3 et du théorème 6 dont on reprend les notations. $A^+(\mu)$ est constitué de deux parties disjointes, l'une contenue dans $|z| \leqslant \varepsilon$, l'autre dans $|z| \geqslant 1-\varepsilon$. Dans le cas où cette dernière partie n'est pas vide, on peut tout d'abord utiliser l'exercice (4.2.1). La conclusion du théorème 2 est valable avec une condition de norme $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\, \varepsilon|$ où C est une constante qui peut être prise arbitrairement proche par défaut de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pour les petites valeurs de ε (comme en (1.5)). On peut alors écrire $\mu = \mu_1 + \nu_1$ avec $|\hat{\mu}_1(\gamma) - \hat{\eta}_1(\gamma)| \leqslant \varepsilon$, $(\gamma \in \Gamma)$, où η_1 désigne une mesure idempotente non nulle. Par différence $\hat{\nu}_1(\gamma)$ est à valeurs entières à 2ε-près sur Γ^+. De plus μ_1 et ν_1 sont étrangères et comme $\|\mu_1\| \geqslant 1-\varepsilon$, on a $\|\nu_1\| \leqslant \|\mu\| - (1-\varepsilon)$. Dans le cas où le rayon de $A^+(\nu_1)$ n'est pas $\leqslant 2\varepsilon$, on peut recommencer le raisonnement en remplaçant μ par ν_1 et ε par 2ε, ceci à condition d'avoir $2\varepsilon < 1/2$ et $\|\nu_1\| < C|\mathrm{Log} 2\varepsilon|$.

Supposons que l'on ait pu ainsi effectivement itérer n fois le raisonnement jusqu'à obtenir une décomposition

(4.2.2) $$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n + \nu_n$$

en somme de mesures deux à deux étrangères, avec pour $1 \leqslant j \leqslant n$,

(4.2.3) $$|\hat{\mu}_j(\gamma) - \hat{\eta}_j(\gamma)| \leqslant 2^{j-1}\varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

où η_j désigne une mesure non nulle dont la transformée de Fourier est à valeurs entières. Ceci suppose en particulier que $2^{n-1}\varepsilon < 1/2$ et par suite, comme $\|\mu_j\| \geqslant 1-2^{j-1}\varepsilon$,

$$\|\nu_n\| \leqslant \|\mu\| - \sum_{j=1}^{n} (1-2^{j-1}\varepsilon) = \|\mu\| - n + (2^n-1)\varepsilon$$

(4.2.4) $$\|\nu_n\| \leqslant \|\mu\| - n + 1 - \varepsilon$$

On en déduit notamment que n ne peut dépasser la partie entière N de $\|\mu\| + 1 - \varepsilon$. Or la condition initiale sur $\|\mu\|$ nous assure que tant que

$n \leqslant N$, on aura bien $2^n\varepsilon < 1/2$ et

(4.2.5) $$\|\mu\| - n + 1 - \varepsilon < C|\mathrm{Log}\ 2^n\varepsilon|$$

(La vérification est immédiate avec une constante C voisine de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$; elle est laissée au lecteur). Par conséquent il est sur que pour un certain entier $n \leqslant N$ on obtiendra une décomposition (4.2.2) avec une mesure ν_n tel que le rayon de $A^+(\nu_n)$ soit $\leqslant 2^n\varepsilon$ (sans quoi, toutes les autres hypothèses étant vérifiées, on pourrait poursuivre le raisonnement au delà du rang N).

Nous allons ensuite démontrer l'existence d'une mesure η_{n+1} dont la transformée de Fourier est à valeurs entières et telle que

(4.2.6) $$|\hat{\nu}_n(\gamma) - \hat{\eta}_{n+1}(\gamma)| \leqslant 2^n\varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma^+)$$

Si l'on admet ce résultat, on termine comme suit. En tenant compte de (4.2.2), (4.2.3) et (4.2.6), on peut écrire

$$\mu = \eta_1 + \ldots + \eta_n + \eta_{n+1} + \nu$$

avec une mesure ν telle que

$$|\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} 2^{j-1}\varepsilon = 2^{n+1}\varepsilon - \varepsilon < 1-\varepsilon \qquad (\gamma \in \Gamma^+)$$

ce qui implique aussitôt, vu la nature de μ, que $|\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$, et le théorème est démontré.

Reste à démontrer l'existence de η_{n+1}. On note que la mesure ν_n en question a sa transformée de Fourier à valeurs entières à $2^n\varepsilon$-près sur Γ^+, satisfait le condition de norme $\|\nu_n\| < C|\mathrm{Log} 2^n\varepsilon|$ d'après (4.2.4) et (4.2.5) et que le rayon de $A^+(\nu_n)$ est $\leqslant 2^n\varepsilon$. Si $|\hat{\nu}_n(\gamma)| \leqslant 2^n\varepsilon$ $(\gamma \in \Gamma^+)$ il n'y a rien à démontrer. Sinon on voit qu'on est en fait ramené à établir le théorème 7 pour une mesure μ dont la transformée de Fourier est à valeurs entières à ε-près sur Γ^+ et qui vérifie, outre la condition de norme, la propriété que le rayon de $A^+(\mu)$ est $\leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire

$$|\hat{\mu}(\gamma_x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } x \geqslant a$$

pour un certain $a > 0$. C'est une situation très analogue à celle du théorème 5 dont on va adapter brièvement les arguments.

Tout d'abord le lemme 6 s'étend à simple lecture au cas envisagé ici. (Remplacer 1 par $1-2\varepsilon$ dans (4.1.1)). On note ici $E_0^+(\mu)$ et $E_1^+(\mu)$ les parties de Γ^+ dans lesquelles $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1-\varepsilon$, respectivement. Avec ces notations la fin de la démonstration du théorème 6 s'adapte comme suit. On considère un élément ϕ de module minimal dans $E_1^+(\mu)$. Il s'agit de montrer que $|\phi|^2 = |\phi|$. Dans le cas contraire, pour tout $k \geqslant 1$, $|\phi|^{2k}\phi$ serait dans $E_0^+(\mu)$ c'est-à-dire

$$\left|\int |\phi|^{2k}\phi \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon \qquad (k \geqslant 1)$$

tandis que

$$\left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant 1-\varepsilon \quad .$$

Ceci est impossible, d'après le lemme 2, si l'on suppose $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ où C est la même constante que précédemment. Le reste de la démonstration est sans changement. On prouve que $E_1^+(\mu)$ est fini ; d'où l'on déduit immédiatement l'existence d'une mesure $\eta \in L(m_G)$ dont la transformée de Fourier est à valeurs entières et telle que

$$|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\eta}(\gamma)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } \gamma \in E_1^+(\mu)$$
$$\hat{\eta}(\gamma) = 0 \qquad \text{sinon} .$$

Ceci termine la démonstration du théorème 7.

5 - Ensembles "quasi-Cohen" et sous-espaces invariants par translation de C(G) (G compact) :

5.1 - Les éléments de "l'anneau des classes" sont parfois appelés "ensembles de Cohen". De là l'introduction par PELCZYNSKI de la terminologie "quasi-Cohen" [9] pour désigner les parties de Γ qui sont les supports de transformées de Fourier de mesures quasi-idempotentes. Ces ensembles apparaissent naturellement dans l'étude des sous-espaces invariants par translation de $C(G)$ ou $L^1(G)$.

Les sous-espaces invariants par translation de $C(G)$ ou $L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ sont définis par leur spectre de Fourier $E \subset \Gamma$. Ils consistent des fonctions ayant une série de Fourier de la forme $f \sim \sum_{\gamma \varepsilon E} a_\gamma \gamma$. Le sous-espace de $C(G)$ (resp. $L^p(G)$) correspondant à une partie E de Γ est noté $C_E(G)$ (resp. $L^p_E(G)$). Décrivons la situation dans $C(G)$.

Théorème 8 [9] :

a) Si $C_E(G)$ est un sous-espace complémenté de $C(G)$, alors E est un ensemble de Cohen (et réciproquement).

b) Si $C_E(G)$ est un quotient de $C(G)$, alors E est un quasi-Cohen.

(Le théorème peut être formulé de façon plus abstraite en faisant l'hypothèse que $C(G)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté (respectivement, un quotient) d'un espace $C(X)$ avec X compact).

Démonstration : La propriété (a) avait déjà été notée par VAROPOULOS. Supposons que $C_E(G)$ soit un sous-espace complémenté de $C(G)$ et soit P un projecteur sur $C_E(G)$. Désignons par T_x l'opérateur de translation par un élément $x \varepsilon G$. Il est facile de vérifier que l'opérateur $P' = \int T_{-x}\, P\, T_x \, dm(x)$ est également un projecteur d'image $C_E(G)$ et de plus qu'il commute avec les translations ; c'est donc un multiplicateur idempotent de $C(G)$. Les multiplicateurs de $C(G)$ étant définis par des mesures, il existe une mesure idempotente $\eta \varepsilon M(G)$ telle que $P'f = \eta * f$, $f \varepsilon C(G)$. En particulier pour tout $\gamma \varepsilon \overline{\Gamma}$, $\eta * \overline{\gamma} = \hat{\eta}(\gamma)\overline{\gamma}$ est dans $C_E(G)$. On a donc $\hat{\eta}(\gamma) = 1$ si $\gamma \varepsilon E$ et $\hat{\eta}(\gamma) = 0$ sinon. Ceci démontre (a) (la réciproque est immédiate).

Supposons maintenant que $C_E(G)$ soit un quotient de $C(G)$. Autrement dit, il existe une application linéaire continue Π de $C(G)$ sur $C_E(G)$. Tout caractère $\gamma \in E$ définit de façon naturelle un élément de $C_E(G)'$ de norme 1. L'application Π^* étant ouverte, il existe une constante $d > 0$ telle que $\|\Pi^*(\gamma)\|_{M(G)} \geqslant d$ si $\gamma \in E$.

En composant Π avec l'injection canonique de $C_E(G)$ dans $L^1_E(G)$ on aura une application 1-sommante. En effet pour un nombre fini de fonctions f_j de $C(G)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{n} \|\Pi(f_j)\|_1 = \int \Big(\sum_{j=1}^{n} |\Pi(f_j)|\Big) dm \leqslant \sup_{x\in G} \Sigma|\Pi(f_j)(x)|$$

$$\leqslant C \sup_{\substack{\mu\in M(G)\\ \|\mu\|=1}} \sum_{j=1}^{n} \Big|\int f_j \, d\mu\Big| = C \sup_{x\in G} \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|$$

où C est la norme de Π (la dernière inégalité résulte du fait que, pour tout $x \in G$, $f \longrightarrow \Pi(f)(x)$ est une forme linéaire continue sur $C(G)$ de norme $\leqslant C$). On considère dans $C(G)$ le convexe K des éléments g qui s'écrivent $g(x) = C\,\Sigma|f_j(x)|$ avec $\Sigma\|\Pi(f_j)\|_1 = 1$. Tout élément de K est de norme $\|g\|_\infty \geqslant 1$ et il existe donc une mesure positive $\nu \in M(G)$ de masse 1 telle que $\int g \, d\nu \geqslant 1$ si $g \in K$. En prenant en particulier $g = C|f|/\|\Pi(f)\|_1$, on aura

$$\|\Pi(f)\|_1 \leqslant C\int |f| \, d\nu \qquad (f \in C(G)).$$

Π se prolonge en une application continue Π_1 de $L^1(\nu)$ dans $L^1_E(G)$ (c'est le "théorème de factorisation de PIETSCH"). Notons que Π_1^* envoie le dual de $L^1_E(G)$ dans $L^\infty(\nu)$ de telle sorte que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\Pi^*(\gamma) = \Pi_1^*(\gamma)\cdot\nu$ et en particulier, si $\gamma \in E$

$$d \leqslant \|\Pi^*(\gamma)\|_{M(G)} = \|\Pi_1^*(\gamma)\|_{L^1(\nu)} \leqslant \|\Pi_1^*(\gamma)\|_{L^2(\nu)} . \tag{5.1.1}$$

Considérons un polynôme trigonométrique $g(x) = \Sigma c_\gamma \gamma$ avec $c_\gamma \geqslant 0$ si $\gamma \in E$.

Etant donné des coefficients a_γ quelconques, définissons

$$g_1(x) = \sum_{\gamma \varepsilon E} a_\gamma \sqrt{c}_\gamma \gamma$$

et évaluons la norme de g_1 dans le dual de $L^1_E(G)$. Pour tout $f \varepsilon L^1_E(G)$ on peut écrire

$$\int g_1 f \, dm = \Sigma\, a_\gamma \sqrt{c}_\gamma \hat{f}(\gamma) \leqslant (\Sigma |a_\gamma|^2)^{1/2} (\Sigma\, c_\gamma |\hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2}$$

et

$$\Sigma\, c_\gamma |\hat{f}(\gamma)|^2 = g * f * \tilde{f}(0) \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1^2 .$$

Par conséquent la norme de g_1 dans $L^1_E(G)^*$ est majorée par $\|g\|_\infty^{1/2} (\Sigma |a_\gamma|^2)^{1/2}$ et donc

$$\|\Pi_1^*(g_1)\|_{L^\infty(\nu)} = \|\sum_{\gamma \varepsilon E} a_\gamma \sqrt{c}_\gamma \, \Pi_1^*(\gamma)\|_{L^\infty(\nu)} \leqslant C \|g\|_\infty^{1/2} (\Sigma |a_\gamma|^2)^{1/2} .$$

Ceci étant valable pour tout choix des a_γ, on en conclut que

$$\|\sum_{\gamma \varepsilon E} c_\gamma |\Pi_1^*(\gamma)|^2\|_{L^\infty(\nu)} \leqslant C^2 \|g\|_\infty$$

et, a fortiori,

$$\sum_{\gamma \varepsilon E} c_\gamma \|\Pi_1^*(\gamma)\|^2_{L^2(\nu)} \leqslant C^2 \|g\|_\infty .$$

Compte tenu de (5.1.1)

$$\sum_{\gamma \varepsilon E} c_\gamma \leqslant C^2 d^{-2} \|g\|_\infty .$$

On remarque que cette inégalité reste valable si l'on remplace $\|g\|_\infty$ par la norme de g dans le quotient $C(G)/C_{\Gamma \setminus E}(G)$. On en déduit que, dans cet espace, tout élément g du convexe engendré par les caractères de E est de norme $\geqslant C^{-2} d^2$. Il existe donc une mesure $\mu \varepsilon M(G)$ telle que $\int \gamma \, d\mu = 0$ si $\gamma \varepsilon \Gamma \setminus E$ et $|\int \gamma \, d\mu| \geqslant 1$ si $\gamma \varepsilon E$. Ceci termine la démonstration du théorème.

(5.1.2) Remarque : Dans le cas particulier où Π est un convoluteur de $C(G)$, écrivons $\Pi(f) = \mu * f$, $f \varepsilon C(G)$. La mesure μ est telle que $\mu * C(G) = C_E(G)$ est fermé. Par dualité $\mu * M(G)$ est fermé dans $M(G)$.

On est dans le cas envisagé au début du chapitre et E est un ensemble de Cohen. On peut donc espérer renforcer, en général, la proposition (b) du théorème 7. Pour l'instant le problème reste ouvert. On montre plus loin que si E et $\Gamma\setminus E$ sont des quasi-Cohen alors E est un ensemble de Cohen (chap. IV-7, cor. Th.10).

Soit E un quasi-Cohen qui n'est pas de Cohen. La fonction indicatrice 1_E n'est pas un multiplicateur de $L^1(G)\hat{}$; cependant c'est trivialement un multiplicateur de $L^2(G)\hat{} = L^2(\Gamma)$. On va facilement montrer que c'est aussi un multiplicateur de $L^p(G)\hat{}$ pour p assez voisin de 2. On peut envisager la situation suivante plus générale que celle des quasi-Cohen (cf (1.2.3)).

(5.1.3) <u>Exercice</u> : Soit E une partie de Γ pour laquelle on peut trouver ε, $0<\varepsilon<1/2$, et une mesure $\mu \in M(G)$ telle que

$$(5.1.4)\qquad \begin{cases} |\hat{\mu}(\gamma)-1| \leqslant \varepsilon & \text{si } \gamma \in E \\ |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon & \text{si } \gamma \in \Gamma\setminus E. \end{cases}$$

Alors il existe $p_o < 2$ tel que 1_E soit un multiplicateur de $L^p(G)\hat{}$ pour $p_o < p \leqslant 2$.

Supposons plus précisément que la propriété précédente puisse être réalisée pour ε arbitrairement petit avec $\|\mu\| = O(\varepsilon^{-a})$, où a désigne une constante > 0. Alors 1_E est un multiplicateur de $L^p(G)\hat{}$ pour $2-2/(a+2) < p \leqslant 2$. (On peut rapprocher ce résultat du théorème 3).

<u>Démonstration</u> : Toute mesure $\nu \in M(G)$ définit un convoluteur de $L^p(G)$, $p \geqslant 1$. Notons $r_p(\nu)$ le rayon spectral de ν dans l'algèbre des convoluteurs de $L^p(G)$. En particulier $r_1(\nu) = \|\nu\|$ et $r_2(\nu) = \|\nu\|_\infty$. Par interpolation $r_p(\nu) \leqslant \|\nu\|^\alpha \, \|\hat{\nu}\|_\infty^{1-\alpha}$ si $1/p = \alpha + (1-\alpha)/2$ avec $0<\alpha<1$. Pour une mesure μ ayant la propriété (5.1.4)

$$r_p(\mu^2-\mu) \leqslant \|\mu^2-\mu\|^{\alpha}\ \varepsilon^{2(1-\alpha)}$$

et on aura $r_p(\mu^2-\mu) < 1/4$ dès que α est assez petit, c'est-à-dire pour p assez proche de 2. On vérifie alors que le spectre de μ comme multiplicateur n'est pas connexe : il est réunion de deux parties disjointes contenues dans les disques $|z| < 1/2$ et $|z-1| < 1/2$. Par le théorème des idempotents de Chilov il existe un convoluteur idempotent T de $L^p(G)$ tel que $\hat{T}(\gamma) = 1$ si $|\hat{\mu}(\gamma)-1| < 1/2$ et $T(\gamma) = 0$ si $|\hat{\mu}(\gamma)| < 1/2$. En d'autres termes $\hat{T} = 1_E$;

Si la propriété (5.1.4) peut être réalisée avec $\|\mu\| = O(\varepsilon^{-a})$, pour tout α tel que $a\alpha < 1-\alpha$ aura $r_p(\mu^2-\mu) < 1/4$ en prenant ε assez petit et on concluera de la même façon.

(5.1.5) <u>Remarque</u> : Convenons de noter $Sp_p(\mu)$ le spectre d'une mesure μ considérée comme convoluteur de $L^p(G)$ $(p \geqslant 1)$. Dans l'exercice précédent on considère une mesure μ telle que $Sp_2(\mu) = \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$ ne soit pas connexe et la question est de savoir s'il en est de même de $Sp_p(\mu)$. On peut faire à ce sujet la remarque générale suivante.

Soit $K = \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$. Quel que soit le polynôme complexe P on doit avoir, avec les notations antérieures,

$$r_p(P(\mu)) \leqslant \Big(\sup_{|z|\leqslant\|\mu\|} |P(z)|\Big)^{\alpha}\Big(\sup_{z\in K} |P(z)|\Big)^{1-\alpha}.$$

Soit $z_o \notin K$. S'il existe un polynôme P tel que

$$|P(z_o)| > \Big(\sup_{|z|\leqslant\|\mu\|} |P(z)|\Big)^{\alpha}\Big(\sup_{z\in K}|P(z)|\Big)^{1-\alpha} \qquad (5.1.6)$$

alors on peut affirmer que z_o n'appartient pas à $Sp_p(\mu)$. (C'est cet argument qu'on utilise implicitement dans l'exercice précédent : en considérant le polynôme $z-z^2$ on montre que $Sp_p(\mu)$ ne contient pas les valeurs z telles que $|z-z^2| \geqslant 1/4$).

(5.1.7) <u>Exemple</u> : Considérons le produit de Riesz ρ_a introduit au chapitre II-7 avec $0 < a \leqslant 1/2$ ou $0 < a < 1$ suivant les cas.

Ici $K = \{a^k\}_{k\geq 1} \cup \{0\}$. Montrons que $Sp_p(\rho_a) = K$ pour tout $p > 1$. Pour $n \geq 1$ considérons le produit de Blashke

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a^k}{1-a^k z}$$

et montrons que pour tout α, $0 < \alpha < 1$ et pour tout $z_o \notin K$, on peut choisir n de façon que l'inégalité (5.1.6) soit satisfaite. Comme $|P_n(z)| \leq 1$ dans le disque unité et que $P_n(a^k) = 0$ si $1 \leq k \leq n$, il s'agit de montrer que

$$(5.1.8) \qquad |P_n(z_o)| > (\sup_{m>n} |P_n(a^m)|)^{1-\alpha}$$

En utilisant les majorations évidentes (pour $|z| \leq 1$)

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a^k) \prod_{k=1}^{n} |z-a^k| \leq |P_n(z)| \leq (1-|z|)^{-n} \prod_{k=1}^{n} |z-a^k|$$

on voit que

$$\sup_{m>n} |P_n(a^m)| \leq (1-a^{n+1})^{-n} \prod_{k=1}^{n} a^k \leq C\, a^{n^2/2}$$

et, si $|z_o - a^k| \geq d > 0$ pour tout $k \geq 1$,

$$|P_n(z_o)| \geq \prod_{k=n}^{n} (1+a^k)\, d^n \geq C' d^n$$

où C et C' désignent les constantes > 0. Il est immédiat que (5.1.8) sera donc réalisée si l'on prend n assez grand.

On peut déduire en particulier de la propriété que nous venons d'établir, que 1_E sera un multiplicateur de $L^p(G)\hat{}$ pour tout $p > 1$ si E est l'ensemble des mots de longueur $\leq n$, ou l'ensemble des mots de longueur n, du produit de Riesz ρ_a (dans ce cas la propriété résulte aussi du fait que E est ensemble $\Lambda(p)$ pour tout $p > 1$ d'après un théorème de A. BONAMI cf [20] p. 65).

On peut naturellement étendre le résultat précédent. P. SARNAK en a donné dans [21] une version beaucoup plus forte. Il montre que $Sp_p(\mu) = K$ quelque soit $p > 1$, pour toute mesure μ telle que K soit de capacité analytique nulle (ceci est vrai en particulier si K est dénombrable). Sa méthode peut être envisagée comme un perfectionnement de la remarque (5.1.5).

RÉFÉRENCES :

[1] DE LEEUW K., KATZNELSON Y. - The two sides of a Fourier-Stieltjes transform and almost idempotent measures. Israël J. Math. (1970) 213-229.

[2] FOURNIER J., PIGNO L. - Analytic and arithmetic properties of thin sets. Pacific J. Math. 105 n°1 (1983) 115-141.

[3] GLICKSBERG I. - When is $\mu * L^1$ closed ? Trans. AMS 160 (1971).

[4] GLICKSBERG I. - Fourier-Stieltjes transforms with an isolated value. Conference on Harmonic Analysis, Maryland (1971). Lecture Notes in Math. 266. Springer-Verlag.

[5] GRAHAM C., Mc GEHEE O.C. - Essays in Commutative Harmonic Analysis. Springer-Verlag (1979).

[6] HOST B., PARREAU F. - Sur un problème de GLICKSBERG : les idéaux fermés de type fini de M(G). Ann. Inst. Fourier 38 (1978) 143-164.

[7] HOST B., PARREAU F. - Mesures presque-idempotentes et progression arithmétiques CRAS t. 297 (1978).

[8] KESSLER I. - Semi-idempotent measures on abelian groups. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967).

[9] KWAPIEN S., PELCZYNSKI A. - Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian

groups. Math. Nachr. 94 (1980) 131-140.

[10] Mc GEHEE O.C - A conjecture of Littlewood, a question of Lusin, and a principle of Fourier transform behavior.

[11] Mc GEHEE O.C. - Remarks on the Littlewood conjecture and harmonic synthesis (à paraître).

[12] Mc GEHEE O.C., PIGNO L., SMITH B. - Hardy's inequality and the L^1-norm of exponential sums. Annals of Maths 113 (1981), 613-618.

[13] MÉLA J.F. - Mesures ε-idempotentes de norme bornée. Studia Math. 72 (1982) 131-149.

[14] MÉLA J.F. - Le calcul sur les caractères de l'algèbre M(G) et le problème $\mu * L^1$ fermé ? Séminaire Bourbaki 534 (1979) Springer-Verlag.

[15] PIGNO L. - Transforms which almost vanish at infinity. Proc. Camb. Phil. Soc. 87.

[16] PIGNO L., SMITH B. - Almost idempotent measures on compact abelian groups. J. Funct. Analysis 38 (1980) 61-70.

[17] PISIER G. - Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert. Séminaire d'Analyse fonctionnelle. (1979), Ecole Polytechnique.

[18] RAMSEY T., WELLS B. - Fourier-Stieltjes transforms of strongly continuous measures, Michigan Math. J. 24 (1977) 13-19.

[19] RUDIN W. - Fourier Analysis on groups - Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics n°12. John Wiley and Sons.

[20] LOPEZ J.M., ROSS K.A. - Sidon sets. Lecture Notes Marcel Dekker n°13 (1975).

[21] SARNAK P. - Spectra of singular measures as multipliers. Journal of Funct. Anal. 37 (1980), 302-317.

CHAPITRE IV

ALGÈBRES DE CONVOLUTION DE MESURES

Dans les chapitres précédents, l'étude que nous avons présentée des transformées de Fourier-Stieltjes ne faisait pas (ou pratiquement pas) un usage explicite de la convolution des mesures. Nous adoptons maintenant le point de vue de la théorie de Gelfand des algèbres de Banach commutatives. Les notations antérieures sont conservées.

1 - Les algèbres $L(\omega)$, $N[\mu]$

1.1 - On connaît la théorie classique de l'algèbre $L^1(G) = L(m_G)$. Lorsque la mesure de base n'est plus la mesure de Haar mais une mesure quelconque $\mu \in M(G)$, $L(\mu)$ n'est pas en général une algèbre de convolution : pour cela il faut et il suffit que $\mu * \mu << \mu$. Mais on peut toujours inclure μ dans l'algèbre $L(\omega)$ où $\omega = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}(|\mu|/\|\mu\|)^n$, qui est visiblement la plus petite algèbre de cette nature contenant μ ; on la notera $N[\mu]$. On considérera aussi le cas échéant l'algèbre avec identité $N_1[\mu] = L(\delta+\omega)$. C'est évidemment par pure commodité d'écriture qu'on a pris ω comme mesure de base ; on pourrait prendre toute mesure équivalente. D'autre part toute famille dénombrable de mesures $\mu_n \in M(G)$ peut être également incluse dans une algèbre $L(\omega)$ minimale en considérant d'abord la mesure de base $\mu = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \mu_n/\|\mu_n\|$.

1.2 - Caractères de $L(\omega)$, $(\omega * \omega << \omega)$

Une forme linéaire multiplicative non nulle, ou caractère, de $L(\omega)$ est définie par un élément $\chi \in L^\infty(\omega)$ de module $|\chi| \leqslant 1$, vérifiant la propriété caractéristique

$$\int \chi \, d(\mu * \nu) = (\int \chi \, d\mu)(\int \chi \, d\nu) \qquad (\mu, \nu \in L(\omega))$$

qui s'écrit encore

$$\int \chi(x+y) \, d\mu(x) d\nu(y) = \int \chi(x)\chi(y) \, d\mu(x) d\nu(y) \quad (\mu, \nu \in L(\omega)).$$

$L(\omega \times \omega)$ étant engendré par les produits $\mu \times \nu$, $(\mu, \nu \in L(\omega))$, ceci est équivalent à l'identité ponctuelle

(1.2.1) $\qquad \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) \qquad \omega \times \omega - pp$.

Tout caractère de G vérifie évidemment cette identité mais il y a en général des solutions de (1.2.1) qui ne ressemblent pas du tout à des caractères de groupe.

(1.2.2) Le spectre de Gelfand de $L(\omega)$, noté $\Delta L(\omega)$, est un sous-semi-groupe de $B(\omega)$ (cf chap. I), compact ou localement compact pour la topologie faible, stable pour la conjugaison et le module, et contenant $\overline{\Gamma}(\omega) \setminus \{0\}$. (Evident d'après (1.2.1) et le fait que la topologie de Gelfand n'est autre que la topologie $*$-faible de $L^\infty(\omega)$).

(1.2.3) La transformée de Gelfand de $\mu \in L(\omega)$ est notée comme d'habitude

$$\hat{\mu}(\chi) = \int \chi \, d\mu \qquad (\chi \in \Delta L(\omega)).$$

Elle coïncide avec la transformée de Fourier sur les caractères du groupe. Avec cette notation on peut écrire

(1.2.4) $\qquad \widehat{\chi\mu}(\phi) = \hat{\mu}(\chi\phi) = \widehat{\phi\mu}(\chi) \qquad (\chi, \phi \in \Delta L(\omega)).$

Pour tout $\chi \in \Delta L(\omega)$ et pour deux mesures quelconques $\mu, \nu \in L(\omega)$ on a l'identité

$$(\chi(\mu * \nu))\hat{}\,(\gamma) = (\mu * \nu)\hat{}\,(\gamma\chi) = \hat{\mu}(\gamma\chi)\hat{\nu}(\gamma\chi) = \widehat{\chi\mu}(\gamma)\widehat{\chi\nu}(\gamma)$$

valable quelque soit $\gamma \in \Gamma$, et par conséquent

$$(1.2.5) \qquad \chi(\mu * \nu) = (\chi\mu) * (\chi\nu) \qquad (\chi \in \Delta L(\omega),\ \mu,\nu \in L(\omega)).$$

Inversement tout élément $\chi \in B(\omega)$ qui vérifie (1.2.5) pour $\mu\ \nu \in L(\omega)$, est évidemment un caractère : il suffit d'intégrer (1.2.5).

(1.2.6) Les caractères de $L(\omega)$ s'identifient ainsi aux L-opérateurs qui sont des homomorphismes d'algèbre.

(1.2.7) Exemple : Dans le cas de la mesure de Haar m d'un groupe compact G, il est bien connu que $\Delta L(m) = \Gamma(m) = \Gamma$. Il suffit de vérifier que toute solution χ de (1.2.1) est continue en O. Soit $\mu \ll m$ telle que $\int \chi\, d\mu \neq 0$. Ecrivons

$$\int \chi(x+y)\, d\mu(x) = \chi(y) \int \chi(x)\, d\mu(x) \qquad m\text{-pp}(y)$$

On sait que la translation est continue dans $L(m)$; donc

$$\lim_{y\to 0} \int \chi(x+y)\, d\mu(x) = \int \chi(x)\, d\mu(x)$$

et $\chi(y)$ est égale m-presque-partout à une fonction continue en O.

(1.2.8) Remarque : Un caractère $\chi \in \Delta N[\mu]$ est bien défini s'il est connu μ-presque-partout. En effet d'après (1.2.1) on peut écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) \qquad \mu \times \mu^{n-1}\text{-pp}$$

ce qui, de proche en proche, permet de définir χ μ^n-presque-partout pour tout $n \geq 1$ et donc ω-presque-partout pour $\omega = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}(|\mu|/\|\mu\|)^n$.

1.3 - L'algèbre d'une mesure à puissances indépendantes

Définition 1 : On dit qu'une mesure $\mu \in M(G)$ est à puissances indépendantes si les puissances de convolution de $|\mu|$ sont deux à deux étrangères. On dit qu'elle est à puissances fortement indépendantes si, quel que soit $x \in G$, $\delta_x * |\mu|^n \perp |\mu|^m$ si $m \neq n$.

Proposition 1 : Pour une mesure positive $\mu \in M(G)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Il existe $\chi \in \Delta N[\mu]$ tel que $\chi = c$ μ-presque-partout, où c est une constante complexe, $0 < |c| \leqslant 1$, distincte d'une racine de l'unité.

b) Pour toute constante c, $0 < |c| \leqslant 1$, il existe $\chi \in \Delta N[\mu]$ tel que $\chi = c$ μ-presque-partout.

c) μ est à puissances indépendantes.

Démonstration : On peut se ramener au cas où μ est positive. Supposons que l'on connaisse l'existence d'un caractère $\chi \in \Delta N[\mu]$ tel que $\chi(x) = c$ μ-pp où c est une constante complexe non nulle de module <1, ou de module 1 mais distincte d'une racine de l'unité. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $\chi(x) = c^n$ μ^n-pp. Les nombres c^n étant distincts, ceci prouve à l'évidence que μ est à puissances indépendantes.

Inversement si $\mu^n \perp \mu^m$ $(m,n \geqslant 1,\ m \neq n)$, quelle que soit la constante c, $0 < |c| \leqslant 1$, on définit un élément de $B(\omega)$, où $\omega = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n}(|\mu|/\|\mu\|)^n$ en posant

$$\chi(x) = c^n \qquad \mu^n\text{-pp} \qquad (n \geqslant 1) \quad .$$

De façon évidente on a les relations de compatibilité

$$\chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y) \qquad \mu^m \times \mu^n\text{-pp} \qquad (m,n \geqslant 1)$$

qui sont équivalentes à (1.2.1). χ est donc un caractère de $L(\omega) = N[\mu]$.

1.4 - Singularité des mesures à puissances indépendantes

Discussion : En toute généralité une mesure à puissances indépendantes n'est pas nécessairement singulière. Mais on peut donner des conditions assez larges qui garantissent cette propriété.

Etant donné un groupe G, s'il existe dans M(G) une mesure positive à puissances indépendantes, non singulière, en passant à une partie, on voit qu'il existe une telle mesure $\mu \in L^1(G)$. On peut même trouver μ à support compact et à densité f bornée. La mesure μ^2 sera à densité $f * f$ continue et donc $\geqslant \varepsilon > 0$ sur un certain translaté $a + V$ d'un voisinage ouvert de O qu'on peut supposer symétrique. Si l'on note $V^{(n)} = V+\ldots+V$ (n fois), il est clair que les ouverts $na + V^{(n)}$ doivent être deux à deux disjoints. Ceci est certainement impossible si G est compact ou si tout élément de G est d'ordre borné. C'est également impossible si G est connexe : en effet G est alors réunion des $V^{(n)}$; pour n assez grand $a \in V^{(n)}$ et $(n+1)a \in na + V^{(n)}$ ce qui fournit une contradiction. Mais dès que G possède un sous-groupe ouvert H et un élément a d'ordre infini dans $G/_H$, la mesure $\delta_a * m_H$ est visiblement dans $L^1(G)$ et à puissances indépendantes. Ce sera le plus souvent le cas si l'on munit G d'une topologie τ_H dont on avait parlé au chapitre II-(8.5.4).

Sans faire d'hypothèse sur G, mais en supposant μ à puissances fortement indépendantes, on peut prendre $a = 0$ dans le raisonnement précédent et aboutir à une contradiction. C'est également le cas si l'on suppose que μ est symétrique ou même seulement que $\mu \sim \tilde{\mu}$. On remarque que ces hypothèses sur μ sont aussi vérifiées par toute puissance de μ, ce qui permet d'énoncer le résultat suivant qui résume toute la discussion.

<u>Proposition 2</u> : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure à puissances indépendantes. Pour tout $n \geqslant 1$, $|\mu|^n \perp L^1(G)$ dans tous les cas suivants :

a) si elle est à puissances fortement indépendantes ;

b) si elle est symétrique ou si $\tilde{\mu} \sim \mu$;

c) si G est compact ou connexe ;

d) si G est un groupe de torsion.

2 - L'algèbre d'un produit de Riesz (G compact)

2.1 - Propriétés élémentaires de dichotomie

Nous renvoyons au chapitre II-7 pour l'introduction des produits de Riesz. Soit $\Theta = \{\theta_j\}_{j\geq 1}$ un ensemble dissocié infini dans Γ. On suppose que Θ n'a pas d'éléments d'ordre 2 ou, au contraire, est constitué d'éléments d'ordre 2. On considère un produit de Riesz ρ qui s'écrit suivant les cas

(2.1.1) $$\rho = \prod_{j\geq 1} (1 + a_j\theta_j + \bar{a}_j\bar{\theta}_j)$$

où a_j est une suite de nombres complexes tels que $|a_j| \leqslant 1/2$ ou bien

(2.1.2) $$\rho = \prod_{j\geq 1} (1 + a_j\theta_j)$$

où a_j est une suite de nombres réels tels que $|a_j| \leqslant 1$. Dans les deux cas, avec les notations du chapitre II-7,

(2.1.3) $$\hat{\rho}(\omega) = \prod_{j\geq 1} a_j^{(\varepsilon_j)} \qquad \text{si } \bar{\omega} = \prod_{j\geq 1} \theta_j^{\varepsilon_j}$$

pour toute suite $\varepsilon_j = 0, \pm 1$ dont seuls un nombre fini de termes sont non nuls. De plus $\hat{\rho}(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin \Omega(\Theta)$. On peut aborder l'étude des produits de Riesz à l'aide du résultat très simple suivant.

<u>Lemme 1</u> (J. PEYRIERE [14]) : Soient ρ et ρ' des produits de Riesz définis sur le même ensemble dissocié Θ à l'aide de suites $(a_j)_{j\geq 1}$ et $(a'_j)_{j\geq 1}$, respectivement. Si l'on suppose $\sum_{j\geq 1} |a_j - a'_j|^2 = +\infty$, ρ et ρ' sont des mesures étrangères.

<u>Démonstration</u> : On retient de (2.1.3) que $\hat{\rho}(\theta_j) = \bar{a}_j$, $\hat{\rho}(\bar{\theta}_j) = a_j$ et $\hat{\rho}(\theta_j\bar{\theta}_k) = \bar{a}_j a_k$, $j \neq k$. On en déduit immédiatement que $(\theta_j - \bar{a}_j)_{j\geq 1}$ est une suite orthogonale dans $L^2(\rho)$. De plus

$$\int |\theta_j - \bar{a}_j|^2 \, d\rho = 1 - |a_j|^2 \leqslant 1$$

Quelle que soit la suite b_j telle que $\sum_{j\geq 1}|b_j|^2 < +\infty$, la série $\sum_{j\geq 1} b_j(\theta_j-\bar{a}_j)$ converge dans $L^2(\rho)$. De même la série $\sum_{j\geq 1} b_j(\theta_j-\bar{a}'_j)$ converge dans $L^2(\rho')$. Si l'on suppose $\rho\perp\rho'$ il existe une mesure σ telle que $0<\sigma\leqslant\rho$ et $0<\sigma\leqslant\rho'$. Alors on vérifie facilement que les deux séries convergent simultanément dans $L^2(\sigma)$ et par différence on en déduit que la série numérique $\sum_{j\geq 1} b_j(\bar{a}_j-\bar{a}'_j)$ converge. On en conclut que $\sum_{j\geq 1}|a_j-a'_j|^2 < +\infty$. Ceci démontre le lemme par contradiction.

Note : Il existe une réciproque au lemme 1. On renvoie pour celà à [14], [3].

On déduit notamment du lemme 1 un critère de singularité des produits de Riesz.

Théorème 1 : On a la dichotomie suivante :
- ou bien $\Sigma|a_j|^2 < +\infty$ et $\rho \in L^1(G)$
- ou bien $\Sigma|a_j|^2 = +\infty$ et $\rho \perp L^1(G)$

Démonstration : La deuxième affirmation du théorème est contenue dans le lemme 1 car la mesure de Haar est un produit de Riesz particulier, correspondant à la suite $a_j = 0$, $(j\geq 1)$. Pour établir la première partie, on remarque à partir des formules (2.1.3), que dans tous les cas

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\hat{\rho}(\gamma)|^2 = \sum_{\omega\in\Omega}|\hat{\rho}(\omega)|^2 \leqslant \prod_{j\geq 1}(1+2|a_j|^2)$$

Si l'on suppose $\sum_{j\geq 1}|a_j|^2 < +\infty$, on en conclut par le théorème de Plancherel que ρ est absolument continue par rapport à m et même que sa dérivée de Radon-Nikodym est dans $L^2(m)$.

(2.1.4) Remarque : Pour tout $n\geq 1$ et tout $x_o \in G$, $\delta_{x_o} * \rho^n$ n'est autre que le produit de Riesz construit sur θ, défini par la suite $a'_j = \theta_j(x_o)a_j^n$, $j\geq 1$. La vérification est immédiate sur les coefficients de Fourier.

La remarque précédente permet de mener une discussion complète si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $\overline{\lim}|a_j| < 1$. (Cette hypothèse est évidemment toujours vérifiée dans le cas (2.1.1)). En effet quels que soient les entiers $m>n\geqslant 1$ et le point x_o de G, on peut écrire

$$|\theta_j(x_o)a_j^n - a_j^m|^2 = |a_j|^{2n}|\theta_j(x_o) - a_j^{m-n}|^2.$$

Notre hypothèse entraîne que $|\theta_j(x_o) - a_j^{m-n}| \geqslant d > 0$ pour j assez grand et par conséquent

(2.1.5) $\sum\limits_{j\geqslant 1}|\theta_j(x_o)a_j^n - a_j^m|^2 = +\infty$ si et seulement si $\sum\limits_{j\geqslant 1}|a_j|^{2n} = +\infty$.

La divergence de la série (2.1.5) a pour conséquence, d'après le lemme 1 et la remarque (2.1.4), que $\delta_{x_o} * \rho^n \perp \rho^m$. On peut donc énoncer :

Théorème 2 : Avec l'hypothèse $\overline{\lim}|a_j| < 1$, on a la dichotomie suivante:

- ou bien $\sum\limits_{j\geqslant 1}|a_j|^n = +\infty$ pour tout $n\geqslant 1$ et ρ est à puissances fortement indépendantes ;
- ou bien il existe un entier $n_o\geqslant 1$ tel que $\sum\limits_{j\geqslant 1}|a_j|^{2n} = +\infty$ pour $n<n_o$ et $\sum\limits_{j\geqslant 1}|a_j|^{2n} < +\infty$ pour $n\geqslant n_o$; alors les mesures $\rho,\dots,\rho^{n_o-1}$ sont singulières, deux à deux étrangères ainsi que leurs translatées, tandis que $\rho^n \in L^1(G)$ dès que $n\geqslant n_o$.

(2.1.6) Exercice : Dans le deuxième cas $N[\rho^{n_o}]$ est un idéal de $N[\rho]$ et tout caractère de $N[\rho^{n_o}]$ se prolonge de façon unique en un caractère de $N[\rho]$. Il est facile de voir que $N[\rho^{n_o}]$ contient la mesure de Haar d'un sous-groupe ouvert de G et suivant la remarque (1.2.7) tout caractère de $N[\rho]$ coïncide donc avec un caractère du groupe : $\Delta N[\rho] \simeq \Gamma(\rho)$.

Dans le premier cas on sait déjà (proposition 1) que $\Delta N[\rho]$ contient tous les caractères χ définis par $\chi = c\gamma$ ρ-presque-partout, $0 < |c| \leqslant 1$, $\gamma \in \Gamma$. Une étude plus fine des produits de Riesz montre qu'il n'y en a pas d'autres.

2.2 - La propriété de "tameness"

Théorème 3 (G. BROWN, W. MORAN [2]) : Avec l'hypothèse $\overline{\lim}|a_j| < 1$, quel que soit $\chi \in \Delta N[\rho]$, il existe une constante complexe c, $|c| \leqslant 1$, et un caractère γ du groupe G, tels que $\chi = c\gamma$ ρ-presque-partout (suivant la terminologie de G. BROWN et W. MORAN, ρ est une mesure "tame" au sens fort).

Ce théorème est démontré de façon élégante au chapitre V dans le cadre plus large des "produits de Riesz généralisés". La démonstration ne serait guère plus simple ici ; aussi renvoyons-nous à ce chapitre. Dans la partie 2.3 suivante, nous allons d'ailleurs établir de façon plus élémentaire (et avec une hypothèse moins restrictive) une version faible du théorème 3.

Remarques :

(2.2.1) Le théorème 3 contient certains résultats établis au chapitre II, notamment que (avec l'hypothèse $\overline{\lim}|a_j| < 1$) ρ est une mesure étrangère à toute mesure de Dirichlet et, en particulier, une mesure fortement continue (au sens de la définition 4 du chapitre II). En effet si $\overline{\Gamma}_\infty(\rho)$ contenait un idempotent non nul, ce ne pourrait être que 1 d'après le théorème 3. ρ serait une mesure de Dirichlet, ce qui est impossible car l'hypothèse $\overline{\lim}|a_j| < 1$ équivaut à $\overline{\lim}|\hat{\rho}(\gamma)| < 1$.

(2.2.2) Considérons une mesure quelconque $\sigma \ll \rho$, $\sigma \neq 0$. Le groupe support de σ est nécessairement ouvert puisque ρ est fortement continue; si par exemple G est connexe, le groupe support de σ sera toujours G.

(2.2.3) Le théorème 3 dit notamment que pour toute mesure $\sigma \ll \rho$ ayant même groupe support que ρ, un caractère $\chi \in \Delta N[\rho]$ est déterminé si on connaît ses valeurs σ-presque-partout. Les propriétés spectrales de ρ peuvent être lues dans toute partie de ρ. (Pour être à la mode on pourrait dire que ρ est une mesure fractale).

2.3 - Insécabilité des produits de Riesz

Considérons en même temps que ρ tous les produits de Riesz ρ_n, $(n\geqslant 1)$, définis de la même façon mais en commençant au rang n+1, c'est-à-dire en prenant comme ensemble dissocié $\Theta_n = \{\theta_j\}_{j\geqslant n+1}$ et comme suite de nombres $(a_j)_{j\geqslant n+1}$. Le spectre de Fourier de ρ_n est l'ensemble des mots $\Omega(\Theta_n)$ et les formules (2.1.3) montrent de façon claire que

$$(2.3.1) \qquad \hat{\rho}_n(\omega) = \hat{\rho}(\omega) \qquad \text{si } \omega \in \Omega(\Theta_n)$$

d'où l'on déduit les identités

$$(2.3.2) \qquad \rho * \rho_n = \rho_n^2 \qquad (n\geqslant 1) .$$

Si l'on se reporte à la définition des produits de Riesz (chap. II-(7.1)) on s'assure que, pour tout $n\geqslant 1$, $\rho = R_n\rho_n$ où R_n est le polynôme trigonométrique produit des n premiers facteurs du produit formel (2.1.1) ou (2.1.2). Dans tous les cas on peut écrire

$$(2.3.3) \qquad R_n = \sum_{\omega\varepsilon\Omega_n} \hat{R}_n(\omega)\ \bar{\omega} = \sum_{\omega\varepsilon\Omega_n} \hat{\rho}(\omega)\ \bar{\omega}$$

$$(2.3.4) \qquad \rho = \sum_{\omega\varepsilon\Omega_n} \hat{\rho}(\omega)\ \bar{\omega}\rho_n$$

Evidemment $\rho << \rho_n$ et on aura $\rho \sim \rho_n$ si R_n ne s'annule pas ou si l'ensemble des zéros de R_n est de mesure nulle pour ρ.

(2.3.5) <u>Exercice</u> : $\rho\sim\rho_n$, $(n\geqslant 1)$, dans tous les cas suivants :

a) pour tout $j\geqslant 1$, $|a_j| \neq 1/2$ dans le cas où Θ n'a pas d'élément d'ordre 2 ($|a_j| \neq 1$ dans le cas où les éléments de Θ sont d'ordre 2) ;

b) les éléments de Θ sont tous d'ordre infini ;

c) G est connexe.

<u>Démonstration</u> : Dans le cas (a) il est clair que les polynômes trigonométriques R_n ne s'annulent pas. Dans les cas (b) ou (c), R_n s'annule éventuellement sur une réunion finie de classes modulo $(\mathrm{gp}\ \theta_j)^{\perp}$, $(1\leqslant j\leqslant n)$. Chaque θ_j étant d'ordre infini, $(\mathrm{gp}\ \theta_j)^{\perp}$ ne peut être un sous-groupe ouvert et tout classe modulo $(\mathrm{gp}\ \theta_j)^{\perp}$ est de mesure nulle

pour ρ qui est fortement continue (on est dans le cas où $|a_j| \leqslant 1/2$). Ceci termine la démonstration.

Note : L'équivalence $\rho \sim \rho_n$, $(n \geqslant 1)$, (qui est vérifiée sous des conditions assez larges comme le montre l'exercice précédent) et les relations (2.3.4) résument, de fait, l'essentiel des propriétés des produits de Riesz.

Le résultat simple suivant montre, s'il en était besoin, que les propriétés de ρ (notamment le fait qu'elle puisse avoir ses puissances de convolution indépendantes) n'ont rien à voir avec des propriétés de support.

Proposition 3 : Si $\rho \sim \rho_n$, $(n \geqslant 1)$, le support de ρ est le groupe G tout entier.

Démonstration : On vérifie d'abord que ρ_n converge vaguement vers la mesure de Haar m : en effet les supports $\Omega(\Theta_n)$ des transformées de Fourier $\hat{\rho}_n$ ont une intersection réduite à l'identité. Pour tout ouvert U de G on a donc

$$\underline{\lim}\ \rho_n(U) \geqslant m(U) \quad .$$

Supposons alors qu'il existe un ouvert $U \neq 0$ de mesure $\rho(U) = 0$. On aurait aussi $\rho_n(U) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc $m(U) = 0$, ce qui est impossible et fournit une contradiction.

Théorème 4 : On fait l'hypothèse que $\rho \sim \rho_n$, $(n \geqslant 1)$. Pour toute mesure positive non nulle $\sigma << \rho$, les produits de convolution $\sigma * \rho$ et $\rho * \rho$ sont des mesures équivalentes.

Démonstration : On a déjà remarqué que ρ^2 n'est autre que le produit de Riesz construit sur Θ à l'aide de la suite (a_j^2). La remarque analogue vaut pour les mesures ρ_n^2. On peut donc écrire pour tout $n \geqslant 1$, en tenant compte de (2.3.2)

$$\rho^2 = Q_n \cdot \rho_n^2 = Q_n \cdot (\rho * \rho_n)$$

avec

$$Q_n = \sum_{\omega \varepsilon \Omega_n} \hat{\rho}(\omega)^2 \,\bar{\omega}$$

Il suffit de démontrer le théorème pour une mesure $\sigma \leqslant \rho$. On a alors $\sigma * \rho \leqslant \rho^2$ et ρ^2 s'écrit de façon unique

$$\rho^2 = \tau + \tau'$$

avec

$$\sigma * \rho \leqslant \tau << \sigma * \rho \qquad \text{et} \qquad \tau' \perp \sigma * \rho \ .$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a aussi $\sigma * \rho_n \leqslant \rho * \rho_n$ et

$$\rho^2 = Q_n \ (\rho * \rho_n) \geqslant Q_n \ (\sigma * \rho_n)$$

en tenant compte de la positivité de Q_n. Il résulte de l'hypothèse que le second membre est absolument continu par rapport à $\sigma * \rho$ d'où nécessairement

$$\tau \geqslant Q_n \ (\sigma * \rho_n) \qquad (n \geqslant 1). \tag{2.3.6}$$

Montrons que la suite $Q_n(\sigma * \rho_n)$ converge vaguement et calculons sa limite. Pour tout $\gamma \varepsilon \Gamma$

$$[Q_n \cdot (\sigma * \rho_n)]\hat{}\,(\gamma) = \sum_{\omega \varepsilon \Omega_n} \hat{\rho}(\omega)^2 \,\hat{\sigma}(\bar{\omega}\gamma)\hat{\rho}_n(\bar{\omega}\gamma) .$$

Pour avoir $\hat{\rho}_n(\bar{\omega}\gamma) \neq 0$ pour un mot $\omega \ \varepsilon \ \Omega_n$ il est nécessaire que γ appartienne à $\omega . \Omega(\Theta_n)$ et donc que γ soit un mot de Ω. Si c'est le cas et si n est choisi assez grand pour que Ω_n contienne γ, l'unicité d'écriture des mots impose $\gamma = \omega$. Ceci ne se produit évidemment que pour un seul $\omega \ \varepsilon \ \Omega_n$ de sorte que l'expression précédente se réduit alors à

$$[Q_n \ (\sigma * \rho_n)]\hat{}\,(\gamma) = \hat{\rho}(\gamma)^2 \,\hat{\sigma}(1)\,\hat{\rho}_n(1) = \|\sigma\|\,\hat{\rho}(\gamma)^2 \ .$$

Dans le cas où $\gamma \not\in \Omega$, on vient de voir que le premier membre est toujours nul, mais il en est de même du second.

En conclusion la suite de mesures Q_n $(\sigma * \rho_n)$ converge vaguement vers $\|\sigma\| \rho^2$. L'inégalité (2.3.6) passe à la limite vague : $\tau \geqslant \|\sigma\| \rho^2$ ce qui prouve que $\rho^2 \sim \tau$ et démontre le théorème.

On peut déduire facilement du théorème 4 le corollaire suivant qui est une forme faible du théorème 3 (mais qui n'exige pas l'hypothèse $\lim|a_j| < 1$).

Corollaire : On suppose que $\rho \sim \rho_n$ $(n \geqslant 1)$. Tout caractère $\chi \in \Delta N[\rho]$ est tel que $|\chi| = c$ ρ-presque-partout où c est une constante > 0 (on dira plus loin que ρ a la "propriété du module constant" dans l'algèbre $N[\rho]$).

Démonstration : Le corollaire peut être déduit du théorème 4 sans utiliser explicitement que ρ est un produit de Riesz, à l'aide du lemme suivant de portée plus générale.

Lemme 2 : Soit une mesure positive $\mu \in M(G)$ ayant la propriété que, quelle que soit $0 < \nu << \mu$, on ait $\mu * \nu \sim \mu^2$. Alors tout caractère $\chi \in \Delta N[\mu]$ est tel que $|\chi| = c$ μ-presque-partout où c est une constante positive.

Démonstration : Remplaçant χ par $|\chi|$ on se ramène au cas où $\chi > 0$. Soient M et m, respectivement, la borne supérieure essentielle et la borne inférieure essentielle de χ dans $L^\infty(\mu)$. Supposons $m < M$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $m + \varepsilon < M - \varepsilon$. On aura $m \leqslant \chi(x) \leqslant m + \varepsilon$, μ-pp sur un borélien A de mesure $\mu(A) > 0$ et de même $M - \varepsilon \leqslant \chi(x) \leqslant M$ sur un borélien B de mesure $\mu(B) > 0$. Considérons les mesures $\sigma = 1_A . \mu$ et $\tau = 1_B . \mu$. Il résulte de la relation fonctionnelle (1.2.1) que

$$\chi(x+y) = \chi(x)\ \chi(y) \leqslant (m+\varepsilon)M \qquad \sigma \times \mu\text{-pp}$$

d'où

$$\chi(x) \leqslant (m+\varepsilon)M \qquad \sigma * \mu\text{-pp}.$$

En utilisant l'hypothèse du lemme on en déduit

(2.3.7) $\chi(x) \leqslant (m+\varepsilon)M$ μ^2-pp.

D'autre part, toujours d'après (1.2.1),

$$\chi(x+y) = \chi(x)\ \chi(y) \geqslant (M-\varepsilon)^2 \qquad \tau\times\tau\text{-pp}$$

d'où

(2.3.8) $\chi(x) \geqslant (M-\varepsilon)^2$ τ^2-pp .

Comme $\tau^2 \ll \mu^2$, les propriétés (2.3.7) et (2.3.8) sont incompatibles si l'on choisit ε assez petit. On a donc nécessairement $m = M$, ce qui démontre le lemme.

3 - L-sous-algèbres de M(G)

Définition 2 : Une L-sous-algèbre de M(G) est un L-sous-espace (cf chapitre I-5) qui est une algèbre pour la convolution.

3.1 - Spectre d'une L-sous-algèbre

Soit M une L-sous-algèbre. Donnons une description de son spectre de Gelfand noté ΔM (ensemble des caractères de l'algèbre). De façon claire un élément $\chi \in M'$ sera un caractère de M si et seulement si sa restriction à chaque sous-algèbre $L(\omega)$ $(\omega^2 \ll \omega)$ est un caractère, ce qui s'écrit d'après (1.2.5) pour $\mu, \nu \in L(\omega)$

$$\chi_\omega(\mu * \nu) = (\chi_\omega \mu) * (\chi_\omega \nu)$$

ou aussi bien

(3.1.1) $\chi(\mu * \nu) = (\chi\mu) * (\chi\nu)$

cette dernière relation ne faisant plus intervenir ω, étant valable pour $\mu, \nu \in M$. Quelles que soient $\mu' \ll \mu$ et $\nu' \ll \nu$, (3.1.1) peut s'écrire

$$\chi_{\mu*\nu}(\mu'*\nu') = (\chi_\mu \mu')*(\chi_\nu \nu')$$

et en intégrant

$$\int \chi_{\mu*\nu}(x+y)\ d(\mu' \times \nu') = \int \chi_\mu(x)\chi_\nu(y)\ d(\mu' \times \nu')$$

ce qui équivaut à la relation ponctuelle

$$(3.1.2) \qquad \chi_{\mu*\nu}(x+y) = \chi_\mu(x)\ \chi_\nu(y) \qquad \mu \times \nu\text{-pp} \ .$$

Inversement il suffit d'intégrer (3.1.2) par rapport à $\mu \times \nu$ pour vérifier qu'on a bien un caractère.

(3.1.3) <u>En résumé</u> : ΔM peut être décrit aussi bien par (3.1.1) comme l'ensemble des L-opérateurs qui sont des homomorphismes de l'algèbre M que comme l'ensemble des <u>formes $\chi \varepsilon M'$ satisfaisant les équations fonctionnelles</u> (3.1.2) pour μ, $\nu \varepsilon M$. (Ce dernier point de vue a été introduit pour la première fois par SREIDER [15]).

A partir des caractérisations (3.1.1) et (3.1.2) on vérifie immédiatement que ΔM est stable pour le produit de M'. Les identités (5.2.7) chapitre I, s'écrivent ici en termes de transformée de Gelfand $\hat{\mu}$ de $\mu \varepsilon M$, pour ϕ, $\Psi \varepsilon \Delta M$,

$$(3.1.5) \qquad \hat{\mu}(\phi\Psi) = (\Psi\mu)\hat{}\,(\phi) = (\phi\mu)\hat{}\,(\Psi) = (\phi\Psi\mu)\hat{}\,(1)$$

(3.1.6) ΔM est un sous-<u>semi-groupe</u> de la boule unité de M', <u>stable par conjugaison</u>. Pour tout $\chi \varepsilon \Delta M$, <u>le module</u> $|\chi|$ et <u>la partie polaire</u> χ_0 <u>sont dans ΔM</u> et pour tout $z \varepsilon \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|\chi|^z$ est un élément de ΔM. La topologie de Gelfand n'est autre que la topologie faible. ΔM est compact si M contient δ. En général $\Delta M \cup \{0\}$ est compact.

(3.1.7) A toute mesure $\mu \varepsilon M$, on associe le <u>semi-groupe</u>

$$\Delta M(\mu) = \{\chi_\mu \ ; \chi \ \varepsilon \ \Delta M\}$$

image de Δ dans $L^\infty(\mu)$ par l'application $\chi \longrightarrow \chi_\mu$ qui est continue pour les topologies faibles (et aussi pour les topologies fortes). $\Delta M(\mu)$

hérite des propriétés de ΔM. Il contient $\Gamma(\mu)$ avec sa topologie. $\Delta M(\mu)$ contient $\bar{\Gamma}(\mu)$ si M est unitaire.

4 - L'algèbre M(G) et le semi-groupe Δ

4.1 - Le semi-groupe Δ. Le semi-groupe $\bar{\Gamma}$.

(4.1.1) Lorsque $M = M(G)$ on note simplement $\Delta M = \Delta$ et pour toute mesure $\mu \in M(G)$, $\Delta M(\mu) = \Delta(\mu)$. Δ_+ désigne le sous-semi-groupe fermé de Δ constitué des éléments positifs.

(4.1.2) Δ contient Γ avec sa topologie. En effet aussi bien la topologie de Δ que celle de Γ sont déterminées par les fonctions $\hat{\mu}$, $\mu \in M(G)$. A noter que, tout élément de Γ étant de module 1, les topologies faible et forte de Δ coïncident sur Γ.

Proposition 4 : Un élément $\chi \in \Delta$ est dans Γ si et seulement si $|\chi| = 1$.

Démonstration : Pour un caractère $\chi \in \Delta$ on a l'alternative suivante : ou bien χ ne s'annule pas identiquement sur $L^1(G)$, alors χ coïncide avec un caractère du groupe sur $L^1(G)$ et donc partout puisque $L^1(G)$ est un idéal ; ou bien $\chi_\mu = 0$, $\mu \in L^1(G)$, et alors $|\chi| \neq 1$.

(4.1.3) Le semi-groupe $\bar{\Gamma}$, adhérence de Γ dans Δ (pour la topologie faible) est stable par conjugaison. On vérifie immédiatement que le semi-groupe $\bar{\Gamma}(\mu)$ introduit au chapitre II pour une mesure $\mu \in M(G)$ est aussi l'ensemble des χ_μ avec $\chi \in \bar{\Gamma}$ (il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la notation $\bar{\Gamma}(\mu)$).

(4.1.4) Le semi-groupe $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$: il peut se décrire d'après la proposition 4, comme l'ensemble des éléments de Γ de module < 1. C'est un idéal de $\bar{\Gamma}$. Pour une mesure $\mu \in M(G)$, $(\bar{\Gamma} \setminus \Gamma)(\mu)$ n'est autre que le semi-groupe de $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ dont nous avons fait grand usage au chapitre II.

En effet comme Γ est plongé dans Δ avec sa topologie localement compacte, pour toute suite généralisée d'éléments γ_j de Γ, convergeant vers χ dans $\bar{\Gamma}$, il est équivalent de dire que $\chi \notin \Gamma$ ou que γ_j tend vers l'infini dans Γ.

Proposition 5 : Pour toute mesure $\mu \in M_d(G)$ et tout $\chi \in \Delta$ on a $|\chi_\mu| = 1$. Le L-projecteur h_d de $M(G)$ sur $M_d(G)$ est le plus petit élément de Δ_+.

Démonstration : $M_d(G)$ n'est autre que $L^1(G_d)$ où l'on note G_d le groupe G muni de la topologie discrète. Un caractère quelconque $\chi \in \Delta$ ne s'annule pas sur $L^1(G_d)$ qui contient δ. Il coïncide donc sur $L^1(G_d)$ avec un caractère de G_d (de façon plus précise avec le caractère $x \to \hat{\delta}_x(\chi)$). Ceci démontre la première assertion. Il est facile de vérifier que le projecteur h_d est un caractère de $M(G)$ car $(\mu * \nu)_d = \mu_d * \nu_d$ pour deux mesures quelconques μ, $\nu \in M(G)$ (cf plus loin (4.3)). Tout élément $\chi \in \Delta_+$ est tel que $\chi_\mu = 1$ si μ est discrète ; donc $\chi \geq h_d$ ce qui démontre la deuxième assertion.

4.2 - Mesures à puissances fortement indépendantes et phénomène de Wiener-Pitt.

Lemme 4 : Soit une mesure positive $\mu \in M(G)$ telle que $\Delta(\mu)$ contienne une constante a, $0 < |a| < 1$. Alors

a) μ est à puissances fortement indépendantes ;

b) $\Delta(\mu)$ contient toute constante de module ≤ 1 ;

c) le spectre de μ dans $M(G)$ est le disque $|z| \leq \|\mu\|$.

Démonstration : S'il existe $\chi \in \Delta$ tel que $\chi_\mu = a$, on a aussi $|\chi| \in \Delta$ et $|\chi|_\mu = |a|$. On peut donc supposer $\chi > 0$ et $a > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, $\chi_{\mu^n} = a^n$ d'après (3.1.2). Pour tout $x \in G$, $\chi_{\delta_x} = 1$ par la proposition 5; de là $\chi_{\delta_x * \mu^n} = a^n$ toujours d'après (3.1.2). Soient deux entiers $m \neq n \geq 1$. Si $\delta_x * \mu^n$ et μ^m n'étaient pas étrangères on devrait avoir $a^n = a^m$, ce qui est impossible. Ceci démontre (a). D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\chi^z \in \Delta$ et $\Delta(\mu)$ contient $\chi_\mu^z = a^z$; il contient donc toute constante non nulle de module $\leqslant 1$; étant fermé il contient aussi 0. Ceci démontre (b). Enfin (c) est une conséquence immédiate de (b) car si $\chi_\mu = a$, $\hat{\mu}(\chi) = a\|\mu\|$.

(4.2.1) <u>Remarque</u> : En référence à la proposition 1, on peut se poser la question de savoir si les propriétés (a) et (b) du lemme sont équivalentes. La réponse est négative comme le montre l'exemple (6.2.1) plus loin.

(4.2.2) <u>Exercice</u> : <u>Phénomène de Wiener-Pitt</u>.

Considérons un produit de Riesz ρ_a (cf chap.II-7) avec $0 < a < 1$. On sait que $\bar{\Gamma}(\rho_a)$ (et à fortiori $\Delta(\rho_a)$) contient la constante a. Le lemme 4 permet d'en conclure que le spectre de ρ_a dans M(G) est le disque unité. A partir de là on peut facilement mettre en évidence la pathologie classique de M(G) ("Le phénomène de Wiener-Pitt", cf [20]) :

a) <u>Γ n'est pas dense dans Δ</u> : en effet la transformée de Fourier de ρ_a est à valeurs réelles.

b) <u>M(G) n'est pas symétrique</u> : sinon la mesure ρ_a qui est symétrique, devrait avoir sa transformée de Gelfand réelle, ce qui n'est pas le cas.

c) <u>Il existe une mesure positive symétrique $\sigma \in M(G)$ telle que $\hat{\sigma}(\gamma) \geqslant \varepsilon > 0$</u>, $(\gamma \in \Gamma)$ mais <u>qui n'est</u> cependant <u>pas inversible</u> : il suffit de prendre $\sigma = \varepsilon\delta + \rho_a$ avec $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

4.3 - <u>Idempotents de Δ et décomposition de M(G)</u>

Les idempotents de M(G)' sont les L-projecteurs de M(G) et correspondent aux décompositions en somme directe de la forme $M(G) = N \oplus N^\perp$ (chap.I-(5.2.8)). Il est équivalent de dire qu'on a un idempotent de Δ ou que le L-projecteur est un homomorphisme d'algèbres ou encore que son image N est une sous-algèbre et son noyau $N^{\perp}$ un idéal. En résumé :

(4.3.1) Les idempotents de Δ sont les L-projecteurs sur les L-sous-algèbres de M(G) dont l'orthogonal est un idéal.

Décompositions liées aux topologies :

(4.3.2) Soit τ une topologie de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale. Notons G_{τ} le groupe G muni de la topologie τ.

L'algèbre $M(G_{\tau})$ s'identifie à la L-sous-algèbre de M(G) constituée des mesures qui sont régulières pour la topologie τ. Son orthogonal est le L-sous-espace des mesures μ telles que $|\mu|(K) = 0$ pour tout compact K de la topologie τ. $M(G_{\tau})^{\perp}$ est un idéal de M(G). En effet si $\mu \in M(G_{\tau})^{\perp}$ et $\nu \in M(G)$, pour tout compact K de G_{τ}

$$|\mu*\nu|(K) \leqslant \int |\mu|(K-x)\ d|\nu|(x) = 0 .$$

On obtient ainsi une décomposition de M(G) qui est du type précédent et qui généralise la décomposition classique en mesures discrètes et mesures continues (correspondant au cas où τ est la topologie discrète). (cf chapitre VIII pour une discussion complète).

(4.3.3) Notation : On désigne généralement par h_{τ} l'idempotent de Δ qui est le L-projecteur sur $M(G_{\tau})$.

(4.3.4) Remarque importante : Parmi toutes les topologies localement compactes sur G plus fines que la topologie initiale il y a notamment les topologies τ_H liées aux sous-groupes fermés de G, qu'on a introduites au chapitre II-(8.5.4). (Ce sont les seules qu'on a rencontrées jusqu'ici et ce sont les seules à intervenir dans les problèmes liées aux mesures idempotentes). Le L-projecteur correspondant sera noté désormais h_{τ_H} ou plus simplement h_H. Dans les chapitres II et III cette notation était utilisée pour désigner le même projecteur, mais restreint à un espace $L(\mu)$ particulier (ce qui ne crée guère d'ambiguïté car $h_H\mu$ désigne la même chose dans les deux cas). Le théorème 18 du chapitre II peut être reformulé en prenant le point de vue global ; il est contenu dans le résultat général suivant (dont on trouvera une démonstration et une extension au chapitre VIII).

<u>Théorème 5</u> (DUNKL - RAMIREZ [8]) : Pour toute topologie τ localement compacte sur G, plus fine que la topologie initiale, l'idempotent h_τ est dans $\bar{\Gamma}$ (dans $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ si τ est strictement plus fine que la topologie initiale).

(4.3.5) <u>Exercice</u> : Tout élément $\chi \in \Delta$ de module $|\chi| = h_\tau$ est de la forme $\chi = h_\tau \gamma$ avec $\gamma \in \hat{G}_\tau$ (et inversement). En effet si $|\chi| = h_\tau$ on note que $\chi = \chi h_\tau$ et que $|\chi_\mu| = 1$ pour toute mesure $\mu \in M(G_\tau)$. La restriction de χ à $M(G_\tau)$ coïncide avec un caractère γ de G_τ (proposition 4). Donc, pour toute mesure $\mu \in M(G)$, $\chi h_\tau \mu = \gamma h_\tau \mu$ d'où $\chi = \chi h_\tau = \gamma h_\tau$.

(4.3.6) <u>Remarque</u> : A tout caractère $\chi \in \Delta$ on peut associer les idempotents $|\chi|^0 = \lim_{n\to+\infty} |\chi|^{1/n}$ et $|\chi|^\infty = \lim_{n\to+\infty} |\chi|^n$. $|\chi|^0$ est le plus petit idempotent $\geqslant |\chi|$ et $|\chi|^\infty$ le plus grand idempotent $\leqslant |\chi|$.

4.4 - <u>Radical d'un L-idéal</u>

Dans ce qui suit M désigne M(G) ou une L-sous-algèbre quelconque de M(G).

<u>Remarques</u> :

(4.4.1) Soit N un L-sous-espace de M. Pour un élément $\chi \in \Delta M$ il est équivalent de dire que $\hat{\mu}(\chi) = 0$ $(\mu \in N)$, ou que $\chi_\mu = 0$ $(\mu \in N)$, ou encore que les mêmes propriétés sont vraies en remplaçant χ par $|\chi|$ ou par l'idempotent $|\chi|^0$ (La vérification est immédiate). L'ensemble des <u>caractères</u> χ <u>nuls sur N</u>, constitue un <u>idéal fermé du semi-groupe</u> ΔM.

(4.4.2) Soit Λ un idéal de ΔM (ou simplement une partie de ΔM telle que $\Lambda . \Gamma \subset \Lambda$). Pour toute mesure $\mu \in M$ il est équivalent de dire que

$\hat{\mu}(\chi) = 0$ $(\chi \in \Lambda)$, ou que $\chi_\mu = 0$ $(\chi \in \Lambda)$, ou que $\chi\mu = 0$ $(\chi \in \Lambda)$. (L'hypothèse implique en effet que pour tout $\chi \in \Lambda$ et tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\widehat{\chi\mu}(\gamma) = \hat{\mu}(\chi\gamma) = 0)$.

On en déduit que l'ensemble des <u>mesures $\mu \in M$ telles que $\hat{\mu}(\chi) = 0$, $(\chi \in \Lambda)$ est un L-idéal</u> de M.

(4.4.3) Soit I un L-idéal de M. Tout caractère de I se prolongeant de façon unique en un caractère de M, ΔI peut s'identifier à un sous-semi-groupe de ΔM. Le complémentaire consiste des caractères de M nuls sur I et s'identifie au spectre de l'algèbre M/I. En résumé $\Delta M = \Delta I \cup \Delta(M/I)$ et $\Delta M \setminus \Delta I = (M/I)$ est idéal fermé de ΔM.

(4.4.4) Le <u>radical</u> d'un L-idéal I, noté Rad I, est par définition, l'ensemble des mesures $\mu \in M$ telles que $\hat{\mu}(\chi) = 0$ ou, de façon équivalente, $\chi\mu = 0$, pour tout $\chi \in \Delta M \setminus \Delta I$. C'est un L-idéal d'après (4.4.2).

(4.4.5) Notons que <u>$\mu \in \mathrm{Rad}\, I$ si et seulement si $h\mu = 0$ pour tout idempotent $h \in \Delta M \setminus \Delta I$</u>. En effet il suffit de remarquer que si $\chi \in \Delta M \setminus \Delta I$, $|\chi|^0$ appartient aussi à $\Delta M \setminus \Delta I$ d'après la remarque (4.4.1).

<u>Lemme 5</u> : Soit I un L-idéal de M. Pour une mesure $\mu \in M$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $|\mu|^n \perp I$, $(n \geq 1)$.

b) $|\mu|^n \perp \mathrm{Rad}\, I$, $(n \geq 1)$.

c) Il existe un caractère idempotent $h \in \Delta M \setminus \Delta I$ tel que $h_\mu = 1$.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer μ positive. Partons de la propriété (a). Pour tout $n \geq 1$, $\|\mu^n\|_{M/I} = \|\mu^n\|$ et le rayon spectral de μ dans M/I est le même que dans M. Il existe donc $\chi \in \Delta(M/I)$ tel que $|\hat{\mu}(\chi)| = \|\mu\|$. La mesure μ étant positive ceci exige que $|\chi_\mu| = 1$; ceci prouve (c) en prenant $h = |\chi|^0$. Inversement partons de (c). Pour tout $n \geq 1$ on a $h\mu^n = (h\mu)^n = \mu^n$, tandis que $h\nu = 0$ pour toute mesure $\nu \in \mathrm{Rad}\, I$, ce qui prouve (b). Enfin (b) implique (a) trivialement.

On peut déduire de là notamment une description de Rad I.

Proposition 6 (G. BROWN, W. MORAN [4]) : Soit I un idéal de M. Rad I est l'orthogonal de l'ensemble N des mesures $\mu \in M$ telles que $|\mu|^n \perp I$ pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration : Le lemme 5 montre notamment que Rad I est orthogonal à l'ensemble N des mesures $\mu \in M$ telles que $|\mu|^n \perp I$. Il reste à vérifier que toute mesure μ n'appartenant pas à Rad I a une partie dans N. Or si $\mu \notin \text{Rad } I$ il existe $h = h^2 \in \Delta M \setminus \Delta I$, pour lequel $h\mu \neq 0$, d'après la remarque (4.4.5). La mesure $\nu = h\mu$ est telle que $h_\nu = 1$; elle appartient donc à N par le lemme 5, ce qui termine la démonstration.

(4.4.6) Exercice : Dans l'algèbre M(G) on a $\text{Rad } L^1(G) \subset M_0(G)$. En effet on sait que si $\mu \notin M_0(G)$, $\bar{\Gamma}_\infty(\mu)$ contient un élément > 0 (cf chap. II-(3.2)). Autrement dit il existe $\chi \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ tel que $\chi\mu \neq 0$ ce qui est impossible pour $\mu \in \text{Rad } L^1(G)$ puisque $\Delta L^1(G) = \Gamma$.

Il est facile de voir que si $|\mu|^n \in L^1(G)$ pour n assez grand, μ est dans Rad $L^1(G)$, ce qui inclut en particulier les produits de Riesz dans le cas où les puissances ne sont pas fortement indépendantes (cf. théorème 2). Mais une mesure μ peut être dans Rad $L^1(G)$ sans qu'aucune de ses puissances ne soit dans $L^1(G)$. Il suffit pour s'en convaincre de considérer une mesure de la forme $\mu = \sum_{k \geqslant 1} 2^{-k} \rho_k$, où pour tout $k \geqslant 1$ ρ_k désigne un produit de Riesz tel que $\rho_k^n \perp L^1(G)$ si $n < k$ et $\rho_k^n \in L^1(G)$ si $n \geqslant k$.

5 - Résultats élémentaires sur le prolongement des caractères

M désigne M(G) ou une L-sous-algèbre de M(G).

5.1 - Prolongement des caractères d'une L-sous-algèbre

Soit N une L-sous-algèbre de M. En dehors du cas où N est un idéal, il y a des situations où tout caractère de N peut se prolonger en un caractère de M (en général de façon non unique).

(5.1.1) <u>Si $N^{\perp}$ est un idéal</u> on peut prolonger tout caractère de N par procédé explicite suivant. Toute mesure $\mu \in M$ admet une décomposition unique

$$\mu = \mu_N + \mu_{N^{\perp}}$$

et on vérifie immédiatement que pour deux mesures $\mu, \nu \in M$,

$$(\mu * \nu)_N = \mu_N * \nu_N \quad .$$

Etant donné $\chi \in \Delta N$ on définit un caractère $\tilde{\chi}$ de M en posant

$$<\tilde{\chi}, \mu> = \hat{\mu}_N(\chi) \qquad (\mu \in M) \quad .$$

$\tilde{\chi}$ coïncide avec χ sur N et s'annule sur $N^{\perp}$ (on peut le caractériser ainsi). En particulier le caractère $\chi = 1$ a comme prolongement le L-projecteur de M sur N (il peut aussi se prolonger trivialement par $\tilde{\chi} = 1$, ce qui montre bien que le prolongement n'est pas unique). La situation qu'on vient d'envisager est comprise dans le résultat suivant.

<u>Lemme 6</u> (J.L. TAYLOR [17]) : Soit N une L-sous-algèbre de M telle que $N * N^{\perp} \subset N^{\perp}$. Alors tout caractère de N peut être prolongé en un caractère de M.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de vérifier que tout idéal propre I de N engendre dans M un idéal propre J. Or J est l'ensemble des mesures qui s'écrivent

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j * \nu_j \qquad (\mu_j \in I,\ \nu_j \in M,\ 1 \leq j \leq n\ ;\ n \geq 1) .$$

L'hypothèse entraîne que

$$\mu_N = \sum_{j=1}^{n} \mu_j * (\nu_j)_N \quad .$$

En particulier si $\mu = \mu_N$, μ est dans I, ce qui prouve que $J \cap N = I$ et assure que l'idéal J est propre.

(5.1.2) Exemple : Soit H un sous-groupe borélien de G et M(H) l'espace des mesures $\mu \in M(G)$ qui sont concentrées sur H. $M(H)^{\perp}$ est tout simplement constitué des mesures $\nu \in M(G)$ telles que $|\nu|(H) = 0$. Il est immédiat que M(H) est une L-sous-algèbre de M(G). De plus pour deux mesures positives $\mu \in M(H)$ et $\nu \in M(H)^{\perp}$

$$\mu * \nu(H) = \int_H \nu(H-x)\, d\mu(x) = \nu(H)\,\mu(H) = 0$$

ce qui prouve que $\mu * \nu \in M(H)^{\perp}$ et donc que l'hypothèse du lemme 6 est vérifiée.

Ici on pourrait se passer du lemme 6 et donner un procédé constructif de prolongement. Toute mesure $\mu \in M(G)$ peut s'écrire comme somme finie ou infinie $\mu = \Sigma\, \delta_{x_n} * \mu_n + \nu$ avec $\mu_n \in M(H)$, les classes $x_n + H$ deux à deux distinctes et $|\nu|(x+H) = 0$ pour tout $x \in G$ (les mesures $\delta_{x_n} * \mu_n$ sont uniques mais pas les μ_n). Soit χ un caractère de M(H). L'application $x \to \hat{\delta}_x(\chi)$ est un caractère du groupe H sans topologie qu'on peut prolonger en un caractère ϕ du groupe G_d. On définit alors un prolongement $\tilde{\chi}$ de χ en posant $\langle\tilde{\chi},\mu\rangle = \Sigma\, \phi(x_n)\, \hat{\mu}_n(\chi)$. La vérification que cette définition ne dépend pas de l'écriture et que $\tilde{\chi}$ est bien un caractère, est laissée au lecteur.

(5.1.3) Remarque : Pour une mesure μ concentrée sur un sous-groupe borélien H et appartenant à une L-sous-algèbre M de M(G), $\Delta M(\mu)$ est indépendant de M pourvu que M contienne M(H) puisqu'alors tout caractère de M(H) se prolonge à M. En particulier $\Delta(\mu)$ ne dépend que de μ et de H.

5.2 - Prolongement des caractères de module 1.

Lemme 7 (G. BROWN, W. MORAN [5]) : Soit N une L-sous-algèbre de M. Tout caractère de N de module 1 peut être prolongé en un caractère de M.

Démonstration : Soit $\chi \in \Delta N$ tel que $|\chi| = 1$. On peut supposer que N et M contiennent δ car, si ce n'était pas le cas, on pourrait toujours prolonger d'abord χ à $N + \mathbb{C}\delta$ en un caractère de module 1. Pour toute $\mu \in N^+$, $\mu \neq 0$, considérons la mesure $\nu = \bar{\chi}\mu$. Le rayon spectral de ν est égal à $\|\mu\|$. Il existe donc $\phi \in \Delta M$ tel que

$$\left|\int \bar{\chi}_\mu \, \phi_\mu \, d\mu\right| = |(\bar{\chi}\mu)\hat{\ }(\phi)| = \|\mu\| \ .$$

Comme μ est positive ceci implique que $\chi_\mu \phi_\mu = c$ où c est une constante de module 1. Quel que soit $k \geqslant 1$ et quelles que soient les mesures $\mu_o = \delta$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ de N, en considérant $\mu = \sum_{j=0}^{k} |\mu_j|$ et en utilisant l'argument précédent, on voit qu'il existe $\phi \in \Delta M$ avec la propriété

$$\bar{\chi}_{\mu_j} \phi_{\mu_j} = c \qquad\qquad (0 \leqslant j \leqslant k)$$

où c est une constante de module 1. En fait $c = \bar{\chi}_\delta \chi_\phi = 1$ et $\phi_{\mu_j} = \chi_{\mu_j}$, $(0 \leqslant j \leqslant k)$. Par compacité on en déduit l'existence de $\phi \in \Delta M$ tel que $\phi_\mu = \chi_\mu$ pour toute mesure $\mu \in N$, ce qui démontre la proposition.

(5.2.1) Exercice : L'argument précédent montre qu'en fait tout caractère de module 1 est un point frontière fort de ΔN et, à fortiori, un point de la frontière de Chilov (cf définitions dans [9]). (C'est une autre façon d'établir le lemme 7 puisqu'on sait, de façon générale, que tout caractère d'une sous-algèbre qui est dans la frontière de Chilov est prolongeable; cf [9]). En effet soit $\chi \in \Delta N$, $|\chi| = 1$ et V un voisinage de χ défini à l'aide d'un nombre fini de mesures $\mu_o = \delta$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ de N par les conditions

$$|\hat{\mu}_j(\phi) - \hat{\mu}_j(\chi)| < \varepsilon \qquad\qquad (0 \leqslant j \leqslant k) \ .$$

Considérons la mesure $\mu = \sum_{j=0}^{k} |\mu_j|$. La transformée de Gelfand de $\nu = \chi\mu$ est de module maximum égal à $\|\mu\|$ en χ. De plus l'argument du lemme 7 montre que tout élément $\phi \in \Delta N$ où $|\hat{\nu}(\phi)| = \|\mu\|$ est tel que $\phi_\mu = \chi_\mu$. On aura donc certainement $|\hat{\nu}| < \|\mu\|$ en dehors de V.

On peut donner du lemme 7 l'application suivante. On conviendra de dire que le spectre d'une mesure μ dans M est <u>cerclé</u> s'il est stable par rotation autour de l'origine.

<u>Théorème 6</u> : Soit $\mu \in M$ une mesure à puissances indépendantes.

a) $\Delta M(\mu)$ contient toute constante de module 1.

b) le spectre de μ dans M est cerclé.

<u>Démonstration</u> : Notons $N = N[\mu]$ la L-sous-algèbre engendrée par μ. D'après la proposition 1, quel que soit c, $|c| = 1$, il existe $\chi \in \Delta N$ tel que $\chi_\mu = c$; de plus $|\chi| = 1$. Par le lemme 7, χ se prolonge en un caractère $\tilde{\chi} \in \Delta M$, et $\tilde{\chi}_\mu = c$, ce qui démontre (a). Pour tout $\phi \in \Delta M$, on aura $\hat{\mu}(\tilde{\chi}\phi) = c\hat{\mu}(\phi)$ ce qui prouve que le spectre de μ contient en même temps que $\hat{\mu}(\phi)$ tous les nombres complexes de même module.

<u>Remarques</u> :

(5.2.2) Pour une mesure positive μ les propriétés (a) et (b) du théorème 5 sont équivalentes et impliquent que μ est à puissances indépendantes. En effet le rayon spectral de μ est égal à $\|\mu\|$ et si (b) est vraie, pour toute constante c, $|c| = 1$ il existe $\chi \in \Delta M$ tel que $\hat{\mu}(\chi) = c\|\mu\|$, ce qui entraîne nécessairement $\chi_\mu = c$.

6 - <u>Mesures à spectre connexe, à spectre disqué</u>.

6.1 - Considérons une mesure μ dont le spectre dans M(G) n'est pas connexe. On peut écrire

$$\mathrm{Sp}\,\mu = \hat{\mu}(\Delta) = K_o \cup K_1$$

où K_o et K_1 sont deux compacts disjoints non vides de $\mathbb{C}$. Cette décomposition induit une partition de Δ en deux ensembles compacts ouverts. D'après le théorème des idempotents de Chilov (cf [9] p.88) il existe une mesure idempotente $\eta \in M(G)$ telle que

$$\hat{\eta}(\chi) = 0 \quad \text{si} \quad \hat{\mu}(\chi) \in K_o$$
$$\hat{\eta}(\chi) = 1 \quad \text{si} \quad \hat{\mu}(\chi) \in K_1$$

(6.1.1) Remarque : Si Γ est connexe, G n'a pas de mesure idempotente non triviale et la situation précédente ne se présente pas. Toute mesure est à spectre connexe.

S'il existe effectivement une mesure idempotente η avec la propriété indiquée, considérons d'abord le cas le plus simple où c'est une mesure élémentaire de $L^1(G)$. Montrons alors que $|\mu|^n \not\perp L^1(G)$ pour au moins un entier $n \geqslant 1$ (et donc pour tout n assez grand). Dans le cas contraire, d'après le lemme 5, il existerait un caractère $\chi \in \Delta \setminus \Gamma$ pour lequel $\chi\mu = \mu$. Soit $\gamma_o \in \Gamma$ tel que $\hat{\eta}(\gamma_o) = 1$ et $\hat{\mu}(\gamma_o) \in K_1$. Comme $\hat{\mu}(\chi\gamma_o) = \hat{\mu}(\gamma_o)$ on aurait aussi $\hat{\eta}(\chi\gamma_o) = 1$ ce qui est impossible car $\eta \in L^1(G)$ et $\chi\eta = 0$.

On peut ramener le cas général à cette situation particulière. Pour tout sous-groupe compact H de G, si l'on note $h_H = h_{\tau_H}$ le L-projecteur de M(G) sur $M(G_{\tau_H})$, on a, pour $\chi \in \Delta$, $\hat{\eta}(h_H\chi) = \hat{\eta}_H(\chi)$ et $\hat{\mu}(h_H\chi) = \hat{\mu}_H(\chi)$; par conséquent

$$\hat{\eta}_H(\chi) = 0 \quad \text{si} \quad \hat{\mu}_H(\chi) \in K_o$$
$$\hat{\eta}_H(\chi) = 1 \quad \text{si} \quad \hat{\mu}_H(\chi) \in K_1 \ .$$

Or on sait qu'il existe H compact pour lequel η_H est une mesure élémentaire non nulle de $L(m_H)$ (chap.II-(8.5.8)). C'est exactement la situation précédente quitte à remplacer la topologie initiale par la topologie τ_H. On en concluera donc que $|\mu_H|^n \not\perp L^1(G_{\tau_H})$ pour un entier $n \geqslant 1$. Compte tenu du fait que $|\mu_H|^n = (|\mu|^n)_H$ on peut énoncer :

Théorème 7 : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure telle que pour tout sous-groupe compact H de G,

$$|\mu|^n \perp L^1(G_{\tau_H}) \qquad (n \geqslant 1).$$

Alors le spectre de μ dans l'algèbre $M(G)$ est connexe.

Note : L'hypothèse du théorème se laisse reformuler de façon un peu plus concrète, sans référence à une topologie : pour tout sous-groupe compact H de G, $\delta_x * |\mu|^n \perp m_H$, $x \in G$, $n \geqslant 1$.

Exemples : L'hypothèse du théorème est notamment satisfaite dans les cas suivants :

(6.1.2) μ à puissances fortement indépendantes.

(6.1.3) μ à puissances indépendantes et μ symétrique (ou seulement $\mu \sim \tilde{\mu}$).

Ceci résulte directement de la proposition 2 en remarquant simplement que les propriétés (6.1.2) et (6.1.3) sont vraies non seulement pour μ mais aussi pour toutes les mesures μ_H.

(6.1.4) μ fortement continue et $|\mu|^n \perp L^1(G)$, $(n \geqslant 1)$.

C'est le cas des produits de Riesz envisagés en (2) pour lesquels $\sum_{j \geqslant 1} |a_j|^n = +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$, d'après le théorème 2 et la remarque (2.2.1). Mais c'est aussi le cas dans des situations bien différentes. Considérons par exemple dans $\mathbb{T}^2$ un sous-groupe à un paramètre dense H. Il est facile de vérifier que toute mesure μ continue concentrée sur H est fortement continue car tout sous-groupe compact de $\mathbb{T}^2$ a avec H une intersection dénombrable. De plus il est clair que toutes les puissances μ^n étant concentrées sur H sont singulières.

Plus généralement on peut considérer une topologie τ du groupe localement compact sur G strictement plus fine que la topologie initiale et pour laquelle il n'existe pas de topologie $\tau_H > \tau$, avec H sous-groupe compact, sauf la topologie discrète. Alors toute mesure continue $\mu \in M(G_\tau)$ aura la propriété (6.1.4). Il est vrai que ces situations peuvent être abordées plus simplement (cf remarque (6.1.7)).

(6.1.5) μ continue dans $\mathbb{T}$ et à puissances indépendantes.

Les seuls sous-groupes compacts étant finis, il suffit de vérifier que μ a ses puissances singulières pour être dans le cas (6.1.4). Or ceci résulte de la proposition 2 (c).

(6.1.6) μ à puissances indépendantes dans un groupe de torsion.

On utilise la proposition 2 (d) dans tous les groupes G_{τ_H}.

(6.1.7) Remarque : Soit τ une topologie de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale. Tout caractère de $M(G_\tau)$ se prolongeant en un caractère de M(G), le spectre d'une mesure $\mu \in M(G_\tau)$ est le même dans M(G) et dans $M(G_\tau)$. Si G_τ n'a pas de sous-groupe compact distinct de $\{0\}$, il n'existe pas dans $M(G_\tau)$ de mesure idempotente non triviale et par conséquent le spectre de μ est connexe (cf (6.1.1)). Ce sera le cas si G_τ contient $\mathbb{R}^n$ comme sous-groupe ouvert pour un $n \geqslant 1$. (cf à ce sujet la description des topologies τ qui est faite au chapitre VIII). En particulier toute mesure concentrée sur un sous-groupe à n paramètres de G a son spectre connexe.

6.2 - Mesures à puissances indépendantes à spectre disqué.

Considérons une mesure $\mu \neq 0$, continue et à puissances indépendantes. On a vu (théorème 6) que le spectre de μ dans M(G) est cerclé. D'autre part μ étant dans l'idéal des mesures continues n'est pas inversible et son spectre contient 0 (on a d'ailleurs remarqué au chapitre II-(8.4) que $\bar{\Gamma}(\mu)$ contient 0). Deux cas peuvent donc se présenter : ou bien le spectre de μ est un disque (on dira qu'il est disqué) ; ou bien, n'étant pas réduit à 0, il n'est pas connexe. Ce dernier cas est exclu si l'hypothèse du théorème 7 est vérifiée. On remarque d'ailleurs que cette hypothèse implique la continuité de μ (en prenant pour τ_H la topologie discrète). On peut donc énoncer le résultat suivant, compte tenu des remarques (6.1.2) à (6.1.6).

Théorème 8 : Une mesure $\mu \in M(G)$ à puissances indépendantes, a son spectre disqué dans tous les cas suivants :

a) μ est à puissances fortement indépendantes ;

b) μ est symétrique (ou seulement $\mu \sim \tilde{\mu}$) ;

c) $G = \mathbb{T}$ et μ est continue ;

d) G est un groupe de torsion ;

e) μ est continue et concentrée sur un sous-groupe à n paramètres de G.

Note : J.M. WILLIAMSON [20] avait montré que le spectre d'une mesure positive symétrique, a une infinité de points sur l'axe réels. Le théorème 8 est établi pour $G = \mathbb{T}, \mathbb{R}$ par J.L. TAYLOR [16][18] en utilisant la théorie des points critiques exposée dans la partie suivante de ce chapitre. Une version générale du théorème est démontrée par W.J. BAILEY, G. BROWN, W. MORAN [1] par une méthode plus élémentaire dont la nôtre n'est qu'une variante.

(6.2.1) Exemple : Le fait que toute mesure μ à puissances fortement indépendantes soit à spectre disqué n'implique pas nécessairement que $\Delta(\mu)$ contienne une constante c, $0 < |c| < 1$, comme le montre l'exemple suivant.

On considère les produits de Riesz ρ_a , $0 < a < 1/2$, construits sur un même ensemble dissocié (cf chap. II-7) entre lesquels on a les relations $\rho_a * \rho_b = \rho_{ab}$. Pour tout $\chi \in \Delta$ on sait que χ_{ρ_a} est une constante qu'on notera c(a) (th.3 ou cor. th.4). La fonction c(a) doit satisfaire la relation $c(a).c(b) = c(ab)$ pour $0 < a,b < 1/2$. D'autre part on sait que pour tout $x \in G$, $\delta_x * \rho_a \perp \rho_b$ si $a \neq b$ (chap.II-(7.4) ou conséquence immédiate du lemme 1).

On choisit a et b de telle sorte que Log a et Log b soient rationnellement indépendants et que, de plus, on ait $b < a^2/2$. Alors les mesures $\rho_a^p * \rho_b^q$ correspondant à des couples d'entiers (p,q) distincts avec $p+q > 0$, sont orthogonales ainsi que leurs translatées et il en résulte immédiatement que $\sigma = \rho_a + \rho_b$ est à puissances fortement indépendantes. Par ailleurs s'il existait $\chi \in \Delta$ tel que $\chi_\sigma = c$ avec $0 < |c| < 1$, on aurait $c(a) = c(b)$ et on pourrait écrire $c(b) = c(a)^2\, c(b/a^2)$ ce qui donnerait $c(b/a^2) = c^{-1}$. Or ceci est impossible car $|c^{-1}| > 1$ et on aboutit donc à une contradiction. (A noter que l'exemple reste valable si l'on se place dans la L-sous-algèbre engendrée par ρ_a, ρ_b et ρ_{b/a^2}).

7 - Points critiques

La notion de point critique dans le spectre d'une algèbre de mesures a été introduite par J.L. TAYLOR [16] [18]. C'est une notion importante mais qui n'est pas indispensable dans beaucoup de questions. Ainsi nous nous en sommes passés dans les chapitres antérieurs. Mais elle est sous-jacente à certaines démonstrations des chapitres II et III, que l'on pourrait très bien reprendre en adoptant le point de vue actuel et en mettant en lumière le rôle des points critiques. Inversement les chapitres suivants qui en font un usage plus systématique pourraient être écrits, pour l'essentiel, de façon plus élémentaire et avec le point de vue "local". C'est affaire d'opportunité. Nous avons choisi de faire coexister plusieurs approches en montrant comment on passe de l'une à l'autre plutôt que de céder au dogmatisme de l'unité à tout prix.

7.1 - Remarques et définitions

(7.1.1) Le caractère 1 est isolé dans Δ_+ ; le groupe des caractères de module 1 (i.e. Γ) est ouvert dans Δ. En effet l'ensemble des caractères de module < 1 n'est autre que l'ensemble des caractères nuls sur $L^1(G)$ (prop.4) et est donc fermé.

(7.1.2) Idempotent h_τ : Pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, l'idempotent h_τ (4.3.3) est isolé dans l'ensemble des caractères positifs $\chi \leqslant h_\tau$; le groupe des caractères $\chi \in \Delta$ tels que $|\chi| = h_\tau$ est ouvert dans le semi-groupe compact des caractères de module $|\chi| \leqslant h_\tau$ (équivalent à $\chi = h_\tau \chi$). C'est le même argument qu'en (7.1.1) en remplaçant G par G_τ (cf (4.3.5)). Notons qu'on peut identifier $\Delta M(G_\tau)$ au semi-groupe $|\chi| \leqslant h_\tau$ et $\Delta L^1(G_\tau)$ au groupe $|\chi| = h_\tau$.

(7.1.3) Comme l'on sait que les idempotents h_τ sont dans $\bar{\Gamma}$ (th.5) on peut faire les mêmes remarques en se restreignant à $\bar{\Gamma}$; on verra que la situation est plus simple dans ce contexte.

Il est commode de poser la définition générale suivante où Λ désigne une partie quelconque de Δ ou de $\Delta(\mu)$ pour $\mu \in M(G)$.

Définition 3 : Un élément $\phi \in \Lambda$ est critique dans Λ s'il ne peut être approché dans Λ par des éléments de module $< |\phi|$.

Remarques :

(7.1.4) La définition précédente peut s'entendre aussi bien pour la topologie forte que pour la topologie faible puisque la convergence vers ϕ dans l'ensemble des éléments de module $\leqslant |\phi|$ est toujours forte (cf chap.I-(5.3.1)).

(7.1.5) Tout élément de module minimal d'une partie fortement ouverte de Λ est critique dans Λ.

(7.1.6) Tout élément ϕ critique dans Δ ou $\Delta(\mu)$ est nécessairement de module idempotent, sans quoi on pourrait l'approcher par la suite $\phi^{1+1/n}$. Ce n'est plus vrai si l'on se place dans $\bar{\Gamma}$ ou $\bar{\Gamma}(\mu)$. Mais on s'intéressera essentiellement aux éléments critiques de module idempotent.

Le lemme suivant est valable dès que Λ est un semi-groupe stable par conjugaison, en particulier pour Δ, $\Delta(\mu)$, $\bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}(\mu)$.

Lemme 8 : Pour tout élément $\phi \in \Lambda$ de module idempotent $|\phi| = h$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) ϕ est critique dans Λ.

b) h est critique dans Λ_+ (i.e. point isolé de l'ensemble des éléments de Λ positifs $\leqslant h$).

c) L'ensemble des éléments de module $\geqslant h$ est ouvert dans Λ.

d) Le groupe des éléments de module h est ouvert dans le semi-groupe des éléments de module $\leqslant h$.

Démonstration : (Notons que si $\phi \in \Lambda$ et $|\phi| = |\phi|^2$, $h = |\phi|^2 = \phi\,\bar{\phi}$ est aussi dans Λ). Vérifions d'abord l'équivalence de (a) et (b). Supposons que ϕ soit critique. Il ne peut exister dans Λ_+ de suite généralisée $\phi_j < h$, convergeant vers h, sans quoi $\phi\phi_j$ convergerait vers $\phi h = \phi$ avec $|\phi\phi_j| < |\phi|$. Inversement si (b) est vrai aucun élément ϕ de module h ne peut être limite d'une suite généralisée ϕ_j avec $|\phi_j| < h$ sans quoi, la convergence ayant lieu également pour la topologie forte, $h = |\phi|^2$ serait limite forte dans Λ_+ de $|\phi_j|^2 < h$. Pour établir (c) on remarque que la propriété $|\chi| \geqslant h$ est équivalente à $|\chi h| = h$. Pour tout $\chi \in \Lambda$ on a soit $|\chi h| = h$, soit $|\chi h| < h$ et l'ensemble des χ tels que $|\chi h| < h$ est fermé dans Λ ; sinon il existerait χ tel que $|\chi h| = h$, limite d'une suite généralisée χ_j avec $|\chi_j h| < h$. L'élément χh de module h serait lui-même limite de $\chi_j h$ et ne serait pas critique. (d) est une conséquence immédiate de (c) et implique évidemment (b). Ceci termine la preuve du lemme.

(7.1.7) Remarque importante :

Beaucoup de démonstrations des chapitres II et III reposent sur l'existence d'un élément de module minimal et idempotent dans une partie ouverte et fermée de $\bar{\Gamma}(\mu)$, c'est-à-dire un point critique de $\bar{\Gamma}(\mu)$. De fait il est facile de passer du point de vue local au point de vue global, ce qui permet de resituer les résultats antérieurs dans ce qui va suivre.

Lemme 9 : Soit $\mu \in M(G)$ et h un idempotent critique de $\Delta(\mu)$ (resp $\bar{\Gamma}(\mu)$). Il existe un plus petit idempotent critique h' de Δ (resp $\bar{\Gamma}$) tel que $h'_\mu = h$.

Démonstration : Le semi-groupe fermé des éléments $\chi \in \Delta_+$ (resp $\bar{\Gamma}_+$) tels que $\chi_\mu \geq h$ est ouvert dans Δ_+ (resp $\bar{\Gamma}_+$) comme image réciproque par $\chi \to \chi_\mu$ d'une partie ouverte de $\Delta(\mu)$ (resp $\bar{\Gamma}(\mu)$) (lemme 8 (c)). Il possède un élément minimal unique et idempotent h' tel que $h'_\mu = h$ (lemme 11 chap.I) et h' est critique dans Δ (resp $\bar{\Gamma}$). Il est clair que h' est minimal pour cette propriété.

7.2 - Idempotents critiques de $\bar{\Gamma}$

(7.2.1) Le groupe Γ_h : on note ainsi pour tout idempotent $h \in \bar{\Gamma}$, le groupe des éléments $\chi \in \bar{\Gamma}$ de module h.

Γ_h sur lequel topologies faible et forte coïncident, est un groupe topologique (cf chap.I-(4.4) et (5.3.1)) d'unité h. L'application $\gamma \to h\gamma$ est une injection continue d'image dense de Γ dans $\bar{\Gamma}$. Elle est injective car pour tout $x \in G$, $h\delta_x = \delta_x$ (prop. 5) et si $\gamma \neq 1$ il existe x tel que

$$\hat{\delta}_x(h\gamma) = \hat{\delta}_x(\gamma) \neq 1 = \hat{\delta}_x(h).$$

Elle est d'image dense car si $\chi \in \Gamma_h$ est limite d'une suite généralisée γ_j d'éléments de Γ, $h\gamma_j$ converge aussi vers $h\chi = \chi$.

Remarquons que si f est un caractère continu du groupe Γ_h, $\gamma \to f(h\gamma)$ est un caractère de Γ ; il existe donc $x \in G$, unique, tel que

$$f(h\gamma) = \hat{\delta}_x(\gamma) = \hat{\delta}_x(h\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

et par prolongement

$$f(\gamma) = \hat{\delta}_x(\chi) \qquad (\chi \in \Gamma_h).$$

Inversement il est immédiat que tout $x \in G$ définit ainsi un caractère de Γ_h, si l'on note que $\chi_{\delta_x} = \hat{\delta}_x(\chi)$.

Le théorème suivant caractérise les idempotents critiques de $\bar{\Gamma}$, compte tenu du théorème 5 et de la remarque (7.1.2).

Théorème 9 : A tout idempotent critique h de $\bar{\Gamma}$ correspond une topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, telle que

a) le groupe Γ_h est localement compact et s'identifie au dual de G_τ de telle sorte que la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure de $M(G_\tau)$ dans la dualité (G_τ, Γ_h) coïncide sur Γ_h avec sa transformée de Gelfand ;

b) h est l'idempotent h_τ associé à la topologie τ (cf (4.3.3)).

Démonstration : Si h est un idempotent critique de $\bar{\Gamma}$, Γ_h est ouvert dans le semi-groupe compact des éléments $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| \leqslant h$ (lemme 8 (c)) ; il est donc localement compact. On a vu que son dual s'identifie algébriquement à G par le couplage $\hat{\delta}_x(\chi)$. Désignons par τ la topologie duale sur G. La transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\mu \in M(G_\tau)$ dans la dualité (G_τ, Γ_h) est donnée par

$$(7.2.2) \qquad \hat{\hat{\mu}}(\chi) = \int \hat{\delta}_x(\chi)\, d\mu(x) \qquad (\chi \in \Gamma_h).$$

En particulier

$$(7.2.3) \qquad \hat{\hat{\mu}}(h\gamma) = \int \hat{\delta}_x(\gamma)\, d\mu(x) = \hat{\mu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma) .$$

Pour tout élément $\chi \in \Gamma_h$ limite d'une suite généralisée γ_j d'éléments de Γ, on a aussi $\chi = h\chi = \lim h\gamma_j$; il résulte donc de (7.2.3) par passage à la limite

$$(7.2.4) \qquad \hat{\hat{\mu}}(\chi) = \hat{\mu}(\chi) \qquad (\chi \in \Gamma_h)$$

ce qui démontre la partie (a) du théorème.

Pour toute mesure $\mu \in M(G_\tau)$ on vérifie que $\mu = h\mu$ car, d'après (a) et (7.2.3),

$$(h\mu)^\wedge(\gamma) = \hat{\mu}(h\gamma) = \hat{\mu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Inversement montrons que toute mesure $\mu \in M(G)$ telle que $\mu = h\mu$ appartient à $M(G_\tau)$. Il suffit de vérifier pour une mesure positive. Or quelle que soit la mesure positive $\mu \in M(G)$, la fonction $\hat{\mu}(\chi)$ est continue et de type positif sur Γ_h : pour tout $n \geqslant 1$, pour tout choix de $\chi_j \in \Gamma_h$ et de coefficients complexes c_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a bien

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_i \bar{c}_j \, \hat{\mu}(\chi_i \chi_j) = \langle |\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i \chi_i|^2, \mu \rangle \geqslant 0 .$$

Par le théorème de Bochner, il existe $\nu \in M(G_\tau)$ telle que

$$\hat{\nu}(\chi) = \hat{\mu}(\chi) \qquad (\chi \in \Gamma_h) .$$

Ici on suppose $\mu = h\mu$ et on a $\nu = h\nu$ par la première partie de l'argument, ce qui permet d'écrire, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\nu}(\gamma) = (h\nu)^\wedge(\gamma) = \hat{\nu}(h\gamma) = \hat{\mu}(h\gamma) = (h\mu)^\wedge(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)$$

et d'en conclure que $\mu = \nu$. Ceci termine la preuve du théorème.

(7.2.5) Remarque : Les seules topologies qui sont intervenues dans les problèmes traités jusqu'ici sont des topologies $\tau = \tau_H$ définies à l'aide d'un sous-groupe compact H de G comme on l'indique au chapitre II-(8.5). Ce sera le cas dans la plupart des problèmes qui font intervenir des mesures idempotentes. Plus précisément si une topologie τ est telle que $L^1(G_\tau)$ contienne une mesure idempotente η, le stabilisateur de $\hat{\eta}$ est compact ouvert dans G_τ et il en est de même du groupe support H de η dans G_τ. Sur H compact la topologie τ coïncide avec la topologie initiale. τ n'est autre que τ_H.

(7.2.6) Exercice : Soient η une mesure idempotente, h un idempotent de $\bar{\Gamma}$ tel que $h\eta \neq 0$ et que h soit minimal dans $\bar{\Gamma}_+$ pour cette propriété. Alors h est critique dans $\bar{\Gamma}$ et s'identifie à un idempotent h_τ ;

$h\eta$ est une mesure idempotente élémentaire de $L^1(G_\tau)$ et τ est une topologie τ_H. (La vérification qui est laissée au lecteur, peut se faire à l'aide des résultats du chapitre II ou directement à partir du théorème 9 comme dans l'exercice suivant).

(7.2.7) <u>Exercice</u> : On pourrait utiliser le théorème 9 et la remarque (7.2.5) pour établir les théorèmes du chapitre III. Ainsi pour le théorème 2, l'argument qui est détaillé dans [13] peut être résumé comme suit. Soit μ une mesure ε-quasi-idempotente et ϕ un élément de module minimal de $\bar{\Gamma}$ tel que $|\hat{\mu}(\phi)| \geqslant 1$. Si l'on peut affirmer que $|\phi|^2 = |\phi|$, $h = |\phi|$ est un idempotent critique de $\bar{\Gamma}$ et s'identifie à un idempotent h_τ. L'ensemble des $\chi \in \Gamma_h$ tels que $|(h\mu)^\wedge(\chi)| \geqslant 1$, qui est aussi l'ensemble des $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| \leqslant h$ et $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1$ (compte-tenu de la minimalité de h) est un compact ouvert de Γ_h. Par le théorème 9, il existe donc une mesure idempotente $\eta \in L^1(G_\tau)$ telle que $\hat{\eta}(\chi) = 1$ là où $|(h\mu)^\wedge(\chi)| \geqslant 1$ dans $\Gamma_h = \hat{G}_\tau$. En particulier τ est une topologie τ_H par la remarque (7.2.5) et $h\mu$ est la mesure μ_H du théorème 2 chapitre III.

(7.2.8) <u>Retour</u> (sur les mesures fortement continues) : si l'on veut (au vu du théorème 9) faire jouer le même rôle à toutes les topologies localement compactes sur G, on est conduit à modifier comme suit la définition 4 du chapitre II-(8.5). (Suivant les cas on adoptera l'une ou l'autre définition !).

<u>Définition 4</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est <u>fortement continue</u> si $h_\tau \mu = 0$ pour toute topologie τ de groupe localement sur G, strictement plus fine que la topologie initiale.

On peut également utiliser le théorème 9 pour établir le critère suivant (lemme 10) qui est une variante du lemme-clé de [10] et dont nous donnerons quelques applications.

Nous reprenons les définitions du chapitre III. Notamment, pour deux mesures ε-quasi-idempotentes μ et ν, nous écrivons $\hat{\mu}\sim\hat{\nu}$ si $\hat{\mu}(\gamma)\sim\hat{\nu}(\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$, ce qui est équivalent par passage à la limite à $\hat{\mu}(\chi)\sim\hat{\nu}(\chi)$, $\chi\in\bar{\Gamma}$,(chap.III-(1.2)).

<u>Lemme 10</u> (B. HOST, F. PARREAU) : Soit $\mu\in M(G)$ une mesure ε-quasi-idempotente. Pour qu'on ait $\hat{\mu}\sim\hat{\eta}$ avec η idempotente, il suffit que, pour tout $\chi\in\bar{\Gamma}$, les implications suivantes soient vraies.

(7.2.9) $\quad (\hat{\mu}(|\chi|^{2m}\chi)\sim 0, m\geqslant 1)\Longrightarrow(\hat{\mu}(\chi)\sim 0)$

(7.2.10) $\quad (\hat{\mu}(|\chi|^{2m}\chi)\sim 1, m\geqslant 1)\Longrightarrow(\hat{\mu}(\chi)\sim 1)$

<u>Démonstration</u> : Nous reprenons pour l'essentiel la démonstration de B. HOST et F. PARREAU dans [10]. Nous renvoyons au chapitre II pour les propriétés des mesures dont la transformée de Fourier est à valeurs entières. Nous utilisons en particulier que,pour de telles mesures η et pour tout $\chi\in\bar{\Gamma}$, $|\chi_\eta|^2=|\chi_\eta|$ et

$$\hat{\eta}(|\chi|^{2m}\chi)=\hat{\eta}(\chi) \qquad (m\geqslant 1).$$

a) Désignons par Λ l'ensemble des $\phi\in\bar{\Gamma}_+$ pour lesquels il existe une mesure idempotente η telle que $(\phi\mu)\hat{}\sim(\phi\eta)\hat{}$. La mesure η n'est pas unique mais la mesure $\phi\eta$, également idempotente, est bien déterminée ; nous la noterons η_ϕ ; comme $\phi_\eta^2=\phi_\eta$ elle est telle que $\phi\eta_\phi=\eta_\phi$. Pour ϕ, $\Psi\in\Lambda$, nous pouvons écrire

$$(\phi\eta_\Psi)\hat{}(\gamma)=\hat{\eta}_\Psi(\phi\gamma)\sim(\Psi\mu)\hat{}(\phi\gamma)=(\phi\Psi\mu)\hat{}(\gamma) \qquad (\gamma\in\Gamma)$$
$$(\Psi\eta_\phi)\hat{}(\gamma)=\hat{\eta}_\phi(\Psi\gamma)\sim(\phi\mu)\hat{}(\Psi\gamma)=(\phi\Psi\mu)\hat{}(\gamma) \qquad (\gamma\in\Gamma)$$

et donc

(7.2.11) $\quad \phi\eta_\Psi=\Psi\eta_\phi$

Si l'on considère la mesure

$$\eta=\eta_\phi+\eta_\Psi-\Psi\eta_\phi$$

on vérifie immédiatement que $\eta_\phi=\phi\eta$ et $\eta_\Psi=\Psi\eta$. Cette propriété de recollement s'étend à un nombre fini de mesures η_ϕ. A noter cependant que la mesure η n'est plus idempotente mais que $\hat{\eta}$ est à valeurs entières dans $\bar{\Gamma}$.

b) Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$ tel que $|\chi|^2 \in \Lambda$, en notant $\eta = \eta_{|\chi|^2}$,

$$\hat{\mu}(|\chi|^2\Psi) = (|\chi|^2\mu)\hat{}(\Psi) \sim (|\chi|^2\eta)\hat{}(\gamma) = \hat{\eta}(|\chi|^2\Psi) \qquad (\gamma \in \bar{\Gamma})$$

et en particulier, quel que soit $m \geqslant 1$,

$$\hat{\mu}(|\chi|^{2m}\chi\gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^{2m}\chi\gamma) = \hat{\eta}(\chi\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Les hypothèses (7.2.9) et (7.2.10), écrites avec $\chi\gamma$ au lieu de χ, donnent

$$(7.2.12) \qquad (\chi\mu)\hat{}(\gamma) = \hat{\mu}(\chi\gamma) \sim \hat{\eta}(\chi\gamma) = (\chi\eta)\hat{}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Ceci montre notamment que pour $\phi \in \bar{\Gamma}_+$, $\phi \in \Lambda$ dès que $\phi^2 \in \Lambda$.

c) Il s'agit de prouver que $1 \in \Lambda$. On vérifie sans peine que Λ est un ensemble fortement ouvert et fermé de $\bar{\Gamma}_+$. Dans le cas où $1 \notin \Lambda$ l'ensemble fortement fermé $\bar{\Gamma}_+ \setminus \Lambda$ possède un élément minimal h (cf chap.8-(4.5.1) et (5.3.2)) ; h est idempotent sans quoi $h^2 < h$, serait dans Λ ; h est critique puisque $\bar{\Gamma}_+ \setminus \Lambda$ est fortement ouvert (lemme 8). h s'identifie donc à un idempotent h_τ pour une certaine topologie τ (théorème 9).

d) On considère l'ensemble Λ_h des $\phi \in \bar{\Gamma}_+$ tels que $\phi < h$, qui est compact puisque h est critique, et contenu dans Λ. On va voir que les mesures η_ϕ, $\phi \in \Lambda_h$, sont en nombre fini.

Il suffit pour celà de vérifier que l'ensemble des $\phi \in \Lambda_h$ tels que $\eta_\phi = \eta$ est ouvert dans Λ_h. Sinon il existerait une suite généralisée ϕ_j convergeant vers ϕ dans Λ_h, pour laquelle $\eta_{\phi_j} \neq \eta$. Comme $\phi_\eta = 1$, $(\phi_j)_\eta$ converge fortement vers 1 dans $\bar{\Gamma}(\eta)$ fortement discret ; donc $\phi_j\eta = \eta$ à partir d'un certain rang. Dire que $\eta_{\phi_j} \neq \eta$ c'est dire que $(\phi_j\mu)\hat{}\not\sim(\phi_j\eta)\hat{}$ et qu'il existe $\gamma_j \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\phi_j\gamma_j) \not\sim \hat{\eta}(\phi_j\gamma_j)$.
A la limite, pour une valeur d'adhérence χ de $\phi_j\gamma_j$, on aura

(7.2.13) $\qquad \hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi)$

avec (cf chap.I-(3.3.1) et (5.3.1)) $|\chi| \leqslant \lim|\phi_j\gamma_j| = \phi$, et donc $|\chi|^2 \leqslant \phi < h$. Ceci implique en particulier que $|\chi|^2$ est dans Λ et d'après (7.2.12)

(7.2.14) $\qquad \hat{\mu}(\chi) \sim \eta_{|\chi|^2}\hat{}(\chi)$.

De plus ici, comme $|\chi| \leqslant \phi$ et que tout élément de $\bar{\Gamma}(\eta_{|\chi|^2})$ est de module idempotent, on a

$$\phi\eta_{|\chi|^2} = \phi|\chi|^2\,\eta_{|\chi|^2} = |\chi|^2\eta_{|\chi|^2} = \eta_{|\chi|^2}$$

donc, d'après (7.2.11)

$$|\chi|^2\eta = |\chi|^2\eta_\phi = \phi\eta_{|\chi|^2} = \eta_{|\chi|^2}$$

et suivant la remarque faite au début

(7.2.15) $\qquad \hat{\eta}(\chi) = \hat{\eta}(|\chi|^2\chi) = (|\chi|^2\eta)\hat{}(\chi) = \eta_{|\chi|^2}\hat{}(\chi)$.

On a bien une contradiction entre (7.2.13) (7.2.14) et (7.2.15).

En conclusion, les mesures η_ϕ , $\phi \in \Lambda_h$, sont en nombre fini. On pourra les écrire $\eta_\phi = \phi\eta$ à l'aide d'une même mesure η construite par recollement, qui est telle que $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbb{Z}$ et $h\eta = \eta$ (cf (a)).

e) On compare ensuite $h\mu$ et $h\eta$ qui sont dans $M(G_\tau)$. Pour tout $|\chi|<h$, $|\chi|^2 \in \Lambda$ et $\eta_{|\chi|^2} = |\chi|^2\eta$; d'après (b) (7.2.12)

$$\hat{\mu}(\chi) \sim (|\chi|^2\eta)\hat{}(\chi) = \hat{\eta}(\chi) \ .$$

L'ensemble des $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $|\chi| \leqslant h$ et $\hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi)$ est compact et contenu dans Γ_h. C'est un compact ouvert de $\Gamma_h = \hat{G}_\tau$. Il est possible via le théorème 9 de corriger η par une mesure de $M(G_\tau)$ de façon que $\hat{\eta}(\chi)$ reste à valeurs entières et que $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$, $\chi \in \Gamma_h$. On peut ensuite remplacer η par une mesure idempotente de $M(G_\tau)$ tout en conservant cette dernière propriété (ce sont là des constructions classiques faciles sur un groupe localement compact). On en conclut finalement que

$$\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi) \qquad\qquad (\chi \in \Gamma_h)$$

et en particulier

$$(h\mu)^{\wedge}(\gamma) = \hat{\mu}(h\gamma) \sim \hat{\eta}(h\gamma) = (h\eta)^{\wedge}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

ce qui prouve que h est dans Λ contrairement à sa définition. Ceci termine la démonstration du lemme 10.

(7.2.16) <u>Exercice</u> : Les propriétés (7.2.9) et (7.2.10) sont également nécessaires pour avoir $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$ avec η idempotente. La vérification est immédiate avec la remarque faite au début de la démonstration précédente.

On va voir que le lemme 10 permet de déduire le théorème 3 du chapitre III sur les mesures ε-idempotentes, directement du lemme 2, chapitre III. De fait, nous allons établir un résultat plus général (théorème 10). Commençons par faire la remarque suivante.

Pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$ et toute mesure $\mu \in M(G)$

$$\hat{\mu}(|\chi|^{2m}\chi) = \int |\chi_\mu|^{2m}\chi_\mu \, d\mu$$

de sorte que le lemme 2, chapitre III, écrit pour χ_μ , peut se reformuler comme suit dans le cas d'une mesure μ ε-quasi-idempotente : pour $\chi \in \bar{\Gamma}$ l'implication

$$((\hat{\mu}|\chi|^{2m}\chi) \sim 0, \ m \geqslant 1) \Longrightarrow (\hat{\mu}(\chi) \sim 0)$$

est vraie si on suppose $\|\mu\| < C|\operatorname{Log} \varepsilon|$, où C désigne une constante absolue (qui peut être prise arbitrairement proche par défaut de $(\operatorname{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pour les petites valeurs de ε).

On rappelle que les parties de Γ qui sont des supports de transformées de Fourier de mesures idempotentes constituent un anneau de Boole : l'anneau engendré par les classes modulo les sous-groupes ouverts de Γ, appelé plus brièvement "anneau des classes" (cf chap.III).

<u>Théorème 10</u> : Il existe une constante absolue $C > 0$ pour laquelle la

propriété suivante est vraie : soit E une partie de Γ. On suppose que pour un certain ε, $0 < \varepsilon < 1/3$, il existe des mesures μ et ν telles que

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } \gamma \in E$$

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |\hat{\nu}(\gamma)| \geqslant 1 \qquad \text{si } \gamma \notin E$$

$$\sup\{\|\mu\|, \|\nu\|\} < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon| \ .$$

Alors E appartient à l'anneau des classes. (C peut être prise arbitrairement voisine par défaut de $(\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}$ pour les petites valeurs de ε).

<u>Démonstration</u> : Si l'on choisit pour C la constante du lemme 2 chapitre III, d'après la remarque qui précède le théorème 10, les mesures μ et ν vérifient chacune la propriété (7.2.9) du lemme 10. D'autre part il résulte de l'hypothèse, par passage à la limite, que

$$|\hat{\mu}(\chi) + \hat{\nu}(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon \qquad (\chi \in \bar{\Gamma}) \tag{7.2.17}$$

$$|\hat{\mu}(\chi)\ \hat{\nu}(\chi)| \leqslant C\varepsilon|\mathrm{Log}\,\varepsilon| \qquad (\chi \in \bar{\Gamma}). \tag{7.2.18}$$

Tel qu'il est formulé, le théorème est significatif pour les petites valeurs de ε ; dans tous les cas on peut toujours supposer, quitte à diminuer C, que $C\varepsilon|\mathrm{Log}\varepsilon| < 1$. Supposons que pour un certain $\chi \in \bar{\Gamma}$, on ait

$$|\hat{\mu}(|\chi|^{2m}\chi)| \geqslant 1 \qquad (m \geqslant 1).$$

Alors on déduit de (7.2.18)

$$|\hat{\nu}(|\chi|^{2m}\chi)| < 1 \qquad (m \geqslant 1)$$

ce qui entraîne automatiquement, vu la nature de ν, que

$$|\hat{\nu}(|\chi|^{2m}\chi)| \leqslant \varepsilon \qquad (m \geqslant 1)$$

et donc $|\hat{\nu}(\chi)| \leqslant \varepsilon$ d'après la propriété (7.2.9). On en conclut par (7.2.17) que $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1-2\varepsilon > \varepsilon$, ce qui entraîne automatiquement $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1$. Ceci démontre que la propriété (7.2.10) est vérifiée par la mesure μ (et également par la mesure ν). Les deux hypothèses du lemme 10 se trouvent vérifiées et il existe donc une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$, ce qui n'est autre que la conclusion du théorème 10.

Applications :

(7.2.19) Démonstration du théorème 13, chapitre III :

Soit $\mu \in M(G)$ une mesure ε-idempotente (déf.2, chap.III) et soit E l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ pour lesquels $|\hat{\mu}(\gamma) - 1| \leqslant \varepsilon$. Les mesures $(1-\varepsilon)^{-1}\mu$ et $(1-\varepsilon)^{-1}(\delta-\mu)$ satisferont les hypothèses du théorème 10, avec $\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}$ au lieu de ε si la condition

$$(1-\varepsilon)^{-1}(\|\mu\| + 1) < C|\mathrm{Log}(\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1})|$$

est réalisée. Ce sera le cas si $\|\mu\| < C'|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ pour une constante $C'<C$ qui peut être prise arbitrairement proche de C pour les petites valeurs de ε. Par le théorème 10, E appartient alors à l'anneau des classes ; autrement dit $\hat{\mu} \sim \hat{\eta}$ pour une certaine mesure idempotente η.

En reprenant la terminologie du chapitre III-(5.1) on peut également tirer du théorème 10 la conséquence immédiate suivante :

Corollaire : Soit E une partie de Γ. Si E et $\Gamma \setminus E$ sont des quasi-Cohen, alors E est un ensemble de Cohen.

Démonstration : Par hypothèse il existe des mesures μ et ν telles que

$$\begin{array}{llll} |\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1 & \text{et} & \hat{\nu}(\gamma) = 0 & \text{si } \gamma \in E \\ \hat{\mu}(\gamma) = 0 & \text{et} & |\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1 & \text{si } \gamma \notin E \end{array}$$

Les conditions du théorème 10 (y compris la condition sur les normes) sont bien vérifiées pour tout ε assez petit.

7.3 - Idempotents critiques dans Δ

Mesures critiques :

(7.3.1) <u>Notation $h^{(\mu)}$</u>: Pour toute mesure $\mu \in M(G)$ l'ensemble des caractères $\chi \in \Delta_+$ tels que $\chi_\mu = 1$ est un semi-groupe faiblement fermé qui possède un élément minimal unique et idempotent que nous noterons $h^{(\mu)}$.

(7.3.2) Une mesure non nulle $\mu \in M(G)$ sera dite <u>critique</u> si $h^{(\mu)}$ est critique. On dira aussi que μ est <u>critique pour un idempotent</u> critique $h \in \Delta$ si $h = h^{(\mu)}$.

<u>Lemme 11</u> :

a) Une mesure $\mu \in M(G)$ est critique si et seulement si l'ensemble des $\chi \in \Delta_+$ tels que $\chi_\mu = 1$, est ouvert et fermé dans Δ_+ (i.e. 1 est critique dans $\Delta(\mu)$).

b) Pour tout idempotent critique h, il existe une mesure critique pour h.

<u>Démonstration</u> : Une mesure μ est critique si et seulement si l'ensemble des $\chi \in \Delta_+$ tels que $\chi \geqslant h^{(\mu)}$ est ouvert (et fermé) dans Δ_+ et il est équivalent de dire $\chi \geqslant h^{(\mu)}$ ou $\chi_\mu = 1$. Ceci prouve (a). Etant donné h idempotent critique, soit $N = h\,M(G)$. Pour toute $\mu \in N$ on a évidemment $h^{(\mu)} \leqslant h$ et la suite généralisée $h^{(\mu)}$, $\mu \in N_+$, converge vers h. Puisque h est critique, nécessairement $h^{(\mu)} = h$ dès que $\mu \geqslant \mu_0$ pour une certaine mesure $\mu_0 \in N_+$. Ceci prouve (b).

(7.3.3) <u>Exemple</u> : (A la suite de (7.1.2)) Une mesure $\mu \in M(G_\tau)$ est critique pour l'idempotent h_τ si et seulement si $|\mu|^n \not\perp L^1(G_\tau)$ pour un entier $n \geqslant 1$. (En particulier toute mesure de Rad $L^1(G_\tau)$ est critique).

En effet dans le cas où $|\mu|^n \perp L^1(G_\tau)$ pour tout $n \geqslant 1$ on sait qu'il existe un idempotent $h < h_\tau$ tel que $h_\mu = 1$ (lemme 5) et donc $h^{(\mu)} < h_\tau$. D'autre part pour tout $\chi \in \Delta_+$ tel que $\chi \leqslant h_\tau$ et $\chi_\mu = 1$ on a aussi $\chi_{|\mu|^n} = 1$. Si $|\mu|^n \not\perp L^1(G_\tau)$ pour un certain $n \geqslant 1$, χ ne s'annule pas sur $L^1(G_\tau)$ et donc nécessairement $\chi = h_\tau$, ce qui prouve que

$h_\tau = h^{(\mu)}$.

(7.3.4) <u>L'idéal L_h</u> : Soit h un idempotent critique de Δ. Dans l'algèbre $N_h = hM(G)$, on considère les mesures qui sont telles que $\chi_\mu = 0$ si $0 < \chi < h$ et qui sont clairement des mesures critiques pour h. Elles constituent un idéal noté L_h qui, dans le cas où $h = h_\tau$ n'est autre que Rad $L^1(G_\tau)$. Dans le cas général il n'est pas évident à priori que L_h ne soit pas réduit à O. Le résultat suivant montre qu'il n'en est rien. Il s'agit d'un des résultats les plus profonds sur M(G), dont nous ferons peu usage, mais qui est central dans l'étude des mesures inversibles notamment.

<u>Théorème 11</u> (J.L. TAYLOR [16]) : Pour tout idempotent critique h de Δ il existe une topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, pour laquelle $L_h \cap L^1(G_\tau) \neq \emptyset$.

<u>Démonstration</u> : Nous renvoyons à [16] car la démonstration sort un peu du cadre des méthodes développées dans ce séminaire.

<u>Corollaire</u> : $h = h_\tau$ et L_h = Rad $L^1(G_\tau)$

<u>Démonstration</u> : Toute mesure de $L_h \cap L^1(G_\tau)$ est critique à la fois pour h et pour h_τ ; donc $h = h_\tau$.

8 - La propriété du module constant

<u>Note</u> : L'essentiel des résultats de cette partie se trouvent sous une forme ou une autre dans les travaux de G. BROWN et W. MORAN, notamment [6] [7] [2]. On a cherché à en donner une présentation simple dans la ligne du présent chapitre.

8.1 - Résultats généraux de pureté

<u>Définition 5</u> : Soit M une L-sous-algèbre de M(G). On dira qu'une me-

sure $\mu \in M$ à la propriété "du module constant" dans M si, pour tout $\chi \in \Delta M$, $|\chi_\mu|$ est une constante. (Si l'on ne précise pas, M sera M(G)).

(8.1.1) <u>Exemple</u> : Le lemme 2 met en évidence une classe de mesures $\mu \in M(G)$ qui ont la propriété du module constant dans l'algèbre $N[\mu]$, qui comprend en particulier les produits de Riesz (sauf cas exceptionnels). Nous verrons plus loin d'autres exemples avec les produits de convolution infinis de mesures discrètes.

(8.1.2) <u>Remarque</u> : Une conséquence immédiate de la définition est que $\Delta M(\mu)$ ne contient pas d'idempotent différent de 0 ou 1. Pour tout idempotent $h \in \Delta M$ on considère la L-sous-algèbre $N_h = hM$ et l'idéal $I_h = N_h^{\perp}$. Alors ou bien $\mu \in N_h$, ou bien $\mu \in I_h$. Cette remarque est contenue dans la proposition suivante.

<u>Proposition 7</u> : Soit I un L-idéal de M. Pour toute mesure μ ayant la propriété de module constant dans M, on a la dichotomie :

a) ou bien $\mu \in \mathrm{Rad}\, I$

b) ou bien $|\mu|^n \perp I$, $(n \geqslant 1)$

<u>Démonstration</u> : Si $\mu \notin \mathrm{Rad}\, I$ on a vu (prop.6) qu'il existe un idempotent $h \in \Delta M$, nul sur I et tel que $h_\mu \neq 0$. Nécessairement $h_\mu = 1$, ce qui implique que $|\mu|^n \perp I$ (lemme 5).

<u>Théorème 12</u> : Soit μ une mesure ayant la propriété du module constant dans M(G).

a) Ou bien μ est une mesure de Dirichlet, ou bien μ est orthogonale à toute mesure de Dirichlet.

b) Pour toute topologie τ localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, ou bien $\mu \in M(G_\tau)$, ou bien $\mu \perp M(G_\tau)$.

c) Si $\mu \in M(G_\tau)$, ou bien $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau)$, ou bien $|\mu|^n \perp L^1(G_\tau)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

<u>Démonstration</u> : Le théorème 12 se déduit immédiatement de la remarque

(8.1.2) et de la proposition 7. D'après le chapitre II-8 et la remarque (4.1.4) une mesure μ est de Dirichlet s'il existe $h = h^2 \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ tel que $h_\mu = 1$ et elle est orthogonale à toute mesure de Dirichlet si pour tout $h \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, $h_\mu = 0$. La dichotomie (c) peut être précisée comme suit en utilisant les résultats plus profonds de J.L. TAYLOR (cf (7.3)).

Théorème 13 [6] : Soit μ une mesure ayant la propriété du module constant dans M(G). On a la dichotomie suivante :

- ou bien μ est à puissances fortement indépendantes ;
- ou bien $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau)$ pour une topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale.

Démonstration : Pour tout $\chi \in \Delta_+$, χ_μ est une constante positive. Alors, ou bien il existe $\chi \in \Delta_+$ pour lequel $\chi_\mu = c$ avec $0 < c < 1$ et μ est à puissances fortement indépendantes (lemme 4) ; ou bien, pour tout $\chi \in \Delta_+$, on a $\chi_\mu = 0$ ou $\chi_\mu = 1$. Dans ce cas μ est critique ; $h^{(\mu)} = h_\tau$ pour une certaine topologie τ et $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau)$ (cor. th.11).

Remarques :

(8.1.3) La topologie τ dont l'existence est affirmée dans le théorème 13 est unique si $\mu \neq 0$. En effet pour $\tau \neq \tau'$, $\mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau)$ et $\mathrm{Rad}\, L^1(G_{\tau'})$ sont orthogonaux (sans quoi toute mesure non nulle de $\mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau) \cap \mathrm{Rad}\, L^1(G_{\tau'})$ serait critique à la fois pour h_τ et $h_{\tau'}$ et de là $h_\tau = h_{\tau'}$).

(8.1.4) Pour toute mesure fortement continue (au sens de la définition 4) avec la propriété du module constant, la topologie τ du théorème 13 ne peut être que la topologie initiale. Si la mesure n'est pas à puissances indépendantes elle est dans $\mathrm{Rad}\, L^1(G)$. Un cas particulier intéressant est le suivant qu'on énonce comme corollaire.

Corollaire : ($G = \mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ ou le groupe des entiers p-adiques). Soit $\mu \in M(G)$ une mesure continue avec la propriété du module constant.

Alors

- ou bien μ est à puissances fortement indépendantes ;
- ou bien μ est dans Rad $L^1(G)$.

Démonstration : Dans le cas des groupes envisagés la seule topologie localement compacte strictement plus fine que la topologie initiale est la topologie discrète (cf discussion chapitre VIII).

8.2 - Mesures tame

Définition 6 : Soit M une L-sous-algèbre de M(G). Une mesure $\mu \in M$ est dite "tame" dans M si pour tout $\chi \in \Delta M$, $\chi_\mu = c\gamma$ où c est une constante et γ un caractère du groupe G. Si $M = M(G)$ on dira que μ est tame, sans autre précision. Si $M = N[\mu]$, la L-sous-algèbre engendrée par μ, on dira que μ est tame au sens fort. (Cette terminologie est empruntée à G. BROWN et W. MORAN [2] [7]).

(8.2.1) Exemples : Les mesures de Rad $L^1(G)$ sont évidemment tame. Mis à part ce cas trivial, on connaît comme exemples de mesures tame au sens fort, les produits de Riesz (sauf cas exceptionnels). C'est aussi le cas des produits de Riesz généralisés ρ avec $\overline{\lim}|\hat{\rho}(\gamma)| < 1$ (cf chapitre V). M. QUEFFELEC a mis en évidence dans [12] une classe de mesures spectrales sur $\mathbb{T}$ qui sont tame et peuvent se définir comme limites vagues de produits de polynômes trigonométriques positifs, comme les produits de Riesz, mais dont le spectre de Fourier est $\mathbb{Z}$ tout entier. G. BROWN et W. MORAN [7] établissent la propriété de tameness pour les mesures de Bernoulli "coarse" qui ressemblent à la mesure de Cantor-Lebesgue.

Les mesures tame ont évidemment la propriété du module constant. Mais on a des résultats plus précis.

Théorème 14 : (G métrisable). Soit μ une mesure de probabilité tame ayant G comme support.

a) $\overline{\lim}|\hat{\mu}(\gamma)| < 1$;

b) μ est orthogonale à toute mesure de Dirichlet ;

c) μ est fortement continue (au sens de la définition 4).

Démonstration : Comme on l'a déjà remarqué (théorème 12), ou bien μ est orthogonale à toute mesure de Dirichlet, ou bien μ est une mesure de Dirichlet ; donc (a) et (b) sont équivalentes. Mais il résulte du théorème 15 du chapitre II qu'une mesure de Dirichlet ne peut pas être tame. Enfin (c) est contenue dans (b) compte-tenu du théorème 5.

Théorème 15 [2] : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure de probabilité tame avec $\overline{\lim}|\hat{\mu}(\gamma)| < 1$. On a la dichotomie :

- ou bien μ est à puissances fortement indépendantes ;
- ou bien $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(G)$.

Démonstration : Comme on l'a remarqué plus haut, la condition $\overline{\lim}|\hat{\mu}(\gamma)| < 1$ implique que μ est fortement continue. Le résultat découle donc du théorème 12 et de la remarque (8.1.4). Mais suivant une remarque de G. BROWN on peut l'établir dans le cas G compact de façon plus élémentaire sans faire appel au théorème 11 de J.L. TAYLOR. En effet si l'on reprend la démonstration du théorème 13, le cas difficile est celui où l'on suppose que pour tout $\chi \in \Delta$, on a $|\chi_\mu| = 0$ ou $|\chi_\mu| = 1$. Ici cela veut dire que $\chi_\mu = c\gamma$ avec $c = 0$ ou $|c| = 1$ et $|\hat{\mu}(\chi)| = |\hat{\mu}(\gamma)|$ dans le cas où $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$. L'hypothèse $\overline{\lim}|\hat{\mu}(\gamma)| < 1$ entraîne donc que 1 est un point isolé dans l'ensemble des valeurs de $|\hat{\mu}(\chi)|$, $\chi \in \Delta$, autrement dit que le spectre de μ n'est pas connexe. On conclut par le théorème 7 et la remarque (6.1.4) que l'on doit avoir $|\mu|^n \perp L^1(G)$, pour un certain n, ce qui équivaut à $\mu \in \mathrm{Rad}\, L^1(G)$ (th.11). (La démonstration du théorème 7 se réduirait ici au cas le plus simple où la mesure idempotente η est dans $L^1(G)$).

8.3 - Mesures D-ergodiques

Définition : Soit D un sous-groupe dénombrable (de translations) de G. Une mesure de probabilité $\mu \in M(G)$ est D-ergodique si tout borélien D-invariant de G, est de mesure 0 ou 1.

(8.3.1) Remarque : On n'impose pas à priori que μ ait des propriétés d'invariance par le groupe D. Mais il est facile de se ramener au cas d'une mesure quasi-invariante par $D = \{d_n\}_{n\geq 1}$ en considérant $\mu_1 = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\, \delta_{d_n} * \mu$. Pour tout borélien B D-invariant, $\mu_1(B) = \mu(B)$; il est donc clair que les propriétés de D-ergodicité pour μ et μ_1 sont équivalentes.

Proposition 8 : Le produit de convolution de deux mesures D-ergodiques est D-ergodique.

Démonstration : Soient μ et ν deux probabilités D-ergodiques. Soit B un borélien D-invariant. Pour tout $x \in G$, B-x est également D-invariant et $\mu(B-x) = 0$ ou 1. L'ensemble E des x tels que $\mu(B-x) = 1$ est lui-même D-invariant et $\nu(E) = 0$ ou 1. Pour démontrer la proposition il suffit de remarquer que

$$\mu * \nu(B) = \int \mu(B-x)\, d\nu(x) = \int_E \mu(B-x)\, d\nu(x) = \nu(E) .$$

Les mesures D-ergodiques ont une propriété de pureté très forte :

Théorème 16 : Soit $\mu \in M(G)$ une mesure D-ergodique. Pour tout L-sous-espace N de M(G) qui est D-invariant, ou bien $\mu \in N$, ou bien $\mu \in N^{\perp}$.

Démonstration : On va démontrer la propriété pour la mesure μ rendue D-quasi-invariante (8.3.1). Il est facile de se convaincre que si N est invariant par les translations de D, il en est de même de $N^{\perp}$. Ecrivons $\mu = \nu + \sigma$ avec $\nu \in N$ et $\sigma \in N^{\perp}$. La mesure μ étant D-quasi-invariante et la décomposition d'une mesure suivant N et $N^{\perp}$ étant unique, ν et σ sont également D-quasi-invariantes. Considérons un borélien B tel que $\nu(B) = \|\nu\|$ et $\sigma(B) = 0$. Alors on a aussi $\nu(B+D) = \|\nu\|$ et $\sigma(B+D) = 0$ et comme $B + D$ est D-invariant, $\mu(B+D) = 0$ ou 1. On en conclut que $\|\nu\| = 0$ ou 1, ce qui démontre le théorème.

<u>Corollaire</u> : Pour toute mesure μ D-ergodique et pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale,

- ou bien $\mu^n \perp L^1(G_\tau)$ pour tout $n \geqslant 1$;
- ou bien $\mu^n \in L^1(G_\tau)$ pour n assez grand.

<u>Démonstration</u> : Ceci résulte du fait que, pour tout $n \geqslant 1$, μ^n est D-ergodique et que $L^1(G_\tau)$ est invariant par les translations.

<u>Théorème 17</u> : Soit μ une mesure D-ergodique. Pour tout caractère $\chi \in \Delta$ tel que $\chi\delta_d = \delta_d$, $(d \in D)$, χ_μ est une constante. La mesure μ a la propriété du module constant.

<u>Démonstration</u> : On se ramène au cas où μ est D-quasi-invariante. Soit $\chi \in \Delta$ tel que $\chi_{\delta_d} = 1$ si $d \in D$. Alors pour tout $d \in D$, compte tenu de $\mu * \delta_d \sim \mu$, on a

$$\chi_\mu(x+d) = \chi_{\mu * \delta_d}(x+d) = \chi_\mu(x) \qquad \mu\text{-pp} .$$

La fonction χ_μ étant D-invariante est constante (c'est classique : on peut dire que pour tout borélien E de $\mathbb{C}$, l'ensemble des x où $\chi_\mu(x)$ prend ses valeurs dans E, est D-invariant ; il est donc de mesure 0 ou 1 ; on conclut par dichotomie que χ_μ est constante). La dernière partie du théorème se déduit immédiatement de la première si l'on se souvient que, pour tout $\chi \in \Delta$ et tout $x \in G$, $|\chi_{\delta_x}| = 1$.

(8.3.2) <u>Remarque</u> : Toute mesure μ D-ergodique a la propriété du module constant dans la L-sous-algèbre engendrée par μ et ses translatées par D. En effet l'argument précédent reste valable dans ce contexte.

<u>Corollaire</u> [6] : Soit μ une mesure D-ergodique. On a la dichotomie :

- ou bien μ est à puissances fortement indépendantes ;
- ou bien il existe une topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, telle que $\mu^n \in L^1(G_\tau)$ pour n assez grand.

<u>Démonstration</u> : Ce résultat n'est rien d'autre que le théorème 13 si l'on tient compte du corollaire du théorème 16.

(8.3.3) <u>Exemple</u> : <u>Mesures de Bernoulli</u>.

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\Sigma x_n^2 < +\infty$. On considère la mesure

$$\mu = \mathop{*}_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(\delta_{x_n} + \delta_{-x_n})\right]$$

La convergence étroite de ce produit infini résulte de la convergence de $\prod_{n=1}^{\infty} \cos tx_n$ par le théorème de P. Lévy. Soit D le groupe engendré par les points x_n , $n \geqslant 1$. Montrons que μ est D-ergodique. On introduit une suite de variables aléatoires indépendantes X_n prenant les valeurs x_n et $-x_n$ avec probabilité 1/2. La série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge presque-surement vers une variable aléatoire de loi μ. Pour tout borélien B, D-invariant, l'évènement $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \in B$ est un évènement terminal car les sommes finies $\sum_{n=1}^{N} X_n$, $N \geqslant 1$ sont à valeurs dans D. On a donc $\mu(B) = 0$ ou 1 par la loi du zéro-un.

Cet argument probabiliste peut s'étendre, pour un groupe quelconque, à toute mesure $\mu = \mathop{*}_{n=1}^{\infty} \mu_n$ où les μ_n sont des mesures discrètes et le produit converge étroitement ; D est le groupe engendré par les points chargés par les μ_n , $n \geqslant 1$. On trouvera dans [7] une étude détaillée des algèbres de mesures de Bernoulli.

<u>RÉFÉRENCES</u> :

[1] BAILEY W.J., BROWN G., MORAN W. - Spectra of independant power

measures. Proc. Camb. Phil. Soc. 72 (1972) 27-35.

[2] BROWN G. - Riesz products and generalized characters. Proc. Lond Math. Soc. 30 (1975) 209-238.

[3] BROWN G., MORAN W. - On orthogonality of Riesz products. Proc. Camb. Phil. Soc. 76 (1974) 173-181.

[4] BROWN G., MORAN W. - L-ideals of M(G) determined by continuity of translation. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 18 (1972-73) 307-316.

[5] BROWN G., MORAN W. - On the Silov boundary of a measure algebra. Bull. Lond. Math. Soc. 3 (1971) 197-203.

[6] BROWN G., MORAN W. - A dichotomy for infinite convolution of discrete measures. Proc. Camb. Phil. Soc. 73 (1973) 307-316.

[7] BROWN G. , MORAN W. - Bernoulli measures algebras. Acta Math. 132 (1974) 77-109.

[8] DUNKL C.F., RAMIREZ D. - Bounded projections on Fourier-Stieltjes transforms. Proc. Amer. Math. Soc. 31-1 (1972) 122.

[9] GAMELIN T. - Uniform algebras. Prentice Hall.

[10] HOST B., PARREAU F. - Sur un problème de GLICKSBERG : les idéaux fermés de type fini de M(G). Ann. Inst. Fourier 28 (1978).

[11] HOST B., PARREAU F. - Orthogonalité et propriétés spectrales dans les algèbres de convolution de mesures (à paraître).

[12] QUEFFELEC M. - Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques. Bull. Soc. Math. 107 (1979) 385-421.

[13] MÉLA J.F. - Mesures ε-idempotentes de norme bornée. Studia Math. 72 (1982) 131-149.

[14] PEYRIERE J. - Etude de quelques propriétés des produits de Riesz

Ann. Inst. Fourier 25-2 (1975) 127-169.

[15] SREIDER Y.A. - The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution. Mat. Sbornik 27 (1950) 297 (Am. Math. Soc. Transl. 81).

[16] TAYLOR J.L. - Measure algebras. Regional Conference Series in Math. n°16, A.M.S. (1972).

[17] TAYLOR J.L. - Convolution measure algebras with group maximal ideal spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967) 257-263.

[18] TAYLOR J.L. - Inverses, logarithms and idempotents in M(G). Rocky Mountain J. Math. 2 (1972) 183-206.

[19] TAYLOR J.L. - Ideal theory and Laplace transforms for a class of measure algebras on a group. Acta Math. 121 (1968) 251-292.

[20] WILLIAMSON J.H. - Banach algebra elements with independant powers, and theorem of Wiener-Pitt type. Proceedings of a symposium on function algebras. Scott Foresman and Co (1966) 186-197.

CHAPITRE V

PRODUITS DE RIESZ GÉNÉRALISÉS

1 - Définitions, notations

G désigne un groupe abélien compact et Γ son dual.

1.1 - Un ensemble $\Theta = \{I_j\}_{j\geq 1}$ de parties finies, symétriques, contenant 1, de Γ, est un ensemble de blocs dissociés si tout $\omega \in \Gamma$ admet au plus une écriture

$$\omega = \prod_{j\geq 1} \theta_j \quad \theta_j \in I_j \ , \quad \theta_j = 1 \text{ sauf pour un nombre fini de } j.$$

Ces produits sont les mots de Θ, les θ_j différents de 1 les lettres d'un tel mot ω et leur nombre la longueur de ω. $\Omega(\Theta)$ désigne l'ensemble des mots de Θ ; on notera aussi, pour tout $n \geq 1$,

$$\Omega_n = \Omega(\{I_1,\ldots,I_n\}) = I_1 \ldots I_n$$

et

$$\Theta_n = \Theta \setminus \{I_1,\ldots,I_n\}.$$

Deux mots ω et ω' sont dissociés si aucun des ensembles I_j ne contient à la fois une lettre de ω et une lettre de ω' ; une suite de mots (ω_k) est asymptotiquement dissociée si, pour tout $j \geq 1$, ω_k n'a plus de lettre dans I_j pour k assez grand, autrement dit si, pour tout $n \geq 1$, $\omega_k \in \Omega(\Theta_n)$ pour k assez grand. Enfin, on dira qu'une suite de mots de la forme $(\prod_1^{n_k} \theta_j)$ avec $\theta_j \in I_j$ et $n_{k+1} > n_k$ est croissante. De ces définitions on déduit facilement la remarque suivante :

Lemme 1 : Toute suite de mots contient une sous-suite de la forme

$(\gamma_k \omega_k)$ où (γ_k) est une suite de mots croissante, (ω_k) est une suite asymptotiquement dissociée, γ_k et ω_k sont dissociés pour tout k.

1.2 - $\Theta = \{I_j\}$ étant un ensemble de blocs dissociés, soit $(P_j)_{j \geq 1}$ une suite de polynômes trigonométriques positifs tels que, pour tout j,

$$\|P_j\|_1 = \hat{P}_j(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} \hat{P}_j \subset I_j .$$

Le produit infini $\prod_{j \geq 1} P_j$, converge vaguement dans M(G) vers une mesure de probabilité ρ, qu'on appellera <u>produit de Riesz généralisé construit sur Θ avec les</u> P_j, vérifiant

$$\hat{\rho}(\gamma) = 0 \qquad \text{si} \qquad \gamma \in \Gamma \setminus \Omega(\Theta)$$

$$\hat{\rho}(\omega) = \prod_1^n \hat{P}_j(\theta_j) \qquad \text{si} \qquad \omega = \prod_1^n \theta_j \text{ avec } \theta_j \in I_j .$$

Pour deux mots ω et ω' dissociés, on a $\hat{\rho}(\omega\,\omega') = \hat{\rho}(\omega)\,\hat{\rho}(\omega')$.

Soit $\rho_n = \prod_{j>n} P_j$ le produit de Riesz construit sur Θ_n avec les P_j $(j > n)$;

$$\rho = \left(\prod_{j=1}^n P_j\right) \rho_n = \left(\sum_\gamma \left(\prod_1^n P_j\right)\hat{}\,(\gamma)\bar{\gamma}\right) \rho_n$$

$$\rho = \sum_{\omega \in \Omega_n} \hat{\rho}(\omega)\bar{\omega}\rho_n .$$

Les supports de Fourier $\operatorname{Supp}(\bar{\omega}\,\rho_n)\hat{}$ pour $\omega \in \Omega_n$, inclus dans les ensembles $\omega\,\Omega(\Theta_n)$, sont deux-à-deux disjoints, de sorte que $(\omega\,\rho_n) * (\bar{\omega}'\rho_n) = 0$ pour $\omega, \omega' \in \Omega_n$ et $\omega\,\Omega(\Theta_n)$, sont deux-à-deux disjoints, de sorte que $(\bar{\omega}\,\rho_n) * (\bar{\omega}'\rho_n) = 0$ pour $\omega, \omega' \in \Omega_n$ et $\omega \neq \omega'$.

<u>Lemme 2</u> : Soit $\chi \in \Delta M(G)$.

a) pour $n \geq 1$, il existe au plus un $\omega \in \Omega_n$ tel que $\hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega}) \neq 0$; alors $\hat{\rho}(\chi) = \hat{\rho}(\omega)\;\hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega})$;

b) si $\hat{\rho}(\chi) \neq 0$, il correspond à χ une suite de mots croissante (ω_n), unique, telle que, pour tout $n \geq 1$, $\omega_n \in \Omega_n$ et $\hat{\rho}(\chi) = \hat{\rho}(\omega_n)\hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega}_n) \neq 0$.

Démonstration : Pour $n \geq 1$, $\hat{\rho}(\chi) = \sum_{\omega \in \Omega_n} \hat{\rho}(\omega)(\bar{\omega}\rho_n)^{\wedge}(\chi)$ et, d'après ce qui précède, il existe au plus un $\omega \in \Omega_n$ tel que $(\bar{\omega}\rho_n)^{\wedge}(\chi) \neq 0$, d'où la première assertion. Si $\hat{\rho}(\chi) \neq 0$, $\omega_n \in \Omega_n$ est bien défini par $\hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega}_n) \neq 0$; de plus $\bar{\omega}_n\rho_n$ et $\bar{\omega}_{n+1}\rho_{n+1}$ n'ayant pas leurs supports de Fourier disjoints, le mot ω_{n+1} "prolonge" le mot ω_n, et la suite (ω_n) est croissante.

2 - Produits de Riesz "tame" $(\overline{\lim}_{\gamma\to\infty} |\hat{\rho}(\gamma)| < 1)$.

2.1 - ρ est "tame" si, pour tout caractère $\chi \in \Delta M(G)$, χ_ρ est de la forme $c\gamma$, où c est une constante et $\gamma \in \Gamma$.

Avec les notations de (1), l'hypothèse sur ρ est équivalente à $\overline{\lim}_{j\to\infty} \sup_{\gamma\neq 1} |\hat{P}_j(\gamma)| < 1$; on retrouve alors essentiellement les propriétés des produits de Riesz ordinaires (cf BROWN [1] et chap.IV-2).

Théorème 1 : Soit ρ un produit de Riesz généralisé sur G. Si $\overline{\lim}_{\gamma\to\infty}|\hat{\rho}(\gamma)| < 1$, ρ est "tame".

Démonstration : Soit $\chi \in \Delta M(G)$ tel que $\chi_\rho \neq 0$; il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\hat{\rho}(\chi\gamma) \neq 0$ et, quitte à remplacer χ par $\chi\gamma$, on pourra supposer $\hat{\rho}(\chi) \neq 0$. Soit alors (ω_n) la suite croissante associée à χ par le lemme 2 ; ω_n s'écrit $\prod_1^n \theta_j$, avec $\theta_j \in I_j$ (indépendant de n), et

$$0 < |\hat{\rho}(\chi)| \leq |\hat{\rho}(\omega_n)| = \prod_1^n |\hat{P}_j(\theta_j)| \quad (n \geq 1).$$

Il ne peut y avoir une infinité de θ_j distincts de 1, et la suite (ω_n) est stationnaire ; soient n_0 et ω_0 tels que $\omega_0 = \omega_n$ pour $n \geq n_0$, et $\chi_0 = \chi\bar{\omega}_0$.

Comme $\hat{\rho}_n(\chi_0) \neq 0$ pour $n \geq n_0$, tous les termes de la suite croissante associée à χ_0 sont égaux à 1, et

$$\hat{\rho}(\chi_0) = \hat{\rho}_n(\chi_0) \neq 0 \quad (n \geq 1).$$

De même d'après le lemme 2, pour $\omega \in \Omega(\Theta)$ et n assez grand pour que $\omega \in \Omega_n$,

$$\hat{\rho}(\chi_0\omega) = \hat{\rho}(\omega)\ \hat{\rho}_n(\chi_0) = \hat{\rho}(\omega)\ \hat{\rho}(\chi_0).$$

Soit $c = \hat{\rho}(\chi_0)$. Pour montrer $(\chi_0)_\rho = c$, donc $\chi_\rho = c\omega_0$, il suffit de vérifier $\hat{\rho}(\chi_0\gamma) = c\,\hat{\rho}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$; c'est vrai pour $\gamma \in \Omega(\Theta)$ et il reste donc à montrer :

$$\hat{\rho}(\chi_0\gamma) = c\,\hat{\rho}(\gamma) = 0 \qquad (\gamma \in \Gamma \setminus \Omega(\Theta)).$$

On suppose $\hat{\rho}(\chi_0\gamma) \neq 0$; la construction faite pour χ montre qu'il existe $\omega' \in \Omega(\Theta)$ tel que, si $\gamma_1 = \gamma\overline{\omega}'$

$$\hat{\rho}(\chi_0\gamma_1) = \hat{\rho}_n(\chi_0\gamma_1) \neq 0 \qquad (n \geqslant 1).$$

Alors $\rho_n * \gamma_1\rho_n \neq 0$ pour tout n, et il existe pour chaque $n \geqslant 1$ un $\alpha_n \in \Omega(\Theta_n)$ tel que $\gamma_1\alpha_n \in \Omega(\Theta_n)$. Soit p un entier assez grand pour que $\alpha_1 \in \Omega_p$ et $\gamma_1\alpha_1 \in \Omega_p$; $(\gamma_1\alpha_1)\alpha_p = \alpha_1(\gamma_1\alpha_p)$ est un mot, et l'écriture de ce mot étant unique, $\gamma_1 = 1$; donc $\gamma = \omega' \in \Omega(\Theta)$, ce qui achève la démonstration.

2.2 - On dit qu'une mesure $\mu \in M(G)$ est <u>fortement continue</u> si elle est étrangère à $M(G_\tau)$ pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G strictement plus fine que la topologie initiale τ_0 (cf chap.IV, déf.4).

<u>Corollaire</u> : Sous la même hypothèse que le théorème 1, ρ est fortement continue.

<u>Démonstration</u> : Soit h_τ le caractère idempotent associé à une telle topologie τ, tel que, pour $\mu \in M(G)$, $h_\tau\mu \in M(G_\tau)$ et $\mu - h_\tau\mu \perp M(G_\tau)$. Comme ρ est "tame", $h_\tau\rho = \rho$ ou $h_\tau\rho = 0$, et ρ a la propriété de pureté :

$$\rho \in M(G_\tau) \quad \text{ou} \quad \rho \perp M(G_\tau).$$

Si $\rho \in M(G_\tau)$, $\lim \hat{\rho}(\gamma_\alpha) = 1$ pour toute suite généralisée (γ_α) convergeant vers 1 dans la topologie sur Γ duale de τ. Comme $\tau > \tau_o$ et $\overline{\lim}_{\gamma\to\infty} |\hat{\rho}(\gamma)| < 1$, c'est impossible. Donc $\rho \perp M(G_\tau)$ quelle que soit τ, et ρ est fortement continue.

Remarques :

(a) la "tameness" implique aussi la propriété de pureté $\rho \perp \mathrm{Rad}\, L^1(G)$ ou $\rho \in \mathrm{Rad}\, L^1(G)$ (selon que $(\Delta M(G))_\rho$ contient ou non une constante c de module différent de O et de 1, chap.IV-(8.2)) dans le premier cas, ρ a ses puissances fortement indépendantes. Dans beaucoup de cas particuliers, on peut résoudre cette dichotomie, en appliquant notamment le critère de PEYRIERE [3] ; mais nous ne connaissons pas de critère général comme dans le cas des produits de Riesz ordinaires.

(b) le lemme 2 et la démonstration du théorème 1 s'appliquent encore aux caractères de la L-sous-algèbre $N[\{\rho_n\}]$ engendrée par ρ et les ρ_n pour $n \geqslant 1$. Comme $\rho = (\prod_1^n P_j)\ \rho_n$, $\rho \ll \rho_n$ pour tout n, et $\rho \sim \rho_n$ dans de nombreux cas : si les P_j ne s'annulent pas, si $G = \mathbb{T}$ (puisque ρ est continue et que les P_j n'ont qu'un nombre fini de O), plus généralement si G est connexe et les P_j de la forme $\Sigma a_{k,j}\, \gamma_j^k$ (ρ est fortement continue et l'ensemble des O de P_j est au plus une réunion finie de classes selon un sous-groupe compact de G).

Dans le cas général une étude plus précise montre que les caractères de la L-sous-algèbre $N[\rho]$ engendrée par ρ se prolongent à $N[\{\rho_n\}]$ (cf BROWN [1]). Il en résulte que, pour tout caractère χ de $N[\rho]$, χ_ρ est de la forme $c\gamma$, où c est une constante et $\gamma \in \Gamma$ (ρ est "tame" au sens fort).

2.3 - Constantes dans l'adhérence des caractères :

Théorème 2 : Si $\sup_{\gamma\neq 1} |\hat{\mu}(\gamma)| < 1$, les constantes non nulles de $\bar{\Gamma}(\rho)$ sont les limites des suites (ω_k) asymptotiquement dissociées telles que $(\hat{\rho}(\omega_k))$ converge vers une limite non nulle.

Démonstration : Si (ω_k) est une suite asymptotiquement dissociée et $\lim \hat{\rho}(\omega_k) = c \neq 0$, soit $\phi \in \Gamma$ un caractère adhérent à (ω_k) ; il est tel que

$$\hat{\rho}(\phi) = \hat{\rho}_n(\phi) \neq 0 \qquad (n \geq 1)$$

et d'après la démonstration du théorème 1, ϕ_ρ est égal à la constante c.

Inversement, soit $c \neq 0$ une constante, limite dans $\bar{\Gamma}(\rho)$ d'une suite généralisée (γ_α) ; pour α assez grand, les γ_α sont des mots. Si pour tout j, γ_α n'a plus de lettre dans I_j pour α assez grand, on peut choisir, parmi les γ_α, des ω_k deux-à-deux dissociés tels que $\hat{\rho}(\omega_k)$ converge vers c : alors la suite dissociée (ω_k) converge vers c dans $\bar{\Gamma}(\rho)$. Dans le cas contraire on peut supposer, quitte à prendre une sous-suite, que les γ_α contiennent une lettre θ fixe. Si $\omega_\alpha = \bar{\theta}\,\gamma_\alpha$, ω_α et θ sont dissociés, ω_α converge vers $c\bar{\theta}$ dans $\bar{\Gamma}(\phi)$ et

$$\lim \hat{\rho}(\omega_\alpha) = c\hat{\rho}(\bar{\theta}) = c\overline{\hat{\rho}(\theta)}$$
$$\lim \hat{\rho}(\gamma_\alpha) = \lim \hat{\rho}(\theta)\,\hat{\rho}(\omega_\alpha) = c|\hat{\rho}(\theta)|^2 \ .$$

Donc $|\hat{\rho}(\theta)| = 1$, en contradiction avec l'hypothèse sur ρ.

Remarques :

(a) la seconde partie de la démonstration est celle de BROWN [1] ; dans le cas étudié ici, on peut se restreindre à l'étude des suites (non généralisées), car le groupe engendré par $\Omega(\theta)$ est dénombrable et son adhérence dans $\bar{\Gamma}(\rho)$ est métrisable (cf chap.I, lemme 6). On a montré plus précisément que toute suite de mots convergeant dans $\bar{\Gamma}(\rho)$ vers une constante non nulle est asymptotiquement dissociée.

(b) Si $|\hat{\rho}(\gamma)| = 1$ pour tout un $\gamma \neq 1$, γ est une constante dans $L^\infty(\rho)$ et le théorème est faux. Alors $|\hat{\rho}(\gamma^k)| = 1$ pour tout k ; il faut que certains I_j contiennent des sous-groupes finis de Γ.

3 - Produits de Riesz fins ($\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}}|\hat{\rho}(\gamma)| = 1$)

3.1 - Les produits de Riesz généralisés ont des propriétés analogues à celles des mesures de Bernoulli étudiées par BROWN et MORAN dans "Bernoulli Measures Algebras [2]". On a vu la "tameness" lorsque $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}}|\hat{\rho}(\gamma)| < 1$; si $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}}|\hat{\rho}(\gamma)| = 1$, ρ n'est plus "tame" sauf dans des cas très pariticuliers, mais a toujours la propriété du module constant, et on peut encore décrire les restrictions des caractères dans $L^\infty(\rho)$.

On conserve les notations de (1).

Lemme 3 : Soit $(\omega_n) = (\prod_1^n \theta_j)$ une suite croissante telle que $\hat{\rho}(\omega_n)$ ne tende pas vers 0, et $\phi \in \bar{\Gamma}$ un caractère adhérent à (ω_n). Alors $|\phi_\rho| = 1$, et si $\alpha \in \Gamma$ vérifie $\hat{\rho}(\phi\alpha) \neq 0$, pour tout n assez grand $\omega_n\alpha$ appartient à Ω_n.

Démonstration : Comme $\hat{\rho}(\omega_n) = \prod_1^n \hat{P}_j(\theta_j)$, l'hypothèse signifie que le produit $\prod_{j\geq 1}|\hat{P}_j(\theta_j)|$ converge. En particulier $|\hat{\rho}(\phi\bar{\omega}_n)| = \prod_{j>n}|\hat{P}_j(\theta_j)|$ tend vers 1 ($n\to\infty$), donc $\|\phi\rho\| = 1$ et $|\phi_\rho| = 1$.

Si $\hat{\rho}(\phi\alpha) \neq 0$, soit ε un réel tel que $|\hat{\rho}(\phi\alpha)| > \varepsilon > 0$ et p un entier tel que $|\hat{\rho}(\omega_p\alpha)| > \varepsilon$ et $\prod_{j>p}|\hat{P}_j(\theta_j)| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$. On va montrer que $\omega_n\alpha \in \Omega_n$ pour $n \geq p$, dès que Ω_n contient le mot $\omega_p\alpha$. On note, pour un tel entier n, $Q_n = \prod_1^n P_j$, $\gamma = \omega_n\bar{\omega}_p = \prod_{p+1}^n \theta_j$ et z le complexe de module 1 tel que

$$\prod_1^n \hat{P}_j(\theta_j) = \hat{Q}_n(\gamma) = z\prod_{p+1}^n|\hat{P}_j(\theta_j)|.$$

Alors $\quad |z\hat{Q}_n(\omega_p\alpha) - \hat{Q}_n(\omega_n\alpha)| = \left|\int(z-\gamma)\,\omega_p\alpha\, Q_n\, dm\right| \leq \int|z-\gamma|\, Q_n\, dm$

et

$$\left(\int|z-\gamma|Q_n\, dm\right)^2 \leq \int|z-\gamma|^2 Q_n\, dm = 2 - 2\mathrm{Re}(\bar{z}\,\hat{Q}_n(\gamma)) = 2(1-|\hat{Q}_n(\gamma)|).$$

D'après les hypothèses sur p et n, $1 - |\hat{Q}_n(\gamma)| < \frac{\varepsilon^2}{2}$, donc

$|z\hat{Q}_n(\omega_p\alpha) - \hat{Q}_n(\omega_n\alpha)| < \varepsilon$ et, comme $\omega_p\alpha \in \Omega_n$, $|\hat{Q}_n(\omega_p\alpha)| = |\hat{\rho}(\omega_p\alpha)| > \varepsilon$, donc $\hat{Q}_n(\omega_n\alpha) \neq 0$ ce qui prouve $\omega_n\alpha \in \Omega_n$.

Théorème 3 : Soit ρ un produit de Riesz généralisé sur G et $\chi \in \Delta M(G)$. Le module de χ_ρ est constant. Plus précisément, si $\hat{\rho}(\chi) \neq 0$ et si ϕ est un caractère adhérent à la suite croissante associée à χ, $|\phi_\rho| = 1$ et $\chi_\rho = \hat{\rho}(\chi\bar{\phi})\phi_\rho$.

Démonstration : Quitte à remplacer χ par un $\chi\gamma$, on peut toujours supposer $\hat{\rho}(\chi) \neq 0$ et noter (ω_n) la suite croissante associée à χ, avec

$$\hat{\rho}(\chi) = \hat{\rho}(\omega_n)\, \hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega}_n) \neq 0 \quad (n \geqslant 1).$$

$\hat{\rho}(\omega_n)$ ne tend pas vers 0, et si $\phi \in \bar{\Gamma}$ est adhérent à (ω_n), on a $|\phi_\rho|=1$, donc $\chi_\rho = (\chi\bar{\phi})_\rho\, \phi_\rho$. Comme $\hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega}_n) \neq 0$, la suite croissante associée à $\chi\bar{\omega}_n$ a ses termes égaux à 1 jusqu'au rang n, et pour $m \leqslant n$, $\hat{\rho}(\chi\bar{\omega}_n) = \hat{\rho}_n(\chi\bar{\omega}_n) = \hat{\rho}_m(\chi\bar{\omega}_n) \neq 0$; d'où

$$\hat{\rho}(\chi\bar{\phi}) = \hat{\rho}_m(\chi\bar{\phi}) \neq 0 \quad (m \geqslant 1)\ .$$

On est donc ramené à montrer que $(\chi_0)_\rho$ est une constante pour tout caractère χ_0 vérifiant

$$\hat{\rho}(\chi_0) = \hat{\rho}_n(\chi_0) \neq 0 \quad (n \geqslant 1)\ .$$

Pour tout $\omega \in \Omega(0)$ et n tel que $\omega \in \Omega_n$, d'après le lemme 2,

$$\hat{\rho}(\chi_0\omega) = \hat{\rho}(\omega)\hat{\rho}_n(\chi_0) = \hat{\rho}(\omega)\hat{\rho}(\chi_0)$$

et, de même que dans la démonstration du théorème 1, il reste à montrer $\hat{\rho}(\chi_0\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \Omega(0)$.

Si $\gamma \in \Gamma$ et $\hat{\rho}(\chi_0\gamma) \neq 0$, soient (ω'_n) la suite croissante associée à $\chi_0\gamma$ et ψ un caractère adhérent à (ω'_n), de sorte que

$$\hat{\rho}_n(\chi_0\gamma\, \bar{\omega}'_n) \neq 0 \qquad (n \geqslant 1)$$
$$\hat{\rho}(\chi_0\gamma\, \bar{\psi}) \neq 0$$

$\rho * \gamma\bar{\psi}\rho \neq 0$, et il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $\hat{\rho}(\alpha) \neq 0$ et $\hat{\rho}(\alpha\gamma\,\bar{\psi}) \neq 0$. D'après le lemme 3, on peut choisir n assez grand pour que $\alpha \in \Omega_n$ et

$\alpha\gamma\, \bar{\omega}'_n \in \Omega_n$. On a aussi $\rho_n * \gamma\, \bar{\omega}'_n \rho_n \neq 0$, et il existe $\beta \in \Omega(\theta_n)$ tel que $\gamma\, \bar{\omega}'_n\ \beta \in \Omega(\theta_n)$. Comme $(\alpha\gamma\, \bar{\omega}'_n)\beta = \alpha(\gamma\bar{\omega}'_n\beta)$ est un mot, l'unicité de l'écriture prouve $\gamma\bar{\omega}'_n = 1$, donc $\gamma = \omega'_n \in \Omega(\theta)$.

Corollaire : ρ est "tame" si et seulement si $\sup\limits_{|\hat{\rho}(\gamma)|\neq 1} |\hat{\rho}(\gamma)| < 1$

Démonstration : La condition $\sup\limits_{|\hat{\rho}(\gamma)|\neq 1} |\hat{\rho}(\gamma)| < 1$ est équivalente à $\sup\limits_{j}\ \sup\limits_{|\hat{P}_j(\gamma)|\neq 1} |\hat{P}_j(\gamma)| < 1$; elle est encore équivalente à la condition: pour toute suite croissante $(\omega_n) = (\prod\limits_1^n \theta_j)$ telle que $|\hat{\rho}(\omega_n)| = \prod\limits_1^n |\hat{P}_j(\theta_j)|$ ne tende pas vers 0, les $\hat{P}_j(\theta_j)$ sont de module 1 pour j assez grand.

D'autre part, d'après le théorème 3, ρ est "tame" si et seulement si ϕ_ρ est de la forme $c\gamma$ pour tout caractère ϕ adhérent à une suite croissante (ω_n) de cette forme.

Si $|\hat{P}_j(\theta_j)| = 1$ pour $j > n$, $|\hat{\rho}(\phi\bar{\omega}_n)| = \prod\limits_{j>n} |\hat{P}_j(\theta_j)| = 1$, et $(\phi\bar{\omega}_n)_\rho$ est une constante.

Inversement, si $\phi_\rho = c\gamma$, d'après le lemme 3, $|c| = 1$, et, comme $\hat{\rho}(\bar{\gamma}\phi) = c \neq 0$, il existe n tel que $\bar{\gamma}\omega_n \in \Omega_n$; alors, pour $p > n$,

$$\hat{\rho}(\bar{\gamma}\omega_p) = \hat{\rho}(\bar{\gamma}\omega_n) \prod_{n+1}^{p} \hat{P}_j(\theta_j) \text{ et}$$

$$|\hat{\rho}(\bar{\gamma}\omega_n)| \prod_{n+1}^{\infty} |\hat{P}_j(\theta_j)| = |\hat{\rho}(\bar{\gamma}\phi)| = |c| = 1$$

Donc $$|\hat{P}_j(\theta_j)| = 1 \text{ pour } j > n.$$

Remarques :

(a) Si G est connexe, la condition de "tameness" est exactement la condition donnée en (2), car $|\hat{P}_j(\theta)| < 1$ pour $\theta \neq 1$. Sinon, les produits de Riesz "tame" ne vérifiant pas $\sup\limits_{\gamma\neq 1}|\hat{\rho}(\gamma)| < 1$ sont translatés d'un produit de Riesz "tame" sur un sous-groupe compact H de G, vérifiant cette condition sur H.

(b) La propriété du module constant implique les dichotomies $\rho \in M(G_\tau)$ ou $\rho \perp M(G_\tau)$, $\rho \in \mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau)$ ou $\rho \perp \mathrm{Rad}\, L^1(G_\tau)$ pour toute topologie τ

de groupe localement compact sur G plus fine que τ_o. Il est clair ici que ρ n'appartient pas à Rad $L^1(G)$ (si $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}}(\hat{\rho}(\gamma)) = 1$), mais ρ n'est pas toujours fortement continue si G n'est pas connexe (même si $|\hat{\rho}(\gamma)| \neq 1$ pour $\gamma \neq 1$) ; si G est connexe, on montrera $\rho \perp M(G_\tau)$ dans le cas où un sous-groupe fermé de G est ouvert pour la topologie τ.

(c) De même que la "tameness" en (2), la propriété du module constant reste vraie pour les caractères de la sous-algèbre $N[\rho]$.

3.2 - Compléments :

Théorème 4 : Si $|\hat{\rho}(\gamma)| \neq 1$ pour tout $\gamma \neq 1$, les constantes non nulles de $\overline{\Gamma}(\rho)$ sont les limites des suites (ω_k) asymptotiquement dissociées telles que $\hat{\rho}(\omega_k)$ admette une limite non nulle.

Démonstration : Le théorème 2 se généralise sans changement dans la démonstration: si $\phi \in \overline{\Gamma}$ est adhérent à (ω_k) asymptotiquement dissociée, $\hat{\rho}(\phi) = \hat{\rho}_n(\phi) \neq 0$ pour $n \geqslant 1$ et ϕ_ρ est constant d'après le théorème 3 ; inversement, si $\lim \gamma_\alpha = c \neq 0$ dans $\overline{\Gamma}(\rho)$ on peut choisir, parmi les γ_α, des ω_k deux à deux dissociés et tels que $\hat{\rho}(\omega_n)$ tende vers c.

Théorème 5 : Si G est connexe, pour tout sous-groupe fermé H de G, distinct de G, et pour tout $x \in G$, $\rho(x+H) = 0$.

Démonstration : G étant connexe, H est d'indice infini et $H^\perp$ est infini. Si $\phi \in (H^\perp)^-$ si $\lim \gamma_\alpha = \phi$ avec $\gamma_\alpha \in H^\perp$, les γ_α sont constants sur la classe x+H, et ϕ_μ est constant de module 1 pour toute mesure μ portée par x+H.

On suppose $\rho(x+H) \neq 0$; si $\phi \in (H^\perp)^- \setminus H^\perp$, $|\phi|^2 \in (H^\perp)^- \setminus \{1\}$ et $|\phi|^2_\rho = 1$. Si (γ_α) converge vers $|\phi|^2$, avec $\gamma_\alpha \in H^\perp$ pour tout α, on peut choisir parmi les γ_α une suite de mots (ω_k) dissociée telle que $\hat{\rho}(\omega_k)$ tende vers 1.

Soit (R_k) une suite de polynômes de la forme $\prod\limits_{n_k+1}^{n_{k+1}} P_j$, tels que

$\hat{R}_k(\omega_k) = \hat{\rho}(\omega_k)$ pour tout k, et soit $\varepsilon > 0$; pour k assez grand $|\hat{R}_k(\omega_k)| > 1 - \varepsilon^2/2$, et d'après la démonstration du lemme 3, pour tout p

$$||\hat{R}_k(\omega_k^p)| - |\hat{R}_k(\omega_k^{p+1})|| < \varepsilon .$$

On peut donc choisir une suite (p_k) d'entiers telle que $(\hat{R}_k(\omega_k^{p_k}))$ converge vers une limite c telle que $0 < |c| < 1$. $(\omega_k^{p_k})$ est encore une suite dissociée, et converge vers la constante c dans $\bar{\Gamma}(\rho)$; comme $\omega_k^{p_k} \in H^{\perp}$ pour tout k, on déduit une contradiction.

Note : Dans le chapitre VII on trouvera une application de la technique des produits de Riesz généralisés. Voir aussi [4] [5].

RÉFÉRENCES :

[1] BROWN G. - Riesz products and generalized characters. Proc. Lond. Math. Soc. 30 (1975) 209-238.

[2] BROWN G., MORAN W. - On orthogonality of Riesz products. Proc. Camb. Phil. Soc. 76 (1974) 173-181.

[3] PEYRIERE J. - Etude de quelques propriétés des produits de Riesz. Ann. Inst. Fourier 25-2 (1975) 127-169.

[4] GRAHAM C., HOST B., PARREAU F. - The interior of the Silov boundary of M(G) is trivial. J. Funct. Anal. (1980).

[5] HOST B., PARREAU F. - Thèse (Université Paris-Nord, Villetaneuse 1979).

CHAPITRE VI

ENSEMBLES DE RAJCHMAN, ENSEMBLES DE CONTINUITÉ, ET PROPRIÉTÉS A L'INFINI DES TRANSFORMÉES DE FOURIER-STIELTJES.

1 - Introduction

1.1 - Dans ce chapitre, on considère un groupe abélien compact G, et son dual Γ avec les notations habituelles. Nous reprenons les définitions de PIGNO [7] [8] :

Définitions : Un ensemble E de Γ est appelé

- ensemble de Rajchman faible si toute transformée de Fourier-Stieltjes nulle sur $\Gamma \setminus E$ tend vers zéro à l'infini ;
- ensemble de Rajchman fort si toute transformée de Fourier-Stieltjes qui tend vers zéro à l'infini sur $\Gamma \setminus E$ tend vers zéro à l'infini ;
- ensemble de continuité pour M(G) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute mesure μ de M(G), de norme <1, la condition $\overline{\lim}_{\gamma \in \Gamma \setminus E} |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta$ implique $\overline{\lim}_{\gamma \in \Gamma} |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon$.

Nous allons donner des caractérisations arithmétiques de ces ensembles, et étudier des propriétés relatives analogues pour deux ensembles de Γ.

1.2 - Les structures arithmétiques qui interviendront sont celles de divers ensembles de mots d'un ensemble infini de Γ. On rappelle que, pour un ensemble Θ de Γ, et pour $n \in \mathbb{N}$, un mot de longueur n de Θ est un produit fini

(1) $\prod_j \theta_j^{\varepsilon_j}$, les θ_j étant des éléments deux-à-deux distincts de et les ε_j des entiers de valeur absolue $\leqslant 1$, avec $\sum_j |\varepsilon_j| = n$.

On note, pour $\Theta \subset \Gamma$ et $n \in \mathbb{N}$,

$\Omega(\Theta)$ l'ensemble des mots de Θ ;

$\Omega_n(\Theta)$ l'ensemble des mots de Θ de longueur inférieure ou égale à n ;

$M_n(\Theta)$ l'ensemble des mots de Θ de longueur exactement n ;

$\Omega^{(1)}(\Theta)$ l'ensemble des mots (1) avec de plus $\sum_j \varepsilon_j = 1$;

$M_n^{(1)}(\Theta)$ l'ensemble des mots (1) de longueur n avec $\sum_j \varepsilon_j = 1$.

Θ est dissocié si l'écriture (1) de tout mot de Θ est unique (un élément d'ordre 2 n'étant pas distingué de son inverse). Pour construire par récurrence un ensemble $\{\theta_n ; n \geqslant 1\}$ dissocié, on suppose $\{\theta_n, \dots, \theta_{n-1}\}$ dissocié ; il suffit alors de choisir θ_n tel que θ_n et θ_n^2 (s'il est différent de 1) n'appartiennent pas à l'ensemble fini $\Omega(\{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}) . \Omega(\{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}\})$.

Si Λ est un ensemble infini de Γ, on peut donc construire un sous-ensemble dissocié infini de Λ dès-que $\{\lambda^2 ; \lambda \in \Lambda\}$ est infini ; si cet ensemble est fini, il existe $\lambda_o \in \Lambda$ tel que $\lambda^2 = \lambda_o^2$ pour une infinité de $\lambda \in \Lambda$ et $\bar{\lambda}_o \Lambda$ contient un ensemble infini dissocié. On peut supposer que les ensembles dissociés ainsi construits ont soit aucun élément d'ordre 2, soit tous leurs éléments d'ordre 2.

1.3 - Si Θ est un ensemble dissocié de Γ sans élément d'ordre 2, et $|a| \leqslant \frac{1}{2}$, on note ρ_a le produit de Riesz construit sur Θ avec $\hat{\rho}_a(\theta) = a$ pour tout $\theta \in \Theta$, et $\rho_a^{(1)}$ la mesure de $M(G)$ telle que, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\rho}_a^{(1)}(\gamma) = \hat{\rho}_a(\gamma) \quad \text{si} \quad \gamma \in \Omega^{(1)}(\Theta)$$

$$\hat{\rho}_a^{(1)}(\gamma) = 0 \quad \text{sinon}$$

qu'on peut définir (cf [3] [6]) comme le produit de Riesz intégral $\int \rho_{au}\,\bar{u}\,dm$, où m désigne la mesure de Haar de $\mathbb{T}$ et u le caractère de $\mathbb{T}$ défini par l'entier 1.

Si Θ a tous ses éléments d'ordre 2, on définit de même ρ_a pour $a \in [-1,1]$, et $\rho_a^{(1)} = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho_{-a})$ avec la même propriété.

Nous utiliserons encore, pour $\nu \in M([0,\frac{1}{2}])$, le produit de Riesz intégral

$$\mu = \int \rho_t^{(1)}\, d\nu(t),$$

qui vérifie, pour $\gamma \in \Gamma$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int t^{2k+1}\, d\nu(t) \quad \text{si} \quad \gamma \in M_{2k+1}^{(1)}(\Theta)$$

$$\hat{\mu}(\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \notin \Omega^{(1)}(\Theta).$$

Le paragraphe suivant reprend et développe un sujet introduit dans le chapitre II-(6.4).

2 - Ensembles de Rajchman

2.1 - Caractérisation :

Théorème 1 : Soit G un groupe abélien compact. Pour un ensemble E de son dual Γ, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) E est un ensemble de Rajchman faible ;

(b) E est un ensemble de Rajchman fort ;

(c) Toute mesure de M(G) dont la transformée de Fourier-Stieltjes est nulle sur $\Gamma \setminus E$ appartient au radical de $L^1(G)$;

(d) E ne contient $\alpha\Omega(\Theta)$ pour aucun $\alpha \in \Gamma$ et pour aucun ensemble infini Θ de Γ.

Démonstration : Les implications (c)$\Longrightarrow$(a)$\Longrightarrow$(d) et (b)$\Longrightarrow$(a) sont évidentes. (d) $\Longrightarrow$ (c) est le résultat de [2] ; soit $\mu \in M(G) \setminus \mathrm{Rad}\, L^1(G)$; il faut montrer que Supp $\hat{\mu}$ contient un ensemble $\alpha\Omega(\Theta)$ avec Θ infini.

Soit $\chi \in \Delta M(G) \setminus \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$ et soit $h = |\chi|^0$. h est un idempotent de $\Delta M(G) \setminus \Gamma$ et $h\mu \neq 0$. Pour $\gamma \in \Gamma$, $(\mu * h\mu)^\wedge(h\gamma) = (h\mu)^\wedge(\gamma)^2$, donc $\mu * h\mu$ n'est pas nulle ; soit $\alpha \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\alpha) \neq 0$ et $\hat{\mu}(h\alpha) \neq 0$, et soit ν la mesure réelle $\nu = \alpha\mu * \bar{\alpha}\bar{\mu}$.

On construit $\Theta = \{\theta_n \; ; \; n \geq 1\}$ par récurrence. Pour $n \geq 1$, si on a construit les θ_j pour $j < n$, deux-à-deux distincts, vérifiant

$$\hat{\nu}(\omega) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\nu}(h\omega) \neq 0$$

pour tout $\omega \in \Omega(\{\theta_j \; ; j < n\})$, soit ν_n le produit de convolution des $\omega\nu$ pour $\omega \in \Omega(\{\theta_j \; ; j < n\})$; $(\nu_n * h\nu_n)^\wedge(h) = \hat{\nu}_n(h)^2 \neq 0$, donc $\nu_n * h\nu_n$ n'appartient pas à $L^1(G)$ et on peut choisir $\theta_n \in \Gamma$ distincts des précédents et tel que $(\nu_n * h\nu_n)^\wedge(\theta_n) \neq 0$; comme ν_n est réelle, on a aussi $(\nu_n * h\nu_n)^\wedge(\bar{\theta}_n) \neq 0$; alors $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ vérifie encore l'hypothèse de récurrence. On obtient $\hat{\nu}(\omega) \neq 0$, donc $\hat{\mu}(\alpha\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega(\Theta)$.

Enfin, (a) $\Longrightarrow$ (b) résulte du théorème suivant, plus général.

<u>Théorème 2</u> : Soit G un groupe abélien compact et soient E et F deux ensembles infinis de son dual, tels que toute transformée de Fourier-Stieltjes nulle sur E tende vers zéro à l'infini sur F. Alors, toute transformée de Fourier-Stieltjes qui tend vers zéro à l'infini sur E tend aussi vers zéro à l'infini sur F.

<u>Démonstration</u> : On suppose qu'il existe $\mu \in M(G)$ et $\varepsilon > 0$ avec $\lim\limits_{\gamma \in E} \hat{\mu}(\gamma) = 0$ et $|\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon$ pour une infinité de γ de F ; d'après (1.2) on peut alors construire un ensemble dissocié infini Θ de Γ et $\alpha \in \Gamma$ tels que $\alpha\Theta \subset F$ et $|\hat{\mu}(\alpha\theta)| > \varepsilon$ pour tout $\theta \in \Theta$.

On construit un ensemble infini $\{\theta_n \; ; n \geq 1\}$ dans Θ par récurrence, avec les hypothèses :

a) les θ_j sont deux-à-deux distincts ;

b) $|\hat{\mu}(\alpha\omega)| < 4^{-p}$ si $\alpha\omega \in E$, pour tout ω de la forme $\prod_{1\leqslant j\leqslant p} \theta_j^{\varepsilon_j}$ avec $\varepsilon_j = 1, 0$ ou -1 pour $1\leqslant j\leqslant p$ et $\varepsilon_p \neq 0$.

Pour chaque $p\geqslant 1$, il y a au plus 3^{p-1} mots de cette forme avec $\varepsilon_p = 1$, ou avec $\varepsilon_p = -1$; donc $|\hat{\mu}|$ est sommable sur $E \cap \alpha\Omega(\{\theta_n\})$, et, pour $a \in [0, 1/2]$,

$$\sum_{\gamma\in E} |(\bar{\alpha}\rho_a * \mu)\hat{}\,(\gamma)| < \infty.$$

Soit $\sigma \in M(G)$ telle que $\hat{\sigma}(\gamma) = 0$ pour $\gamma \in \Gamma \setminus E$ et $\hat{\sigma}(\gamma) = (\bar{\alpha}\rho_a * \mu)\hat{}\,(\gamma)$ pour $\gamma \in E$; $(\rho_a * \mu - \sigma)\hat{}$ est nulle sur E, mais ne tend pas vers zéro à l'infini sur F, ce qui contredit l'hypothèse.

2.2 - Le théorème 2 peut être rapproché d'un résultat de KATZNELSON et Mc GEHEE [4] : il existe un ensemble infini E de $\mathbb{Z}$, et une mesure ρ de $M(\mathbb{T})$ telle que $\hat{\rho}$ tende vers 0 à l'infini sur E mais ne coïncide sur E avec aucune transformée de Fourier-Stieltjes qui tend vers 0 à l'infini sur $\mathbb{Z}$. On généralise facilement cet exemple à tout groupe G non discret compact.

Soient $\Theta = \{\theta_n \,; n \geqslant 1\}$ un ensemble infini dissocié dans Γ (les θ_n étant tous distincts), $(k_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante tendant vers l'infini d'entiers positifs telle que $k_n/\sqrt{n}$ tende vers 0, et que $k_{n+1} \leqslant k_n + 1$ pour $n \geqslant 1$ et soit

$$E = \bigcup_{n\geqslant 1} M_{k_n}(\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}).$$

Pour $0 < a \leqslant 1/2$, la transformée de Fourier-Stieltjes du produit de Riesz ρ_a construit sur Θ est égale à a sur Θ, et tend vers 0 à l'infini sur E.

Pour $\mu \in M(G)$, si $\hat{\mu}$ est nulle sur E, on considère, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [-1, 1]$,

$$P_n(x) = \int \prod_1^n \left(1 + \frac{ix}{\sqrt{n}} \operatorname{Re}(\theta_j)\right) d(\mu * \tilde{\mu}) \;;$$

P_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à k_n et $|P_n(x)| \leqslant e\|\mu\|^2$.
D'après le théorème de Bernstein, il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $|P_n'(0)| \leqslant Ck_n$, donc

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_1^n |\hat{\mu}(\theta_j)|^2 \leqslant Ck_n ,$$

et

$$\lim \frac{1}{n} \sum_1^n |\hat{\mu}(\theta_j)| = 0 .$$

Si P est une mesure de probabilité sur $\bar{\Gamma}$ vaguement adhérente à $(\frac{1}{n} \sum_1^n \delta(\theta_j))$ et $\chi \in \operatorname{Supp} P$, on a $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

Pour tout groupe abélien compact non discret G il existe donc $E \subset \Gamma$ et $\chi \in \bar{\Gamma}$ avec les propriétés :

- il existe $\rho \in M(G)$ telle que $\hat{\rho}$ tende vers 0 à l'infini sur E et $\hat{\rho}(\chi) \neq 0$;
- pour toute mesure $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}$ soit nulle sur E, $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

3 - Ensembles de "type L"

3.1 - Pour un ensemble infini E de Γ, les mesures de M(G) dont la transformée de Fourier-Stieltjes tend vers 0 à l'infini sur tout translaté de E forment un L-idéal (pour qu'un idéal fermé L de M(G) soit un L-idéal, il suffit que, quels que soient $\mu \in L$ et $\gamma \in \Gamma$, il contienne $\gamma\mu$) ; d'après le théorème 2, les propriétés suivantes sont donc équivalentes :

(a) toute transformée de Fourier-Stieltjes nulle sur E tend vers zéro à l'infini sur tout translaté de E ;
(b) l'idéal des mesures de M(G) dont la transformée de Fourier-Stieltjes tend vers zéro à l'infini sur E est un L-idéal.

Il est encore équivalent de dire que, pour tout $\chi \in \bar{E} \setminus E$ et

$\mu \in M(G)$, si $\hat{\mu}$ tend vers 0 à l'infini sur E, la mesure $\chi\mu$ est nulle.

Nous dirons qu'un ensemble infini E de Γ ayant ces propriétés est un <u>ensemble de type L</u>.

Les <u>complémentaires d'ensembles de Rajchman</u> de Γ sont de type L, le L-idéal défini par (b) étant alors $M_o(G)$.

Pour $G = \mathbb{T}$, tout ensemble E de $\mathbb{Z}$, <u>réunion d'une suite d'intervalles dont la longueur tend vers l'infini</u>, est un ensemble de type L.

En effet, soit $\mu \in M(\mathbb{T})$, $\hat{\mu}$ étant nulle sur E, et soit $\chi \in \overline{E} \setminus E$. χ_μ est limite faible (pour $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$) d'une suite de caractères définie par une suite $(n_j)_{j \geqslant 1}$ de E ; chaque n_j se trouve dans un intervalle $[a_j, b_j]$ de E, et on peut supposer $\lim(n_j - a_j) = +\infty$ ou $\lim(b_j - n_j) = +\infty$. Il en résulte que $(\chi\mu)\hat{}$ s'annule sur $\mathbb{Z}_-$ ou sur $\mathbb{Z}_+$; dans les deux cas, cela prouve $\chi\mu = 0$ car $\chi\mu$ est étrangère à $M_o(\mathbb{T})$ (si $\nu << |\chi\mu|$, $\chi\nu$ est équivalente à ν, et $\chi\nu = 0$ si $\nu \in M_o(\mathbb{T})$).

Plus généralement, pour $\mu \in M(G)$ et $\chi \in \overline{\Gamma}$, si $|\chi|^2\mu = 0$, ou $\chi^2\mu = 0$, $\chi\mu$ est nulle ; si (γ_j) converge faiblement vers χ_μ, on peut supposer quitte à remplacer (γ_j) par une sous-suite que $(\gamma_{k_j}\overline{\gamma}_j)$ converge vers $|\chi|^2_\mu$ et $(\gamma_{k_j}\gamma_j)$ vers χ^2_μ pour toute suite (k_j) telle que, pour tout j, $k_j > j$ (on peut toujours se ramener à des suites ; cf chap.I-(4.3)). On en déduit le <u>critère</u> :

Pour qu'un ensemble infini E de Γ soit de type L, il suffit que tout ensemble infini $F \subset E$ ait l'une des propriétés :

- pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe deux éléments distincts α, β de F avec $\gamma\alpha\overline{\beta} \in E$;
- pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe deux éléments distincts α, β de F avec $\gamma\alpha\beta \in E$.

On pourra trouver d'autres ensembles de type L à l'aide de ce critère, par exemple l'ensemble des points de $\mathbb{Z}^2$ situés à l'intérieur d'une parabole (ou à l'extérieur, mais c'est aussi le complémentaire d'un ensemble de Rajchman).

3.2 - Nous montrons une propriété des ensembles de type L. B(E) désigne l'algèbre des restrictions à E des transformées de Fourier-Stieltjes.

Proposition 1 : Soit L un L-idéal de M(G). Tout idempotent de M(G)/L est l'image d'un idempotent de M(G).

Corollaire : Soit E un ensemble de type L de Γ. Tout idempotent de B(E) est la restriction d'un idempotent de $B(\Gamma)$.

Démonstration : Si on admet la proposition, tout "idempotent à l'infini" de B(E) est trivial, autrement dit, pour $\eta \in M(G)$, si $\hat{\eta}^2 - \hat{\eta}$ tend vers O à l'infini sur E, η s'écrit $\eta_1+\eta_2$ où η_1 est idempotente et $\hat{\eta}_2$ tend vers O à l'infini sur E. Si de plus $\hat{\eta}^2=\hat{\eta}$ sur E, $\hat{\eta}_2$ est nulle sur E sauf en un nombre fini de points et on peut ajouter un polynôme trigonométrique à η_1 pour obtenir $\hat{\eta}_1=\hat{\eta}$ sur E ; d'où le corollaire.

Nous démontrons maintenant la proposition 1 (qui résulte aussi du théorème (6.3.3) de TAYLOR [11]).

Soit Λ l'ensemble des caractères de M(G) nuls sur L, qu'on identifie à $\Delta(M(G)/L)$. Pour $\phi \in \Lambda$ et $\chi \in \Delta M(G)$, si $\mu \in L$, $\chi\mu \in L$ et $\hat{\mu}(\phi\chi) = 0$, donc $\phi\chi \in \Lambda$ (Λ est un "idéal" de $\Delta M(G)$).

Soit $\eta \in M(G)$ avec $\eta^2-\eta \in L$. Pour tout $\phi \in \Lambda$ la mesure $\phi\eta$ est donc idempotente. On en déduit les résultats suivants : la convergence forte est discrète dans l'ensemble $\Lambda(\eta) = \{\phi_\eta \ ; \phi \in \Lambda\}$; tout élément de $\Lambda(\eta)_+$ est idempotent ; $\Lambda(\eta)_+$ est fini. (la démonstration est en fait la même qu'au chapitre II-(5.4) en remplaçant $\overline{\Gamma}(\eta)$ par $\Delta(\eta)$ et en considérant l'idéal $\Lambda(\eta)$). Soit

$$\eta_o = \sup_{\phi\varepsilon\Lambda(\eta)_+} \phi\eta = \{1 - \prod_{\phi\varepsilon\Lambda(\eta)_+} (1-\phi)\}\eta .$$

η_o est une combinaison à coefficients entiers de mesures $\phi\eta$, donc les valeurs de $\hat{\eta}_o$ sont entières ; de plus $\phi\eta_o = \phi\eta$ pour tout $\phi \in \Lambda$. Soit η_1 la mesure idempotente telle que $\mathrm{Supp}\,\hat{\eta}_1 = \mathrm{Supp}\,\hat{\eta}_o$; pour $\phi \in \Lambda$, $\hat{\eta}_1(\phi) = \hat{\eta}_o(\phi)$, donc $\eta-\eta_1 \in \mathrm{Rad}\, L$; mais, comme η et η_1 sont idempotentes modulo L, $(\eta-\eta_1)^3 = \eta-\eta_1$ modulo L, d'où $\eta-\eta_1 \in L$.

4 - Ensembles $E(\mu,\delta)$ et ensembles de mots

4.1 - On rappelle la notation, pour $\mu \in M(G)$ et $\delta > 0$,

$$E(\mu,\delta) = \{\gamma \in \Gamma \ ; \ |\hat{\mu}(\gamma)| > \delta\}.$$

On sait que, si $\mu \notin M_o(G)$, les ensembles $E(\mu,\delta)$ pour δ assez petit contiennent certaines structures arithmétiques (cf [1] et chapitre II, théorème 11). Nous montrons qu'ils contiennent certains des ensembles de mots définis en 1.2 et l'exemple des produits de Riesz prouve que ces résultats ne peuvent être améliorés.

Pour $\chi \in \Delta M(G)$, on note χ_o la partie polaire de χ, telle que $\chi_o|\chi| = \chi$ (cf chap.I-5). On associe à $\mu \in M(G)$ et χ la mesure ν sur $[0,1]$ image de $\chi_o\mu$ par $|\chi_\mu|$ (considérée comme fonction borélienne de G dans $[0,1]$), avec $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$ et, pour $\mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\int t^z \, d\nu(t) = \int |\chi_\mu|^z d\chi_o\mu = \hat{\mu}(\chi_o|\chi|^z).$$

<u>Lemme 1</u> : Soient $\varepsilon \in \,]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$; il existe $\delta > 0$ ayant la propriété : pour $\mu \in M(G)$ et $\phi \in \bar{\Gamma}$ avec $\|\mu\| \leqslant 1$ et $|\hat{\mu}(\phi)| \geqslant \varepsilon$, l'ensemble A des entiers k de $[1,N]$ tels que $|\hat{\mu}(\phi|\phi|^{2k})| \leqslant \delta$ vérifie

$$\sum_{k\varepsilon A} \frac{1}{k+1} < |\mathrm{Log}\ \varepsilon| .$$

<u>Démonstration</u> : Si le lemme était faux il existerait, d'après ce qui

précède, une suite $(\nu_j)_{j\geq 1}$ de mesures sur $[0,1]$ avec, pour tout j, $\|\nu_j\| \leq 1$, $\left|\int t \, d\nu_j(t)\right| \geq \varepsilon$, et si l'on note

$$A_j = \{k \in [1,N] \ ; \ \left|\int t^{2k+1} \, d\nu_j(t)\right| \leq 1/j\} ,$$

$$\sum_{k \in A_j} \frac{1}{k+1} \geq |\text{Log } \varepsilon| .$$

Alors, si ν est une mesure sur $[0,1]$ vaguement adhérente à (ν_j) on a pour une infinité de j

$$A_j \subset A = \{k \in [1,N] \ ; \ \int t^{2k+1} \, d\nu(t) = 0\} .$$

D'autre part, la fonction $z \to \int t^z \, d\nu(t)$ est analytique dans le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \text{Re}(z) > 0\}$, de module ≤ 1 car $\|\nu\| \leq 1$, et il existe une fonction g analytique dans P, de module ≤ 1, telle que, pour $\text{Re} z > 0$,

$$\int t^z \, d\nu(t) = g(z) \prod_{k \in A} \frac{2k+1-z}{2k+1+z} \ ;$$

en particulier

$$\varepsilon \leq \left|\int t \, d\nu(t)\right| \leq \prod_{k \in A} \frac{k}{k+1} ,$$

et $\sum_{k \in A} \frac{1}{k+1} < |\text{Log } \varepsilon|$, ce qui est absurde. Ceci termine la démonstration.

Remarquons de plus que, ε et N étant donnés, on peut choisir δ indépendamment du groupe G.

4.2 - <u>Lemme 2</u> : Soient F un ensemble infini de Γ, $\phi \in \bar{F} \setminus F$, $\mu \in M(G)$, $\delta > 0$ et B un ensemble fini de $\mathbb{N}$ avec $|\hat{\mu}(\phi|\phi|^{2k})| > \delta$ pour $k \in B$. Alors F contient un ensemble infini Θ tel que, pour tout $k \in B$,

$$M^{(1)}_{2k+1}(\Theta) \subset E(\mu, \delta) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $p \geq 1$; on suppose construits, pour $1 \leq j \leq p$, des éléments θ_j de F, deux-à-deux distincts, tels que $|\hat{\mu}(\omega\phi^m\bar{\phi}^n)| > \delta$ lorsque la condition suivante est réalisée :

m et n sont des entiers ≥ 0, ω est un mot $\prod_{j<p} \theta_j^{\varepsilon_j}$ avec

(1) $m+k-1 = n+\ell \in B$.

si k valeurs des ε_j sont égales à +1, ℓ égales à -1

(les autres étant nulles).

On note ici $\phi^0 = \bar{\phi}^0 = 1$. Pour $k = \ell = 0$, cette condition est simplement l'hypothèse. On choisit alors $\theta_p \in F$, distinct des précédents, dans le voisinage de ϕ défini par les conditions, sur $\psi \in \Delta M(G)$,

$$|\hat{\mu}(\omega\psi\phi^{m-1}\bar{\phi}^n)| > \delta \text{ si } m \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |\hat{\mu}(\omega\bar{\psi}\phi^m\bar{\phi}^{n-1})| > \delta \quad \text{si } n \geqslant 1$$

lorsque m,n et ω vérifient (1).

On obtient par récurrence $\Theta = \{\theta_p \,;\, p \geqslant 1\}$ tel que $M^{(1)}_{2k+1}(\Theta) \subset E(\mu,\delta)$ pour $k \in B$.

<u>Proposition 2</u> : Soient $\varepsilon \in \,]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$; il existe $\delta > 0$ ayant la propriété : pour $\mu \in M(G)$ avec $\|\mu\| \leqslant 1$ et $\overline{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \varepsilon$, il existe un ensemble infini Θ de Γ et $\alpha \in \Gamma$ tels que $\alpha\, \Omega_n(\Theta) \subset E(\mu,\delta)$.

<u>Démonstration</u> : Si $\|\mu\| \leqslant 1$ et $\overline{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}}|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \varepsilon$, soit $\phi \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ tel que $|\hat{\mu}(\phi)| \geqslant \varepsilon$; on applique le lemme 1 avec un entier N assez grand, de façon que, pour tout ensemble A de $[1,N]$ vérifiant $\sum\limits_{k\in A} \frac{1}{k+1} < |\mathrm{Log}\, \varepsilon|$, $[1,N] \setminus A$ contienne un intervalle $[p,p+n]$.

D'après le lemme 2, il existe un ensemble infini Θ de Γ tel que, δ vérifiant la propriété du lemme 1 et p étant un entier convenable,

$$M^{(1)}_{2k+1}(\Theta) \subset E(\mu,\delta) \qquad \text{pour} \quad p \leqslant k \leqslant p+n .$$

Si l'on pose $\alpha = \bar{\theta}_1 \ldots \bar{\theta}_p \theta_{p+1} \ldots \theta_{2p+1}$ et $\Theta' = \{\theta_{2j}\bar{\theta}_{2j+1} \,;\, j > p\}$, on a bien $\alpha\, \Omega_n(\Theta') \subset E(\mu,\delta)$.

<u>Remarques</u> :

1 - Il suffirait que l'ensemble $\{k ; |\hat{\mu}(\phi|\phi|^{2k})| > \delta\}$ contienne une progression arithmétique de longueur n+1.

2 - $E(\mu,\delta)$ contient aussi $\Omega^{(1)}_{2n+1}(\{\alpha\theta_j \,;\, j \geqslant 2p+1\})$ si $\alpha = \bar{\theta}_1 \ldots \bar{\theta}_p \theta_{p+1} \ldots \theta_{2p}$.

3 - La forme plus précise des lemmes sera utilisée en 5.3.

4 - La proposition 2 est une version plus précise du théorème 11, chapitre II.

5 - Ensembles de continuité (cf chapitre III-(3.3))

5.1 - Caractérisation

Théorème 3 : Pour qu'un ensemble E de Γ soit un ensemble de continuité pour M(G), il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E ne contienne $\alpha\,\Omega_n(\Theta)$ pour aucun $\alpha \in \Gamma$ et pour aucun ensemble infini Θ de Γ.

Démonstration : La condition est suffisante, d'après la proposition 2: avec les mêmes notations, si $\overline{\lim}_{\gamma\in\Gamma\setminus E} |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta$ et $\alpha\,\Omega_n(\Theta) \subset E(\mu,\delta)$, quitte à enlever un nombre fini d'éléments à Θ, on obtient $\alpha\,\Omega_n(\Theta) \subset E$.

Elle est nécessaire car, si E contient $\alpha\,\Omega_n(\Theta)$ avec Θ infini, on peut supposer Θ dissocié et alors, pour $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, le produit de Riesz ρ_ε construit sur Θ vérifie

$$(\bar{\alpha}\rho_\varepsilon)\hat{}\,(\alpha\theta) = \varepsilon \quad \text{pour} \quad \theta \in \Theta\ ,$$
$$(\bar{\alpha}\rho_\varepsilon)\hat{}\,(\gamma) < \varepsilon^n \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma\setminus E.$$

Remarques :

1 - Il revient au même de dire que, pour n assez grand, E ne contient pas d'ensemble $\Omega_n^{(1)}(\Theta)$ avec Θ infini.

2 - Il n'est pas équivalent de dire que E ne contient pas, pour n assez grand, d'ensemble $\alpha\,M_n(\Theta)$ ou d'ensemble $M_{2n+1}^{(1)}(\Theta)$ avec Θ infini : si (Θ_n) est une suite d'ensembles infinis de Γ deux-à-deux disjoints telle que $\Theta = \bigcup_n \Theta_n$ soit dissocié, $E = \bigcup_n M_n(\Theta_n)$ est un ensemble de continuité.

Soit en effet (ω_j) une suite d'éléments de E ; en prenant une sous-suite, on se ramène à l'un des cas :

- les ω_j appartiennent à des $M_n(\Theta_n)$ distincts ;

- les ω_j appartiennent au même $M_n(\Theta_n)$ et s'écrivent $\omega_j = \omega\omega'_j$, où ω et les ω'_j sont des mots deux-à-deux dissociés de Θ_n.
Dans les deux cas, $M_3^{(1)}(\{\omega_j\}) \cap E = \emptyset$.

3 - Avec les mêmes hypothèses sur (Θ_n), $E' = \bigcup_n \Omega_n(\Theta_n)$ est un ensemble de Rajchman mais non un ensemble de continuité.

5.2 - Ensembles de Riesz et ensembles de continuité

On rappelle qu'un ensemble E de Γ est un ensemble de Riesz si pour $\mu \in M(G)$, la condition Supp $\hat{\mu} \subset E$ implique $\mu \in L^1(G)$. Nous ne savons pas si tout ensemble de Rajchman, ni même tout ensemble de continuité, est un ensemble de Riesz. Par contre on a le résultat suivant.

Proposition 3 : Si G est infini, Γ contient un ensemble de Riesz qui n'est pas un ensemble de continuité pour M(G).

Démonstration : On suppose d'abord que G contient un sous-groupe dénombrable dense. Cela permet de construire une suite décroissante $(V_n)_{n\geq 1}$ de voisinages de 1 dans la topologie de Bohr sur Γ, avec $\bigcap_n V_n = \{1\}$ et de sorte qu'il existe pour tout $n\geq 1$ une mesure discrète η_n avec

$$\hat{\eta}_n(\gamma) = 1 \quad \text{si} \quad \gamma \in \Omega_n(V_n)$$
$$\hat{\eta}_n(\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \notin V_{n-1}.$$

Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une partition de $\mathbb{N}$ en ensembles infinis, on construit alors $\Theta = \{\theta_j ; j\geq 1\}$ dissocié, tel que, pour tout $n\geq 1$, $\theta_j \in V_n$ si $j \in A_n$ (cf. (1.2) ; si $\{\gamma^2 ; \gamma \in V_n\}$ est fini, V_n contient une infinité d'éléments d'ordre 2).

Soit, pour $n\geq 1$, $\Theta_n = \{\theta_j ; j \in A_n\}$ et soit $E = \bigcup_n \Omega_n(\Theta_n)$. On note ν_s la partie singulière de $\nu \in M(G)$; soit $\mu \in M(G)$ avec Supp $\hat{\mu} \subset E$. Pour $n\geq 1$, $(\mu - \eta_n * \mu)\hat{}$ est nulle hors de $\Omega_n(\Theta)$, qui est un ensemble de Riesz (par exemple, parce que c'est un ensemble $\Lambda(2)$, cf LOPEZ et

ROSS [5]), et, η_n étant discrète,

$$\mu_s = (\eta_n * \mu)_s = (\eta_n * \mu_s).$$

Donc $\operatorname{Supp} \hat{\mu}_s \subset \bigcap_n \operatorname{Supp} \hat{\eta}_n = \{1\}$, et $\mu_s = 0$: E est un ensemble de Riesz.

Dans le cas général, on fait la construction pour un sous-groupe infini, fermé et séparable H de G ; on choisit $\{\theta_j ; j \geq 1\}$ dans Γ de façon que son image dans $\hat{H} = \Gamma/H^{\perp}$ ait les propriétés ci-dessus ; avec les mêmes notations, si $E = \bigcup_n \Omega_n(\Theta_n)$ et $\operatorname{Supp} \hat{\mu} \subset E$, on obtient $\operatorname{Supp} \hat{\mu}_s \subset H^{\perp}$ donc, si m_H est la mesure de Haar normalisée de H, $\mu_s = m_H * \mu_s$. $m_H * \mu$ étant absolument continue (car $\Omega(\Theta) \cap H^{\perp} = \{1\}$), $\mu_s = 0$; donc E est un ensemble de Riesz.

5.3 -

<u>Théorème 4</u> : Soient E et F deux ensembles infinis de Γ. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $\delta > 0$ une mesure μ de M(G) de norme ≤ 1 telle que $\overline{\lim}_{\gamma \in E} |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta$ et $\overline{\lim}_{\gamma \in F} |\hat{\mu}(\gamma)| \geq \varepsilon$;

(b) il existe $M > 0$ et pour $N \in \mathbb{N}$ un ensemble infini $\Theta \subset F \setminus E$ tel que l'ensemble A des entiers k de $[1,N]$ pour lesquels $M^{(1)}_{2k+1}(\Theta) \cap E$ est non vide, vérifie $\sum_{k \in A} \frac{1}{k} < M$.

<u>Démonstration</u> : Si (a) est vérifié pour $\varepsilon \in]0,1[$, soit $M = 1 + |\operatorname{Log} \varepsilon|$ et, pour $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ donné par le lemme 1. Si μ vérifie la propriété de (a) (pour ε et δ), soit $\phi \in \bar{F} \setminus F$, avec $|\hat{\mu}(\phi)| \geq \varepsilon$; on applique le lemme 1, puis le lemme 2 avec $B = [1,N] \setminus A$. $E(\mu,\delta) \cap E$ est fini, et, quitte à enlever un nombre fini d'éléments à l'ensemble Θ obtenu, on trouve $M^{(1)}_{2k+1}(\Theta) \cap E \neq \emptyset$ pour $k \in [1,N] \setminus A$. Donc (b) est vérifié.

Pour montrer la réciproque, on utilise le résultat suivant : pour tout ensemble fini A d'entiers > 0, il existe $\sigma \in M[0,1])$, avec $\|\sigma\| \leq 1$,

$$\int t^{2k+1} d\sigma(t) = 0 \quad \text{pour} \quad k \in A,$$

et
$$\left|\int t \, d\sigma(t)\right| \geqslant c \exp\left(-2 \sum_{k\in A} \frac{1}{k}\right),$$

où c est une constante > 0 (indépendante de A). Cette minoration, qui peut être améliorée, se déduit facilement de la démonstration du théorème de Müntz-Szasz de RUDIN [9], chapitre 15.

Si (b) est vérifié pour $M > 0$, soit pour $N \geqslant 1$, Θ un ensemble infini de $F \setminus E$ vérifiant la propriété de (b) ; on peut supposer Θ dissocié (quitte à remplacer E et Θ par des translatés). Soient alors A l'ensemble d'entiers défini par (b) et $\sigma \in M([0,1])$ avec les propriétés ci-dessus. Pour $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, la mesure $\mu = \int \rho_{\varepsilon t}^{(1)} d\sigma(t)$ définie en (1.3) est telle que $\|\mu\| \leqslant 1$, et

$$|\hat{\mu}(\theta)| > \varepsilon c \exp(-2M) \qquad \text{si} \quad \theta \in \Theta,$$
$$|\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon^{2N+1} \qquad \text{si} \quad \gamma \in E.$$

Donc (a) est vérifié.

Remarque : Nous ne connaissons pas de caractérisation analogue pour les ensembles E,F de Γ vérifiant la propriété du théorème 2. Si $F \setminus E$ contient un ensemble infini Θ tel que $A = \{k \in \mathbb{N} \,;\, M_{2k+1}^{(1)}(\Theta) \cap E \neq \emptyset\}$ vérifie $\sum_{k\in A} \frac{1}{k} < +\infty$, on construit comme ci-dessus $\mu \in M(G)$ avec $\overline{\lim}_{\gamma\in F} |\hat{\mu}(\gamma)| > 0$ et $\hat{\mu} = 0$ sur E. Inversement, s'il existe une telle mesure, on peut construire un ensemble infini $\Theta = \{\theta_n \,;\, n \geqslant 1\} \subset F \cap E$ avec la même propriété pour l'ensemble $A' = \{k \in \mathbb{N} \,;\, M_{2k+1}^{(1)}(\{\theta_n \,;\, n > k\}) \cap E \neq \emptyset\}$.

6 - Minorations

6.1 - On note, pour un ensemble infini E de Γ et $\varepsilon > 0$, $\delta_E(\varepsilon)$ la borne inférieure des nombres $\overline{\lim}_{\gamma\in\Gamma\setminus E} |\hat{\mu}(\gamma)|$ pour $\mu \in M(G)$ avec $\|\mu\| \leqslant 1$ et

$\overline{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma}} |\hat{\mu}(\gamma)| \geq \varepsilon.$

Nous utilisons les résultats suivants de MÉLA [6] :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une mesure de $M([0,1])$, notée σ_p, avec $\|\sigma_p\| \leq 1$,

$$\int t \, d\sigma_p(t) = \frac{1}{2p+1} \quad \text{et} \quad \int t^{2k+1} d\sigma_p(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq p \ ;$$

- pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, si $\nu \in M([0,1])$ vérifie

$$\left|\int t \, d\nu(t)\right| \geq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\int t^{2k+1} d\nu(t)\right| \leq \delta \ \text{pour} \ 1 \leq k \leq p,$$

on obtient, en minorant l'intégrale du polynôme de Chebychev de degré $2p+1$,

$$(1) \qquad (2p+1)\,\varepsilon - (1+\sqrt{2})^{2p+1} \frac{\delta}{2} < \|\nu\| \ ;$$

si ceci est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$ et si $\|\nu\| \leq 1$, $\delta < \varepsilon(1+\sqrt{2})^{-\frac{1}{\varepsilon}-1}$;

- pour tout ensemble infini E de Γ, avec nos notations,

$$\delta_E(\varepsilon) < \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon} + 1\right) \ \text{pour tout} \ \varepsilon \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right] .$$

<u>Proposition 4</u> : Soient E un ensemble infini de Γ et $n \geq 1$. Si E ne contient $M_{2n+1}^{(1)}(\Theta)$ pour aucun ensemble infini Θ de Γ, pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\delta_E(\varepsilon) > \frac{\varepsilon}{2n-1}(1+\sqrt{2})^{-\frac{2n-1}{\varepsilon}-1} .$$

<u>Démonstration</u> : Si E ne contient pas d'ensemble $M_{2n+1}^{(1)}(\Theta)$ avec Θ infini, il ne contient aucun $M_{2k+1}^{(1)}(\Theta)$ avec Θ infini pour $k \geq n$. Soient alors $\mu \in M(G)$ avec $\|\mu\| \leq 1$ et $\overline{\lim\limits_{\gamma\in\Gamma\ E}} |\hat{\mu}(\gamma)| \leq \delta$, et $\phi \in \bar{E} \setminus E$ avec $|\hat{\mu}(\phi)| \geq \varepsilon$; d'après le lemme 2, $|\hat{\mu}(\phi|\phi|^{2k})| \leq \delta$ pour tout $k \geq n$. Si ν est la mesure sur $[0,1]$ associée à μ et ϕ (cf (4.1)).

$$\left|\int t \, d(\nu * \sigma_{n-1})(t)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2n-1} \quad \text{et} \quad \left|\int t^{2k+1} d(\nu * \sigma_{n-1})(t)\right| \leq \delta$$

pout tout $k \geq 1$; en utilisant l'inégalité (1), on obtient la minoration de la proposition 4.

Les ensembles de continuité pour $M(\mathbb{T})$ considérés dans PIGNO [7],

[8] vérifient cette propriété avec $n=1$ ou $n=2$. Par exemple, si E est un ensemble de $\mathbb{Z}_+$ n'admettant, pour la topologie de Bohr, qu'un nombre fini de points adhérents dans $\mathbb{Z}_-$, $E \cup \mathbb{Z}_-$ ne contient aucun ensemble $M_5^{(1)}(\Theta)$ avec Θ infini.

En effet, $\mathbb{Z}$ étant noté additivement, soit (n_j) une suite infinie dans $\mathbb{Z}$; tout voisinage de 0 pour la topologie de Bohr contient des entiers positifs et négatifs $n_i - n_j$, arbitrairement grands ; tout entiers $n_\ell + n_k - n_m$ est donc un point adhérent de $M_5^{(1)}(\{n_j\}) \cap \mathbb{Z}_+$, et il y en a une infinité dans $\mathbb{Z}_-$.

6.2 - Soit E un ensemble de continuité pour M(G). Sans hypothèse supplémentaire (on a vu que E peut contenir des ensembles $M_{2k+1}^{(1)}(\Theta)$ infinis pour tout k), nous pouvons seulement évaluer l'ordre de grandeur de $\delta_E(\varepsilon)$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mu \in M(G)$ avec $\|\mu\| \leqslant 1$, $\overline{\lim}_{\gamma\in\Gamma\setminus E} |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta$ et $\overline{\lim}_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \varepsilon$, et soient $\phi \in \bar{E}\setminus E$ avec $|\hat{\mu}(\phi)| \geqslant \varepsilon$ et ν la mesure sur $[0,1]$ associée à μ et ϕ.

Si E ne contient aucun translaté d'ensemble $\Omega_n(\Theta)$ infini, par la remarque 1 de (4.2) l'ensemble $A = \{k \geqslant 1 \; ; \; |\int t^{2k+1} d\nu(t)| > \delta\}$ ne contient pas de progression arithmétique de longueur n. D'après le théorème de SZEMEREDI [10], il est de densité asymptotique nulle : pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe $N \geqslant 1$ (ne dépendant que de α et n) tel que la densité de A dans tout intervalle de longueur N soit inférieure à α. Alors, pour $p \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{k\in A\\ k\leqslant p}} \frac{1}{k} < 1 + \ldots + \frac{1}{N} + \frac{\alpha N}{N} + \frac{\alpha N}{2N} + \ldots < 2 + \mathrm{Log}\, N + \alpha\, \mathrm{Log}\, p.$$

Il existe donc une mesure σ de $M([0,1])$, avec $\|\sigma\| \leqslant 1$, telle que

$$\int t^{2k+1} d\sigma(t) = 0 \quad \text{pour} \quad k \in A \cap [1,p]$$

et $$\left|\int t\, d\sigma(t)\right| > c\, e^{-4} N^{-2} p^{-2\alpha} ,$$

c étant la constante introduite en (5.3) dans la démonstration du théorème 4). D'après l'inégalité (1) appliquée à $\sigma * \nu$,

$$(2p+1)\,\varepsilon c e^{-4} N^{-2} p^{-2\alpha} - (1+\sqrt{2})^{2p+1} \frac{\delta}{2} < 1 \;;$$

$$\delta > 2(1+\sqrt{2})^{-2p-1}(2\varepsilon c e^{-4} N^{-2}\, p^{1-2\alpha} - 1) .$$

En choisissant pour p le plus petit entier tel que le dernier terme soit $\geqslant 1$, on obtient le résultat suivant.

<u>Proposition 5</u> : Soit E un ensemble infini de Γ, de continuité pour M(G). Pour tout $\alpha > 0$ il existe $C > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$\delta_E(\varepsilon) \geqslant C \exp \varepsilon^{-(1+\alpha)} .$$

<u>Remarque</u> : On pourrait obtenir une minoration explicite de $\delta_E(\varepsilon)$, en améliorant celle de $\left|\int t\, d\sigma(t)\right|$. Mais une bonne majoration de $\sum_{\substack{k\in A \\ k\leqslant p}} \frac{1}{k}$ dépend de la relation entre n, α, et N, qui n'est pas donnée par le résultat de SZEMEREDI.

D'autre part, si la conjecture d'ERDÖS selon laquelle tout ensemble A d'entiers $\geqslant 1$ tel que $\sum_{k\in A} \frac{1}{k}$ diverge, contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues, est vraie, on obtient, pour tout ensemble de continuité E, une constante C telle que, pour $0 < \varepsilon < 1$, $\delta_E(\varepsilon) \geqslant \exp(-\frac{C}{\varepsilon})$.

<u>RÉFÉRENCES</u>

[1] GRAHAM C. - Non sidon sets in the support of a Fourier-Stieltjes transform. Colloq. Math. 36 (1976) 122.

[2] GRAHAM C., HOST B., PARREAU F. - Sur les supports des transformées de Fourier-Stieltjes. Colloq. Math. 44-1 (1980).

[3] HOST B., PARREAU F. - Thèse (Université Paris-Nord, Villetaneuse, 1979).

[4] KATZNELSON Y., Mc GEHEE C. - Un ensemble d'entiers E tel que $B_o(E) \neq B(E)_o$. C.R.A.Sc. Paris t. 280 (1975) 31.

[5] LOPEZ J.M., ROSS K.A. - Sidon sets. Lecture Notes Marcel Dekker (1975).

[6] MÉLA J.F. - Mesures ε-idempotentes de norme bornée. Studia Math. 72 (1982) 131-149.

[7] PIGNO L. - Transforms which almost vanish at infinity. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87 (1980) 75-79.

[8] PIGNO L. - Diophantine approximation and quantitative behaviour of transforms (prépublication).

[9] RUDIN W. - Real and complex analysis. Mc Graw Hill.

[10] SZEMEREDI E. - On sets of integers containing no k elements in arithmetic progressions. Acta. Math. 27 (1975) 199.

[11] TAYLOR J.L. - Measures algebras. Regional Conference Series in Math. n°16, A.M.S. (1973).

CHAPITRE VII

SUR CERTAINS L-IDEAUX DE M(G) DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMÉES DE FOURIER-STIELTJES

1 - Introduction

1.1 - Dans ce chapitre G est un groupe abélien compact infini. On rappelle que, pour $\mu \in M(G)$ et $\varepsilon > 0$, $E(\mu,\varepsilon)$ désigne l'ensemble des $\gamma \in \Gamma = \hat{G}$ tels que $|\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon$; on étudie ici les L-idéaux de M(G) définis par certaines propriétés des $E(\mu,\varepsilon)$.

Pour qu'un idéal fermé I de M(G) soit un L-idéal, il faut et il suffit que $\gamma\mu \in I$ pour tous $\mu \in I$ et $\gamma \in \Gamma$; on s'intéressera donc à des classes d'ensembles de Γ invariantes par translation.

Le cospectre de $I \subset M(G)$ est l'ensemble des caractères de M(G) s'annulant sur I, et le noyau de $\Lambda \subset \Delta M(G)$ est l'idéal fermé $\ker \Lambda = \{\mu \in M(G) \ ; \ \hat{\mu}(\chi) = 0, \ \chi \in \Lambda\}$.

Un idéal de M(G) est le noyau d'un ensemble de $\bar{\Gamma}$ si et seulement si il est fermé pour la norme de la convergence uniforme des transformées de Fourier-Stieltjes (car tout idéal fermé de $C(\bar{\Gamma})$ est le noyau de son cospectre). En général, les idéaux définis par les $E(\mu,\varepsilon)$ ont cette propriété, et inversement, si $\Lambda \subset \bar{\Gamma}$, $\ker \Lambda$ est aussi l'ensemble des $\mu \in M(G)$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{E(\mu,\varepsilon)} \subset \bar{\Gamma} \setminus \Lambda$; tous ces idéaux peuvent être obtenus par la construction qui suit :

1.2 - Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Γ, non vide et distinct de $\mathcal{P}(\Gamma)$, vérifiant les propriétés :

$$\text{(F)}\qquad \begin{array}{lll} (1) & \text{si } A \in \mathcal{F} \text{ et } B \subset A, & B \in \mathcal{F}\ ; \\ (2) & \text{si } A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{F}, & A \cup B \in \mathcal{F}; \\ (3) & \text{si } A \in \mathcal{F} \text{ et } \gamma \in \Gamma, & \gamma A \in \mathcal{F}\ . \end{array}$$

On note $\Lambda_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des caractères de $\bar{\Gamma}$ dont aucun voisinage n'induit sur Γ un élément de $\mathcal{F}$. Autrement dit, les complémentaires des éléments de $\mathcal{F}$ forment un filtre invariant par translation sur Γ et $\Lambda_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des points adhérents de ce filtre. On définit

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{\mu \in M(G)\ ;\ E(\mu,\varepsilon) \in \mathcal{F}\ ,\ \varepsilon > 0\}$$

Proposition 1 : $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ est un L-idéal, noyau de $\Lambda_{\mathcal{F}}$. Plus précisément, pour $\mu \in M(G)$, $\operatorname{Inf}\{\varepsilon > 0\ ; E(\mu,\varepsilon) \in \mathcal{F}\} = \sup\limits_{\chi \in \Lambda_{\mathcal{F}}} |\hat{\mu}(\chi)|$.

Démonstration : Pour $\mu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $E(\gamma\mu,\varepsilon) = \bar{\gamma}E(\mu,\varepsilon)$ et $\gamma\mu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ si et seulement si $\mu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Il suffit donc de montrer la seconde assertion. Soit $\mu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ et $\varepsilon > 0$. Si $E(\mu,\varepsilon) \in \mathcal{F}$, pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$ tel que $|\hat{\mu}(\chi)| > \varepsilon$, $E(\mu,\varepsilon)$ est la trace sur Γ d'un voisinage de χ, donc $\chi \notin \Lambda_{\mathcal{F}}$. Inversement, si $|\hat{\mu}(\psi)| < \varepsilon$ pour tout $\psi \in \Lambda_{\mathcal{F}}$, tout $\chi \in \bar{\Gamma}$ tel que $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant \varepsilon$ admet un voisinage V tel que $V \cap \Gamma \in \mathcal{F}$; par compacité, $\{\chi\ ; |\hat{\mu}(\chi)| \geqslant \varepsilon\}$ est contenu dans une réunion finie de ces voisinages, donc $E(\mu,\varepsilon) \in \mathcal{F}$ d'après les propriétés (1) et (2) de $\mathcal{F}$.

Remarque : $\Lambda_{\mathcal{F}}$ n'est en général pas la trace sur $\bar{\Gamma}$ du cospectre de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est formé des ensembles de Sidon de Γ, on obtient pour $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ l'idéal $\mathcal{S}(G)$ défini par IZUCHI [4] ; si $E \subset \Gamma$ est un ensemble de Sidon, $\bar{E}$ est ouvert et fermé dans $\bar{\Gamma}$, donc $\Lambda_{\mathcal{F}}$ ne contient aucun caractère adhérent à E. On sait pourtant que $\mathcal{S}(G) = M_0(G)$ (ceci résulte notamment du th.11 chap.II) et son cospectre dans $\bar{\Gamma}$ est donc $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$.

1.3 - Exemple :

Soit $G = \mathbb{T}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, et soit $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} v_n$ une série à termes positifs divergente, telle que $\lim v_n = 0$ et $v_n \sim v_{n+1}$ $(|n| \to \infty)$, et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{Z}$ telles que $\sum_{n\in A} v_n$ converge. Les propriétés (F1) et (F2) sont évidentes, (F3) résulte de l'équivalence $v_n \sim v_{n+k}$ $(|n| \to \infty)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le L-idéal obtenu vérifie

$$M_o(\mathbb{T}) \subsetneq \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subsetneq M_c(\mathbb{T}) .$$

On va construire en effet un produit de Riesz généralisé $\rho \notin \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. On prend les notations du chapitre V (sauf que $\mathbb{Z}$ reste noté additivement) et on construit les "blocs" I_j par récurrence ; s'ils sont définis pour $j < k$, il existe un entier $p_k > 0$ tel que $p_k\mathbb{Z} \cap (\sum_{j<k} I_j + I_j) = \{0\}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{np_k}$ diverge, sinon $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{np_k+a}$ convergerait pour tout a, $0 \leqslant a < p_k$, et Σv_n convergerait. On peut donc choisir $n_k > 0$ de façon que $\sum_{0<|n|<n_k} v_{np_k} > 1$, et on définit $I_k = \{np_k \ ; |n| < 2n_k\}$. On obtient une suite de blocs dissociés, d'après la condition sur p_k.

Si F_n désigne le noyau de Fejer tel que $\hat{F}_n(j) = 1 - |j|/n$, $|j| \leqslant n$, $\hat{F}_n(j) = 0$ pour $|j| > n$, on prend, pour tout $k \geqslant 1$, $p_k(x) = F_{2n_k}(p_k x)$. Alors, si ρ est le produit de Riesz généralisé $\prod_{j\geqslant 1} P_j$, $E(\rho,1/2)$ contient la réunion (disjointe) des ensembles $\{np_k \ ; 0<|n|<n_k\}$, donc $E(\rho,1/2) \notin \mathcal{F}$. Ceci prouve que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subsetneq M_c(\mathbb{T})$.

En prenant $P_k(x) = (1-a) + aF_{2n_k}(p_k x)$, pour un $a \in \,]0,1[$, on obtient un produit de Riesz "tame" vérifiant la même propriété : $E(\rho,a/2) \notin \mathcal{F}$.

D'autre part, il est facile de construire des produits de Riesz $\rho \notin M_o(\mathbb{T})$ avec $\sum_{n\in \operatorname{supp}\hat{\rho}} v_n < +\infty$, ce qui montre que $M_o(\mathbb{T}) \subsetneq \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$.

2 - Le L-idéal $\mathcal{L}_P$ défini par les progressions arithmétiques

2.1 - On revient au cas général d'un groupe G compact abélien infini. On appelle progression arithmétique de longueur k dans Γ un ensemble $\{\lambda\alpha^{\ell} \ ; 1 \leqslant \ell \leqslant k\}$ de k termes distincts.

Proposition 2 - Notation : Les mesures $\mu \in M(G)$ telles que, pour aucun $\varepsilon > 0$, $E(\mu,\varepsilon)$ ne contienne de progressions arithmétiques arbitrairement longues, forment un L-idéal $\mathcal{L}_P$, noyau de l'ensemble Λ_P des caractères de $\bar{\Gamma}$ dont tout voisinage contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Démonstration : Il suffit de montrer que l'ensemble des parties de Γ ne contenant pas de progressions arithmétiques arbitrairement longues vérifie les propriétés (F). (1) et (3) sont évidentes ; (2) résulte du théorème de Van der Waerden (cf. GRAHAM et ROTHSCHILD [1]), qu'on peut énoncer : pour tout $n > 0$, il existe $N > 0$ tel que, si l'intervalle $[1,N]$ de $\mathbb{N}$ est réunion de deux ensembles, l'un au moins contienne une progression arithmétique de longueur n ; alors si $A \cup B \subset \Gamma$ contient une progression de longueur N, on peut en extraire une progression de longueur n dans A ou dans B.

2.2 - Λ_P a aussi la propriété : pour toute suite de progressions arithmétiques $I_j = \{\lambda_j\alpha_j^\ell ; 1 \leqslant \ell \leqslant k_j\}$ dont la longueur k_j tend vers l'infini, et pour toute mesure $\mu \in M(G)$,

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{1}{k_j} \sum_{\ell=1}^{k_j} |\hat{\mu}(\lambda_j\alpha_j^\ell)| \leqslant \sup_{\chi\in\Lambda_P} |\hat{\mu}(\chi)| .$$

Cela signifie encore que toute mesure de probabilité sur $\bar{\Gamma}$ vaguement adhérente à $\left(\frac{1}{k_j} \sum_{\ell=1}^{k_j} \delta(\lambda_j\alpha_j^\ell)\right)$ a un support contenu dans Λ_P.

Il suffit de montrer que si $0 < a < \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{1}{k_j} \sum_{\ell=1}^{k_j} |\hat{\mu}(\lambda_j\alpha_j^\ell)|$, pour tout $\varepsilon \in]0,a[$, $E(\mu,\varepsilon)$ contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Soit pour tout j, $d_j = \frac{1}{k_j}|E(\mu,\varepsilon) \cap I_j|$ la densité de $E(\mu,\varepsilon)$ dans I_j. Pour une infinité de j,

$$a \leqslant \frac{1}{k_j} \sum_{\ell=1}^{k_j} |\hat{\mu}(\lambda_j\alpha_j^\ell)| \leqslant d_j\|\mu\| + (1-d_j)\,\varepsilon ,$$

donc $d_j \geqslant (a-\varepsilon) / (\|\mu\| - \varepsilon)$. Soit $\eta = (a-\varepsilon) / (\|\mu\| - \varepsilon)$; d'après le théorème de SZEMEREDI ([6], cf le corollaire), pour tout $n>0$, il existe $N>0$ tel que tout ensemble d'entiers de densité $\geqslant \eta$ dans $[1,N]$ contienne une progression arithmétique de longueur n ; alors $E(\mu,\varepsilon)$ contient une progression de longueur n dans l'un des I_j.

2.3 - Les produits de Riesz généralisés construits en (1) n'appartiennent pas à $\mathcal{L}_p$: pour tout $a \in]0,1[$, il existe un produit de Riesz généralisé "tame" ρ sur $\mathbb{T}$, de la forme $\rho = \prod_{j\geqslant 1}((1-a)+a\,F_{n_j}(p_j x))$, tel que $\overline{\lim}|\hat{\rho}(\gamma)| = a$, pour lequel $E(\rho,a/2)$ contient des progressions arbitrairement longues. Cette construction se généralise facilement à tout groupe G tel que Γ contienne des progressions arithmétiques de toutes longueurs ($nG \neq \{0\}$ pour tout $n>0$).

De même, $M_o \subsetneq \mathcal{L}_p$ car, pour tout produit de Riesz (non généralisé) ρ construit sur un ensemble dissocié $\{\theta_j\}$ de Γ et tel que $\hat{\rho}(\theta_j) = a \in]0,1[$ pour tout j, les ensembles $E(\rho,\varepsilon)$ ne contiennent pas de progressions arithmétiques arbitrairement longues ; en effet, $E(\rho,\varepsilon)$ est l'un des ensembles des mots de longueurs $\leqslant k$ de $\{\theta_j\}$ qui sont des ensembles $\Lambda(p)$ (cf LOPEZ et ROSS [5]). Comme $\frac{1}{\varepsilon}\,\rho$ est une mesure ε-quasi-idempotente fortement continue, on peut aussi utiliser le théorème 1 de [2] : pour une telle mesure μ, $E(\mu,1) = \{\gamma \in \Gamma ; |\hat{\mu}(\gamma)| > 1\}$ ne contient pas de progressions arithmétiques arbitrairement longues. (Dans [2] "presque idempotente" signifie "ε-quasi-idempotente" au sens du chapitre III).

Remarque : Dans le cas $G = \mathbb{T}$, ce dernier résultat signifie que tout ouvert et fermé U de $\overline{\mathbb{Z}}$ coupant Λ_p coupe le groupe $h_d\overline{\mathbb{Z}}$ (h_d étant le plus petit idempotent de $\overline{\mathbb{Z}}$, associé aux mesures discrètes) ; $h_d\overline{\mathbb{Z}}$ est isomorphe au compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ et ses sous-groupes ouverts et fermés sont les $h_d(n\overline{\mathbb{Z}})$ pour $n \geqslant 1$. Pour un ouvert et fermé U de $\overline{\mathbb{Z}}$, si $h_d \in U$, $h_d\overline{\mathbb{Z}} \cap U$ contient un sous-groupe $h_d(n\overline{\mathbb{Z}})$; alors $\overline{n\mathbb{Z}}\setminus U$ ne coupe pas $h_d\overline{\mathbb{Z}}$, donc $\overline{n\mathbb{Z}} \cap \Lambda_P \subset U$. Cela prouve que <u>la composante connexe de h_d dans $\overline{\mathbb{Z}}$ contient</u> $(\bigcap_{n>0} \overline{n\mathbb{Z}}) \cap \Lambda_P$ (l'ensemble des $\chi \in \Lambda_P$ tels que $\delta(r)\hat{}(\chi) = 1$ pour tout rationnel r).

3 - <u>Le L-idéal $\mathscr{L}_I$ défini par les idempotents de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$</u>

3.1 - On note $\mathscr{L}_I$ le L-idéal des mesures μ de M(G) telles que $h\mu = 0$ pour tout idempotent h de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$. C'est le noyau de l'ensemble des caractères de $\Gamma\setminus\bar{\Gamma}$ de module idempotent. La définition de $\mathscr{L}_I$, la proposition 3 et le lemme 1 ci-dessous se généralisent sans changement aux groupes non compacts).

<u>Proposition 3</u> : $\mathscr{L}_I$ est l'orthogonal de l'ensemble des mesures de Dirichlet (cf déf.1, chap.II).

<u>Démonstration</u> : C'est une simple reformulation de la prop.9 chap.II.

Pour un idempotent h de $\bar{\Gamma}$, $\overline{h\Gamma} = h\bar{\Gamma} = \{\phi \in \Gamma\ ;\ |\phi| \leqslant h\}$. Pour que $\phi \in \bar{\Gamma}$ soit majoré en module par un idempotent de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, il suffit que $\phi \in \phi\{\bar{\Gamma}_+\setminus\{1\})$ ou $\phi \in \phi(\bar{\Gamma}\setminus\Gamma)$; en effet, si $\phi = \phi\psi$, $\phi = \phi|\psi|^{2n}$ pour tout n et $\phi = h\phi$ pour l'idempotent $h = \lim\limits_{n\to\infty} |\psi|^{2n}$.

On appelle <u>profondeur</u> d'un caractère $\phi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ la borne supérieure (finie ou non) des entiers $n > 0$ tels que ϕ soit le produit de n caractères de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$.

<u>Lemme 1</u> : Tout caractère de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ de profondeur infinie est majoré en module par un idempotent de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\phi \in \bar{\Gamma}$; on suppose $\phi \notin \phi(\bar{\Gamma}_+\setminus\{1\}$; $\bar{\Gamma}_+\setminus\{1\}$ étant compact, il existe $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\phi) = 1$ et $|\hat{\mu}(\phi\psi)| < 1/2$ pour tout $\psi \in \bar{\Gamma}_+\setminus\{1\}$. Si $\phi = \chi_1\ldots\chi_n$ avec $\chi_j \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a (en écrivant ϕ, χ_j pour ϕ_μ, $(\chi_j)_\mu$), pour tout j,

$$1/2 \leqslant |\hat{\mu}(\phi) - \hat{\mu}(\phi|\chi_j|^2)| \leqslant \int |\phi|(1-|\chi_j|^2)d|\mu|$$

$$\leqslant 2\int |\phi|(1-|\chi_j|)\, d|\mu| \leqslant 2\int (|\chi_1\cdots\chi_{j-1}| - |\chi_1\cdots\chi_j|)d|\mu| ;$$

d'où, en sommant de $j = 1$ à $j = n$,

$$n \leqslant 4\int (1-|\phi|)\, d|\mu| \leqslant 4\|\mu\| .$$

3.2 - On donne maintenant des propriétés arithmétiques des ensembles $E(\mu,\varepsilon)$ pour les mesures $\mu \notin \mathcal{L}_I$. On rappelle que, pour un ensemble $\Theta \subset \Gamma$, $\Omega(\Theta)$ désigne l'ensemble des mots de Θ, c'est-à-dire des produits $\prod_{j=1}^{n} \theta_j^{\varepsilon_j}$ où les θ_j sont des éléments deux-à-deux distincts de Θ et les ε_j des entiers de valeur absolue $\leqslant 1$.

Si $(A_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite d'ensembles de Γ, contenant 1 pour $j \geqslant j_o$, le produit infini $\prod_{j\geqslant 1} A_j$ désigne la réunion des produits finis $A_1\ldots A_k$ pour $k \geqslant j_o$.

Le résultat suivant précise le théorème 16 du chapitre II.

<u>Proposition 4</u> : Pour une mesure μ de $M(G)$, $\mathrm{Sup}\{|\hat{\mu}(h\gamma)| ; h = h^2 \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma, \gamma \in \Gamma\}$ est aussi la borne supérieure des $\varepsilon > 0$ tels que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne

a) le translaté d'un ensemble $\Omega(\Theta)$ pour un ensemble infini $\Theta \subset \Gamma$;

b) un produit infini $\prod_{j\geqslant 1} A_j$, où les A_j sont des ensembles infinis de Γ.

<u>Démonstration</u> : Soient $h = h^2 \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ et $\gamma_o \in \Gamma$ tels que $|\hat{\mu}(h\gamma_o)| > \varepsilon$, et soit (γ_j) une suite généralisée convergeant faiblement vers h dans $L^\infty(\mu)$ et tendant vers l'infini dans Γ. $(h\gamma_j)$ converge aussi vers h, et on peut choisir $\alpha = \gamma_o\gamma_j$ pour j assez grand de façon que $|\hat{\mu}(\alpha)| > \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\alpha h)| > \varepsilon$. On construit un ensemble $\Theta = \{\theta_k ; k \geqslant 1\}$ par récurrence ; comme $(\bar{\gamma}_j)$ et $(\bar{\gamma}_j h)$ convergent encore vers h, on choisit θ_1 parmi les γ_j, tel que, pour $\varepsilon_1 = \pm 1$, $|\hat{\mu}(\alpha\theta_1^{\varepsilon_1})| > \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\alpha\theta_1^{\varepsilon_1}h)| > \varepsilon$; de même, si $\theta_1,\ldots,\theta_{p-1}$ sont choisis deux-à-deux distincts et vérifiant $|\hat{\mu}(\alpha\omega)| > \varepsilon$ pour tout $\omega \in \Omega(\{\theta_1,\ldots,\theta_{p-1}\})$ on prend θ_p parmi les γ_j, distinct de $\theta_1,\ldots,\theta_{p-1}$, et tel que pour $\varepsilon_p = \pm 1$ et pour tout $\omega \in \Omega(\{\theta_1,\ldots,\theta_{p-1}\})$, $\hat{\mu}(\alpha\omega\theta_p^{\varepsilon_p})| > \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\alpha\theta_p^{\varepsilon_p}h)| > \varepsilon$; $\{\theta_1,\ldots,\theta_p\}$

vérifie encore l'hypothèse de récurrence. On obtient un ensemble infini Θ tel que $\alpha\Omega(\Theta) \subset E(\mu,\varepsilon)$.

Si $E(\mu,\varepsilon)$ contient un ensemble $\alpha\Omega(\Theta)$ avec Θ infini, il contient tout produit $\alpha \prod_{j\geqslant 1}(A_j \cup \{1\})$ où (A_j) est une partition infinie de Θ en ensembles infinis.

Enfin, si $E(\mu,\varepsilon)$ contient un produit infini d'ensembles infinis $\prod_{j\geqslant 1} A_j$, soit, pour chaque j, ϕ_j un caractère de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ adhérent à A_j. Pour tout $n \geqslant 1$, $\phi_1 \dots \phi_n$ est adhérent à $A_1 \dots A_n$ et tout caractère ϕ adhérent à $(\phi_1 \dots \phi_n)_{n\geqslant 1}$ est adhérent à $\prod_{j\geqslant 1} A_j$ donc vérifie $|\hat{\mu}(\phi)| \geqslant \varepsilon$. Un tel caractère ϕ s'écrit, pour tout $n \geqslant 1$, sous la forme $\phi = \phi_1 \dots \phi_n \Psi_n$ et est donc de profondeur infinie ; d'après le lemme, il existe $h = h^2 \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ tel que $\phi = h\phi \in \overline{h\Gamma}$; alors $\varepsilon \leqslant |\hat{\mu}(\phi)| \leqslant \operatorname{Sup}_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\mu}(h\gamma)|$.

<u>Remarque</u> (cf [3] chap. IV) : On peut démontrer que l'ensemble des caractères de $\bar{\Gamma}$ majorés en module par un idempotent de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ (l'ensemble des caractères de profondeur infinie) n'est pas fermé ; un caractère $\phi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ dont tout voisinage contient des ensembles de la forme (a) ou (b) de la proposition 4 n'est donc pas nécessairement de profondeur infinie. On peut également construire $\mu \in \mathcal{L}_I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne pour tout $n \geqslant 1$ un produit $\prod_1^n A_j$ d'ensembles infinis de Γ (cf. la définition de $\mathcal{L}_C$ dans la suite).

3.3 - Il est immédiat que toute mesure de probabilité "tame" ρ sur G, telle que $\overline{\lim_{\gamma\to\infty}}|\hat{\mu}(\gamma)| = a < 1$, appartient à $\mathcal{L}_I$ (si $\phi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, $|\phi_\rho|$ est une constante $\leqslant a$). On a vu que si Γ contient des progressions arithmétiques de toutes longueurs, il existe une telle mesure ρ n'appartenant pas à $\mathcal{L}_P$; donc $\mathcal{L}_I \not\subset \mathcal{L}_P$.

<u>Proposition 5</u> : Si, pour tout $n > 1$, nG est d'indice fini dans G, tout caractère de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ de module idempotent appartient à Λ_P et $\mathcal{L}_P \subsetneq \mathcal{L}_I$.

<u>Démonstration</u> : L'hypothèse sur G signifie que pour $n > 1$ le sous-

groupe de Γ formé des éléments d'ordre n (orthogonal de nG) est fini. Il suffit de montrer que, si h est un idempotent de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, $h \in \Lambda_P$ (alors $\overline{h\Gamma} \subset \Lambda_P$) ; si V est un voisinage de h et $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in M(G)$ avec $|\hat{\mu}(h)| > \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\psi)| \leqslant \varepsilon$ pour $\psi \in \bar{\Gamma}\setminus V$; soit alors (γ_j) une suite généralisée tendant vers l'infini dans Γ et convergeant faiblement vers h dans $L^\infty(\mu)$; $(h\gamma_j)$ converge fortement vers h (dans $L^1(\mu)$) et pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $(h\gamma_j^\ell)$ converge vers h ; donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a pour j assez grand $|\hat{\mu}(h\gamma_j^\ell)| > \varepsilon$ pour $0 \leqslant \ell \leqslant k$ et pour un tel j, pour i assez grand, $|\mu(\gamma_i\gamma_j^\ell)| > \varepsilon$ pour $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Donc $V \cap \Gamma$ contient des progressions arithmétiques $\{\gamma_i\gamma_j^\ell \,;\, 0 \leqslant \ell \leqslant k\}$ dont les termes sont deux-à-deux distincts, d'après l'hypothèse sur G, pour j assez grand.

4 - Les L-idéaux $\mathscr{L}_\varepsilon$

Définition : Pour $0 < \varepsilon < 1$, $\mathscr{L}_\varepsilon$ désigne l'ensemble des mesures $\mu \in M(G)$ telles que, pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, $|\chi_\mu| \leqslant \varepsilon$ μ-presque-partout.

Proposition 6 : Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $\mathscr{L}_\varepsilon$ est un L-idéal. Une mesure $\mu \in M(G)$ appartient à $\mathscr{L}_\varepsilon$ si et seulement si, pour toute probabilité $\nu << \mu$, $\overline{\lim}_{\gamma\to\infty} |\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration : La première partie de la proposition est évidente. Si $\mu \in \mathscr{L}_\varepsilon$ et si ν est une probabilité avec $\nu << \mu$, $\nu \in \mathscr{L}_\varepsilon$ et

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} |\hat{\nu}(\gamma)| = \sup_{\chi\in\bar{\Gamma}\setminus\Gamma} |\hat{\nu}(\chi)| = \sup_{\chi\in\bar{\Gamma}\setminus\Gamma} \left|\int \chi_\nu d\nu\right| \leqslant \varepsilon$$

Si $\mu \notin \mathscr{L}_\varepsilon$, il existe $\chi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ tel que l'ensemble $\{x \in G \,;\, |\chi_\mu(x)| > \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable. Il existe donc un complexe z avec $|z| > \varepsilon$, et un réel r avec $0 < r < |z| - \varepsilon$ tels que $\{x \in G \,;\, |\chi_\mu(x) - z| < r\}$ ne soit pas μ-négligeable. Soit ν la probabilité obtenue en normalisant la restriction de $|\mu|$ à cet ensemble. $\nu << \mu$ et $|\chi_\nu(x) - z| < r$ ν-presque-partout, donc

$$|\hat{\nu}(\chi) - z| = \left|\int (\chi_\nu - z)\, d\nu\right| < r$$

et $\quad \overline{\lim_{\gamma\to\infty}}|\hat{\nu}(\gamma)| \geqslant |\hat{\nu}(\chi)| > \varepsilon$.

Propriétés des idéaux $\mathcal{L}_\varepsilon$:

a) Quels que soient ε et η avec $0 < \varepsilon < \eta < 1$, $M_o \subset \mathcal{L}_\varepsilon \subset \mathcal{L}_\eta \subset \mathcal{L}_I$.

b) $\bigcup_{0<\varepsilon<1} \mathcal{L}_\varepsilon$ est un L-idéal.

c) Tous les idéaux $\mathcal{L}_\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$ ont le même radical.

Soient ε et η avec $0 < \varepsilon < \eta < 1$. Soit n un entier avec $\eta^n < \varepsilon$. Si $\mu \in \mathcal{L}_\eta$, pour tout caractère $\chi \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ $|\chi_\mu| \leqslant \eta$, donc $|\chi_{\mu^n}| \leqslant \eta^n \leqslant \varepsilon$, $\mu^n \in \mathcal{L}_\varepsilon$ et $\mu \in \mathrm{Rad}\,\mathcal{L}_\varepsilon$. Donc $\mathcal{L}_\eta \subset \mathrm{Rad}\,\mathcal{L}_\varepsilon$. Comme $\mathcal{L}_\eta \supset \mathcal{L}_\varepsilon$, $\mathrm{Rad}\,\mathcal{L}_\eta = \mathrm{Rad}\,\mathcal{L}_\varepsilon$.

d) Si $\mu \in M(G)$ a la propriété du module constant et appartient à $\mathcal{L}_I$, μ appartient à $\mathcal{L}_\varepsilon$ pour un certain ε, $0 < \varepsilon < 1$.

On rappelle qu'une mesure μ a la propriété du module constant si, pour tout $\chi \in \Delta$, $|\chi_\mu|$ est une constante. Si μ a cette propriété et n'appartient a aucun $\mathcal{L}_\varepsilon$,il existe une suite $\phi_n \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ telle que $|\phi_n|_\mu$ soit une constante supérieure à $1-1/n$. Si ϕ est un caractère adhérent à la suite $|\phi_n|^2$, $\phi \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ et $\phi_\mu = 1$, donc $\mu \notin \mathcal{L}_I$.

e) Si μ est une probabilité "tame" sur G, $\mu \in \mathcal{L}_\varepsilon$ si et seulement si $\overline{\lim_{\gamma\to\infty}}|\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon$.

Supposons que $\mu \notin \mathcal{L}_\varepsilon$. Soit χ un caractère de $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ tel que $\{x \,;\, |\chi_\mu(x)| > \varepsilon\}$ ne soit pas μ-négligeable. Comme μ est "tame", χ_μ est le produit d'une constante c et d'un caractère $\gamma \in \Gamma$. Alors $|c| > \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\chi\bar{\gamma})| = |c|$. Donc $\overline{\lim_{\gamma\to\infty}}|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant |\hat{\mu}(\chi\gamma)| > \varepsilon$. L'implication réciproque se déduit de la proposition 5.

f) Pour $0 < \varepsilon < \eta < 1$, $M_o \subsetneqq \mathcal{L}_\varepsilon \subsetneqq \mathcal{L}_\eta \subsetneqq \mathcal{L}_I$.

En (2) on a construit dans le cas $G = \mathbb{T}$, pour tout a, $0 < a < 1$, un produit de Riesz "tame" ρ_a avec $\overline{\lim_{\gamma\to\infty}}|\hat{\mu}(\gamma)| = a$. Alors ρ_a n'appartient pas à $M_o(\mathbb{T})$, $\rho_a \in \mathcal{L}_I$, et $\rho_a \in \mathcal{L}_\varepsilon$ si et seulement si $a \leqslant \varepsilon$.

Cette construction peut être généralisée dans tout groupe compact infini G : on construit par récurrence une suite I_n de blocs dissociés, et une suite P_n de polynômes trigonométriques avec $\operatorname{Supp} \hat{P}_n \subset I_n$, $P_n \geqslant 0$, $\|P_n\|_1 = 1$ et $\sup\limits_{\gamma \neq 1} |\hat{P}_n(\gamma)| \geqslant 1-1/n$. Supposons construits $I_1,\dots,I_{n-1}$ et $P_1,\dots,P_{n-1}$. Il existe un voisinage V_n de 1 dans la topologie de Bohr de Γ avec $V_n^2 \cap \prod\limits_{i=1}^{n-1} I_i^2 = \{1\}$. Soit μ_n une probabilité discrète sur G avec $\operatorname{Supp} \hat{\mu}_n \subset V_n$. Alors $\sup\limits_{\gamma \neq 1} |\hat{\mu}_n(\gamma)| = 1$, et, par régularisation, il existe un polynôme trigonométrique P_n avec $P_n \geqslant 0$, $\|P_n\|_1 = 1$, $\operatorname{Supp} \hat{P}_n \subset \operatorname{Supp} \hat{\mu}_n$ et $\sup\limits_{\gamma \neq 1} |\hat{P}_n(\gamma)| \geqslant 1-1/n$. On pose $\rho_a = \prod\limits_{n=1}^{\infty} ((1-a) + aP_n)$. ρ_a est un produit de Riesz généralisé "tame" avec $\overline{\lim\limits_{\gamma \to \infty}} |\hat{\rho}_a(\gamma)| = a$, d'où le résultat.

g) Si pour tout $n \neq 0$, $nG \neq \{0\}$, aucun $\mathcal{L}_\varepsilon$ n'est inclus dans $\mathcal{L}_P$.

Comme en (2.3) on peut construire sur G des produits de Riesz généralisés construits sur une suite de progressions arithmétiques, qui appartiennent à $\mathcal{L}_\varepsilon$ mais pas à $\mathcal{L}_P$.

h) On peut démontrer que $\mathcal{L}_I$ n'est égal ni a $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<1} \mathcal{L}_\varepsilon$, ni même à $\operatorname{Rad} \mathcal{L}_\varepsilon$ ([3] chap. IV).

5 - L'idéal $\mathcal{L}_C$

On dira qu'une partie de A de Γ est un cube de dimension n si A est le produit de n parties infinies de Γ, on dira que A est une cellule de dimension n si A est l'ensemble des produits de n éléments distincts d'une partie infinie B de Γ.

Définition : $\mathcal{L}_C$ est l'ensemble des mesures $\mu \in M(G)$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, la dimension des cubes inclus dans $E(\mu,\varepsilon)$ soit bornée.

Proposition 7 : Pour une mesure $\mu \in M(G)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\mu \in \mathcal{L}_C$

b) Pour toute suite ϕ_n de caractères de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ dont la profondeur tend vers l'infini, $\hat{\mu}(\phi_n)$ tend vers 0.

c) Pour tout $\varepsilon > 0$, la dimension des cellules dont un translaté est inclus dans $E(\mu,\varepsilon)$ est bornée.

d) Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et toute suite ϕ_n de caractères de $\bar{\Gamma}_+\setminus\{1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\mu}(\gamma\phi_n^n) = 0$.

e) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que, pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, $|\mu|(\{x \in G \; ; |\chi_\mu(x)| > 1-\eta\}) < \varepsilon$.

<u>Corollaire</u> : $\mathcal{L}_C$ est un L-idéal, noyau de la partie Λ_C de $\bar{\Gamma}$ formée des caractères $\chi \in \bar{\Gamma}$ dont tout voisinage contient des caractères de $\bar{\Gamma}$ de profondeur arbitrairement grande. De plus Rad $\mathcal{L}_{1/2} \subset \mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}_I$.

<u>Démonstration</u> :

(a)$\Longrightarrow$(b) : Il suffit de démontrer que si χ est un caractère de profondeur supérieure ou égale à n, avec $|\hat{\mu}(\chi)| > \varepsilon$, $E(\mu,\varepsilon)$ contient un cube de dimension n.

Soient, pour $1 \leqslant p \leqslant n, \gamma_{i,p}$ une suite généralisée d'éléments de Γ convergeant $*$-faiblement dans $L^\infty(\mu)$ vers le caractère χ_p, avec $\chi_1 \ldots \chi_n = \chi$. On munit $\mathbb{N} \times \{1,\ldots,n\}$ du bon ordre lexicographique. Par récurrence sur cet ensemble, on peut extraire des suites $\gamma_{i,p}$ des sous-suites $\gamma_{k,p}$ ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant n$) d'éléments distincts de Γ de sorte que $|\hat{\mu}(\phi_1\ldots\phi_n)| > \varepsilon$ dès-que chaque ϕ_p est égal à χ_p ou à l'un des $\gamma_{k,p}$. Ainsi $E(\mu,\varepsilon)$ contient le cube de dimension n, $\prod\limits_{p=1}^{n}\{\gamma_{k,p} \; ; k \in \mathbb{N}\}$

(b)$\Longrightarrow$(a) : Si $\chi_1,\ldots,\chi_n$ sont des caractères de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ adhérant respectivement aux parties infinies $A_1,\ldots,A_n$ de Γ, $\chi_1\ldots\chi_n$ adhère au cube $A_1\ldots A_n$. Donc si $E(\mu,\varepsilon)$ contient des cubes de dimension arbitrairement grande, $E(\mu,\varepsilon)$ contient des caractères de profondeur arbitrairement grande, ce qui contredit (b).

(a)$\Longrightarrow$ (c) : Il suffit de montrer que tout translaté d'une cellule de dimension n contient un cube de dimension n.

Si $\gamma \in \Gamma$ et si A est une partie infinie de Γ, soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties infinies deux-à-deux disjointes de A. Alors le cube $(\gamma A_1).A_2 \ldots A_n$ est inclus dans le translaté par γ de la cellule de dimension n construite sur A.

(c)$\Longrightarrow$(d) : Il suffit de montrer que, si $\gamma \in \Gamma$ et si $\phi \in \bar{\Gamma}_+ \setminus \{1\}$ avec $|\hat{\mu}(\gamma\phi^n)| > \varepsilon$, $E(\mu,\varepsilon)$ contient la translatée d'une cellule de dimension n. Soit γ_i une suite généralisée tendant vers ϕ, dans $\bar{\Gamma}(\mu)$. Par récurrence, on peut extraire de γ_i une suite γ_n d'éléments distincts de Γ avec

$$|\hat{\mu}(\gamma\ \gamma_{p_1} \ldots \gamma_{p_n})| > \varepsilon \qquad (0 < p_1 < \ldots < p_n) .$$

(d)$\Longrightarrow$(b) : Il est clair que l'ensemble des mesures vérifiant (d) est un idéal fermé de M(G). D'autre part, si μ vérifie (d) et si $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\mu$ vérifie (d), donc l'ensemble des mesures vérifiant (d) est un L-idéal de M(G).

Soit μ une mesure vérifiant (d). Alors $|\mu|$ vérifie (d). Soit $\chi = \phi_1 \ldots \phi_{2n}$ un caractère de profondeur supérieure ou égale à 2n. Comme

$$|\chi| = |\phi_1 \ldots \phi_{2n}| \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{2n} |\phi_p|^{2n}$$

on en déduit

$$|\hat{\mu}(\chi)| \leqslant |\mu|\hat{\ }(|\chi|) \leqslant \sup_{1 \leqslant p \leqslant 2n} |\mu|\hat{\ }(|\phi_p|^{2n}) \leqslant \sup_{\phi \in \bar{\Gamma}_+ \setminus \{1\}} |\mu|\hat{\ }(\phi^n) .$$

Comme $|\mu|$ vérifie (d), le dernier terme de ces inégalités tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc μ vérifie (b).

(d)$\Longrightarrow$(c) : On suppose que μ vérifie (d), donc $|\mu|$ également, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n > 0$ tel que $|\mu|\hat{\ }(\chi^n) < \varepsilon/2$ pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}_+ \setminus \{1\}$. Si $\eta = 1-2^{-1/2n}$, pour $\phi \in \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$

$$|\mu|(\{x \in G \,;\, |\phi_\mu(x)| > 1-\eta\}) \leqslant (1-\eta)^{-2n} |\mu|\hat{\ }(|\phi|^{2n}) < \varepsilon$$

(e)$\Longrightarrow$(d) : Evident.

Démonstration du corollaire :

On a vu que $\mathcal{L}_C$ était l'ensemble des mesures vérifiant (d), et était donc un L-idéal. D'après (b) $\mathcal{L}_C$ est l'idéal des mesures telles que $\hat{\mu}(\chi)=0$ pour tout $\chi \in \Lambda_C$, Λ_C étant l'ensemble des caractères de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ dont tout voisinage contient des caractères de profondeur arbitrairement grande. Ainsi $\mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}_I$.

D'autre part, d'après (e), pour tout $0<\varepsilon<1$, $\mathcal{L}_\varepsilon \subset \mathcal{L}_C$. Comme $\mathcal{L}_C$ est égal à son radical, $\mathrm{Rad}\mathcal{L}_{1/2} \subset \mathcal{L}_C$. On peut démontrer que ces deux inclusions sont strictes ([3] chap.IV).

6 - Comparaison des idéaux $\mathcal{L}_C$ et $\mathcal{L}_P$

Proposition 8 : On suppose que pour tout entier $n>0$, le sous-groupe nG de G est d'indice fini dans G. Soient $\mu \in M(G)$ et $\varepsilon>0$. Si $E(\mu,\varepsilon)$ contient des cubes de toutes dimensions, $E(\mu,\eta)$ contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues pour tout η, $0<\eta<\varepsilon$.

Démonstration : Soient $p>0$ un entier et $\delta>0$. Soit un entier $n>4\|\mu\|^2p^2/\delta^2$. Soient enfin $\phi_1,\dots,\phi_n$ des caractères de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, avec $|\hat{\mu}(\phi_1\dots\phi_n)|>\varepsilon$. On pose $\phi_0=1$ et $\phi=\phi_1\dots\phi_n$. Alors

$$\|\mu\| = \|\phi\mu\| + \sum_{k=0}^{n-1}\int(1-|\phi_{k+1}|_\mu)\,d|\phi_0\dots\phi_k\mu| .$$

Il existe donc un entier $k \in [0,n-1]$ avec

$$\int(1-|\phi_{k+1}|_\mu)\,d|\phi_0\dots\phi_k\mu| \leqslant \|\mu\|/n .$$

Alors

$$\int(1-|\phi_{k+1}|_\mu^2)\,d|\phi\mu| \leqslant 2\int(1-|\phi_{k+1}|_\mu)\,d|\phi\mu| \leqslant 2\|\mu\|/n .$$

Comme $|\phi_{k+1}|^2 \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, il existe $\gamma \in \Gamma\setminus\{1\}$ avec $\left|\int(1-\gamma)\,d|\phi\mu|\right| \leqslant 2\|\mu\|/n$. D'après l'hypothèse faite sur G, on peut supposer que l'ordre de γ dans Γ est supérieur à $2p+2$. Ecrivons

$$\left(\int|1-\gamma|\,d|\phi\mu|\right)^2 \leqslant \|\phi\mu\|\int|1-\gamma|^2\,d|\phi\mu| = \|\phi\mu\|.2\mathrm{Re}\int(1-\gamma)\,d|\phi\mu| .$$

De là

$$\int |1-\gamma|\, d|\phi\mu| < \delta/p.$$

Si q est un entier avec $|q| \leqslant p$

$$\left|\int (1-\gamma^q)\ d\phi\mu\right| \leqslant \int |1-\gamma^q|\, d|\phi\mu| \leqslant q.\int |1-\gamma|\, d|\phi\mu| < \delta,$$

donc $|\hat{\mu}(\phi\gamma^q)| > \varepsilon - \delta$. Comme $\phi \in \bar{\Gamma}$, il existe $\beta \in \Gamma$ avec $|\hat{\mu}(\beta\gamma^q)| > \varepsilon - \delta$ pour tout entier $q \in [-p,p]$. L'ensemble $\{\beta\gamma^q\ ; -p \leqslant q \leqslant p\}$ est une progression arithmétique de 2p+1 termes dans $E(\mu, \varepsilon-\delta)$.

<u>Corollaire</u> : Si pour tout entier $n > 0$, nG est d'indice fini dans G, $\mathcal{L}_P \subset \mathcal{L}_C$ et $\Lambda_P \supset \Lambda_C$.

<u>RÉFÉRENCES</u>

[1] GRAHAM R.L., ROTHSCHILD B.L. - A short proof of Van der Waerden's theorem on arithmetic progressions Proc. Amer. Math. Soc. 42-2 (1974) 385.

[2] HOST B., PARREAU F. - Mesures presque idempotentes et progressions arithmétiques. Note aux C.R.A.Sc. Paris t.287, 9-10 (1978).

[3] HOST B., PARREAU F. - Thèse (Université Paris-Nord, Villetaneuse, 1979).

[4] IZUCHI K. - On a certain L-ideal of the measure algebra. Coll. Math. 35-1.

[5] LOPEZ J.M., ROSS K.A. - Sidon sets. Lectures Notes. Marcel Dekker n°13 (1975).

[6] SZEMEREDI E. - On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Math. 27 (1975) 199.

[7] GRAHAM C. - Non-Sidon sets in the support of a Fourier-Stieltjes transform. Coll. Math. 36-2 (1976) 269-273.

CHAPITRE VIII

TOPOLOGIES SUR G

ET

SOUS-ALGÈBRES DE BOCHNER DE M(G)

Une partie de ce chapitre est consacrée à passer en revue un certain nombre de notions qui figurent de façon un peu hétéroclite dans la littérature, et le théorème 1 qui contient en particulier un résultat de DUNKL et RAMIREZ [3] et qui est illustré par le théorème 2 et le contrexemple de (10).

Dans la suite G désigne un groupe abélien localement compact non discret.

1 - Décompositions de M(G) et topologies sur G

1.1 - Considérons d'abord un L-sous-espace N de M(G). On sait que M(G) admet la décomposition en somme directe

$$M(G) = N \oplus N^{\perp} .$$

Toute mesure $\mu \in M(G)$ s'écrit ainsi

$$\mu = \mu_N + \mu_{N^{\perp}} .$$

Au sous-espace N on associe la forme linéaire $h \in M(G)'$ telle que

$$\int h d\mu = \int d\mu_N \qquad (\mu \in M(G))$$

$$h\mu = \mu_N \qquad (\mu \in M(G)) .$$

On a évidemment $h^2 = h$. Inversement toute forme linéaire h idempotente définit ainsi la projection $\mu \to \mu_N$ sur le L-sous-espace $N = hM(G)$ que

<u>nous noterons désormais</u> N_h.

1.2 - Dans le cas où N est une L-sous-algèbre et $N^{\perp}$ un L-idéal, le projecteur $\mu \to \mu_N$ est un homomorphisme d'algèbres et h est un caractère idempotent. Inversement pour tout caractère idempotent h, $\mu \to h\mu$ est un homomorphisme d'algèbres, N_h est une sous-algèbre et $N_h^{\perp}$ un idéal.

Naturellement N_h peut être une sous-algèbre sans que h soit un caractère. Par exemple : la L-sous-algèbre des mesures concentrées sur un sous-groupe fermé (ou simplement borélien).

1.3 - Dans la suite nous envisagerons les décompositions de M(G) liées à différentes topologies sur G.

G est muni d'une topologie de groupe localement compact τ_0 que nous appellerons topologie initiale. Soit τ une <u>topologie de groupe</u> sur G, plus fine que τ_0. Nous noterons G_τ le groupe G muni de la topologie τ. Nous écrirons souvent $G_{\tau_0} = G$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Désignons par $M(G_\tau)$ les mesures de M(G) concentrées à ε près sur les compacts de G_τ, ou encore concentrées sur les ensembles σ-compacts de G_τ. Dans le cas où τ est une topologie localement compacte $M(G_\tau)$ a bien sa signification usuelle.

$M(G_\tau)$ est une L-sous-algèbre de M(G). $M(G_\tau)^{\perp}$ est constitué des mesures $\mu \in M(G)$ telles que $|\mu|\,(K) = 0$ pour tout compact de G_τ. On vérifie immédiatement que c'est un idéal. En effet si $\mu \in M(G_\tau)^{\perp}$ et $\nu \in M(G)$, pour tout compact K de G_τ,

$$|\mu * \upsilon|\,(K) \leqslant |\mu| * |\upsilon|\,(K) = \int |\mu|\,(K-x)\; d|\upsilon|\,(x) = 0.$$

Ainsi, à la décomposition

$$M(G) = M(G_\tau) \oplus M(G_\tau)^{\perp}$$

correspond un caractère idempotent que nous noterons h_τ. A la topologie discrète et à la décomposition classique en mesures discrètes et mesures continues correspond le caractère idempotent noté h_d.

2 - Topologies localement compactes

2.1 - Nous allons envisager toutes les topologies τ de groupe localement compact sur G, plus fines que la topologie initiale τ_o.

(2.1.1) Remarque : Il n'existe pas sur G de topologie τ strictement plus fine que τ_o et pour laquelle G_τ soit σ-compact. En effet dans ce cas G_{τ_o} est réunion dénombrable de compacts de G_τ et il existe donc un compact de G_τ d'intérieur non vide dans G_{τ_o}. Et comme les topologies τ et τ_o coïncident sur les compacts de G_τ, nécessairement $\tau=\tau_o$.

Soit H un sous-groupe engendré par un voisinage compact de l'identité dans G_τ ; H est ouvert dans G_τ. Les différentes topologies peuvent donc être définies en considérant, parmi tous les sous-groupes H de G, de générateur compact, ceux qui admettent une topologie de groupe localement compact τ plus fine que la topologie initiale et en munissant G de la topologie de groupe pour laquelle H_τ est un sous-groupe ouvert.

2.2 - On peut donner des topologies localement compactes plus fines que τ_o, une description plus concrète, en utilisant un théorème de structure. On sait [14] que tout groupe abélien localement compact contient un sous-groupe ouvert topologiquement isomorphe à $\mathbb{R}^k \times K$, où K est un groupe compact. La topologie de K sera nécessairement la topologie initiale. On peut donc construire toutes les topologies localement compactes plus fines que τ_o , comme on l'indique en (2.1), en considérant tous les sous-groupes H de G, qui sont produits d'un sous-groupe compact et d'un sous-groupe à k paramètres et en munissant ce dernier de sa topologie naturelle.

Exemples

(2.2.1) Si $G = \mathbb{R}$, on a nécessairement $K = \{0\}$ et $k \leqslant 1$. Pour $k = 1$ on obtient la topologie initiale et pour $k = 0$ la topologie discrète.

(2.2.2) Si $G = \mathbb{T}$, on a nécessairement $k = 0$. Si $K = \mathbb{T}$ on obtient la topologie initiale et si K est un sous-groupe fini, on obtient la topologie discrète.

(2.2.3) On peut caractériser facilement les groupes G pour lesquels la seule topologie localement compacte strictement plus fine que la topologie initiale est la topologie discrète : ce sont les groupes G qui ont un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{Z}_p$ (groupe des entiers p-adiques) [13]. On trouvera aussi dans [13] la liste des groupes qui n'ont qu'un nombre fini de topologies localement compactes plus fines que la topologie initiale. Dans le cas contraire il y a une infinité non dénombrable de topologies. C'est le cas, en particulier, si G contient $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{T}^2$, ou un groupe compact du type de Cantor.

(2.2.4) Si $G = \mathbb{T}^n$, on vérifiera aisément que les différentes topologies peuvent s'obtenir en considérant tous les "enroulements" possibles de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{T}^n$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, c'est-à-dire tous les sous-groupes H de $\mathbb{T}^n$ qui sont images d'un homomorphisme algébrique de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{T}^n$.

3 - Les topologies τ_H

3.1 - Tout sous-groupe H fermé dans G_{τ_0}, est un groupe localement compact pour la topologie initiale. Il existe donc sur G une topologie localement compacte τ qui induit sur H la topologie initiale et pour laquelle H est un sous-groupe ouvert. Cette topologie uniquement déterminée par H sera notée τ_H. Evidemment si H était initiale-ment ouvert dans G_{τ_o}, on aura $\tau_H = \tau_o$. On peut donc se limiter à considérer les sous-groupes H fermés non ouverts.

Dans beaucoup de questions [7] [12] [20] seules interviennent les topologies localement compactes τ_H ; mais on n'obtient pas ainsi toutes les topologies localement compactes.

3.2 - Pour tout sous-groupe H, non nécessairement fermé, on peut définir de la même manière une topologie τ_H. C'est une topologie de groupe qui n'est pas en général localement compacte. Cependant si H est σ-compact, τ_H est localement σ-compacte.

3.3 - Soit τ une topologie de groupe localement compact sur G plus fine que τ_o et soit H le sous-groupe engendré par un voisinage compact de l'identité dans G_τ. On remarque que les groupes H_τ et H_{τ_o} ont les mêmes parties σ-compactes, car toute partie τ_o-compacte est fermée donc σ-compacte dans H_τ. Par conséquent $M(H_\tau) = M(H_{\tau_o})$ et comme H est ouvert dans G_τ, on en conclut :

(3.3.1) $M(G_\tau)$ est l'ensemble des mesures de M(G) concentrées sur les réunions dénombrables de classes modulo H. $M(G_\tau)^\perp$ est l'ensemble des mesures $\mu \in M(G)$ telles que $|\mu|(x+H) = 0$ pour tout $x \in G$.

(3.3.2) <u>Remarque</u> : $M(G_\tau)$ ne dépend en fait que de H. De façon plus précise on peut reformuler (3.3.1) en disant que $M(G_\tau) = M(G_{\tau_H})$. Cette propriété reste d'ailleurs valable pour toute topologie de groupe τ plus fine que τ_o et pour laquelle H est σ-compact.

De ce point de vue il est naturel de considérer simultanément toutes les topologies τ_H associées aux sous-groupes H σ-compacts de G (non nécessairement fermés).

4 - <u>Différentes notions de continuité forte</u>

4.1 - Il y a plusieurs généralisations possibles de la notion de mesure continue. La plus naturelle, peut-être, consiste à poser la définition suivante.

<u>Définition 1</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est <u>fortement continue</u> si $\mu \perp M(G_\tau)$ (ou, de façon équivalente $h_\tau \mu = 0$) pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G, strictement plus fine que la topologie initiale (cf chap.IV-(7.2))

Mais, dans beaucoup de questions, notamment tous les problèmes relatifs aux mesures idempotentes, quasi-idempotentes, ε-idempotentes, les seules topologies localement compactes qui interviennent sont les topologies τ_H définies, comme on l'explique en (3.1), à l'aide d'un sous-groupe fermé H de G. Il peut y avoir intérêt à remplacer la définition 1 par la suivante, moins exigeante, compte tenu de (3.3.1).

<u>Définition 2</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est <u>fortement continue</u>, si $|\mu|(x+H) = 0$, pour tout sous-groupe fermé non ouvert H de G et pour tout $x \in G$ (cf chap.II-(8.5)).

(4.1.1) <u>Remarque</u> : Si on suppose que H est fermé non ouvert, nécessairement H est d'indice infini dans G. Inversement un sous-groupe d'indice infini ne peut pas être ouvert si G est compact. Mais si G n'est pas compact, on peut avoir un sous-groupe ouvert d'indice infini (par exemple si $G = \mathbb{T} \times \mathbb{Z}$). Par conséquent, si G est compact, on peut remplacer dans la définition 2, "fermé non ouvert" par "fermé d'indice infini" et retrouver ainsi la définition de continuité forte donnée dans [20] [21]. Mais dans le cas général ceci conduirait à une notion trop restrictive (par exemple, dans le groupe $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ il n'y aurait aucune mesure fortement continue non nulle).

4.2 - Enfin, compte tenu de la remarque (3.3.2), on peut envisager encore une autre définition de continuité forte, beaucoup plus restrictive que la définition 1.

<u>Définition 3</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est très <u>fortement continue</u> si $|\mu|(x+H) = 0$ pour tout sous-groupe H σ-compact d'intérieur vide, et pour tout $x \in G$.

L'hypothèse faite sur H signifie simplement que H est non ouvert, donc que $\tau_H \neq \tau_o$. Il est équivalent de dire que H est de mesure de Haar nulle. Toute mesure de $M(G_{\tau_H})$ a alors ses puissances de convolution singulières, donc $M(G_{\tau_H})^{\perp}$ contient Rad $L^1(G)$ (cf chap.IV, prop.8) ; par conséquent :

(4.2.1) Toute mesure de Rad $L^1(G)$ est très fortement continue. Mais il existe des mesures très fortement continues qui ne sont pas dans $M_o(G)$ et dont les puissances sont indépendantes. Pour s'en convaincre, reformulons la définition 3.

<u>Proposition 1</u> : Une mesure $\mu \in M(G)$ est très fortement continue si et seulement si pour tout compact symétrique K tel que $|\mu|(K) > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel $m(K^{(n)}) > 0$, où $K^{(n)} = K + \ldots + K$ (n fois).

<u>Démonstration</u> : La condition est nécessaire : en effet, si $|\mu|(K) > 0$, le sous-groupe H engendré par K est nécessairement de mesure de Haar non nulle. Inversement, si la condition est satisfaite , soit H un sous-groupe σ-compact et $x \in G$ tels que $|\mu|(x+H) > 0$. Il existe un compact $K \subset x+H$ tel que $|\mu|(K) > 0$ et $m((K \cup -K)^{(n)}) > 0$ pour un entier $n \geq 1$. Comme $(K \cup -K)^{(n)} \subset \bigcup_{|k| \leq n} (kx+H)$ on en conclut que $m(H) > 0$.

(4.2.2) <u>Exemple</u> : Prenons $G = \mathbb{R}$ et $\mu = \mathop{*}\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta+\delta_{3^{-n}})$. Le résultat de [16] montre que, pour tout compact K tel que $\mu(K) > 0$ on a $m(K+K) > 0$. On en déduit que μ est très fortement continue (déf.3). (On sait que μ n'est pas dans $M_o(G)$ et a ses puissances de convolution indépendantes [2]). Ce résultat s'étend à toute une classe de mesures de

Bernoulli.

5 - Systèmes de Raikov et topologies τ_H

5.1 - Dans un souci de cohérence, nous allons expliquer brièvement comment situer ce qui précède dans le contexte des systèmes de Raikov.

Définition : Un ensemble $\mathcal{R}$ de parties σ-compactes de G, héréditaire dans la classe des parties σ-compactes, est un système de Raikov s'il est stable par réunion dénombrable, par somme et par translation. sera dit symétrique si, de plus il est stable pour l'inverse.

Remarques et exemples :

(5.1.1) Un système de Raikov non vide est dit propre s'il est distinct de l'ensemble de toutes les parties σ-compactes de G. Pour que $\mathcal{R}$ soit propre, il faut et il suffit que tout élément de $\mathcal{R}$ soit d'intérieur vide, ou, de façon équivalente que tout élément de $\mathcal{R}$ soit de mesure de Haar nulle.

(5.1.2) Etant donné un ensemble quelconque $\mathcal{E}$ de parties σ-compactes de G, il existe un plus petit système de Raikov (resp. système de Raikov symétrique) contenant $\mathcal{E}$, qu'on appelle système de Raikov (resp. système de Raikov symétrique) engendré par $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{R}$ admet une famille finie ou dénombrable de générateur $(F_j)_{j\geqslant 1}$, il est aussi engendré par $F = \bigcup_{j\geqslant 1} F_j$. Par conséquent, ou bien un système de Raikov a un générateur unique, ou bien toute famille de générateurs est non dénombrable. Pratiquement on n'a de résultats intéressants que dans le premier cas.

(5.1.3) Tout système de Raikov peut être évidemment inclus dans un système symétrique. Mais HAIGHT [6] a montré qu'il existe dans $\mathbb{R}$ un un système de Raikov asymétrique à un générateur qui ne peut pas être inclus dans un système symétrique propre. Ceci résulte de l'existence d'un compact K tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $K + K + \ldots + K$ (n fois) soit de mesure de Lebesgue nulle tandis-que $K - K$ contient un intervalle. Nous citons ici ce résultat pour l'intérêt du lecteur, mais dans le présent chapitre n'interviennent que des systèmes de Raikov symétriques.

5.2 - Systèmes de Raikov symétriques à un générateur

Pour toute topologie τ de groupe topologique, sur G, plus fine que la topologie initiale, il est clair que les parties σ-compactes pour τ forment une famille stable par réunion dénombrable, somme, translation et inverse. De plus toute partie τ_0-compacte d'un ensemble τ-compact est τ-compacte. On a donc bien un système de Raikov.

Proposition 2 : Tout système de Raikov symétrique à un générateur est la famille des parties σ-compactes d'une topologie τ_H, où H est un sous-groupe σ-compact de G, et réciproquement.

Démonstration : La proposition est à peu près évidente, car, si $\mathcal{R}$ est un système de Raikov symétrique engendré par une partie σ-compacte F, il est aussi engendré par $H = Gp(F)$. De façon précise, il est constitué des réunions finies ou dénombrables de classes modulo H, ainsi que de leurs parties σ-compactes. Or tout ensemble compact pour τ_H est contenu dans une réunion finie de classes modulo H.

(5.2.1) Remarque : Dans le cas d'un groupe G métrisable, tout système de Raikov à un générateur, admet un générateur compact (cf [19] dans le cas où $G = \mathbb{R}$) et le sous-groupe H de la proposition 2 peut être pris à générateur compact.

5.3 - Décomposition associée à un système de Raikov

A tout système de Raikov $\mathcal{R}$ correspond une décomposition de l'algèbre M(G) en somme directe d'une L-sous-algèbre et d'un L-idéal. Désignons par $A_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des mesures qui sont concentrées sur un ensemble σ-compact du système $\mathcal{R}$. Si μ est concentrée sur $E \in \mathcal{R}$, toute mesure $\nu \ll \mu$ est concentrée sur E ; $A_{\mathcal{R}}$ est donc un L-espace. C'est aussi une algèbre puisque $\mathcal{R}$ est stable par somme. Enfin $A_{\mathcal{R}}$ est fermée car la limite d'une suite de mesures $\mu_n \in A_{\mathcal{R}}$ est absolument continue par rapport à $\Sigma\, 2^{-n}|\mu_n| / \|\mu_n\|$ qui est aussi dans $A_{\mathcal{R}}$ parce que $\mathcal{R}$ est stable par réunion dénombrable. Une mesure μ est orthogonale à $A_{\mathcal{R}}$ si et seulement si $|\mu|(E) = 0$ quel que soit $E \in \mathcal{R}$. $I_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}}^{\perp}$ est un idéal. En effet si $\mu \in I_{\mathcal{R}}$, $\nu \in M(G)$ et $E \in \mathcal{R}$,

$$|\mu * \nu|(E) \leqslant |\mu| * |\nu|(E) = \int |\mu|(E-x)\, d|\nu|(x) = 0$$

parce que $\mathcal{R}$ est stable par translation.

En particulier, pour un système de Raikov à un générateur, la proposition 2 montre que $A_{\mathcal{R}}$ n'est autre que $M(G_{\tau_H})$. Ainsi le formalisme des systèmes de Raikov apparaît comme une généralisation naturelle des topologies τ_H. Mais on n'a guère de résultats intéressants dans le cas général.

6 - Formes linéaires continues pour la norme $\|\hat{\mu}\|_\infty$

Convenons de noter, dans la suite, pour toute mesure $\mu \in M(G)$,

$$\|\hat{\mu}\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |\hat{\mu}(\gamma)| = \sup_{\chi \in \overline{\Gamma}} |\hat{\mu}(\chi)|$$

6.1 - Un vieux résultat d'EBERLEIN établit que la partie discrète μ_d d'une mesure μ vérifie

$$\|\hat{\mu}_d\|_\infty \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty$$

Autrement dit le caractère idempotent h_d a la propriété

$$\|(h_d\mu)\hat{}\,\|_\infty \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty \quad ;$$

il définit une projection continue pour la norme $\|\hat{\mu}\|_\infty$. Ce résultat a été généralisé par DUNKL et RAMIREZ [3] pour tout idempotent h_τ associé à une topologie τ localement compacte, plus fine que la topologie initiale (1.3). Une démonstration simplifiée en a été donné par GLICKSBERG [5] pour le cas particulier des topologies localement compactes τ_H (3.1). Une autre démonstration du théorème de DUNKL et RAMIREZ est donnée par B. HOST et F. PARREAU dans [7]. On trouvera dans le présent chapitre encore une autre démonstration de ce résultat comme corollaire du théorème 1.

Proposition 3 : Pour un caractère idempotent h de M(G), les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $h \in \bar{\Gamma}$

b) $(h\mu)\hat{}(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$ $\quad (\mu \in M(G))$

c) $\|(h\mu)\hat{}\|_\infty \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty$ $\quad (\mu \in M(G))$

d) $|\hat{\mu}(h)| \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty$ $\quad (\mu \in M(G))$

Démonstration : On passe de (a) à (b) en remarquant simplement que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $(h\mu)\hat{}(\gamma) = \hat{\mu}(h\gamma)$ il est évident que (b) implique (c) et (c) implique (d). Enfin la propriété (d) implique que le caractère h est dans $\bar{\Gamma}$. En effet pour toute mesure μ et tout caractère $\chi \in \bar{\Gamma}$, $\bar{\hat{\mu}}(\chi) = \hat{\bar{\mu}}(\chi)$. Les restrictions à $\bar{\Gamma}$ des transformées de Gelfand de mesures de M(G) constituent donc une sous-algèbre symétrique dense de $C(\bar{\Gamma})$. La propriété (d) montre que h se prolonge en un caractère de $C(\bar{\Gamma})$. Ainsi il existe $h' \in \bar{\Gamma}$ tel que $\hat{\mu}(h') = \hat{\mu}(h)$ pour toute mesure $\mu \in M(G)$; autrement dit $h = h'$.

Le théorème de DUNKL et RAMIREZ revient à dire que, pour toute topologie localement compact τ, h_τ est dans $\bar{\Gamma}$. Il est naturel de se demander si ce résultat s'étend aux topologies τ_H non localement compactes (3.2). Plus généralement nous allons étudier les L-sous-algèbres N_h dont le projecteur h est tel que $\|(h\mu)\hat{}\|_\infty \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty$.

6.2 - Considérons les formes linéaires $\phi \in M(G)'$ telles que

(6.2.1) $\left|\int \phi \, d\mu\right| \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty \qquad (\mu \in M(G))$

(6.2.2) $\|(\phi\mu)^\wedge\|_\infty \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty \qquad (\mu \in M(G))$.

Les propriétés (6.2.1) et (6.2.2) sont équivalentes : en effet, on passe de (6.2.1) à (6.2.2) en écrivant, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$|(\phi\mu)^\wedge(\gamma)| = \left|\int \phi \, d(\gamma\mu)\right| \leqslant \|(\gamma\mu)^\wedge\|_\infty = \|\hat{\mu}\|_\infty .$$

On peut représenter ces formes linéaires par des mesures sur $\bar{\Gamma}$. Les restrictions à $\bar{\Gamma}$ des transformées de Gelfand $\hat{\mu}$ des mesures $\mu \in M(G)$, constituent, comme nous l'avons déjà dit, une sous-algèbre symétrique dense de $C(\bar{\Gamma})$. Toute forme linéaire $\phi \in M(G)'$, continue pour la norme $\|\hat{\mu}\|_\infty$ se prolonge de façon unique à $C(\bar{\Gamma})$. Il existe donc une mesure de Radon bornée sur $\bar{\Gamma}$, $\sigma = \sigma_\phi$ unique, telle que

(6.2.3) $\int \phi \, d\mu = \int_{\bar{\Gamma}} \hat{\mu}(\chi) \, d\sigma(\chi) \qquad (\mu \in M(G))$

(6.2.4) $\phi\mu = \int_{\bar{\Gamma}} \chi\mu \, d\sigma(\chi) \qquad (\mu \in M(G))$,

où la dernière intégrale est une intégrale faible dans $M(G)$. Pour établir (6.2.4) il suffit de remarquer que les polynômes trigonométriques sont denses dans $M(G)'$ et de vérifier, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$(\phi\mu)^\wedge(\gamma) = \int \phi \, d(\gamma\mu) = \int (\gamma\mu)^\wedge(\chi) \, d\sigma(\chi) = \int (\chi\mu)^\wedge(\gamma) \, d\sigma(\chi).$$

Dans la suite on adopte la notation

(6.2.5) $\phi = \int \chi \, d\sigma(\chi)$.

Inversement, pour toute mesure de Radon bornée σ sur $\bar{\Gamma}$, (6.2.3) définit une forme linéaire $\phi = \phi_\sigma$ continue pour la norme $\|\hat{\mu}\|_\infty$. L'application $\sigma \to \phi_\sigma$ est une bijection continue de l'espace $M(\bar{\Gamma})$ des mesures bornées sur $\bar{\Gamma}$, avec la topologie vague, sur le sous-espace de $M(G)'$ constitué des formes linéaires continues pour la norme $\|\hat{\mu}\|_\infty$, avec la topologie faible de $M(G)'$.

(6.2.6) <u>Remarque</u> : Soit ϕ une forme linéaire continue pour la norme

$\|\hat{\mu}\|_\infty$ et χ_0 un élément de $\bar{\Gamma}$. La mesure $\sigma_{\chi_0\phi}$ est l'image de σ_ϕ par la translation $\chi \to \chi_0\chi$. En effet, pour toute mesure $\mu \in M(G)$,

$$\int (\chi_0\phi)d\mu = \int \phi \, d(\chi_0\mu) = \int (\chi_0\mu)\hat{}\,(\chi) \, d\sigma_\phi(\chi) = \int \hat{\mu}(\chi_0\chi) \, d\sigma_\phi(\chi)$$

6.3 - $\hat{\Gamma}$ enveloppe convexe fermée de Γ dans $M(G)'$

$\hat{\Gamma}$ est aussi l'ensemble des formes linéaires ϕ qui s'écrivent $\phi = \int \chi \, d\sigma(\chi)$, où σ est une mesure de probabilité sur $\bar{\Gamma}$. En effet, il est clair que les éléments de l'enveloppe convexe fermée de Γ sont des formes linéaires continues en norme $\|\hat{\mu}\|_\infty$, et il est équivalent de dire que ϕ est limite de combinaisons convexes $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \gamma$ ou que σ_ϕ est limite vague de mesures $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \delta_\gamma$. De plus toute mesure de probabilité sur $\bar{\Gamma}$ est une limite vague de telles mesures. Remarquons que $\hat{\Gamma}$ est un compact de $M(G)'$ et qu'il en est de même de $\hat{\Gamma}_+$ ensemble des éléments positifs de $\hat{\Gamma}$.

Proposition 5 : Soit N_h une sous-algèbre de $M(G)$, de projecteur $h \neq 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $h \in \hat{\Gamma}$

b) $(h\mu)\hat{}\,(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$ $\quad (\mu \in M(G))$

c) $\|(h\mu)\hat{}\,\|_\infty \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty$ $\quad (\mu \in M(G))$

d) $\left|\int h \, d\mu\right| \leqslant \|\hat{\mu}\|_\infty$ $\quad (\mu \in M(G))$

Démonstration : Nous nous contenterons de montrer que (d) implique (a), les autres implications étant à peu près évidentes, comme pour la proposition 4. Si on suppose (d) la forme linéaire h s'écrit $h = \int \chi \, d\sigma(\chi)$ où σ est une mesure de masse $\leqslant 1$; on a même $\int d|\sigma| = 1$ puisqu'il existe une mesure $\mu \neq 0$ telle que $h\mu = \mu$. Il s'agit de montrer que $\sigma > 0$. Pour toute mesure de probabilité $\mu \in N_h$, $1 = \int \hat{\mu}(\chi)d\sigma(\chi)$ et comme $|\hat{\mu}(\chi)| \leqslant 1$, nécessairement

(6.3.1) $\qquad \hat{\mu}(\chi)\sigma = |\sigma|$

L'égalité (6.3.1) écrite pour μ et μ^2 prouve que

$$\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}^2(\chi) = 1 \qquad \sigma\text{-pp.}$$

et donc que $\sigma = |\sigma|$.

(6.3.2) <u>Notations</u> : Γ_h, Γ_h^h.

Pour tout idempotent $h \in M(G)'$, nous noterons Γ_h le groupe des éléments $\chi \in M(G)'$, de module $|\chi| = h$, qui s'écrivent $\chi = h\chi'$ avec $\chi' \in \bar{\Gamma}$. Sur Γ_h topologie forte et topologie faible coïncident et Γ_h est un groupe topologique. Dans le cas où $h \in \bar{\Gamma}$, Γ_h n'est autre que le groupe des caractères $\chi \in \bar{\Gamma}$ de module $|\chi| = h$. On retrouve la notation utilisée dans [7] [12] et le chapitre IV-(7.2).

Pour deux idempotents h et h' de $M(G)'$ tels que $h \leqslant h'$, nous noterons $\Gamma_{h'}^h$ le sous-groupe de $\Gamma_{h'}$ constitué des $\chi \in \Gamma_{h'}$ tels que $\chi h = h$.

(6.3.3) <u>Remarque</u> : Etant donné un idempotent h de $M(G)'$, le semi-groupe des caractères $\chi \in \bar{\Gamma}_+$ tels que $\chi \geqslant h$, ou de façon équivalente $\chi h = h$, est un compact de $\bar{\Gamma}$; il possède un élément minimal unique et idempotent h'. $\Gamma_{h'}^h$ est un groupe compact dans $\bar{\Gamma}$. On vérifie en effet qu'il est fermé. Soit χ un élément de $\bar{\Gamma}$ qui est adhérent à $\Gamma_{h'}^h$. Evidemment $\chi h = h$ et $|\chi| \leqslant h'$. Si on avait $|\chi| \neq h'$, nécessairement $|\chi| < h'$ et $|\chi|^2$ serait un élément de $\bar{\Gamma}_+$ tel que $h \leqslant |\chi|^2 < h'$, ce qui contredirait la minimalité de h'. Avec cette définition de $\Gamma_{h'}^h$, nous pouvons énoncer :

<u>Proposition 6</u> : Soit h un élément idempotent de $\hat{\Gamma}$.

a) σ_h est la mesure de Haar du groupe compact $\Gamma_{h'}^h$;

b) N_h est une algèbre.

<u>Démonstration</u> : Ecrivons $h = \int \chi \, d\sigma(\chi)$ où $\sigma = \sigma_h$ est une mesure de probabilité sur $\bar{\Gamma}$. Pour toute mesure de probabilité $\mu \in N_h$, $1 = \int \hat{\mu}(\chi) d\sigma(\chi)$ ce qui montre que, en tout point χ du support de σ, on a $\hat{\mu}(\chi) = 1$ ou de façon équivalente $\chi\mu = \mu$. Le support de σ est donc contenu dans

l'ensemble des $\chi \in \bar{\Gamma}$ tels que $\chi h = h$. Par la remarque (6.2.6) σ est invariante par translation par tout caractère $\chi \in \bar{\Gamma}$ tel que $\chi h = h$. Ceci prouve d'une part que σ est portée par le groupe Γ_h^h, car elle est égale à son image par la translation $\chi \to \chi h'$, d'autre part que c'est la mesure de Haar de ce groupe compact. Montrons enfin que (a) implique (b). Pour toute mesure $\mu \in N_h$ et pour tout caractère χ appartenant au support de σ, $\chi\mu = \chi h\mu = h\mu = \mu$. Pour μ, $\nu \in N_h$,

$$h(\mu * \nu) = \int \chi(\mu * \nu)\, d\sigma(\chi) = \int (\chi\mu) * (\chi\nu)\, d\sigma(\chi) = \mu * \nu .$$

Donc $\mu * \nu \in N_h$; N_h est une algèbre.

7 - Algèbres de Bochner

7.1 - Soit N_h une L-sous-algèbre de M(G). On note $\hat{N}_h$ l'algèbre des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures de N_h. On supposera dans la suite que $\hat{N}_h$ sépare les points de Γ (c'est le cas en particulier, si N_h contient les mesures discrètes). On associe à $\hat{N}_h$ la topologie $\hat{\tau}_h$ qu'elle détermine sur Γ, c'est-à-dire la moins fine qui rende continues les fonctions de $\hat{N}_h$. On vérifie sans peine que c'est exactement la topologie induite par celle de Δ (ou de Γ_h) lorsqu'on identifie Γ à son image par l'injection $\gamma \to h\gamma$. La topologie $\hat{\tau}_h$ est plus faible que la topologie initiale de Γ, mais c'est une topologie de groupe, car Γ_h est un groupe topologique (6.3.2).

(7.1.1) Exemple : Si $h = h_\tau$ est l'idempotent associé à une topologie τ de groupe localement compact (1.3), $N_h = M(G_\tau)$ et $\hat{\tau}_h$ n'est autre que la trace sur Γ de la topologie de $\hat{G}_\tau$ par le plongement naturel de Γ dans $\hat{G}_\tau$. On sait alors que toute fonction de type positif sur Γ continue pour cette topologie, se prolonge en une fonction de type positif continue sur $\hat{G}_\tau$. C'est donc, d'après le théorème de Bochner, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure positive de $M(G_\tau)$. Nous allons voir que d'autres sous-algèbres de M(G) possèdent cette propriété.

Définition : Une L-sous-algèbre N_h de M(G) est une algèbre de Bochner si toute fonction de type positif sur Γ, continue pour la topologie $\hat{\tau}_h$, appartient à $\hat{N}_h$.

Nous allons établir le résultat suivant que l'on peut compléter par la proposition 5.

Théorème 1 : Une L-sous-algèbre N_h est une algèbre de Bochner, si et seulement si h est dans $\widehat{\Gamma}$.

Comme conséquence immédiate du th.1, nous obtenons le résultat de DUNKL et RAMIREZ déjà cité en (6.1) et énoncé au chapitre IV (théorème 5).

Corollaire [3] : Pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, l'idempotent h_τ est dans $\overline{\Gamma}$.

7.2 - Montrons d'abord que, si $h \in \widehat{\Gamma}$, N_h est une algèbre de Bochner. Toute fonction $f(\gamma)$ de type positif sur Γ, continue pour la topologie $\hat{\tau}_h$, est aussi continue pour la topologie initiale et s'écrit donc $f(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)$, où μ est une mesure positive de M(G). Il s'agit de vérifier que $h\mu = \mu$. Or d'après la proposition 6, h s'écrit

$$h = \int_{\substack{\chi \in \overline{\Gamma} \\ \chi h = h}} \chi \, d\sigma(\chi) .$$

Il suffit donc de vérifier $\chi\mu = \mu$ pour tout caractère $\chi \in \overline{\Gamma}$ tel que $\chi h = h$. Soit γ_α une suite généralisée d'éléments de Γ qui converge vers χ tel que $\chi h = h$. Alors $h\gamma_\alpha$ tend vers h ; autrement dit γ_α tend vers 1 pour la topologie $\hat{\tau}_h$. Ainsi l'égalité

$$f(\gamma_\alpha \gamma) = \hat{\mu}(\gamma_\alpha \gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

donne à la limite

$$f(\gamma) = \hat{\mu}(\chi\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

ou encore

$$\hat{\mu}(\gamma) = (\chi\mu)\hat{}\,(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

d'où $\mu = \chi\mu$ ce qui termine la démonstration.

7.3 - Soit N_h une L-sous-algèbre de M(G). Considérons le semi-groupe des $\phi \in \hat{\Gamma}_+$ tels que $\phi \geqslant h$ ou, de façon équivalente, tels que $\phi h = h$ c'est un compact pour la topologie faible de M(G)' ; il possède donc un élément minimal (unique) h' qui est idempotent car $h'^2 \leqslant h'$. On sait (prop.6) que $N_{h'}$ est une algèbre qui est de Bochner d'après (7.2). Avec cette définition de h' on peut énoncer en toute généralité :

<u>Proposition 7</u> : $N_{h'}$ détermine sur Γ la même topologie que N_h (autrement dit $\hat{\tau}_{h'} = \hat{\tau}_h$).

<u>Démonstration</u> : Soit γ_α une suite généralisée d'éléments de Γ, telle que $h\gamma_\alpha$ tend vers h. Il s'agit de montrer que $h'\gamma_\alpha$ tend vers h'. Dans le cas contraire, il existe une valeur d'adhérence χ de γ_α telle que $h\chi = h$, mais $h'\chi \neq h'$. On aura cependant $h'|\chi| = h'$ sans quoi $h \leqslant h'|\chi|^2 < h'$ et comme $h'|\chi|^2 \in \hat{\Gamma}_+$, h' ne serait pas minimal. On utilise alors le lemme suivant.

<u>Lemme</u> : Soit M un L-sous-espace de M(G). Soit $\phi \in M'$ tel que $|\phi|^2 = |\phi|$ mais $|\phi| \neq \phi$. Alors $\frac{1}{2}(\phi + \bar{\phi}) < |\phi|$.

Ici on utilise le lemme avec $\phi = h'\chi$ et on en conclut que $\Psi = \frac{1}{2}\, h'(\chi + \bar{\chi})$ est tel que $\Psi < h'$. D'autre part il est clair que $\Psi \in \hat{\Gamma}$ et que $\Psi h = h$. Soit $\Psi' = \frac{1}{2}(h' + \Psi)$, on vérifie que Ψ' est dans $\hat{\Gamma}_+$ et tel que $h \leqslant \Psi' < h'$ ce qui dément la minimalité de h' et fournit une contradiction.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Quitte à remplacer l'espace M par le L-sous-espace $|\phi|M$, on peut se ramener au cas où $|\phi| = 1$ mais $\phi \neq 1$. Si on avait $\frac{1}{2}(\phi + \bar{\phi}) = 1$, cela signifierait que, pour toute mesure $\mu \in M, \frac{1}{2}(\phi_\mu + \bar{\phi}_\mu) = 1$ avec $|\phi_\mu| = 1$, d'où l'on concluerait que $\phi_\mu = 1$, donc que $\phi = 1$.

Fin de la démonstration du théorème 1 :

On a déjà vu en (7.2) que, si $h \in \hat{\Gamma}$, N_h est une algèbre de Bochner ; on déduit la réciproque de la proposition 7. En effet, supposons que N_h est de Bochner. Soit μ une mesure positive de $N_{h'}$. La fonction $\hat{\mu}(\gamma)$ est de type positif sur Γ, continue pour $\hat{\tau}_{h'}$ donc pour $\hat{\tau}_h$; c'est la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure de N_h. On en conclut que $\mu \in N_h$ et donc que $N_h = N_{h'}$, ou encore que $h = h'$.

7.4 - Remarques : Dans le cas général, soit N_h une L-sous-algèbre quelconque. On peut lui associer la L-sous-algèbre $N_{h'}$ définie comme on l'explique en (7.3).

(7.4.1) $N_{h'}$ est la plus petite algèbre de Bochner contenant N_h. En effet soit $N_{h'_1}$ une algèbre de Bochner contenant N_h. On aura évidemment $h'_1 \geq h$ et, d'après le th1, $h'_1 \in \hat{\Gamma}$. Puisque h' est minimal, nécessairement $h' \leq h'_1$, c'est-à-dire $N_{h'} \subset N_{h'_1}$.

(7.4.2) $N_{h'}$ est la plus grande L-sous-algèbre contenant N_h et définissant sur Γ la même topologie que N_h. En effet soit N_{h_1} une L-sous-algèbre ayant cette propriété. Soit μ une mesure positive de N_{h_1}. La fonction $\hat{\mu}(\gamma)$ de type positif sur Γ est continue pour la topologie $\hat{\tau}_{h_1} = \hat{\tau}_h$. D'après la proposition 7, $\hat{\tau}_h = \hat{\tau}_{h'}$, et, puisque $N_{h'}$ est de Bochner (7.2) $\hat{\mu}(\gamma)$ est la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure de $N_{h'}$, autrement dit $\mu \in N_{h'}$. On en conclut que $N_{h_1} \subset N_{h'}$.

8 - Mesures et ensembles de Dirichlet

8.1 - La notion de mesure de Dirichlet définie au chapitre II-(2.3) est étroitement liée à celle d'ensemble de Dirichlet, introduite antérieurement par divers auteurs [8] [10] [11].

Définition 6 : Un sous-ensemble borélien E de G, est un ensemble de Dirichlet faible si, pour toute mesure positive $\mu \in M(G)$, concentrée sur E, il existe une suite de caractères γ_n tendant vers l'infini dans Γ, qui converge en mesure vers 1, c'est-à-dire telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x ; |\gamma_n(x) - 1| > \varepsilon\}) = 0$. E est de Dirichlet (fort) si on exige que γ_n converge uniformément dans E.

(8.1.1) Remarques :

On vérifie aisément qu'on peut remplacer dans la définition 6, la convergence en mesure par la convergence dans $L^1(\mu)$, ou par la convergence $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ ou par la convergence μ-presque-partout, ou encore par la convergence uniforme, pour tout $\varepsilon > 0$, sur un sous-ensemble de mesure $\geqslant \|\mu\| - \varepsilon$. En particulier si E est un ensemble de Dirichlet faible et μ une mesure concentrée sur E, pour tout $\varepsilon > 0$, E contient un ensemble de Dirichlet fort de mesure $\geqslant \|\mu\| - \varepsilon$.

(8.1.2) D'autre part T. KÖRNER a remarqué dans [11], que pour un sous-ensemble A fermé, la notion d'ensemble de Dirichlet faible recouvre exactement la notion classique d'ensemble de convergence absolue (cf [9]).

Proposition 8 : Une mesure $\mu \in M(G)$ est de Dirichlet si et seulement si elle est concentrée sur un ensemble de Dirichlet faible.

Démonstration : Une mesure $\mu \in M(G)$ est de Dirichlet si et seulement si il existe une suite de caractères de G, tendant vers l'infini dans Γ et vers 1 dans $L^1(\mu)$ (cf chap.II-(2.3)). Pour tout entier $k \geqslant 1$ on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément (vers 1) sur un compact A_k tel que $|\mu|(A_k) \geqslant \|\mu\| - 1/k$. En utilisant le procédé diagonal, on peut ainsi construire une suite croissante A_k et une suite de caractères qui converge uniformément vers 1 sur chaque A_k, $k \geqslant 1$. La mesure μ est évidemment concentrée sur $A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$. D'autre part, pour une mesure positive quelconque $\nu \in M(G)$ concentrée sur A, on aura $\nu(A) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k)$ et A est donc un ensemble de Dirichlet faible suivant la remarque (8.1.1). D'après la même remarque toute mesure concentrée sur un ensemble de Dirichlet faible est une mesure de Dirichlet.

8.2 - Les mesures μ orthogonales à la classe des mesures de Dirichlet constituent un L-idéal noté $\mathcal{L}_I$ et étudié dans le chapitre VII-4. Ce sont les mesures telles que $h\mu = 0$ pour tout idempotent $h \in \overline{\Gamma}$, $h \neq 1$. $\mathcal{L}_I$ contient $M_o(G)$ et est contenu dans l'idéal des mesures fortement continues d'après le corollaire du théorème 1.

<u>Définition 7</u> : Soit Λ un sous-ensemble d'un groupe discret Γ (noté multiplicativement) qui s'écrit $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} A_1 \ldots A_n$, où A_n est une suite d'ensembles finis. Les éléments de $A_1 \ldots A_n$ sont appelés mots d'ordre n. On utilise souvent la terminologie suivante (un peu disparate) :

a) Si $A_n = \{1, \theta_n\}$ pour une suite d'éléments θ_n de Γ, on dit que Λ est un <u>ensemble IP</u> (pour "infinite parallelogram").

b) Si $A_n = \{1, \theta_n, \theta_n^{-1}\}$ on note généralement $\Lambda = \Omega(\{\theta_n\})$. Dans le cas où l'ensemble $\{\theta_n\}$ est dissocié, Λ est le spectre de Fourier d'un produit de Riesz. Dans le cas général, si $\{\theta_n\}$ est infini, Λ contient le spectre de Fourier d'un produit de Riesz (chap.II-(7.1.2)). L'ensemble IP construit sur $\{1, \theta_n\}$ sera noté $\Omega^+(\{\theta_n\})$.

c) Si $A_n = \{\gamma_n, \theta_n\}$ est une suite d'ensembles à deux éléments, on dit que Λ est un <u>ensemble de Hilbert</u> (terminologie empruntée à FURSTENBERG).

(8.2.1) <u>Remarque</u> : Si Λ est un ensemble de Hilbert relativement à la suite $A_n = \{\gamma_n, \theta_n\}$, les mots d'ordre p peuvent s'écrire $x = (\prod_{1\leq j\leq p} \gamma_j) y$ où y est un mot d'ordre p de l'ensemble IP, $\Omega^+(\{\theta_n \gamma_n^{-1}\})$. Ainsi Λ peut s'écrire $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \alpha_n \Lambda_n$ où $\alpha_n \in \Gamma$ et Λ_n est l'ensemble des mots d'ordre n d'un certain ensemble IP. Inversement on vérifie sans peine que tout ensemble de cette forme est un ensemble de Hilbert.

Dans le cas où le groupe Γ n'a pas d'élément d'ordre fini $\neq 1$, si l'ensemble de Hilbert Λ est infini, l'ensemble IP correspondant $\bigcup_{n\geqslant 1}\Lambda_n$ est également infini. En effet, ou bien il y a une infinité d'éléments $\theta_n\gamma_n^{-1}$ distincts, ou bien $\theta_n\gamma_n^{-1} = \theta$ pour une infinité de valeurs de n et alors $\bigcup_{n\geqslant 1}\Lambda_n$ contient l'ensemble $\{\theta^k\}_{k\geqslant 1}$.

Rappelons que pour toute mesure $\mu \in M(G)$ et tout $\varepsilon > 0$, $E(\mu,\varepsilon)$ désigne l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $|\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon$. Le résultat suivant est une variante de la proposition 4 du chapitre VII.

<u>Proposition 9</u> (G compact) : Pour $\mu \in M(G)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mu \notin \mathcal{L}_I$

b) μ charge un ensemble de Dirichlet (fort).

c) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne un translaté d'un ensemble $\Omega(\{\theta_n\})$ pour un ensemble $\{\theta_n\}$ infini.

d) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne un translaté d'un ensemble IP infini.

Si de plus G est <u>connexe</u>, les propriétés (a)(b)(c)(d) sont équivalentes à la suivante :

e) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(\mu,\varepsilon)$ contienne un ensemble de Hilbert infini.

<u>Démonstration</u> : Les propriétés (a) et (b) sont toutes deux équivalentes, d'après la proposition 8 et la définition de $\mathcal{L}_I$,à l'existence d'un caractère idempotent $h \in \bar{\Gamma}$, $h \neq 1$ tel que $h\mu \neq 0$. Si $h\mu \neq 0$ il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|(h\mu)^\wedge(\gamma_0)| = |\hat{\mu}(h\gamma_0)| > \varepsilon$. Soit γ_j une suite généralisée tendant vers h dans $\bar{\Gamma}$. D'après la proposition 4 chapitre VII, $E(\mu,\varepsilon)$ contient un translaté d'un ensemble $\Omega(\{\theta_n\})$ où θ_n est une suite extraite de γ_j.

Supposons maintenant que, pour un $\varepsilon > 0$, $E(\mu,\varepsilon)$ contienne $\gamma_0\Lambda$ où $\Lambda = \Omega^+(\{\theta_n\})$ est un ensemble IP infini. On peut toujours supposer que θ_n tend vers l'infini. En effet, si l'ensemble des valeurs de θ_n est fini, l'une de ces valeurs, soit θ, est nécessairement d'ordre infini et Λ contient l'ensemble IP $\Omega^+(\{\theta^n\})$. Avec cette hypothèse, soit χ une valeur d'adhérence de θ_n dans $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$; alors χ^2 est une valeur d'adhérence de $\theta_j\theta_k$ $(j<k)$ et plus généralement, pour tout m, χ^{2m} est une valeur d'adhérence de Λ. Par conséquent

$$|\mu|^\wedge(|\chi|^{2m}) \geqslant |\hat{\mu}(\gamma_0\chi^{2m})| \geqslant \varepsilon .$$

La suite $|\chi|^{2m}$ converge vers un idempotent h de $\bar{\Gamma}$ et $h \neq 1$ puisque $\chi \notin \Gamma$. Enfin $h\mu \neq 0$ car $|\mu|^\wedge(h) \geqslant \varepsilon$.

Supposons maintenant que, pour un $\varepsilon > 0$, $E(\mu,\varepsilon)$ contienne un ensemble de Hilbert infini qu'on écrira sous la forme $\Lambda = \bigcup_{n\geqslant 1}\gamma_n\Lambda_n$ suivant la remarque (8.2.1). Pour tout $\gamma \in \Lambda_n$ on aura $|\hat{\mu}(\gamma_p\gamma)| > \varepsilon$ si $p \geqslant n$. Soit ϕ une valeur d'adhérence de la suite γ_n dans $\bar{\Gamma}$. Elle est telle que

$$|\hat{\mu}(\phi\gamma)| \geqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad \gamma \in \Lambda' = \bigcup_{n\geqslant 1}\Lambda_n .$$

$E(\phi\mu,\varepsilon/2)$ contient donc l'ensemble IP Λ' qui est infini, au moins dans l'hypothèse où G est connexe (équivalente à Γ sans élément d'ordre fini) (8.2.1). De ce qui précède on déduit l'existence d'un idempotent $h \in \bar{\Gamma}$, $h \neq 1$, tel que $h\phi\mu \neq 0$, ce qui implique $h\mu \neq 0$.

(8.2.2) Remarque : Dans le cas où $\Gamma = \mathbb{Z}$ la proposition 9 peut se traduire assez directement en un résultat de théorie ergodique (cf [22]). Soit (X,μ,T) un système dynamique, où T est une transformation mesurable bijective qui préserve la mesure μ. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Les seules fonctions rigides fonctions $f \in L^2(\mu)$ (telles que $f = \lim_{k\to\infty} T^{n_k}f$, où n_k est une suite d'entiers tendant vers l'infini) sont les fonctions constantes.

b) Quels que soient les ensembles mesurables A et B, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des entiers n tels que

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\ \mu(B)| > \varepsilon$$

ne contient pas d'ensemble de Hilbert infini (resp d'ensemble IP infini) (resp d'ensemble $\Omega(\{\theta_n\})$ pour un ensemble $\{\theta_n\}$ infini).

On peut compléter la proposition 9 par le résultat suivant qui renforce la proposition 5.

<u>Corollaire</u> : Soit Γ un groupe discret et Λ une partie de Γ qui ne contient aucun translaté d'un ensemble $\Omega(\{\theta_n\})$ avec $\{\theta_n\}$ infini. Alors, pour tout caractère idempotent $h \in \bar{\Gamma}$, $h \neq 1$ et pour toute mesure $\mu \in M(G)$, $(h\mu)\hat{}\,(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma \setminus \Lambda)}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $h\gamma$ est adhérent à $\Gamma \setminus \Lambda$ dans $\bar{\Gamma}$. Dans le cas contraire (cf (6.1)) il existerait une mesure μ et un $\gamma_0 \in \Gamma$ tels que $|\hat{\mu}(\gamma_0 h)| > \varepsilon$ et $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ si $\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda$. $E(\mu,\varepsilon)$ serait donc contenu dans Λ. D'autre part, par l'argument de la proposition 9, $E(\mu,\varepsilon)$ contiendrait le translaté d'un ensemble $\Omega(\{\theta_n\})$, ce qui fournit une contradiction.

<u>Note</u> : Les ensembles Λ qui ne contiennent aucun translaté d'ensemble $\Omega(\{\theta_n\})$ sont les ensembles de Rajchman étudiés dans les chapitres II et VI.

8.3 - Pour qu'une L-sous-algèbre de M(G) soit une algèbre de Bochner il est évidemment nécessaire que toute mesure de cette algèbre soit une mesure de Dirichlet. Mais nous verrons que cette condition n'est pas suffisante.

Envisageons le cas d'une topologie τ_H associée à un sous-groupe σ-compact H. Si $M(G_{\tau_H})$ est une algèbre de Bochner, en particulier toute mesure concentrée sur H doit être une mesure de Dirichlet, ce qui implique, par la proposition (8), que H doit être un ensemble de Dirichlet faible. S'il en est ainsi, on vérifie aisément que toute réunion finie ou dénombrable de classes mod H est également de Dirichlet faible (cf [8]).

<u>Proposition 10</u> : Soit K un compact de G et H le sous-groupe engendré par K. Toute mesure de $M(G_{\tau_H})$ est une mesure de Dirichlet si et seulement si K est un ensemble de Dirichlet faible.

<u>Démonstration</u> : La condition est évidemment nécessaire. Inversement il suffit de vérifier que, si K est de Dirichlet faible, il en est de même de H. Soit V un voisinage de l'infini dans Γ. Considérons dans l'espace C(K) le convexe fermé engendré par les fonctions $|\gamma(x) - 1|$ avec $\gamma \in V$. Il contient 0 car, sinon, par le théorème de Hahn-Banach, on pourrait trouver une mesure μ portée par K telle que

$$\int |\gamma(x) - 1| \, d\mu(x) \geqslant \delta > 0 \qquad (\gamma \in V).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des caractères $\gamma_k \in V$ et des nombres $a_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, tels que $\sum_1^m a_k = 1$ et

$$(8.3.1) \qquad \sup_{x \in K} \sum_1^m a_k |\gamma_k(x) - 1| \leqslant \varepsilon .$$

En un point quelconque de $(KU\text{-}K)^{(n)}$ de la forme

$$x = \Sigma\, n_j x_j \qquad (x_j \in K,\ n_j \in \mathbb{Z}, \Sigma |n_j| \leqslant n)$$

on aura, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$|\gamma(x) - 1| \leqslant \Sigma |n_j| \, |\gamma(x_j) - 1|$$

et, d'après (8.3.1)

$$\sum_1^m a_k |\gamma_k(x) - 1| \leqslant \sum_j |n_j| \Big(\sum_{k=1}^m a_k |\gamma_k(x_j) - 1|\Big) \leqslant n\, \varepsilon .$$

Pour toute mesure μ positive, concentrée sur une réunion finie de compacts $(KU\text{-}K)^{(n)}$, $1 \leqslant n \leqslant N$,

$$\sum_{k=1}^m a_k \int |\gamma_k(x) - 1| \, d\mu(x) \leqslant N\, \varepsilon\, \|\mu\|$$

ce qui implique que, pour un indice k au moins, $1 \leqslant k \leqslant m$, on aura

$$\int |\gamma_k(x) - 1|\, d\mu(x) \leqslant N\, \varepsilon \|\mu\| \quad .$$

Toute mesure concentrée sur H = GpK étant concentrée à ε près sur une réunion finie de compacts $(K \cup -K)^{(n)}$, on peut ainsi construire une suite de caractères tendant vers l'infini dans Γ et qui converge vers 1 dans $L^1(\mu)$.

Corollaire : $\mathcal{L}_I$ contient le L-idéal des mesures très fortement continues.

Démonstration : En effet si $\mu \notin \mathcal{L}_I$, μ charge un compact de Dirichlet faible K. La restriction de μ et K appartient à l'algèbre $M(G_{\tau_H})$ avec H = GpK et $M(G_{\tau_H}) \neq M(G)$.

(8.3.2) Remarque : Soit μ une mesure de probabilité ayant la propriété du module constant (chap.IV-8). Pour h idempotent de $\bar{\Gamma}$, on a en particulier, ou bien $h\mu = \mu$, ou bien $h\mu = 0$. Si $\overline{\lim}|\hat{\mu}(\gamma)| < 1$ on est toujours dans le deuxième cas et μ appartient donc à $\mathcal{L}_I$. C'est vrai pour les produits de Riesz sauf cas exceptionnels (cf chap.II et V). On ne sait pas cependant si ce sont des mesures très fortement continues.

9 - Un exemple d'algèbre de Bochner

Nous allons voir qu'il peut exister des topologies τ_H non localement compactes (en particulier sur le cercle) pour lesquelles $M(G_{\tau_H})$ est une algèbre de Bochner.

9.1 - Désignons par M(H) la L-sous-algèbre des mesures de M(G) concentrées sur un sous-groupe H σ-compact. $M(G_{\tau_H})$ n'est autre que la L-sous-algèbre engendrée par M(H) et les mesures discrètes. Nous supposerons, pour fixer les idées, que H est un sous-groupe dense de mesure de Haar nulle dans G. Ainsi on est assuré que M(H) sépare les points de Γ et que d'autre part $M(G_{\tau_H}) \neq M(G)$.

<u>Proposition 11</u> : Si M(H) est une algèbre de Bochner, $M(G_{\tau_H})$ est aussi une algèbre de Bochner.

<u>Démonstration</u> : Soit h le projecteur associé à l'algèbre M(H) et h' l'idempotent de $\bar{\Gamma}$ minimal tel que $h' \geqslant h$. Pour tout $x \in G$ et toute mesure $\mu \in M(H)$

$$h'(\delta_x * \mu) = h'\delta_x * h'\mu = \delta_x * \mu$$

et donc $h' \geqslant h_{\tau_H}$. Soit ν une mesure positive telle que $h'\nu = \nu$ et $h_{\tau_H}\nu = 0$. On a aussi $h_{\tau_H}(\nu * \tilde{\nu}) = 0$ donc $h(\nu * \tilde{\nu}) = 0$. D'après le théorème 1, et en reprenant les mêmes notations, h s'écrit $h = \int \chi \, d\sigma(\chi)$ où σ est la mesure de Haar du groupe compact $\Gamma^h_{h'}$. On aura donc

$$0 = \int |\hat{\nu}(\chi)|^2 \, d\sigma(\chi)$$

et par conséquent, $\hat{\nu}(\chi) = 0$ pour tout $\chi \in \Gamma^h_{h'}$. En particulier $\hat{\nu}(h') = 0$ d'où l'on conclut que $\nu = 0$ et que $h' = h_{\tau_H}$.

9.2 - Rappelons la définition suivante introduite notamment dans [10] [11].

<u>Définition 8</u> : Un sous-ensemble borélien E de G est un <u>ensemble de Kronecker faible</u>, si pour toute mesure positive $\mu \in M(G)$, concentrée sur E, et pour toute fonction ϕ de module 1 continue sur E, il existe une suite de caractères γ_n (tendant vers l'infini dans Γ) qui converge en mesure vers ϕ, c'est-à-dire telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \, ; \, |\gamma_n(x) - \phi(x)| > \varepsilon\}) = 0$. E est de <u>Kronecker</u> (<u>fort</u>) si on exige que γ_n converge uniformément dans E.

<u>Remarques</u> :

(9.2.1) On vérifie aisément que l'on peut remplacer dans la définition la convergence en mesure par la convergence dans $L^1(\mu)$, ou par la convergence $\sigma(L^{\infty}(\mu),\ L^{1}(\mu))$, ou par la convergence μ-presque-partout, ou encore par la convergence uniforme, pour tout $\varepsilon>0$, sur un sous-ensemble de mesure $\geqslant \|\mu\| - \varepsilon$.

(9.2.2) Tout ensemble de Kronecker faible est indépendant. En effet, si on a une relation de la forme $\Sigma\, n_j x_j = 0$, $x_j \in E$, $n_j \in \mathbb{Z}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, on en déduit $\prod \phi(x_j)^{n_j} = 1$ pour toute fonction ϕ de module 1, d'où nécessairement $n_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Rappelons que, si E est indépendant, GpE est de mesure de Haar nulle dans G [14]. On supposera dans la suite que GpE est dense dans G, pour fixer les idées.

(9.2.3) Il est démontré dans [14] que G contient un ensemble parfait de Kronecker si tout voisinage de O dans G contient un élément d'ordre infini.

9.3 - Nous allons établir :

Théorème 2 (G métrisable) : Soit K un ensemble compact de Kronecker faible, totalement discontinu, dans G, et H le sous-groupe engendré par K. Les algèbres M(H) et $M(G_{\tau_H})$ sont de Bochner.

Démonstration : Soit $h \in M(G)'$ le projecteur associé à la L-sous-algèbre M(H). Notons S(K) le groupe des fonctions continues de module 1 sur K, avec la topologie de la convergence uniforme sur K. Puisque K est indépendant, toute fonction $\phi \in S(K)$ se prolonge de façon unique sur H = GpK en une fonction $\tilde{\phi}$ de module 1 telle que

$$\tilde{\phi}(x+y) = \tilde{\phi}(x)\,\tilde{\phi}(y) \qquad (x,\ y \in H).$$

En reprenant la démonstration de la proposition 10 en (8.3), où l'on remplace 1 par $\tilde{\phi}$, on établit que, pour toute mesure $\mu \in M(H)$, $\tilde{\phi}$ est limite dans $L^{1}(\mu)$ d'une suite de caractères de G. On déduit de là que $\tilde{\phi}$ définit un caractère de l'algèbre M(H) : $\mu \to \int \tilde{\phi}\, d\mu$, qui est dans l'adhérence des caractères du groupe pour la topologie faible (ou forte) de M(H)'. Ce caractère se prolonge donc en un élément de Γ_h (Déf. (6.3.2)) que l'on notera encore $\tilde{\phi}$.

L'application $\phi \to \tilde{\phi}$ est un homomorphisme continu du groupe S(K) dans le groupe Γ_h. En effet, si ϕ_n tend vers ϕ uniformément dans K, la suite de fonctions $\tilde{\phi}_n$ converge simplement vers la fonction $\tilde{\phi}$ en tout point de H ; ainsi pour toute mesure $\mu \in M(H)$,

$$\int \tilde{\phi}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{\phi}_n\, d\mu \ .$$

Soit f une fonction de type positif sur Γ, continue pour la topologie induite par $M(H)\hat{}$. La fonction $\tilde{f}(h\gamma) = f(\gamma)$ est de type positif sur le groupe $h\Gamma$ et continue (donc uniformément continue) pour la topologie faible de M(G)'. Elle se prolonge continuement à Γ_h en une fonction de type positif $\tilde{f}$. Par composition, l'application $\phi \to \tilde{f}(\tilde{\phi})$ est une fonction de type positif continue sur le groupe S(K). Pour terminer la démonstration, on utilise le résultat suivant :

<u>Théorème</u> (VAROPOULOS) [17] [11] (G métrisable) : Soit K un compact indépendant totalement discontinu dans G. A toute fonction g de type positif continue sur le groupe S(K), correspond une mesure (unique) $\mu \in M(H)$ telle que

$$g(\phi) = \int \tilde{\phi}\, d\mu \qquad (\phi \in S(K)).$$

On utilise ce théorème avec $g(\phi) = \tilde{f}(\tilde{\phi})$. Il existe $\mu \in M(H)$ telle que

$$\tilde{f}(\tilde{\phi}) = \int \tilde{\phi}\, d\mu \qquad (\phi \in S(K)).$$

En particulier si $\phi = \gamma$, $\tilde{\phi} = \gamma$ et

$$f(\gamma) = \tilde{f}(h\gamma) = \int \gamma\, d\mu = \hat{\mu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

ce qui démontre le théorème 2, compte tenu de la proposition 11.

10 - Contre-exemples

10.1 - Soit H un sous-groupe de G engendré par un compact K. Nous avons vu en (8.3) une condition nécessaire pour que l'idempotent h_{τ_H} soit dans $\bar{\Gamma}$: le compact K doit être de Dirichlet faible. Par ailleurs le théorème 2 donne une condition suffisante. Nous allons voir que cette condition ne peut pas être beaucoup affaiblie et qu'en tout cas, la condition nécessaire énoncée au début de (8.3) n'est pas suffisante.

Proposition 12 : Soit K un compact indépendant dans G. Supposons que pour tout compact $K' \subset K$, l'idempotent $h_{\tau_{H'}}$ associé à $H' = GpK'$, soit dans $\bar{\Gamma}$. Alors K est un ensemble de Helson de constante $\geqslant 1/9$.

Rappelons la définition d'un ensemble de Helson [9] [11].

Définition 9 : Un ensemble fermé $E \subset G$ est de Helson si, sur l'espace M(E) des mesures portées par E, les normes $\|\mu\|$ et $\|\hat{\mu}\|_\infty$ sont équivalentes. La constante de Helson de l'ensemble E est la borne inférieure de $\|\hat{\mu}\|_\infty / \|\mu\|$ pour $\mu \in M(E)$.

10.1.1 - Tout ensemble de Kronecker faible est un ensemble de Helson de constante 1 [11].

Démonstration de la proposition 12 :

Soient μ et ν deux mesures positives continues portées par K, telles que μ soit concentrée sur un compact $K' \subset K$, avec $\nu(K') = 0$. Notons $H' = GpK'$. Pour tout $x \in G$, $K \setminus K'$ a au plus un point dans la classe $x+H'$. Sinon x s'écrirait de deux façons différentes $x = z + \Sigma n_j y_j$ avec $y_j \in K'$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $z \in K \setminus K'$, ce qui est impossible puisque K est indépendant. Par conséquent, ν étant continue, pour tout $x \in G$, $\nu(x+H') = 0$ et donc ν est orthogonale à $M(G_{\tau_{H'}})$. Notons $h = h_{\tau_{H'}}$. Nous aurons donc $h\nu = 0$ tandis que, évidemment, $h\mu = \mu$. De là $\mu = h(\mu - \nu)$ et, si nous supposons que $h \in \bar{\Gamma}$,

$$\|\mu\| = \hat{\mu}(1) = \|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \|(\mu-\nu)^\wedge\|_\infty$$

Soit σ une mesure continue réelle portée par K. Il existe un compact $K'\subset K$ tel que σ_+ soit concentrée à ε près sur K', tandis que $\sigma_-(K') = 0$. On déduit ainsi du résultat précédent $\|\sigma_+\| \leqslant \|\hat{\sigma}\|_\infty$ et, de même, $\|\sigma_-\| \leqslant \|\hat{\sigma}\|_\infty$. On en conclut que, pour toute mesure continue réelle σ portée par K, $\|\sigma\| \leqslant 2\|\hat{\sigma}\|_\infty$ et pour toute mesure continue complexe, $\|\sigma\| \leqslant 4\|\hat{\sigma}\|_\infty$.

Enfin envisageons le cas d'une mesure σ quelconque, portée par K. On sait (cf(6.1)) que sa partie discrète σ_d vérifie $\|\hat{\sigma}_d\|_\infty \leqslant \|\hat{\sigma}\|_\infty$. D'autre part, comme K est indépendant, il est bien connu [11] et facile à vérifier que pour toute mesure discrète μ portée par K, $\|\mu\|=\|\hat{\mu}\|_\infty$. Ici $\|\sigma_d\| = \|\hat{\sigma}_d\|_\infty$. Le résultat précédent précédent vaut pour la partie continue $\sigma-\sigma_d$ et, par suite,

$$\|\sigma\| - \|\sigma_d\| = \|\sigma-\sigma_d\| \leqslant 4\|\hat{\sigma}-\hat{\sigma}_d\|_\infty \leqslant 8\|\hat{\sigma}\|_\infty .$$

Finalement $\|\sigma\| \leqslant 9\|\hat{\sigma}\|_\infty$ ce qui prouve que K est un ensemble de Helson de constante $\geqslant \frac{1}{9}$.

Nous nous appuierons sur une construction de KÖRNER et sur la proposition 12 pour exhiber un contre exemple.

<u>Théorème</u> (KÖRNER [10] p.307) : Il existe un ensemble parfait indépendant dans $\mathbb{T}$, qui est de Dirichlet mais pas de Helson.

<u>Corollaire</u> : Il existe dans $\mathbb{T}$ un sous-groupe H de Dirichlet faible pour lequel $M(G_{\tau_H})$ n'est pas une algèbre de Bochner.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de considérer le compact K construit par KÖRNER. D'après la proposition 12 il existe certainement un compact $K'\subset K$ tel que si H est le sous-groupe engendré par K', $M(G_{\tau_H})$ n'est pas une algèbre de Bochner. Evidemment si K est de Dirichlet il en est de même de K' et H est de Dirichlet faible (prop.10).

10.2 - Montrons enfin qu'il existe des algèbres de Bochner dont l'orthogonal est un idéal mais qui ne sont pas liées à une topologie τ_H.

Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, l'ensemble des caractères $\phi \in \bar{\Gamma}_+$ tels que $\phi\mu = \mu$ est compact et possède un élément minimal (unique) idempotent que l'on notera $h_{(\mu)}$.

<u>Proposition 13</u> (G métrisable) : Soit $\mu \neq 0$ une mesure continue portée par un compact de Kronecker faible. L'algèbre de Bochner $N_{h_{(\mu)}}$ ne peut pas être décrite à l'aide d'un système de Raikov.

<u>Démonstration</u> : Soit K un compact de Kronecker faible qui supporte μ. Ecrivons $h = h_{(\mu)}$. Vérifions que $N_h \cap M_c(K) = L(\mu)$. En effet, soit ν une mesure continue portée par K et étrangère à μ. Il existe une suite croissante de compacts $K_n \subset K$ tels que $|\mu|(K \setminus K_n) \leqslant 1/n$ et $|\nu|(K_n) = 0$. Désignons par H_n le groupe engendré par K_n et par μ_n la restriction de μ à K_n. La démonstration de la proposition 12 montre que, pour tout $n \geqslant 1$, ν et $\mu - \mu_n$ sont orthogonales à $M(G_{\tau_H})$ et par le théorème 2, il existe donc $h_n \in \bar{\Gamma}$, idempotent, tel que $h_n\mu = \mu_n$ et $h_n\nu = 0$. Soit ϕ une valeur d'adhérence de h_n dans $\bar{\Gamma}_+$. Elle est telle que $\phi\mu = \mu$ et $\phi\nu = 0$. On aura a fortiori $h\nu = 0$.

On déduit de là qu'il n'existe pas de système de Raikov $\mathfrak{R}$ tel que $A_{\mathfrak{R}} = N_h$. Si c'était le cas, μ serait concentrée à ε près sur un compact $K' \in \mathfrak{R}$ et donc aussi sur $K \cap K'$. Toute mesure portée par $K \cap K'$ appartiendrait à N_h. Or comme $K \cap K'$ est un compact non dénombrable, on peut trouver une mesure $\nu \neq 0$ continue, portée par $K \cap K'$ et qui soit étrangère à μ, ce qui fournit une contradiction.

<u>RÉFÉRENCES</u>

[1] G. BROWN - Idempotents in the closure of characters. Bull. London Math. Soc.4 (1972) 43-46.

[2] G. BROWN et W. MORAN - A dichotomy for infinite convolutions of discrete measures. Proc. Cambridge Phil. Soc. 73 (1973) 307-16.

[3] D.F. DUNKL et D. RAMIREZ - Bounded projections on Fourier Stieltjes transforms. Proc. Amer. Math. Soc. 31-1 (1972) 122.

[4] I. GLICKSBERG - Fourier-Stieltjes transforms with an isolated value. Conference on Harmonic Analysis, Maryland (1971), Lectures Notes in Math. 266, Springer-Verlag.

[5] I. GLICKSBERG et I. WIK - The range of Fourier-Stieltjes transforms of parts of measures, Conference on Harmonic Analysis, Maryland (1971), Lectures Notes in Math. 266, Springer-Verlag.

[6] J. HAIGHT - Difference covers which have small k-sums for any k. Matematica 20 (1973) 109-118.

[7] B. HOST et F. PARREAU - Sur un problème de Glicksberg : les idéaux fermés de type fini de M(G), Ann. Inst. Fourier 38-3 (1978) 143-154.

[8] J.P. KAHANE - Approximation par des exponentielles imaginaires ; ensembles de Dirichlet et ensembles de Kronecker. Journal of approximation Theory 2 (1969).

[9] J.P. KAHANE et R. SALEM - Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann.

[10] T.W. KÖRNER - Some results on Kronecker, Dirichlet and Helson sets, Ann. Inst. Fourier 20-2 (1970) 219-234.

[11] L. LINDAHL et F. POULSEN - Thin sets in Harmonic Analysis, Marcel Dekker (1971).

[12] J.F. MÉLA - Mesures ε-idempotentes de norme bornée. Studia Math. 72 (1982).

[13] N.W. RICKERT - Locally compact topologies for groups. Trans.

Amer. Math. Soc. 126 (1967) 225-235.

[14] W. RUDIN - Fourier Analysis on groups. Interscience Tracts in Math. n°12. John Wiley and Sons.

[15] T. SHIMIZU - Independant sets and measure algebras, Studia Math. 59 (1977).

[16] M. TALAGRAND - Solution d'un problème de R. Haydon. Publications du département de Maths de Lyon (1975) 12-2.

[17] N.T. VAROPOULOS - Groups of continuous functions in Harmonic Analysis. Acta. Math. 125 (1970) 109-154.

[18] J.H. WILLIAMSON - Raikov systems. Symposia on theoritical Physics and Mathematics, vol. 8 (1968) 173-183.

[19] J.H. WILLIAMSON - Raikov systems and the pathology of $M(\mathbb{R})$ Studia Math. 31 (1968) 399-409.

[20] L.T. RAMSEY et B. WELLS - Fourier-Stieltjes transforms of strongly continuous measures, Michigan Math. Journal 24 (1977), 13-19.

[21] C. GRAHAM et C. Mc GEHEE - Essays in commutative Harmonic Analysis - Springer-Verlag.

[22] Séminaire sur la théorie spectrale des systèmes dynamiques (Villetaneuse 1983).

INDEX DES NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Since 1970 some late but important progress has been made in Fourier Analysis of singular measures. Many results and methods should become classical. This volume was written as an introduction to the subject, though still retaining the form of a research paper, emphasizing the point of view and the work of the authors.

The theory rest on some simple general properties of L^{∞}-spaces and semi-topological semi-groups, presented in the preliminaries. The study of measures on locally compact abelian groups is approached in an entirely new context, nevertheless using all the ressources and technical constructions of classical Fourier Analysis, which leads to very precise results.

An important part is devoted to the properties at infinity of Fourier-Stieltjes transforms, using a semi-group technique which turns out to be simple and powerful.

Another part is devoted to the Gelfand theory of convolution algebras of measures on abelian groups, considerably developping the technique of Sreider's generalized characters.

An important place is given to concrete examples, in particular to the detailed study of a class of remarkable measures : the so-called "Riesz products", which provide powerful tools and play a central role in the theory.