

Astérisque

MARCEL BERGER

**La géométrie métrique des variétés riemanniennes
(variations sur la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$)**

Astérisque, tome S131 (1985), p. 9-66

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__S131__9_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

(Variations sur la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$)

PAR

Marcel BERGER

Le présent texte est un petit panorama, partiel et partial, du sujet. Il a pour pivot les résultats d'Élie CARTAN sur les espaces symétriques mais surtout ceux concernant les variétés à courbure négative. Mais il ne s'agit pas d'un rapport sur les travaux de géométrie riemannienne d'Élie CARTAN. Enfin il ne sera question, pour l'essentiel, que de variétés riemanniennes abstraites, quel que soit l'intérêt des variétés plongées, entre autres dans l'espace euclidien.

Outre le manque d'espace et de compétence, notre sujet est précisément celui de la *géométrie métrique* des *variétés riemanniennes* (v.r.). Géométrie veut dire "mesurer la terre". Nous rappelons d'abord que RIEMANN introduisit les variétés qui portent son nom comme une classe particulière d'espaces *métriques* à savoir ceux dotés d'un élément de longueur infinitésimal partout euclidien. N'oublions pas non plus que GAUSS tint absolument à dégager la métrique intrinsèque des surfaces plongées dans R^3 , pour des raisons de géodésie mais aussi pour l'axiomatique de la géométrie.

Nous parlerons donc de ce qui concerne les v.r. lorsque leur métrique intervient essentiellement : soit dans les énoncés, soit dans les démonstrations, soit dans les concepts. Mais pratiquement la courbure interviendra presque toujours. Deux raisons à cela : d'abord parce qu'elle est l'invariant riemannien n° 1 et le plus naturel. GAUSS puis RIEMANN l'ont vu de suite. La courbure, en bref, est la dérivée seconde de l'élément de longueur (qui n'a

pas de dérivées premières invariantes, puisque celles-ci sont toujours nulles). Ensuite parce que le jeu riemannien le plus plaisant est analogue à celui qui se joue en Analyse entre l'intégrale et la dérivée des fonctions. C'est ce qui va arriver dans la majorité de ce qui suit. On peut en parler comme de deux navigations par inertie : la première dans une v.r. donnée, la seconde dans l'ensemble de toutes les v.r.

Il existe de la géométrie riemannienne avec la métrique seule. Ce n'est pas notre propos pour l'essentiel, voir cependant la section 18. Nous consacrerons enfin un certain temps à la discrétisation et la triangulation des v.r., qui sont liés aux variétés riemanniennes à singularités. Le cadre classique des v.r. lisses a en effet maintenant le besoin et la possibilité d'être élargi. On ne peut pas non plus faire de la géométrie algébrique avec seulement des variétés lisses.

Nous verrons que la géométrie métrique des v.r., au sens précisé plus haut (qui ne se traduit surtout pas par "Riemannian Geometry" c'est pourquoi nous nous sommes permis d'utiliser le groupement peu élégant "géométrie métrique", voire pléonasmatique), a été marquée par les grandes étapes

RIEMANN	1854
HADAMARD	1898
Élie CARTAN	1926-1928
RAUCH et ses successeurs	1951 et ensuite,

les intervalles]1854, 1898[,]1898–1926[et]1928–1951[comptant extrêmement peu de contributions à notre sujet. Il faut cependant mentionner les contributions fondamentales de Heinz HOPF dans les années 1925–1930. Il pourrait être intéressant d'en proposer des explications historiques. Notre exposé suivra, en gros, l'ordre chronologique. À l'exception notable de la section 5, nécessaire pour pouvoir utiliser rapidement un langage clair. Les sections 6, 7 et 8 seront consacrées aux contributions d'Élie CARTAN et à leur place historique.

Le présent texte doit beaucoup à des critiques que J.-P. BOURGUIGNON, E. CALABI, J. CHEEGER, P. EBERLEIN, J. FRÖHLICH, M. GROMOV, H. KARCHER, W. KLINGENBERG, J. LAFONTAINE, V. SCHROEDER et W. ZILLER ont bien voulu faire sur une première version. Qu'ils trouvent ici mes remerciements.

Je suis heureux de pouvoir dédier ce texte, avec une profonde reconnaissance, à Henri CARTAN pour son quatre-vingtième anniversaire.

1. RIEMANN, 1854.
2. L'intervalle]1854, 1898[.
3. HADAMARD, 1898.
4. La métrique, les angles et la courbure.

5. WEYL, CARTAN, HOPF-RINOW : “au moins un plus court chemin”.
6. Élie CARTAN de 1926 à 1928.
7. Les espaces symétriques.
8. Élie CARTAN et les variétés à courbure négative.
9. Les variétés à courbure négative ou nulle.
10. Unicité du plus court-chemin : cut-locus.
11. Le rayon d’injectivité.
12. Digression sur la nature de la courbure sectionnelle.
13. Hypertrigonométrie locale et globale.
14. Hypotrigonométrie : le théorème RAT.
15. Les variétés à courbure positive ou nulle.
16. Discrétisations et triangulations des variétés riemanniennes.
17. Les variétés riemanniennes triangulées vues comme variétés riemanniennes plates à singularités.
18. Retour sur courbure et métrique : en suivant les traces de K. Menger.
19. Métrique et coordonnées dans une variété riemannienne.

1. Riemann 1854

Dans un mémoire célèbre “Sur les hypothèses qui se trouvent au fondement de la Géométrie” RIEMANN fondait les géométries qui portent son nom. Rappelons brièvement que, pour lui, un objet géométrique (U, g) était la donnée d’un ouvert U , toujours supposé connexe, d’un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, où U est muni en chaque point $(x_1, \dots, x_n)$ d’une *structure euclidienne infinitésimale*

$$ds^2 = g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} g_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_j$$

c’est-à-dire que la matrice des g_{ij} doit être définie positive. Trois exemples significatifs :

1) l’espace euclidien $\mathbf{R}^n$ lui-même : ($U = \mathbf{R}^n$, $g = \text{euclid.}$) c’est-à-dire que les g_{ij} sont partout tous nuls sauf les g_{ii} constamment égaux à 1 ;

2) les êtres étudiés par GAUSS, à savoir U est une surface Σ de $\mathbf{R}^3$ et en chaque point p de Σ la structure euclidienne considérée est celle que la structure euclidienne de $\mathbf{R}^3$ induit sur l’espace tangent à Σ en p ;

3) la géométrie hyperbolique, enfin bien fondée par RIEMANN, surtout globalement, définie ainsi :

$$g = \left(1 - \frac{1}{4}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right)^{-2} (dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

sur l'ouvert

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 4\}.$$

Un objet (U, g) devient un espace *métrique* ainsi : une courbe f de U aura par définition la *longueur*

$$\text{long}(f) = \int \left[|f'(t)| = \sqrt{g(f'(t), f'(t))} \right] dt$$

et la *distance* $d(p, q)$ entre deux points p, q de U sera par définition

$$d(p, q) = \inf \{ \text{long}(f) : f \text{ courbe de } p \text{ à } q \}.$$

Deux problèmes se posent aussitôt : d'abord calculer la distance entre deux points puis ensuite savoir comment la réaliser par un *plus court chemin* f , c'est-à-dire une courbe f dont la longueur soit exactement la distance : $\text{long}(f) = d(p, q)$. Sur la sphère S^n , munie de la métrique riemannienne induite par le plongement standard $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$, la métrique obtenue n'est pas la métrique induite par le plongement dans l'espace euclidien. C'est celle qu'étudiait GAUSS, c'est la distance *sur* la sphère, les plus courts chemins sont les arcs de grand cercle (figure 1).

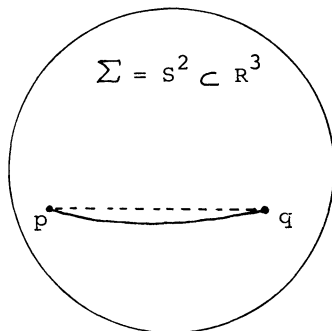


Fig. 1

Les plus courts chemins d'un point à un autre sont toujours portés par les courbes appelées *géodésiques*, données par une équation différentielle déjà connue d'EULER. Localement ces géodésiques se comportent bien comme les droites des espaces euclidiens ($\mathbf{R}^n$, *euclid.*) que RIEMANN généralisait : par deux points assez voisins il en passe une et une seule et elle réalise bien la distance, c'est un plus court chemin. Globalement (figure 2), c'est une autre histoire, voir la section 10.

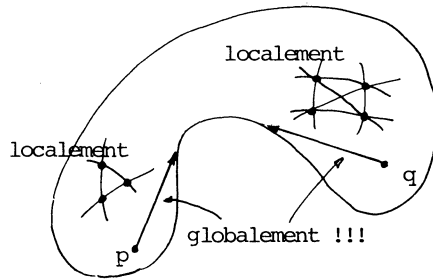


Fig. 2

2. L'intervalle]1854, 1898[

Pour différentes raisons, certainement entre autres parce que la notion de variété n'était pas alors claire, ou encore si l'on veut parce que la vision de l'époque était plutôt celle d'un objet local avec des règles de transformation que celle d'un objet global étudié pour lui-même, le point de vue métrique des espaces de Riemann fut complètement occulté ou presque avant les années 1925. La géométrie riemannienne de 1854 à 1925 consista principalement à dégager les notions de calcul différentiel absolu, de connexion, et à étudier différents problèmes d'équivalence (métrique, conforme, projective : voir [Gi] et les références y données. En outre, comme le dit Élie CARTAN dans la préface de [C4] : "les résultats apparaissent souvent au milieu d'une débauche d'indices".

Mentionnons les quelques résultats métriques marquants, avant ceux d'HADAMARD. En 1855 O. BONNET démontrait que, si la courbure d'une surface est supérieure ou égale à un réel $k > 0$, alors son diamètre (intrinsèque!) d vérifie $d \geq \pi/\sqrt{k}$. Dans les années 1890, F. KLEIN, W. CLIFFORD et W. KILLING étudiaient les "formes d'espace", c'est-à-dire recherchaient, entre autres, les variétés abstraites à courbure constante (voir section 5). En 1878 BRAUNMÜHL, utilisant l'équation des géodésiques obtenue par JACOBI, réussissait à décrire le comportement global des géodésiques des ellipsoïdes de révolution de $\mathbf{R}^3$. Il montrait que quelque soit le point considéré sur l'ellipsoïde, si l'on considère toutes les géodésiques issues de ce point, elles enveloppent une courbe à quatre rebroussements (au moins pour le premier point de contact; dit *conjugué* du point de départ) et surtout leur premier point de rencontre deux à deux, après le point de départ, décrit un ensemble difféomorphe à un intervalle de $\mathbf{R}$. Ceci à l'exception notoire des ombilics, pour lesquels toutes les géodésiques qui en sont issues repassent par l'ombilic associé et ce, sans se rencontrer avant (figure 3).

En 1881 van MANGOLDT confirmait les résultats de BRAUNMÜHL et les étendait aux autres quadriques de $\mathbf{R}^3$. En particulier il en déterminait

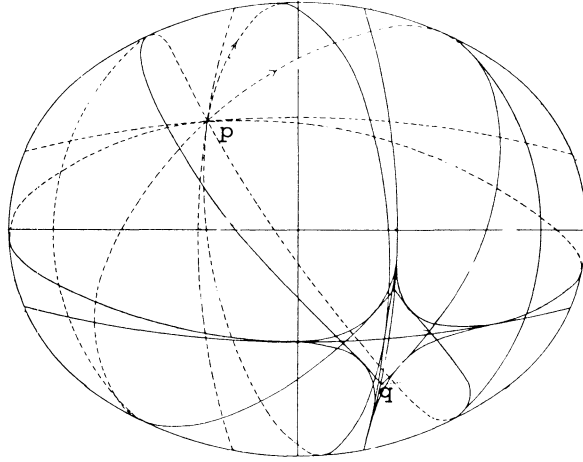


Fig. 3

tous les *pôles*, c'est-à-dire les points tels que toutes les géodésiques qui en sont issues ne se rencontrent jamais plus ensuite. Par exemple, pour les hyperboloïdes, les ombilics sont toujours des pôles. Mais, selon ce que sont les rapports des axes des paraboloides elliptiques et des hyperboloïdes à deux nappes, l'ensemble de leurs pôles se réduit aux ombilics ou peut être un fermé d'intérieur non vide les contenant ([vMt] et aussi [Bü]).

On a rencontré, dans le travail de BRAUNMÜHL ([Bü]) la “ligne” où se rencontrent pour la première fois (éventuellement) les géodésiques issues d'un point fixe. Elle fut appelée ligne de *partage* par POINCARÉ qui en fit une étude systématique en 1905 ([Pé]) pour les surfaces convexes de $\mathbf{R}^3$. Aujourd'hui on l'appelle plutôt *cut-locus*, nous y consacrerons la section 10.

3. Hadamard 1898

Dans la mémoire “Sur les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques” ([Hd]) HADAMARD étudiait les surfaces plongées dans $\mathbf{R}^3$ mais en les considérant en fait comme des variétés riemanniennes abstraites (M, g) de dimension 2 et, par hypothèse, *complètes* pour la métrique d . L'hypothèse “à courbures opposées” signifie que la courbure totale, la courbure de Gauss K , est sur tout M , négative ou nulle. Alors

THÉORÈME (Hadamard). — *Par tout couple de points p, q de M et dans chaque classe d'homotopie de chemins de p à q , il existe une géodésique et une seule.*

Par exemple pour l'hyperboloïde à une nappe. Bien sûr ces géodésiques ne sont presque jamais des plus courts chemins (figure 4).

COROLLAIRE. — *Si M est de plus simplement connexe, alors il existe une seule géodésique de p à q , et c'est toujours un plus court chemin. Il y a donc un unique plus court chemin entre tout couple de points (abstraction faite de la façon de le parcourir). Et en particulier chaque point de M est un pôle.*

Tous les travaux précédents sont des contributions au problème de l'existence et de l'unicité des plus courts chemins.

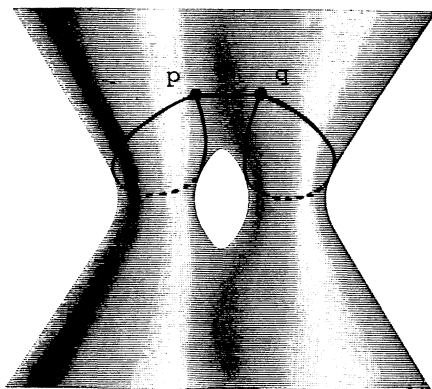


Fig. 4

4. La métrique, les angles et la courbure

Nous poursuivons deux buts dans cette section : expliquer en quel sens on peut dire que l'élément de longueur g est la dérivée de la métrique d et en quel sens la courbure est la dérivée seconde de g (donc la dérivée troisième de d !). Et présenter ainsi l'être difficile qu'est la courbure d'une v.r. le plus simplement possible mais sans non plus cacher ses difficultés, sur lesquelles nous reviendrons dans la section 12.

Si p est un point d'une v.r. et si x, y sont deux vecteurs tangents en p , si l'on porte la longueur ϵ sur les géodésiques de vecteurs vitesse initiale x, y on obtient ainsi deux points notés $x(\epsilon), y(\epsilon)$. Alors (figure 5) :

$$d^2(x(\epsilon), y(\epsilon)) = 2\epsilon^2(1 - \cos \alpha) + o(\epsilon^2)$$

où α désigne l'angle entre x et y , à savoir le réel de $[0, \pi]$ défini par $\cos \alpha = g(x, y) / |x| |y|$.

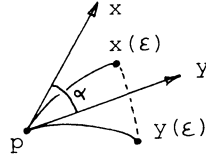


Fig. 5

Dans la suite on *notera* donc $|z| = \sqrt{g(z, z)}$ la *norme* d'un vecteur tangent pour l'élément de longueur g . La formule ci-dessus exprime donc bien que l'élément de longueur est la dérivée de la métrique. La version intégrée, le long d'un arc fini de géodésique, de cet aphorisme, est la formule dite de la *variation première* (figure 6) :

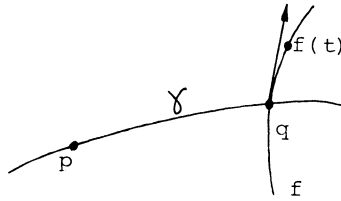


Fig. 6

$$\frac{d(d(p, f(t)))}{dt}(0) = (\gamma'(q), f'(0)),$$

où ici $(\cdot, \cdot) = g(\cdot, \cdot)$ *dénote le produit scalaire*, où γ est un plus court chemin de p à q dont le vecteur tangent unitaire en q est *noté* $\gamma'(q)$, où f est une courbe quelconque d'origine q . Il faut une petite précaution technique supplémentaire : que q n'appartienne pas au cut-locus de p .

Un calcul montre que, dans le développement limité de la figure plus haut, de $d(x(\epsilon), y(\epsilon))$, il n'y a jamais de terme d'ordre 2, par contre en général il y a un terme d'ordre 3. Voici le minimum de ce qu'il faut faire pour analyser la situation. En dimension 2 GAUSS savait déjà que dans une *carte exponentielle* (appelée aussi *coordonnées normales*) (x, y) , de centre $p = (0, 0)$, c'est-à-dire une carte où les droites issues de l'origine sont des géodésiques paramétrées par la longueur de l'arc, on a un développement limité de g de la forme

$$g(0, 0) = dx^2 + dy^2 + K(p)(xdy - ydx)^2 + o(x^2 + y^2)$$

où $K(p)$ est la courbure de Gauss (courbure totale des variétés plongées de $\mathbf{R}^3$ au point p).

En dimension quelconque, toujours dans une carte exponentielle, RIEMANN découvrit que l'on a un développement limité de la forme

$$g(0, \dots, 0) = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \\ + \sum_{i < j, k < h} (x_i dx_j - x_j dx_i)(x_k dx_h - x_h dx_k) R_{ijkh} + o(x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

où les R_{ijkh} sont les composantes d'une forme 4-linéaire $R(x, y, z, t)$ sur l'espace tangent $T_p M$ à M en p . Cette forme est appelée *tenseur de courbure*. Elle est alternée en les deux premiers vecteurs x et y , alternée aussi en les deux derniers z et t , symétrique en les couples x, y et z, t (et vérifie l'identité de permutation circulaire dite parfois de Bianchi).

De même qu'à une forme bilinéaire symétrique on associe sa forme quadratique, de même à R nous associons la *forme biquadratique* $R(x, y, x, y)$. Les symétries indiquées ci-dessus pour R entraînent que le réel

$$\frac{R(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \quad (\text{où } |x \wedge y|^2 = |x|^2 |y|^2 - (x, y)^2)$$

ne dépend, en p donné, que du sous-espace vectoriel de dimension 2 de $T_p M$: $\sigma = \mathbf{R}x + \mathbf{R}y$ engendré par x et y . Notons G_M^2 la grassmannienne de M pour la dimension 2, c'est-à-dire l'ensemble de tous les espaces de dimension 2 tangents à M . Alors on vient de définir une fonction numérique $K : G_M^2 \rightarrow \mathbf{R}$ sur cette grassmannienne. D'ailleurs les symétries de R font que sa connaissance détermine R complètement. On appelle K la *courbure sectionnelle* de la v.r. considérée. Même en dimension 4 on ne connaît pas le lien précis entre le tenseur R , décomposé par exemple en composantes irréductibles sous l'action du groupe orthogonal $SO(4)$, et la nature des points critiques de K sur $G_M^2(p)$.

Géométriquement K est bien la dérivée troisième de la métrique cherchée, on démontre que l'on a le développement limité

$$d^2(x(\epsilon), y(\epsilon)) = 2\epsilon^2(1 - \cos \alpha) + \frac{2}{3}K(p) \sin^2 \alpha \epsilon^4 + o(\epsilon^4).$$

Par exemple on aura $K = 0$ (ce genre de notation, dans toute la suite, signifiera que K est identiquement nulle sur G_M^2) pour $(\mathbf{R}^n, \text{euclid.})$ et $K = 1$ pour la sphère standard $(S^n, \text{stand.})$. Enfin on a $K = -1$ pour l'exemple 3 de la section 1.

La version intégrée, le long d'un arc de géodésique, de ce qui précède, est appelée la *formule de la variation seconde*. Elle nous semble l'un des seuls résultats métriques de l'intervalle]1898, 1926[. En voici la version à

extrémités fixes. On considère une famille à un paramètre de courbes $f(t, \alpha)$, qui joignent deux points fixes p et q pour les paramètres $t = 0$ et $t = a$ (figure 7). La courbe que l'on varie, à savoir $f(t, 0)$, est une géodésique (un plus court chemin dans les applications). On note $Y(t) = (\partial f(t, \alpha) / \partial \alpha)(t, 0)$ le champ de vecteurs le long de la géodésique $\gamma = f(., 0)$ constitué par la variation infinitésimale de la famille de courbes. Enfin il faut connaître la notion de transport parallèle, qui fournit alors une notion de dérivée intrinsèque le long de γ , soit Y' cette dérivée covariante pour Y . Alors on a :

$$\frac{d^2(\text{long}(f(., \alpha))}{d\alpha^2}(0) = \int_0^a (|Y'(t)|^2 - K(\gamma'(t), Y(t)) |Y(t)|^2) dt$$

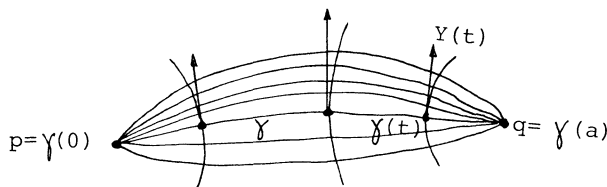


Fig. 7

5. Weyl, Cartan, Hopf-Rinow : “au moins un plus court chemin”

J’ai jusqu’ici impudiquement usé des mots “variétés riemanniennes”, “espace tangent”. On ne pouvait évidemment en rester aux (U, g) de Riemann, ce qui n’échappa pas à RIEMANN lui-même. Ne fût-ce d’abord qu’à cause des surfaces compactes ou non de R^3 , ellipsoïdes, etc. . . Grâce aux efforts de Hermann WEYL, d’Élie CARTAN, Heinz HOPF, Willi RINOW et Hassler WITHNEY, on arriva à la fois à définir correctement la notion de variété différentiable abstraite et à formuler le *théorème appelé aujourd’hui de Hopf-Rinow*. Une variété *riemannienne* sera une variété différentielle M munie en chaque point p d’une structure euclidienne $g(p)$ pour son espace tangent $T_p M$; l’application $p \mapsto g(p)$ devra être différentiable. On y définit une métrique comme RIEMANN, toujours *notée* d . Le théorème de Hopf-Rinow dit alors, entre autres, que si (M, g) fournit une métrique d qui est *complète*, alors deux points quelconques de M peuvent toujours être reliés par au moins un plus court chemin (nécessairement porté par une géodésique, mais cette géodésique peut cesser d’être un plus court chemin entre deux de ses points si on la continue trop longtemps). Ce sera donc en particulier toujours le

cas si M est compacte. Notons $\text{Diam}(g)$ le *diamètre* de (M, g) comme espace métrique, c'est-à-dire la borne supérieure des distances entre deux quelconques de ses points. Ainsi M sera compacte si et seulement si son diamètre est fini. Pour une version plus métrique du résultat de HOPF-RINOW, voir [G-L-P], page 5.

Sauf mention explicite du contraire toutes les variétés riemanniennes considérées seront complètes et de dimension n supérieure ou égale à 2.

Le lecteur aura de lui-même remarqué qu'en dimension 1 il n'y a pas de courbure, ou elle est nulle si l'on veut, d'où la mention $n \geq 2$. Il nous faut parler brièvement de notions de base, simples mais qui étaient peu claires avant la formalisation des variétés. Une *isométrie* entre deux v.r. (M, g) , (N, h) sera une application $f : M \rightarrow N$ qui préservera les distances d_M et d_N . C'est évidemment toujours le cas si f est un difféomorphisme entre M et N et si $f^*h = g$ (où $f^*h(x, y) = h(Tf(x), Tf(y))$). Réciproquement cela semble évident au vu de l'heuristique "l'élément de longueur est la dérivée de la métrique". Mais il reste justement à montrer que f est bien différentiable, c'est ce qui a été fait par R. PALAIS dans [Pa]. En particulier on pourra parler d'*isométries* d'une variété riemannienne donnée.

On distinguera soigneusement maintenant entre une *métrique* riemannienne (ou une v.r. (M, g)) et une *structure* riemannienne, à savoir un élément du quotient de l'ensemble de toutes les v.r. par la relation d'équivalence "être isométriques". Il faut s'habituer à voir la sphère standard $(S^n, \text{stand.})$ comme une telle classe d'équivalence et non comme $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$; encore que cela soit utile parfois.

Un rôle important commence à être joué maintenant par les *quasi-isométries* de v.r.; à savoir les applications $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ pour lesquelles il existe un réel $a > 0$ avec

$$a^{-1}d_M(p, q) \leq d_N(f(p), f(q)) \leq ad_M(p, q) \quad \text{pour tous } p, q \in M.$$

C'est une notion "à l'infini", elle n'a aucun intérêt dans le cas compact. Voir entre autres [Mh], [G-L], [G-L-P] (chapitre 6) et [G5].

Dans [Ri] RIEMANN s'était demandé de suite comment caractériser les espaces euclidiens parmi les objets qu'il venait de définir, au moins localement. Sa réponse était que la caractérisation cherchée est $K = 0$; et donc la courbure est un bon invariant. Un fait important, plus général, est celui-ci : pour chaque dimension n et chaque réel k il existe une variété simplement

connexe, riemannienne, et telle que $K = k$. Pour les k positifs, ce sont les sphères de rayon $1/\sqrt{k}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$, pour $k = 0$ ce sont les espaces euclidiens et pour les k négatifs les espaces hyperboliques définis par

$$g = \left(1 - \frac{k^2}{4}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right)^{-2} (dx_1^2 + \cdots + dx_n^2) \quad \text{sur} \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 < \frac{4}{k^2}.$$

On notera dans la suite $\mathbf{S}_k^n$ cette variété pour chaque k réel. Alors toute variété simplement connexe, complète et telle que $K = k$, est isométrique à $\mathbf{S}_k^n$. Ces structures riemanniennes sont donc *uniques*. Ce sont des variétés de référence, que nous allons rencontrer abondamment dans la suite, indexées par les réels.

En dimension 1 on peut classer complètement les v.r., question qui n'a guère de sens ensuite pour les $n \geq 2$. Les *structures* riemanniennes sont $(\mathbf{R}, \text{euclid.})$ et les cercles $R/l\mathbf{Z}$ classés par leur seule longueur $l \in]0, \infty[$.

Rappelons que l'un des intérêts d'avoir une notion de variété bien définie est de pouvoir parler de variétés *quotients*, de *revêtements* riemanniens, de *produits* riemanniens. Les quotients, surtout les compacts, des $\mathbf{S}_k^n$ sont d'un grand intérêt en topologie, géométrie, arithmétique. Lorsque le groupe par lequel on fait le quotient est un groupe d'isométries de la variété de départ, la variété quotient hérite naturellement une métrique riemannienne. Dans le cas des $\mathbf{S}_k^n$ elles ont été appelées les "formes d'espace", "formes de Clifford-Klein". Parmi elles on trouve d'abord les espaces lenticulaires pour $k > 0$. Pour $k = 0$ ce sont les tores plats associés aux réseaux des espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$; tous ces tores plats sont difféomorphes au tore de dimension $n : T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = (S^1)^n$, mais en général ils ne sont pas isométriques entre eux. Pour les $k < 0$, on obtient des variétés hyperboliques. En dimension $n = 2$ on obtient ainsi des structures hyperboliques sur toutes les surfaces de genre plus grand que 1 et, sur une donnée d'entre elles, l'ensemble des structures riemanniennes à $k = -1$ est l'espace des modules.

6. Élie Cartan de 1926 à 1928

Dans ces trois années son oeuvre de *géométrie* riemannienne est à la fois très importante et très nombreuse; elle couvre largement plus de cinq cents pages. J'en retiendrai seulement, à la fois comme centre de l'exposé et pour leurs prolongements, deux points principaux : les espaces symétriques et les variétés à courbure négative ou nulle. Je signale rapidement une autre de ses contributions : la caractérisation d'une v.r. par la connaissance du tenseur de courbure le long des géodésiques issues d'un point, ce qui entraîne le fait qu'une v.r. analytique réelle est déterminée, au moins localement, par la donnée en un point du tenseur de courbure et de toutes ses dérivées

covariantes. Ce qu'est le résultat global optimal n'est pas clair actuellement, voir [A], [He], [Hk].

Motivé entre autres par ses travaux sur les espaces symétriques Élie CARTAN publia en 1928 un livre exceptionnel *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Dans la préface il écrit :

“Les services éminents qu'a rendus et que rendra encore le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita ne doivent pas nous empêcher d'éviter les calculs trop exclusivement formels, où les débauches d'indices masquent une réalité géométrique souvent très simple. C'est cette réalité que j'ai cherché à mettre partout en évidence.”

De cette réalité géométrique, on ne trouvait pratiquement rien dans l'interrègne]1898, 1926[. Dans la seconde édition des *Leçons*, parue en 1951, CARTAN ajouta beaucoup de choses, en particulier sur les espaces symétriques. Ces deux éditions constituent le seul livre où les étudiants pouvaient apprendre la géométrie riemannienne jusqu'aux années 1960. À partir de cette date virent le jour plusieurs cours, qui furent polycopiés puis donnèrent lieu à des ouvrages. Sauf omission les cinq premiers furent [B-C], [G-K-M], [Mi], [Hks] et [S]. Un bon article de synthèse à lire pour les chercheurs débutants était celui de A. PREISSMANN : [Pr]. Bien sûr il existait de nombreux ouvrages de Géométrie Différentielle, mais il eût été impossible d'y trouver un exposé et des exemples des propriétés métriques des v.r.

7. Les espaces symétriques

La notion locale de *variété riemannienne symétrique* est celle-ci : en chaque point p d'une telle v.r., la *symétrie géodésique* de centre p , définie seulement localement, est une isométrie, c'est-à-dire que pour toutes les figures du type ci-dessous, on a $d(q, r) = d(q', r')$ (figure 8).

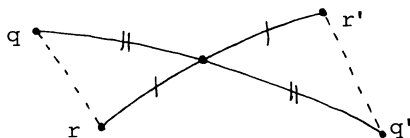


Fig. 8

Par composition de telles symétries on voit de suite qu'une telle variété riemannienne est localement un espace homogène riemannien, c'est-à-dire que son groupe d'isométries locales est transitif. Mais c'est savoir peu de chose. En 1926 Élie CARTAN réussit à classer complètement les variétés riemanniennes localement symétriques (et les globales aussi). Sans y insister

signalons simplement que lorsque la variété considérée est simplement connexe, tout peut être fait globalement. La morale est que la condition de symétrie s'avère extrêmement forte, donnant très peu d'espaces possibles, et pour eux, des propriétés remarquables. La classification locale dit ceci : toute telle structure est le produit fini de celles de ces structures qui sont de plus *irréductibles*, c'est-à-dire ne sont pas des produits riemanniens. Les structures locales irréductibles apparaissent par paires, où l'une est à courbure positive ou nulle, l'autre à courbure négative ou nulle : le fait surprenant est donc que la courbure est toujours d'un signe donné. Enfin il y a une liste explicite, comprenant seulement un nombre fini de telles structures en dimension donnée.

En outre CARTAN sut préciser exactement là où la courbure est nulle. Chaque espace symétrique (local ou non) possède un *rang*. Ce rang est additif pour le produit. Le rang est la dimension commune à des sous-variétés plates (i.e. à courbure nulle) et totalement géodésiques (i.e. la métrique induite coïncide avec la métrique riemannienne induite). Ces sous-variétés plates sont transformées les unes en les autres par le groupe d'isométries de l'espace considéré. Dans le cas simplement connexe, si on est dans un espace irréductible à $K \geq 0$, ces sous-variétés plates sont des tores, et dans le cas $K \leq 0$ ce sont des espaces euclidiens. Tout plan de courbure nulle appartient à l'une de ces sous-variétés.

Cette étude permet d'étudier complètement le comportement global des géodésiques de ces espaces symétriques simplement connexes, puisque ce sont celles, dans le cas compact (i.e. à $K \geq 0$) de tores plats. En particulier, lorsque le rang vaut 1 et dans le cas compact toutes les géodésiques sont périodiques et la courbure est strictement positive. En fait elle varie précisément entre 1 et 4 (excepté pour les sphères où elle vaut identiquement 1) ; ces espaces sont exactement les espaces projectifs $\mathbf{K}P^n$ où le corps K peut être celui des complexes, des quaternions et les octaves de Cayley si $n = 2$. Lorsque la courbure est négative, on est dans une situation duale ; le cas de rang 1 est celui des espaces hyperboliques ordinaires (réels), complexes, quaternioniens et celui sur les octaves si $n = 2$. Dans ces derniers cas la courbure, strictement négative, varie entre -4 et -1 .

Les espaces symétriques sont les espaces homogènes les plus importants ; outre ceux précisés ci-dessus, on trouve les grassmanniennes sur les différents corps, leurs duales à courbure négative ou nulle. Et quelques espaces de définition très géométriques. Nous retrouverons dans la section 9 les espaces symétriques et leurs parties plates. Les références pour tout ceci sont [C1] et [C2].

Voyons maintenant comment Élie CARTAN maniait la géométrie métrique pour étudier les groupes de Lie. Il s'agit de démontrer que le second groupe d'homotopie d'un groupe de Lie compact simplement connexe est nul :

$\pi_2(G) = 0$, [C5]. Nous utilisons la notion de cut-locus, déjà rencontrée et qui fera l'objet détaillé de la section 10. Soit e le point élément neutre du groupe de Lie considéré. Un groupe de Lie est un espace symétrique pour lui-même (précisément comme diagonale du carré de lui-même). L'étude des géodésiques faite ci-dessus par CARTAN lui permet de montrer que si un point q du groupe appartient au cut-locus $\text{Cut}(e)$ de e , alors e et q sont joints par ∞^2 plus courts chemins (figure 9). Il en résulte que $\text{Cut}(e)$ est un ensemble stratifié, de codimension supérieure ou égale à 3. Il est classique alors que l'on peut rétracter sur e toute image dans G d'une sphère de dimension 2. C'est donc bien que $\pi_2(G) = 0$.

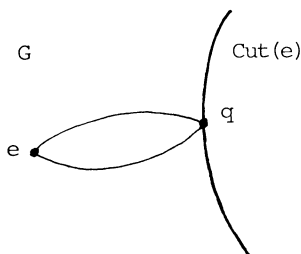


Fig. 9

Les espaces symétriques se rencontrent partout en théorie des groupes et algèbres de Lie, en Analyse. Mentionnons ici plutôt l'étude faite par D. FERUS sur les sous-variétés symétriques des espaces euclidiens : [Fe]. De même que les espaces symétriques étaient profondément reliés aux algèbres de Lie, de même FERUS découvre un lien entre ces objets et les algèbres de Jordan.

Voir aussi, dans ces actes les conférences de J. DUFLO, S. HELGASON, J. TITS et W. SCHMID. Enfin les espaces symétriques arrivent inopinément dans la classification des groupes d'holonomie : [Ss].

8. Élie Cartan et les variétés à courbure négative

Comme pivot du présent texte je prends les deux résultats suivants, qui figurent dans la Note III de la première édition (1928) des Leçons.

THÉORÈME A (dit aujourd'hui de Hadamard-Cartan). — *Si une variété riemannienne est à courbure négative ou nulle, alors dans chaque classe d'homotopie de chemins joignant deux points il existe une et une seule géodésique.*

COROLLAIRE A'. — *Si M est de plus simplement connexe, tout point est un pôle. En particulier M est difféomorphe à R^n .*

THÉORÈME B. — On suppose M simplement connexe et $K \leq 0$. Soient p, q, r trois points de M . D'après A' ils déterminent un triangle géodésique unique ; appelons-en a, b, c les longueurs des côtés (i.e. les distances mutuelles des sommets) et α l'angle en p . Alors on a toujours :

$$a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Le théorème A est dû à HADAMARD en dimension 2, voir section 3. Le théorème B est en général attribué à PREISSMANN. Je dois à H. KARCHER de m'avoir signalé qu'il était dans la première édition des Leçons et complètement démontré. Dans son texte de 1943 PREISSMANN écrit "ce résultat est dans ÉLIE CARTAN pour les triangles infiniment petits". On peut paraphraser le théorème B en disant : lorsque $K \leq 0$ alors les géodésiques divergent au moins autant que celles de l'espace euclidien (figure 10).

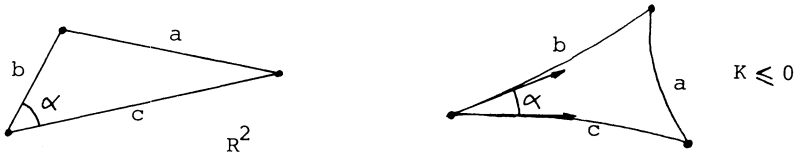


Fig. 10

Quelques commentaires sur la nature de A, A', B . Le A résoud, au moins qualitativement, le problème des plus courts chemins dans les v.r. à $K \leq 0$. Le A' ressort du vaste sujet "courbure et topologie". Ce n'est dans notre sujet que dans la mesure où la métrique intervient dans les démonstrations, à moins de considérer artificiellement que la courbure est métrique. Nous rencontrerons "courbure et topologie" amplement ci-dessous. Pour des exposés plus complets sur le sujet, voir [B3], [Si4], [Sh]. Enfin l'on peut considérer le B comme de l'"hypertrigonométrie", puisque $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ dans l'espace euclidien. Nous y reviendrons. La démonstration d'ÉLIE CARTAN sera esquissée dans la section 13.

Voici deux applications du théorème B que CARTAN donna lui-même de son résultat. Disons qu'un point p d'une v.r. (M, g) est un centre de gravité de la partie compacte C de M si la fonction

$$q \mapsto \int_C d^2(q, \cdot)$$

atteint son minimum au point p . Cette définition est raisonnable puisque le centre de gravité d'un compact d'un espace euclidien vérifie cette propriété de minimum (ceci remonte à Appolonius). Un tel centre de gravité existe toujours, mais n'est pas unique en général : prendre $(M, g) : (S^n, \text{standard})$

et pour compact C la sous-sphère S^{n-1} . Auquel cas il y a deux centres de gravité, le pôle nord et le pôle sud.

THÉORÈME ([C4], note III). — *Dans une v.r. (M, g) simplement connexe et où $k \leq 0$ tout compact possède un centre de gravité unique.*

La démonstration utilise simplement la formule de la variation première et le théorème b. Voici les deux corollaires d'Élie CARTAN.

COROLLAIRE 1 ([C4], note III). — *Si une variété non nécessairement compacte M possède une métrique riemannienne telle que $K \leq 0$ alors son groupe fondamental $\pi_1(M)$ est toujours infini.*

Munissons en effet le revêtement universel $\widetilde{M}$ de la métrique riemannienne image inverse $\widetilde{g}$. Celle-ci est localement isométrique à g , donc encore à $K \leq 0$. Or si le groupe fondamental de M était fini, alors l'orbite d'un point quelconque de M sous l'action de ce groupe opérant par les automorphismes de revêtement serait un ensemble fini. Il a un centre de gravité unique, donc fixe par ce groupe car il opère par isométrie sur $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ par construction même de $\widetilde{g}$. C'est l'absurdité cherchée (figures 11 et 12).

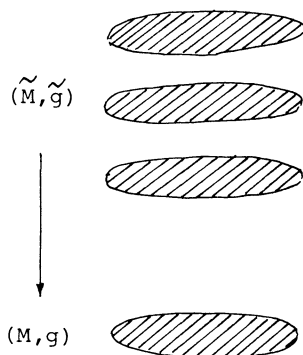


Fig. 11

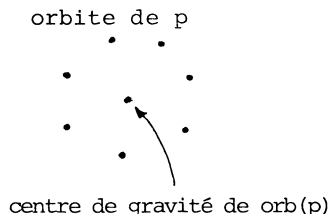


Fig. 12

Dans le sujet "courbure et topologie" c'est le premier résultat pour le cas des v.r. à courbure négative ou nulle. En effet le théorème d'Hadamard-Cartan dit que, pour ces variétés, "tout est dans le groupe fondamental". Nous en parlerons plus dans la section suivante.

COROLLAIRE 2 ([C5]). — *Dans un groupe de Lie tous les sous-groupes compacts maximaux sont conjugués.*

C'est un très beau Zusammenstellung du théorème ci-dessus et du fait que le quotient d'un groupe de Lie non compact, semi-simple par un sous-groupe compact maximal est un espace symétrique à courbure négative ou nulle.

Pour le cas général on se ramène au cas semi-simple. Soit G est un tel groupe semi-simple et H un sous-groupe compact maximal; l'espace homogène G/H est donc à $K \leq 0$. Soit maintenant un sous-groupe compact quelconque H' de G . Il détermine dans G/H une orbite compacte, qui possède un centre de gravité unique, donc fixe par H' . Ce point fixe traduit exactement le fait qu'il existe un automorphisme intérieur a de G tel que $a(H') \subset H$.

9. Les variétés à courbure négative ou nulle

Que peut-on faire de plus qu'Élie CARTAN avec l'inégalité $a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$? D'abord ceci, dû à PREISSMANN en 1943 : *si une variété compacte M porte une métrique riemannienne à $k \leq 0$ alors tout sous-groupe abélien de $\pi_1(M)$ est nécessairement cyclique*. Considérons dans (M, g) une géodésique périodique γ appartenant à un élément s du groupe fondamental; elle existe par compacité. Soit t un élément du groupe fondamental qui commute avec s . En haut, dans le revêtement universel riemannien $(\tilde{M}, \tilde{g})$ on obtient donc deux isométries s et t qui commutent : $s \circ t = t \circ s$. Prenons un relèvement quelconque $\tilde{\gamma}$ de γ et un point quelconque p sur $\tilde{\gamma}$. Étudions le quadrilatère $\{p, s(p), t(p), s(t(p)) = t(s(p))\}$. Ses côtés sont bien déterminés d'après le corollaire A'. Ce qui le fournit avec quatre angles. Comme $\tilde{\gamma}$ est une géodésique périodique, on a $t(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$ et donc les angles marqués α sur la figure 13 sont bien égaux. Le même raisonnement s'applique à $s(\tilde{\gamma})$ et fournit encore deux angles égaux, marqués β . On en déduit que la somme des quatre angles intérieurs du quadrilatère vaut exactement 2π . Maintenant découpons notre quadrilatère en deux à l'aide du plus court chemin de $s(p)$ à $t(p)$. Chacun des deux triangles ainsi obtenus est justiciable du théorème B ainsi relu : la somme des angles d'un triangle d'une v.r. à $K \leq 0$ est toujours inférieure ou égale à π (et la démonstration montre que l'inégalité est stricte dès qu'il y a dans le triangle un point à courbure strictement négative). Ainsi la somme de six angles de la figure est-elle strictement inférieure à $\pi + \pi = 2\pi$. Mais l'inégalité du triangle sur la sphère S^2 montre que l'angle en $s(p)$ du quadrilatère est inférieure ou égale à la somme des deux angles des triangles concernés en $s(p)$. De même $t(p)$. D'où une contradiction! A moins que nous n'ayons pas vraiment un quadrilatère mais quatre points alignés sur une géodésique. Mais cela c'est exactement dire que s et t appartiennent à un même groupe cyclique.

Le résultat de PREISSMANN a été étendu en une forme optimale par GROMOLL-WOLF et LAWSON-YAU ([G-W], [L-Y]). *Soit (M, g) compacte à $k \leq 0$. Alors, si $\pi_1(M)$ n'a pas de centre et est un produit de groupes abstraits : $\pi_1(M) = A_1 \times A_2$, nécessairement (M, g) est isométrique à un produit riemannien $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ où $\pi_1(M_1) = A_1$ et $\pi_1(M_2) = A_2$. Ce théorème*

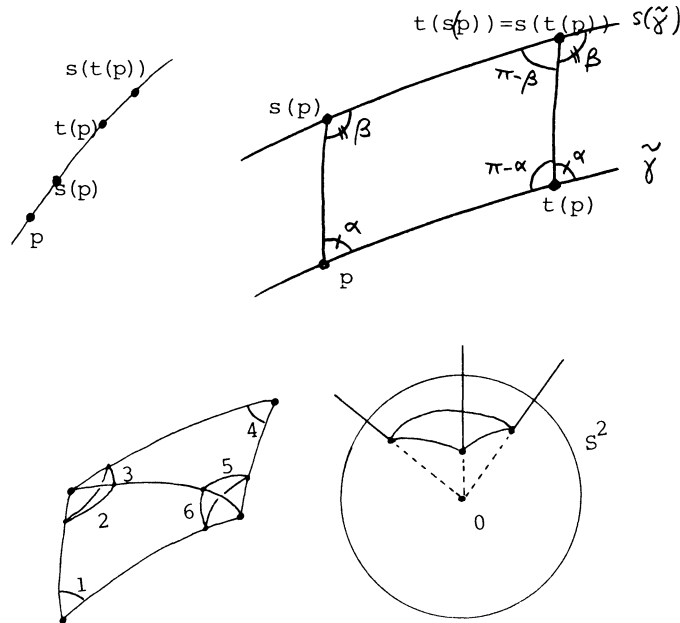


Fig. 13

vient d'être étendu par V. SCHROEDER au cas où l'on demande seulement que (M, g) soit de *volume fini*. La démonstration de SCHROEDER [Sr2] est extrêmement géométrique. Elle utilise sur (M, g) la fonction déplacement $p \mapsto d(p, a(p))$ associée à un a de $\pi_1(M)$. L'hypothèse $K \leq 0$ implique que cette fonction est convexe. Noter que la démonstration de [L-Y] supposait l'analyticité. Et que l'idée de base est de construire dans nos variétés des *tores* maximaux (sous-variétés plates, totalement géodésiques du type du tore).

Ces dernières années la théorie des v.r. à courbure négative ou nulle vient de faire d'autres progrès spectaculaires dans la lecture de leur groupe fondamental. Dans ces démonstrations une idée de base est de *s'appuyer sur les points à l'infini* de M . Voici quelques résultats récents. Dans toute la fin de cette section on supposera implicitement les v.r. à $K \leq 0$.

Par exemple on peut lire sur le π_1 (comme groupe abstrait bien sûr) si M est compacte. V. SCHROEDER ([Sr1]) peut lire même si (M, g) est de volume fini. Plus généralement il étudie les *bouts* de M qui sont de volume fini (les bouts d'une variété sont les composantes connexes stables des complémentaires de compacts de la variété qui l'épuisent.) W. BALLMANN et P. EBERLEIN ont défini pour un groupe abstrait discret finiment engendré une notion de *rang* purement algébrique donc. Leur résultat est que si le $\pi_1(M)$ d'une v.r. compacte est de rang supérieur ou égal à 2, alors nécessairement

(M, g) est un espace localement symétrique (de rang d'espace égal au rang de groupe). L'idée de la démonstration est d'arriver à reconstruire par des techniques comme ci-dessus des parties plates totalement géodésiques de (M, g) et suffisamment nombreuses pour reconstituer complètement la structure d'espace symétrique analysée en section 7 sur (M, g) . Voir [B-E]. Mais aussi [B-B-E] et [B-B-S]. Une notion essentielle dans ces techniques est celle de *rang géométrique* : c'est la dimension maxima des espaces de champs de Jacobi parallèles. De tels champs n'existent pas en général, mais ici on en construit, encore une fois en s'appuyant sur l'infini.

Par ailleurs *les quotients compacts des espaces symétriques de rang supérieur ou égal à 2 sont extrêmement rigides. C'est déjà vrai pour le rang 1 si la dimension dépasse 2*, c'est un résultat obtenu pour la première fois par G. MOSTOW par des techniques d'Analyse; on trouvera dans [Mh] une démonstration géométrique, métrique, de M. GROMOV. Cette rigidité a été ensuite étendu au cas de rang quelconque : [Mw1]. La rigidité dont il s'agit est celle-ci : si deux tels quotients compacts d'un même espace symétrique simplement connexe, irréductible, à courbure négative ou nulle, sont topologiquement les mêmes alors ils sont isométriques. Ce qui est faux pour les surfaces hyperboliques de genre plus grand que 1 car il y a un espace de module non trivial. Pour ces rigidités, voir [Mw1] et l'article de synthèse [Mw2].

M. GROMOV a récemment découvert une rigidité encore plus surprenante pour les quotients compacts des espaces symétriques à $K \leq 0$ et rang supérieur ou égal à 2 : [G2]. *Soit M un tel quotient compact; alors toute métrique riemannienne sur M qui est $K \leq 0$ est nécessairement localement symétrique* (et donc isométrique à celle de départ d'après MARGULIS-MOSTOW). Un tel résultat est absurde dans le cas de rang 1 puisque l'on a vu qu'alors $-4 \leq K \leq -1$, donc il y a plein de place pour déformer une telle métrique avant d'obtenir de la courbure positive! La démonstration de GROMOV consiste elle aussi à construire des *parties plates totalement géodésiques* par des méthodes métriques. A son tour ce résultat de GROMOV résulte maintenant de [B-E].

Et le cas de la courbure strictement négative? Remarquons d'abord que, dans le langage de BALLMANN-EBERLEIN, le résultat de PREISSMANN s'énonce : si $K \leq 0$ alors le rang algébrique de $\pi_1(M)$ est nécessairement égal à 1. Voir aussi [B-B-S]. Etudions maintenant ce que pourrait être un résultat de rigidité, pour les métriques à courbure variable éventuellement, sur les quotients compacts des symétriques de rang égal à 1, donc de courbure comprise entre -4 et -1 . Ce serait : toute métrique riemannienne sur un quotient compacte (considéré comme variété seulement ensuite) d'un espace symétrique de rang 1 et à courbure négative est nécessairement localement symétrique si la courbure est obligée à rester dans l'intervalle

$[-4, -1]$. Ce résultat, conjecturé par GROMOV, vient d'être démontré par M. VILLE à l'aide des formules intégrales de CHERN en dimension $n = 4$. Cette méthode est vouée à l'échec en dimensions supérieures; il faudra inventer une méthode géométrique du type de celles ci-dessus. Précisons que le résultat ci-dessus doit excepter le cas de la courbure constante égale à -1 , pour lequel évidemment il y a encore de la place avant d'atteindre -4 ! Voir [Vi1] et [B-P].

Note. — On peut relire le théorème B de CARTAN en convexité de certaines fonctions (voir plus haut) ou de certaines figures. C'est ainsi que l'hypothèse $K \leq 0$ est équivalente à celle-ci : pour tout quadrilatère, les milieux marqués sur la figure et les distances marquées d, d', d'' on a toujours $d \leq (d' + d'')/2$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si tout le quadrilatère appartient à une surface plate totalement géodésique (voir figure 14). Voir aussi la section 18. Voir aussi les articles de synthèse : [Ii], [Sa], [Sh].

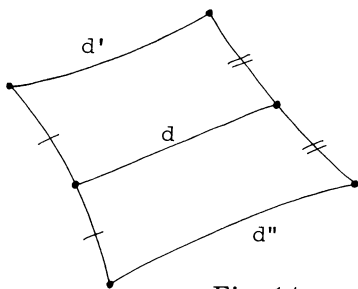


Fig. 14

10. Unicité du plus court chemin : cut-locus

Avant de continuer avec les inégalités qui généralisent celle $a^2 \geq b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ d'Élie CARTAN dans différentes directions, nous revenons à la géométrie purement métrique avec la recherche du plus court chemin entre deux points; nous savons déjà qu'il en existe toujours au moins un. Sa recherche quantitative se fait avec l'équation des géodésiques; si l'on connaît celles-ci, ce qui est très rare, on peut espérer décider de l'unicité. En général il est seulement possible de faire du qualitatif.

On fixe ici un point p de (M, g) et l'on considère les géodésiques γ issues de p . Elles sont paramétrées par les vecteurs tangents unitaires x de $T_p M$, soit γ_x cette géodésique. Pour t assez petit la géodésique γ_x réalisera la distance entre $p = \gamma_x(0)$ et $\gamma_x(t)$, soit t (figure 15). On montre que l'ensemble des t pour lesquels ceci est vrai est un intervalle $[0, \text{coup}(x)]$ de R , éventuellement

$[0, \infty[$ si le réel $\text{coup}(x)$ associé à x appelé *valeur de coupure* de x , est infini (la géodésique γ_x est alors ce que nous appellerons plus loin une *demi-droite*) (figure 15). Si M est compacte par exemple alors $\text{coup}(x)$ est toujours finie. Au delà de $\text{coup}(x)$ la géodésique γ_x n'est plus jamais un plus court chemin. L'ensemble des points limites $\gamma_x(\text{coup}(x))$ est appelé le cut-locus de p et noté $\text{Cut}(p)$. Depuis F. WARNER ([Wr]) on sait que c'est aussi l'adhérence des points de (M, g) qui peuvent être joints à p par au moins deux plus courts chemins; nous allons voir que ce résultat n'est pas évident.

Connaître $\text{Cut}(p)$ c'est avoir résolu le problème de l'unicité des plus courts chemins issus de p . Notez que, par exemple, les pôles de (M, g) sont exactement les points dont le cut-locus est vide.

La difficulté dans l'étude du cut-locus est la *double possibilité* suivante : s'il existe *deux* plus courts chemins au moins de p à q , alors certainement $q \in \text{Cut}(p)$. C'est le cas où l'application exponentielle $\exp_p$ n'est pas injective au-dessus de q . Mais il se peut que q appartienne à $\text{Cut}(p)$ et qu'il y ait cependant un *unique* plus court chemin de p à q . Mais alors nécessairement q est conjugué de p sur ce plus court chemin, c'est-à-dire que l'application exponentielle $\exp_p$ n'est plus de rang maximum n au-dessus de q . Disons qu'alors on est *dans le cas II*, l'autre cas étant dit le I (figure 15). Les deux sont d'ailleurs possibles simultanément, regarde la sphère standard ou les projectifs complexes par exemple.

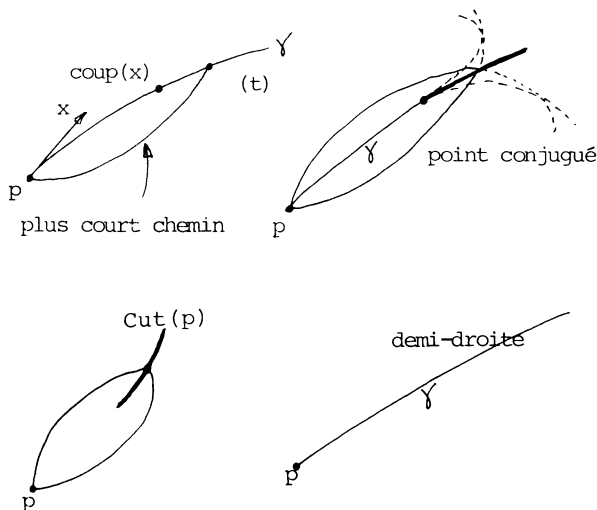


Fig. 15

Le cas I est *géométrique*, tandis que le cas II est *différentiel*. C'est lui qui est facile à contrôler : avec des techniques de Sturm-Liouville sur l'équation

des champs de Jacobi (voir section 13) on montre que si la courbure vérifie $k \leq K \leq \bar{k}$ alors il n'y a pas de point conjugué avant $\pi/\sqrt{\bar{k}}$ mais il y en a toujours un avant $\pi/\sqrt{\underline{k}}$ si $\underline{k} > 0$. Le cas I se produit en tout cas à cause des lacets géodésiques d'origine p , voir la prochaine section.

On a vu que POINCARÉ fut le premier à étudier le cut-locus, dans le cas des surfaces convexes. Son étude, dans le cas des surfaces générales, fut reprise (retrouvée en fait) par S. MYERS en 1935 et complétée. MYERS montre que, dans le cas analytique réel, *le cut-locus est un complexe simplicial*. Et que le nombre de plus courts chemins qui vont de p à $q \in \text{Cut}(p)$ est égal au nombre de branches de ce complexe qui arrivent en q . Cette étude est justement l'un des rares travaux métriques en géométrie riemannienne de l'intervalle]1928, 1951[. Voir [My1] et le début de la section 15.

Les résultats ci-dessus sont élémentaires. Par contre ceux qui suivent sont très difficiles, utilisant des théorèmes fins de stabilité; voire la résolution des singularités d'Hironaka. L'existence des cas I et II rend en outre ces théorèmes d'une démonstration plus difficile qu'une simple application des théories générales indiquées. De 1977 à 1978 M. BUCHNER a montré ([Bh2 et 3]) que *le cut-locus d'une v.r. est stable pour une v.r. générique*. Il a étudié ses *formes stables jusqu'en dimension 4*. Voir figure 16 pour les dimensions 2 et 3.

Enfin il a montré que *le cut-locus est toujours triangulable* ([Bh1]) *dans le cas analytique réel*. Enfin C.T.C. WALL ([Wl]) a montré que *le cut-locus est triangulable pour une v.r. générique*. A contrario H. GLUCK et D. SINGER ont *construit des v.r. avec des cut-loci non triangulables* pour une partie ouverte non vide de leurs points ([G-S]).

Tout ce qui précède est qualitatif. Quantitativement le cut-locus est presque un illustre inconnu. *Il n'a été déterminé explicitement que pour* : les quadriques de R^3 ([Bü], [vMt]), les B -sphères mentionnées en section 12 par T. SAKAI ([Si3]), les espaces symétriques compacts quelconques par R. CRITTENDEN ([Cr]), T. SAKAI ([Si1 et 2]) et M. TAKEUCHI ([Ta]). Voir aussi A. BESSE ([Be]) pour certaines surfaces de révolution. Pour les espaces de rang 1, les KP^n , le cut-locus d'un point p est l'hyperplan projectif dual-métrique de p .

Il nous semble que le cut-locus n'est pas connu en particulier pour : les quadriques des R^n ($n \geq 4$), les métriques homogènes sur la sphère S^3 . Ces dernières correspondent aux mouvements d'un solide de R^3 autour de son centre de gravité, ce sont les géodésiques d'une métrique riemannienne homogène sur S^3 . Lorsque deux moments d'inertie sont égaux, ce sont les B -sphères précédentes, mais lorsque les trois moments d'inertie sont distincts, la structure globale des géodésiques de S^3 n'est pas connue. On demande un logiciel "cut-locus".

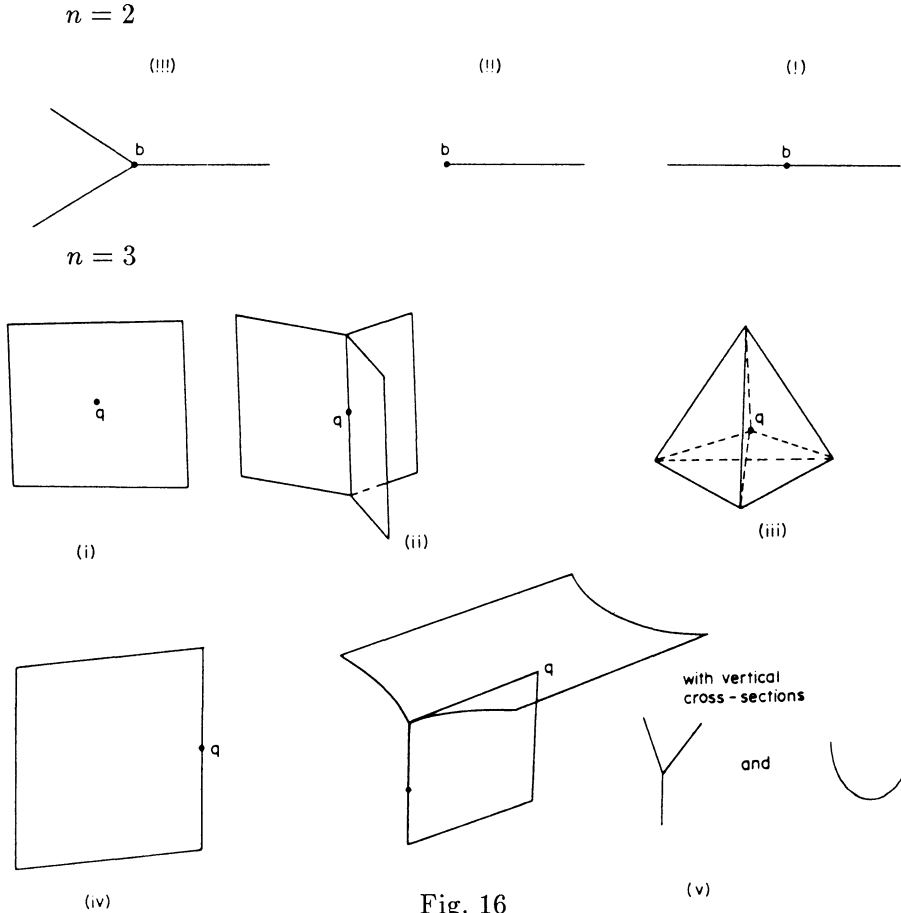


Fig. 16

Pour l'étude d'une v.r. en son cut-locus et juste au-delà, voir aussi [A], [He], [Hk].

11. Le rayon d'injectivité

A défaut de connaître, même qualitativement, les cut-loci des points d'une v.r., un problème essentiel reste d'avoir une assurance de ne pas le rencontrer si l'on ne va pas trop loin. *Le rayon d'injectivité de (M, g) en p , noté $\text{Inj}(p)$, est la borne inférieure des valeurs de coupures en p : $\text{Inj}(p) = \inf\{\text{coup}(x) : x \in U_P M\}$. C'est aussi la distance de p à l'ensemble constitué par son cut-locus : $\text{Inj}(p) = d(p, \text{Cut}(p)) = \inf\{d(p, q) : q \in \text{Cut}(p)\}$. Le fait essentiel est que, si son rayon est strictement inférieur à $\text{Inj}(p)$, la boule de centre p et de rayon r :*

$$B(p, r) = \{q \in M : d(p, q) < r\}$$

est alors difféomorphe à $\mathbf{R}^n$. C'est faux en général, prendre une variété compacte et pour rayon son diamètre!

Le rayon d'injectivité de (M, g) , noté $\text{Inj}(g)$, est la borne inférieure sur M des rayons d'injectivité de ses points :

$$\text{Inj}(g) = \inf \{ \text{Inj}(p) : p \in M \}.$$

Il peut être nul, mais il est toujours strictement positif si M est compacte. Il est fondamental de savoir le minorer. L'existence des cas I et II se retrouve dans le résultat de base de W. KLINGENBERG (pressenti par POGORELOV en dimension 2) : $\text{Inj}(g)$ est supérieur ou égal au plus petit des deux nombres suivants : $\pi/\sqrt{k}$ où $k = \sup_M K$ et la moitié de la longueur de la plus petite géodésique périodique non triviale de (M, g) (voir [C-E] ou [Kl]) (figure 17).

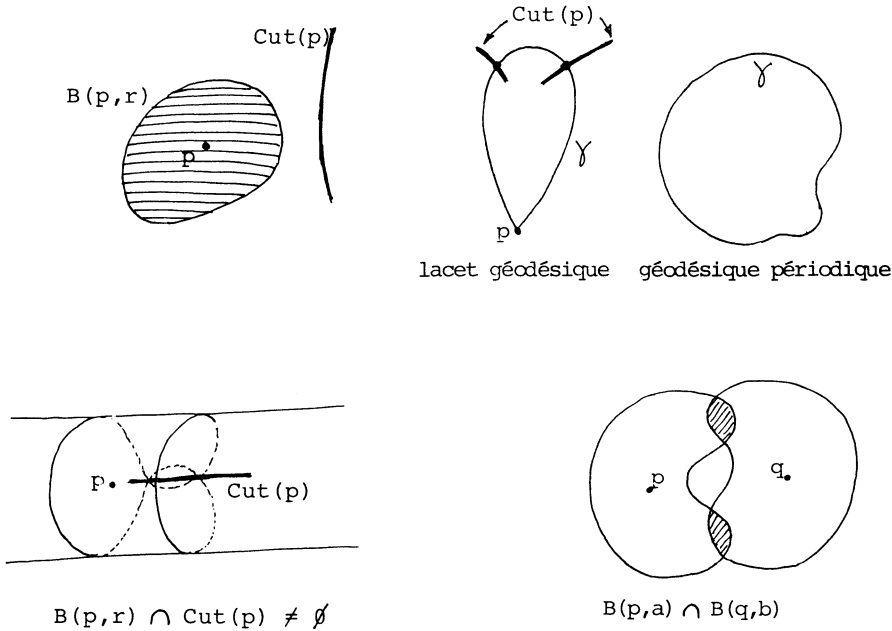


Fig. 17

Nous rencontrons ainsi naturellement les *géodésiques périodiques*, invariants métriques importants des v.r. Nous n'avons pas le temps de nous y attarder; métriquement on peut les définir comme les parties d'une (M, g) qui sont localement isométriques à un cercle $R/l\mathbb{Z}$. L'isométrie peut être globale mais c'est très rare.

Le rayon de convexité $\text{Conv}(g)$ d'une (M, g) est le nombre qui assure que toute boule ouverte $B(p, r)$ de rayon inférieur ou égal à ce nombre

est géodésiquement convexe. Le minorer est facile “à la Klingenberg” : *il est toujours supérieur ou égal à la moitié du rayon d’injectivité $\text{Inj}(g)$ et à $\pi/2\sqrt{k}$* . Son rôle est capital pour étudier la topologie de M . Si en effet on recouvre M par des boules convexes en nombre N , alors le nombre de types d’homotopie possibles pour M sera borné à l’aide seulement de N , puisque une intersection quelconque de ces boules sera toujours contractible (figure 17). Or on peut estimer facilement le cardinal N à l’aide du rayon de convexité, du diamètre de (M, g) et de $\sup_M |K|$. On en déduit un *théorème de finitude* pour les types d’homotopie possibles des variétés riemanniennes ayant de telles bornes, voir [Ch 1], [Ps], [Fu], [Si 4], [We]. Un résultat très plaisant de J. CHEEGER dit que l’on peut remplacer la borne inférieure sur le rayon d’injectivité par une borne inférieure sur le volume total $\text{Vol}(g)$. Précisément CHEEGER *peut borner inférieurement le rayon d’injectivité en fonction seulement de $\text{Vol}(g)$, $\sup_M |K|$ et $\text{Diam}(g)$* . Une démonstration excellente et plus naturelle se trouve dans [H-K].

12. Digression sur la nature de la courbure sectionnelle

Nous avons vu que c’est un être difficile. Pour aider le lecteur à se faire (ou à se défaire) une intuition, voici d’abord quelques exemples : (Nous nous restreignons au cas compact. Sinon voir par exemple [Sh], [G-L], [Sr1].)

1) il existe des variétés à courbure strictement positive autres que la sphère, ce sont les $\mathbf{K}\mathbf{P}^n$ vus plus haut ;

2) considérons la fibration de Hopf $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbf{C}\mathbf{P}^n$. Changeons la métrique canonique de S^{2n+1} uniquement verticalement, en rendant les fibres de plus en plus petites et en laissant la métrique horizontale fixe. Un calcul montre qu’alors K reste bornée par 1 (après normalisation), reste positive alors que le rayon d’injectivité tend vers 0. A la limite S^{2n+1} s’écrase sur $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$. Equipées de telles métriques, on les appelle des B -sphères. On peut à bien bien meilleur marché s’écraser sur $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ en prenant des quotients de la fibration de Hopf par des groupes Z/fZ avec un entier f tendant vers l’infini, mais nous ne sommes pas restés sur S^{2n+1} , une variété fixe ;

3) des tores plats T^n , étant à courbure identiquement nulle, peuvent être écrasés sur tout tore T^m avec $m < n$, en particulier sur un point T^0 . Il n’y a qu’à prendre des réseaux rectangulaires convenables. En conclusion un tore a la propriété de posséder des métriques à courbure bornée (nulle ici) et de diamètre aussi petit que l’on veut. D’autres variétés possèdent cette propriété, les *nilvariétés compactes*, c’est-à-dire les quotients compacts de groupes de Lie nilpotents, ou si l’on préfère les variétés qui si déviennent par des fibrations en cercles S^1 jusqu’en un point. Le *théorème* de GROMOV (1978) *sur les variétés presque-plates*, complété par E. RUH en 1984, dit que

les nilvariétés sont les seules à porter des métriques de diamètre aussi petit que l'on veut tout en restant à $|K| \leq 1$. Sa démonstration, très longue et très fine ([B-K]) en fait l'un des théorèmes les plus difficiles de toute la géométrie différentielle. Les théorèmes d'hyper- et d'hypotrigonométrie ci-dessous y jouent un rôle essentiel;

4) a contrario GROMOV a pu malmené suffisamment la sphère S^3 pour la rendre de diamètre aussi petit que désiré tout en gardant l'hypothèse $K \leq 1$. Il y a donc nécessairement de la courbure très négative. Depuis C. BAVARD a étendu ce résultat à toutes les variétés de dimension 3 et obtenu en outre des métriques à volume fini, voir [Bav].

On aura noté que le rayon d'injectivité tend vers 0 dans tous les écrasements précédents. On doit à GROMOV d'avoir bien éclairci ce phénomène à l'aide des deux résultats ci-dessous.

LE PREMIER est que si $|K| \leq 1$, le diamètre borné et le rayon d'injectivité minoré (des conditions évidemment nécessaires) alors il n'y a pas d'écrasement possible. Mieux, dans l'ensemble de toutes les v.r. satisfaisant uniformément ces conditions, il y a une compacité faible en ce sens : toute suite admet une limite, qui est une variété lisse de dimension égale à la dimension supposée commune de notre suite, la limite est une métrique riemannienne mais seulement C^0 . Voir [G-L-P], chap. 8 et [Kt]. On sait depuis tout récemment démontrer que la limite $C^{1,1}$; la démonstration utilise les coordonnées de la section 19, voir [Du2].

Signalons en passant un résultat de précompacité de GROMOV pour l'ensemble des variétés riemanniennes de dimension donnée avec la seule hypothèse que le diamètre est majoré et la courbure de Ricci minorée par un réel (à cela près quelconque). La courbure de Ricci est la trace en x de la forme biquadratique $R(x, y, x, y)$; c'est une forme différentielle bilinéaire symétrique sur M . La trace de la courbure de Ricci, soit donc la double trace de R , est appelée courbure scalaire, notée u ; c'est une fonction numérique sur M . La courbure de Ricci sera notée ricc . On sait interpréter métriquement la courbure de Ricci à l'aide des hypersurfaces que sont les sphères géodésiques d'un point donné. Il ne semble pas que l'on possède une interprétation métrique de la courbure scalaire. Avec la mesure d'une v.r. la courbure de Ricci s'interprète très agréablement : elle fournit, quand elle est minorée, une borne supérieure pour le volume des boules métriques, c'est le théorème de R. BISHOP, voir [G-L-P], page 65. C'est le point clef dans la précompacité de GROMOV.

LE SECOND résultat de GROMOV est que, pour certaines variétés M il n'y a jamais d'écrasement possible sur quelque variété ou objet limite que ce soit. D'après le résultat de CHEEGER rappelé en section 11 sur le rayon d'injectivité et la compacité de Gromov, on voit qu'il suffit de savoir que le volume est minoré sous la seule hypothèse $|K| \leq 1$. Pour une variété

compacte M , GROMOV définit son *volume minimal* $\text{Min Vol}(M)$ comme la borne inférieure du volume total de toutes les métriques riemanniennes sur M qui sont à $|K| \leq 1$. Si l'on sait montrer que ce volume minimal est non nul, ce sera *l'assurance de non-écrasement* cherchée.

L'intuition dit bien que S^2 ne peut pas être écrasée, la courbure devrait devenir infinie. La démonstration rigoureuse est simple, elle résulte directement de la formule de Gauss-Bonnet

$$\text{caractéristique d'Euler de } S^2 = 2 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} K.$$

Plus généralement le volume minimal sera non nul chaque fois que la variété possède un nombre caractéristique non nulle, comme il résulte des formules de Chern : [G3]. Mais dès que l'on entre dans le domaine des variétés non compactes, la géométrie reprend ses droits, voir par exemple le travail [B-P] de C. BAVARD et P. PANSU où le volume minimal de $\mathbf{R}^2$ est calculé exactement. Pour les variétés de dimension $n \geq 3$ on ne connaît jamais la valeur exacte du Min Vol , même pas pour les sphères S^{2m} (voir [Vi 2]). Enfin on est loin de connaître exactement la classe des variétés à volume minimal non nul : [G3].

Note. — Le lecteur aura pu trouver les hypothèses $K < \underline{k}$ et $K \geq \bar{k}$ peu métriques. Nous les avons déjà justifiés plus haut et le referons plus bas : section 18.

13. Hypertrigonométrie générale : locale, globale

La formule du théorème B d'Élie CARTAN (section 8) n'est pas difficile à démontrer. Actuellement on utilise le plus souvent les *champs de Jacobi* (figure 18).

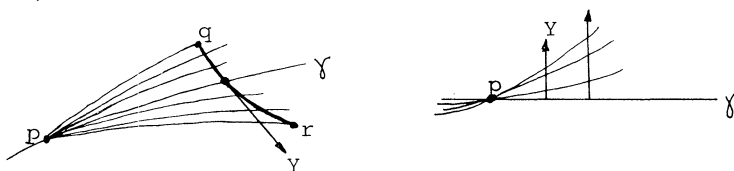


Fig. 18

Pour minorer la longueur du côté qr du triangle ci-dessus d'une v.r. à courbure négative ou nulle, on relève le plus court chemin de q à r par l'application exponentielle, c'est-à-dire que l'on remplit le triangle pqr par une famille à un paramètre de géodésiques issues de p . Tout ceci a un sens

grâce au corollaire A' . Pour cette famille à un paramètre de géodésiques utilisons le langage introduit dans la section 4 pour la formule de la variation seconde. Soit γ une géodésique fixe de cette famille, que l'on varie; alors la valeur du Y associé, en son extrémité, sera exactement le vecteur vitesse du plus court chemin de q à r . Il n'y a plus qu'à minorer de tels Y . Un tel champ Y , dérivée transverse d'une famille à un paramètre de courbes qui sont toutes des géodésiques est ce que l'on appelle un *champ de Jacobi*. Le point crucial est qu'un tel Y vérifie, le long de γ , l'équation différentielle du second ordre $Y'' + R(Y) = 0$, où R désigne l'endomorphisme que définit le tenseur de courbure le long de γ par la formule $x \mapsto R(\gamma'(t), x)\gamma'(t)$ (on a utilisé la métrique g pour passer de la forme quadrilinéaire $R(x, y, z, t)$ à un endomorphisme $R(x, y)$).

Supposons maintenant que la courbure K soit *négative ou nulle*. Alors $(R(\gamma'(t), x)\gamma'(t), x) \leq |x|^2$ pour tout vecteur x . D'où $(Y'', Y) \geq 0$ pour tout champ de Jacobi, en particulier $(|Y|)'' \geq 0$: la norme d'un champ de Jacobi est une fonction convexe. Avec les conditions initiales $Y(0) = 0$ et $|Y'(0)| = 1$ on obtient $|Y(t)| \geq |t|$ pour tout t , ce qui démontre le théorème B.

Le relèvement du plus court chemin de q à r a été possible parce que M est simplement connexe et grâce au corollaire A' . Sinon l'inégalité de Cartan ne sera vraie que pour les triangles "locaux". Précisément la condition est qu'un plus court chemin, au moins un, de q à r , ne rencontre pas le cut-locus de p . En toute généralité le théorème B est visiblement faux (voir figure 19) :

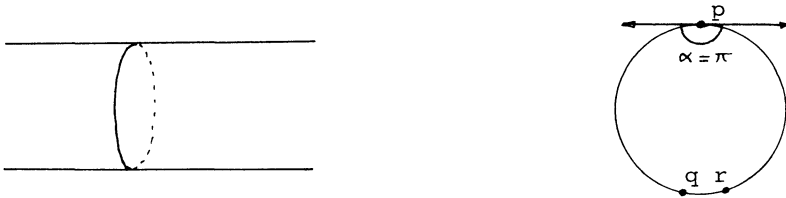


Fig. 19

prendre p fixe sur la géodésique périodique du cylindre à courbure nulle et q, r se rapprochant l'un de l'autre.

Qu'en est-il maintenant lorsque l'on remplace l'hypothèse $K \leq 0$ par celle plus générale $K \leq k$, avec k réel quelconque? Le calcul fait ci-dessus pour les champs de Jacobi se généralise sans difficulté, à condition de faire attention à ceci : si k est positif alors l'inégalité $|Y(t)| \geq \left| \frac{\sin \sqrt{k}t}{\sqrt{k}} \right|$ n'est valable en général que pour les t inférieurs au premier t qui annule éventuellement Y , comme le montre la figure 20 ci-dessous.

A l'aide de cette minoration pour les champs de Jacobi on obtient facilement le résultat suivant : notons $\Phi(b, c, \alpha, k)$ la longueur du troisième côté

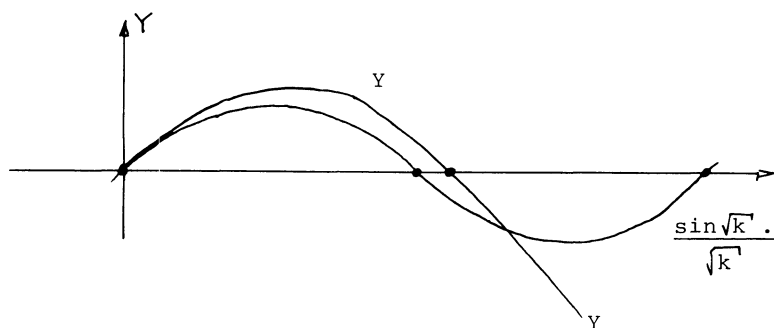


Fig. 20

d'un triangle de la variété de référence S_k^n dont deux côtés ont pour longueur respectives b et c et dont l'angle entre ces deux côtés est égal à α ; alors, pour tout triangle *local* d'une (M, g) vérifiant $K \leq k$, on a pour le troisième côté du triangle une longueur a qui satisfait l'inégalité $a \geq \Phi(b, c, \alpha, k)$. on aura un théorème global si M est simplement connexe et si $k \leq 0$. On peut considérer ce résultat comme un théorème des accroissements finis à l'ordre 2. Il est dû à H.E. RAUCH en 1951.

On peut aussi le prendre comme définition de l'hypothèse $K \leq k$. On peut aussi le reformuler en disant : *dans une v.r. à $K \leq k$ les géodésiques divergent au moins autant que dans S_k^n* (figure 21). Voir pour ce point de vue [G-L-P], p. 110.

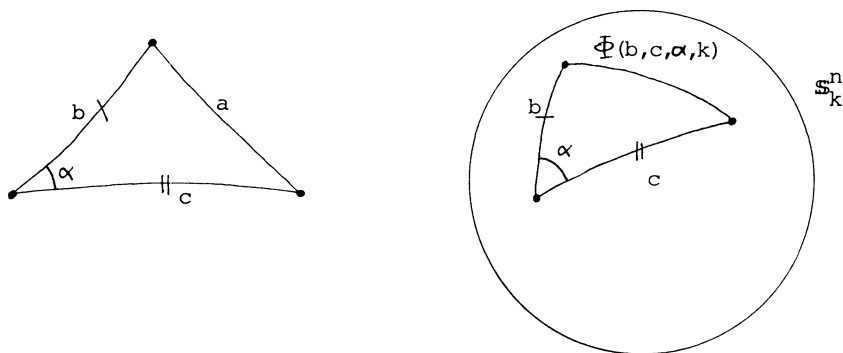


Fig. 21

14. Hypotrigonométrie

On peut résumer ce qui précède en trois étapes :

(I)⁺ $K \leq k$ est équivalent à $a \geq \Phi(b, c, \alpha, k)$ pour tous les triangles infinitésimaux;

(II)⁺ $K \leq k$ est équivalent à $a \geq \Phi(b, c, \alpha, k)$ pour tous les triangles locaux;

(III)⁺ $K \leq k$ entraîne $a \geq \Phi(b, c, \alpha, k)$ pour tous les triangles si M est simplement connexe et $K \leq 0$.

Qu'en est-il de (I), (II), (III) lorsque l'on renverse les inégalités? On sait au moins depuis Ricci que (I)⁻ est vrai, à savoir :

(I)⁻ $K \geq k$ est équivalent à $a \leq \Phi(b, c, \alpha, k)$ pour tous les triangles infinitésimaux.

Par contre le résultat (II)⁻, vrai depuis RAUCH en 1951, est autrement difficile à démontrer que (II)⁺. Cela tient à ce que, dans la démonstration de la section précédente, on a utilisé l'inégalité de Cauchy $(x, y) \leq |x||y|$ vectorielle. La chose n'est donc facile que dans le cas des surfaces, auquel cas l'équation des champs de Jacobi devient une équation différentielle ordinaire $y'' + Ky = 0$ pour une fonction numérique y et la courbure de Gauss K . La technique de Sturm-Liouville fait aussitôt gagner. On fera cependant attention à ce que, si par exemple $k = 0$, l'inégalité $|y(t)| \leq |t|$ ne peut être valable que pour les t assez petits (avant le premier point conjugué précisément, voir la mise en garde de la section précédente).

On doit à RAUCH d'avoir pu surmonter la difficulté lorsque la dimension n est quelconque et d'avoir ainsi démontré le (II)⁻. Sa démonstration utilisait la forme index de MORSE : [Rh]. On trouvera dans [Ka] une démonstration plus simple et élémentaire. Enfin dans [G-L-P], p. 114 on trouvera une démonstration métrique, basée sur la fonction distance au point p sommet du triangle considéré. Ici encore on peut reformuler (II)⁻ en : *dans une v.r. à $K \geq k$ les géodésiques issues d'un point convergent au moins autant que dans S_k^n .*

Le fait REMARQUABLE est que (III)⁻ est vrai en toute généralité, pour tout triangle, pour toute variété et tout réel k . Appelons-le THÉORÈME RAT. Ce résultat a été découvert par A.D. ALEXANDROV ([AV]) en 1948 pour les surfaces, puis étendu par V. TOPONOGOV en dimension quelconque : voir [B1], [C-E], [Ka], [To1]. Ce résultat utilise (II)⁻ que l'on applique à des triangles suffisamment petits en lesquels on a découpé le grand triangle considéré. On utilise enfin une propriété de convexité pour les quadrilatères des S_k^n . Le fait qu'il faille découper est toujours dû au fait qu'en général un plus court chemin de q à r rencontrera le cut-locus du sommet p (figure 22).

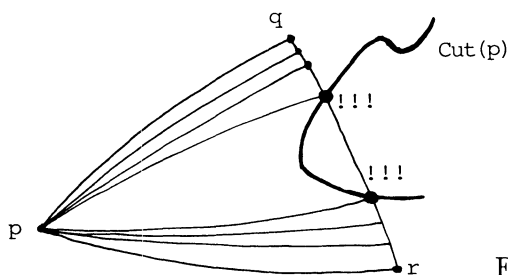


Fig. 22

15. Les variétés à courbure positive ou nulle

Dans l'interrègne [1928, 1951] on trouve d'abord pour notre sujet deux résultats marquants, celui de SYNGE en 1936 et celui de MYERS en 1941. Tous deux sont basés sur la formule de la variation seconde. Celui de SYNGE dit que *si M est compacte, de dimension paire et à $K > 0$ alors son groupe fondamental à au plus deux éléments*. Celui de MYERS dit que *si M est compacte, si $\text{ricc} > 0$ (a fortiori si $K > 0$) alors le groupe fondamental de M est fini*. Comme références, voir par exemple [C-E] ou [K1]. Il faut mentionner que MYERS ne connaissait pas l'extension en dimension quelconque, par I. SCHOENBERG en 1932 du théorème de Bonnet pour les surfaces cité dans la section 2. Ni le travail de 1935 de SYNGE. Enfin il faut mentionner le théorème de l'index de Morse-Schoenberg. Et les travaux de COHN-VOSSEN, entre autres justement celui sur les surfaces à $K \geq 0$, dont la généralisation va nous occuper maintenant.

Mais en possession du théorème (III)⁻, pendant du théorème B d'Élie CARTAN, les géomètres purent alors attaquer fructueusement l'étude topologique des M qui portent au moins une g à $k \geq 0$. C'est le non compact qui fut étudié le premier; en effet on peut alors *s'appuyer sur l'infini*. Démontrons en détail un résultat de D. GROMOLL et W. MEYER, basé sur cette technique et le théorème RAT. Leur résultat est le suivant : *Si (M, g) est non compacte et si $K \geq 0$ alors il y a dans M beaucoup de parties outrageusement convexes*. Une partie C d'une v.r. (M, g) sera dite *outrageusement convexe* si, pour tous points q, r de M , toute géodésique de q à r (pas nécessairement un plus court chemin) est toute entière contenue dans C . C'est bien un fait scandaleux en général, car si M est compacte, la seule partie de M qui soit outrageusement convexe est elle-même toute entière; puisqu'on sait en effet que par tout couple de points d'une v.r. compacte il passe au moins une géodésique autre qu'un plus court chemin (théorie de Morse voir le haut de la figure 23).

Par contre si M n'est plus compacte, partons à l'infini et, d'un point

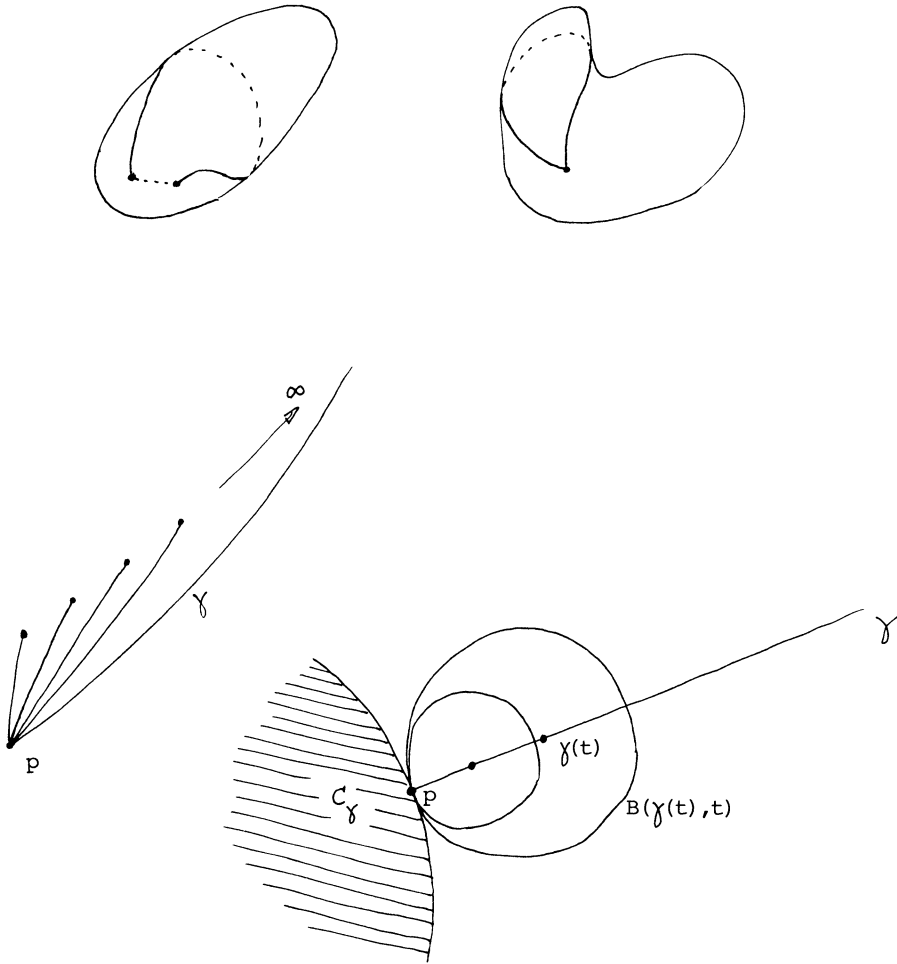


Fig. 23

fixe p , regardons un point partant à l'infini. En se joignant à lui par un plus court chemin, on obtient une limite qui est une *demi-droite* issue de p , c'est-à-dire une partie de (M, g) qui est isométrique à $([0, \infty[, \text{euclid})$, i.e. cette géodésique réalise le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. Alors GROMOLL et MEYER montrent que le complémentaire $C_\gamma = M \setminus (\bigcup_{t \geq 0} B(\gamma(t), t))$ dans M de la réunion des boules centrées aux différents points de γ et passant par p est outrageusement convexe (voir figure 23). Pour un parabolôïde de révolution, par exemple, par un p passe une seule demi-droite, c'est la partie plus haute du méridien qui contient p , et la partie C_γ associée est toute la partie située au-dessous du parallèle passant par p .

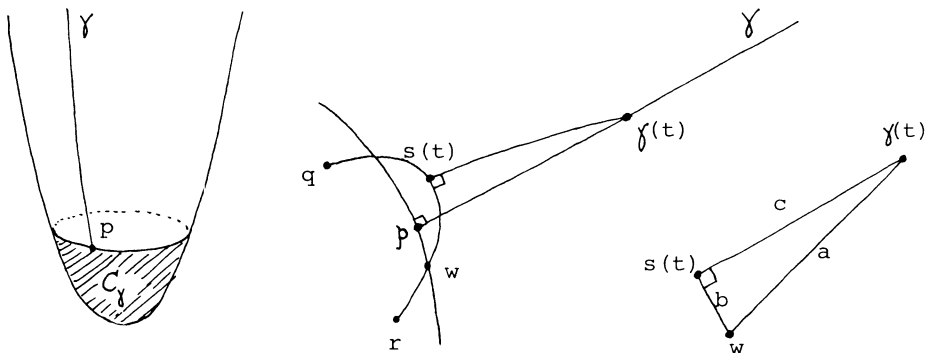


Fig. 24

On fait une démonstration par l'absurde (figure 24); soit donc δ une géodésique allant de q à r situés dans C_γ et en sortant vraiment. Soit $s(t)$ un pied de $\gamma(t)$ sur δ c'est-à-dire un point $s(t)$ de δ tel que $d(s(t), \gamma(t)) = d(\gamma(t), \delta)$. Pour t suffisamment grand on aura $d(s(t), \gamma(t)) \leq d(p, \gamma(t)) - t_0 = t - t_0$ puisque δ sort de C_γ , ceci pour un $t_0 > 0$ fixe. Soit enfin w un premier point où δ rencontre la frontière de C : donc $d(w, s(t)) \leq h$, réel fixe. Appliquons le théorème RAT au triangle $\{w, s(t), \gamma(t)\}$ qui est rectangle en $s(t)$, donc $a^2 \leq b^2 + c^2$ où :

$$a = d(w, \gamma(t)) \geq t, \quad b = d(w, s(t)) \leq h, \quad c = d(s(t), \gamma(t)) \leq t - t_0.$$

Ceci devient vite une absurdité lorsque t tend vers l'infini.

Partant de ce résultat GROMOLL et MEYER démontrent que toute (M, g) non compacte et à $K > 0$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ (résultat dû à COHN-VOSSEN pour $n = 2$, en 1935). Puis, la démonstration étant longue et difficile, CHEEGER et GROMOLL démontrent que si (M, g) est à $K \geq 0$ elle est difféomorphe à un fibré vectoriel sur une sous-variété N de M totalement géodésique (donc encore à $K \geq 0$). Ainsi la classification des M portant une métrique à $K \geq 0$ est-elle ramenée au cas compact pour l'essentiel. Voir pour ceci [B-Z], [C-G], [G-M], [Sh].

Il fallut attendre 1981 et GROMOV pour obtenir un théorème réduisant vraiment les possibilités topologiques des variétés compactes à $K > 0$ ou à $K \geq 0$. Auparavant le seul résultat connu était celui de LICHNEROWICZ : si la courbure scalaire u est positive, alors le $\hat{A}$ -genre est nécessairement nul. A la fois l'hypothèse et la conclusion sont faibles (pas le théorème!). GROMOV démontra qu'il y a finitude homologique pour les M compactes à $K \geq 0$. Précisément pour tout entier n il existe un réel $C(n)$ tel que, pour toute variété de dimension n portant une g à $K \geq 0$ et pour tout corps F la

somme des nombres de Betti de M pour F est bornée par $C(n)$:

$$\sum_{i=0}^n b_i(M, F) \leq C(n).$$

La démonstration est tout à fait métrique. L'idée de base est un calque de la théorie de Morse, pour la fonction distance à un point fixe p de M . Malheureusement la fonction $q \mapsto d^2(p, q)$ ne sera pas en général différentiable lorsque $q \in \text{Cut}(p)$. C'est une difficulté que K. GROVE et K. SHIOHAMA ont levée ainsi : disons qu'un point q est *critique* pour $d(p, \cdot)$ si l'ensemble des vecteurs vitesse en q aux plus courts chemins de p à q ne sont pas tous dans un demi-espace de $T_q M$ (voir figure 25). Alors, lorsque q n'est pas critique on montre que l'on peut le passer sans changer la topologie des ensembles de niveau, tout comme en théorie de Morse ([G-S]) (GROVE et SHIOHAMA utilisaient en fait une notion plus faible de point critique). Maintenant GROMOV montre qu'il n'y a pas de point critique trop éloigné de p en se servant à fond du théorème RAT. Il conclut par des arguments de topologie algébrique. Voir [G4].

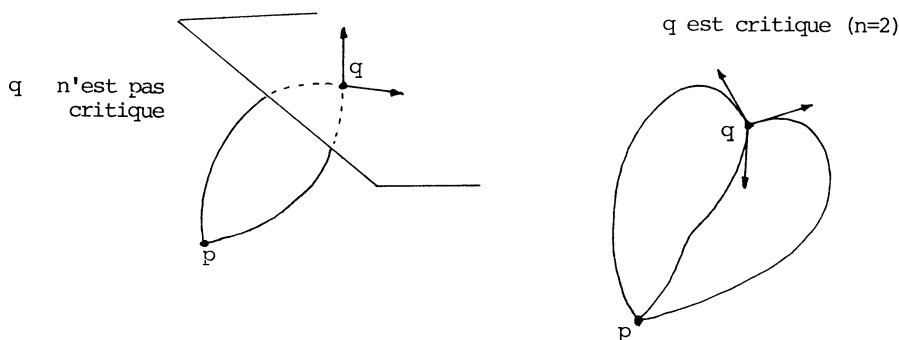


Fig. 25

Remarque 1. — Par contre pour les variétés à $K \geq 0$, même simplement connexes, il n'y a pas de finitude homotopique. Les premiers contre-exemples sont dûs à ALOFF et WALLACH : [W-A]. Soit $W_{p,q} = SU(3)/S^1(p, q)$ l'espace homogène compact quotient du groupe de Lie simple (de rang 2) $SU(3)$ par le cercle $S^1(p, q)$ défini, à partir de l'application exponentielle de l'algèbre de Lie de $SU(3)$, par le segment d'une sous-algèbre de Cartan qui joint l'origine 0 au point qui a pour coordonnées (p, q) dans le réseau hexagonal qui définit l'élément neutre (voir figure 26). WALLACH réussit alors à mettre sur $W_{p,q}$ une métrique riemannienne qui est à courbure variant entre les réels 1 et 16/29.37 pour toutes les paires $(n, n+1)$ (cette métrique n'est pas celle obtenue naïvement en faisant le quotient de la biinvariante de $SU(3)$). Or le

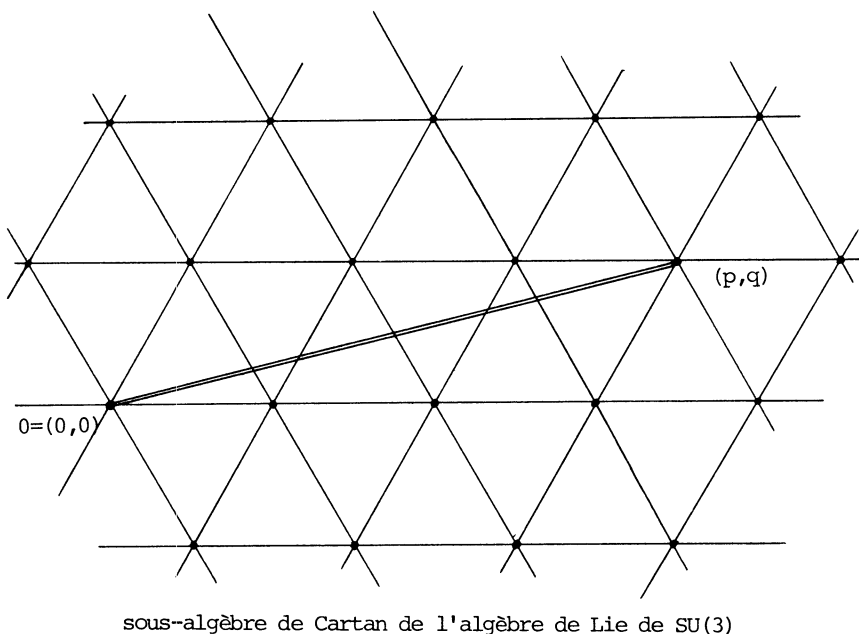


Fig. 26

type d'homotopie de la variété $W_{p,q}$ est en bijection avec l'entier $p^2 + pq + q^2$. Noter que les résultats cités plus haut entraînent que le rayon d'injectivité des $W_{p,q}$ possède 0 pour valeur d'adhérence. Voir aussi [W-A], [E1], [E2], [Hu].

Remarque 2. — La démonstration d'outrageuse convexité ci-dessus pour une demi-droite γ est directement liée à la notion très importante pour les v.r. non compactes de *fonction de Busemann* f_γ associée à γ . C'est-à-dire que f_γ est la distance d'un point de la variété au point à l'infini dans la direction de γ normalisé bien sûr); précisément :

$$f_\gamma(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(q, \gamma(t)) - t).$$

Par exemple la frontière de C_γ apparaît comme le niveau 0 de f_γ . Voir aussi [G5]. Enfin une idée de base est d'épuiser la variété par des convexes.

Les résultats ci-dessus sont loin de terminer l'étude des v.r. à $K \geq 0$ et de celles à $K > 0$. Un résultat important est le résultat de décomposition de V. TOPONOGOV : appelons *droite* d'une v.r. une géodésique infinie dans les deux sens qui réalise toujours le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. Ou encore : cette géodésique définit une partie de (M, g) isométrique globalement à l'espace euclidien R . Alors TOPONOGOV démontre ([C-E], [B-Z], [T02]) que si (M, g) est à $K \geq 0$ et contient une droite, c'est un produit

riemannien d'une (N, h) par $(R, \text{euclid.})$; donc $g = dt^2 \times g$. Le lecteur pourra s'y essayer avec la technique de Gromoll-Meyer. CHEEGER et GROMOLL en 1971 ont étendu ce résultat sous la condition beaucoup plus faible : la courbure de Ricci 1971 positive ou nulle : voir [E-H].

A part cela on ne sait guère plus rien. La conjecture de H. HOPF "sur $S^2 \times S^2$ il n'existe pas de g à $K > 0$ " est toujours ouverte. Elle s'étend naturellement à toute variété produit $M \times N$ de variétés compactes qui admettent chacune une métrique à $K > 0$. Dans ce cas, si M ou N est de dimension égale à 1, la réponse est non d'après le résultat de MYERS sur le π_1 cité plus haut. C'est aussi non dès que M et N sont chacune non simplement connexe, d'après cette fois-ci le résultat de SYNGE. Par contre S.T. YAU a conjecturé ceci : si une M compacte et simplement connexe porte une g à $K \geq 0$, alors elle en porte aussi une à $K > 0$. Le problème dans le cas du produit $M \times N$ est que la courbure est toujours nulle, pour une métrique produit, sur les plans tangents engendrés par un vecteur tangent à M et un tangent à N . Pour tout ceci voir [Y], [B-D-S].

Autres applications du théorème RAT. — Rappelons qu'il est utilisé de façon essentielle dans les travaux sur les variétés à courbure K telle que $|K| \leq 1$, à courbure $K \geq 0$. On le trouve aussi dans le théorème des variétés presque plates et dans les théorèmes de finitude, en particulier dans l'amélioration quantitative que vient d'en donner S. PETERS. Aussi dans le théorème de compacité de GROMOV. Ainsi que dans des résultats récents de C. DURUMERIC sur les variétés dont le cut-locus est presque sphérique, de D. BRITAIN sur des variétés à volume presque égal à celui de la sphère : voir [Br], [Du1], [Ps]. En fait DURUMERIC utilise seulement les théorèmes de comparaison de RAUCH.

Dans son mémoire sur les variétés à $K \geq 0$ M. GROMOV indique que sa méthode s'étend sans modification aux variétés telles que le réel

$$\text{Diam}^2(g) \cdot \inf_M K$$

est uniformément minoré. Rappelons enfin que l'on trouvera des exposés de synthèse sur "courbure et topologie" dans [Be3], [Si4], [Sh].

Note. — Combien y a-t-il de points à l'infini dans une variété riemannienne non compacte? C'est une question essentielle, liée à la compactification de cette variété. On peut faire jouer à la métrique un rôle en identifiant par exemple deux demi-droites γ_1 et γ_2 si la distance $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ reste bornée quand t tend vers l'infini. Pour ce genre de travaux, voir entre autres : [Sa], [Sh], [S-T].

16. Discrétisations et triangulations des variétés riemanniennes

Au départ l'idée est des plus naturelles, voire naïve : on veut approximer une v.r. (M, g) donnée par les espaces métriques les plus simples qui soient, les espaces métriques *finis*. Soit A un tel ensemble fini :

$$A = \{x_i\}_{i=1, \dots, N};$$

la métrique est bien définie par les distances mutuelles, à savoir les $N(N-1)/2$ réels $d_{ij}^A = d(x_i, x_j)$. Le plus simple est donc d'approximer (M, g) par des parties finies $A = \{x_i\}$ de M et de mettre sur A la métrique induite, à savoir poser $d_{ij}^A = d^M(x_i, x_j)$. Ensuite on prendra des N de plus en plus grands.

Cette approche a été utilisée par GROMOV dans ses démonstrations des théorèmes de précompacité et de compacité, section 12. Il y était nécessaire de considérer tous les $N(N-1)/2$ réels d_{ij} .

Pour raffiner, car une telle procédure est dans la pratique sans espoir (penser à la géodésie par exemple) regardons d'abord pour simplifier le cas des surfaces et précisément une opération de géodésie. Dans ce cas on triangule une surface de $\mathbf{R}^3$ et les seules distances que l'on prend en compte sont les $d(x_i, x_j)$ lorsque x_i et x_j sont reliés par une arête de la triangulation considérée $\mathcal{T}$ (ce que l'on écrira " $i \in j$ "). Le mot triangulation réfère aux 2-simplexes de $\mathcal{T}$, comme celui hachuré ci-dessous (voir figure 27) :

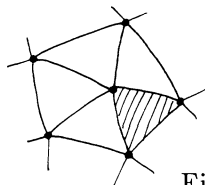


Fig. 27

Il est raisonnable de penser que des triangulations géodésiques de plus en plus fines permettent de reconstituer la "forme" de la terre. Dans le cas de GAUSS il s'agissait, par des mesures de distances sur la terre, de reconstituer l'ellipsoïde de révolution qui représente la terre en seconde approximation. En fait le premier invariant à essayer d'obtenir c'est la courbure de Gauss (courbure totale) K ; même si l'on sait que la donnée de la courbure K ne permet de reconstituer ni la métrique riemannienne abstraite ni encore moins sa forme dans $\mathbf{R}^3$.

Or on peut calculer K par approximations, grâce à la formule de Gauss qui donne l'excès angulaire d'un triangle (géodésique) d'une surface (figure 29) :

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \int_T K \quad \text{si } T \text{ est ce triangle et } \alpha, \beta, \gamma \text{ ses angles.}$$

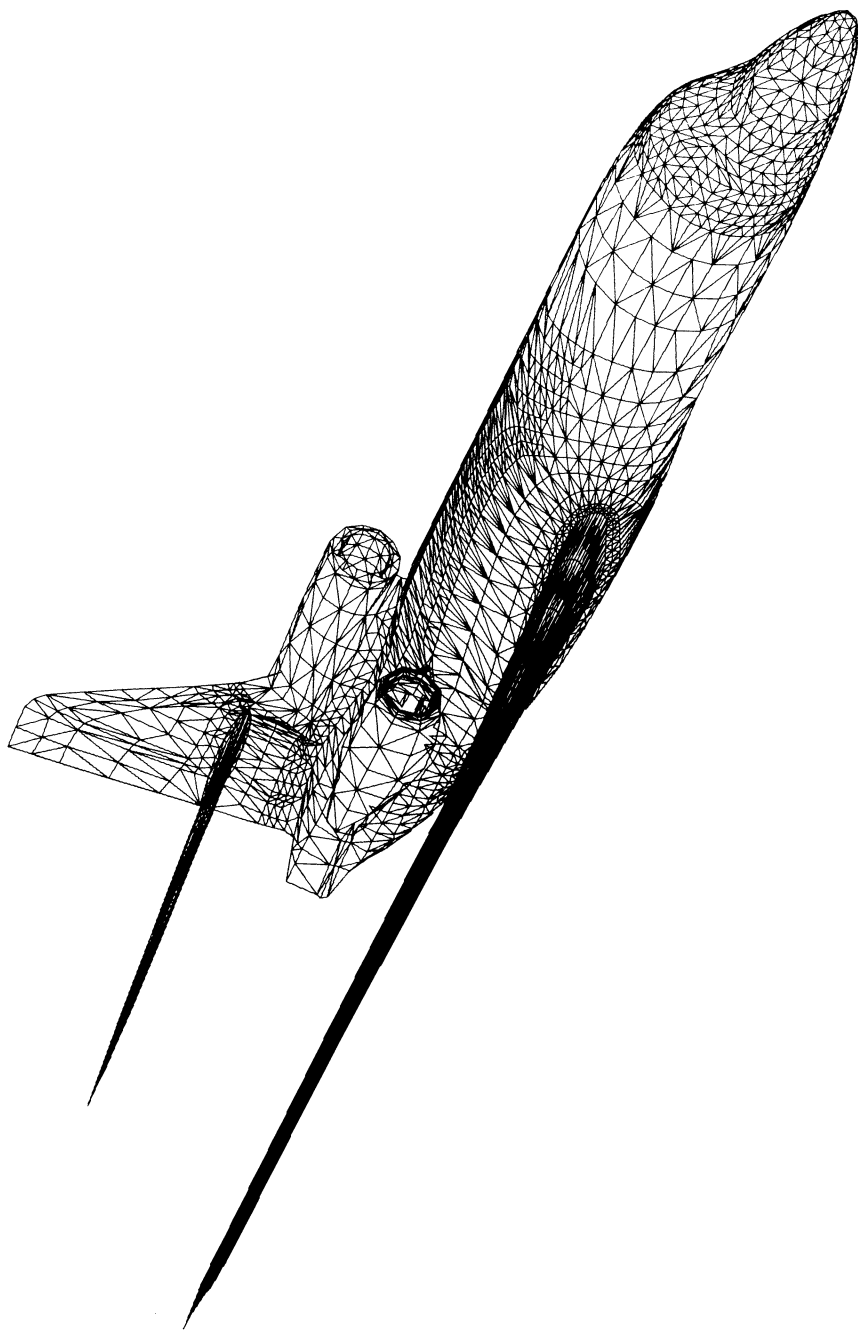


Fig. 28

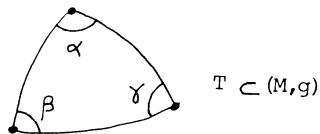


Fig. 29

Pour une triangulation $\mathcal{T}$ notons $i \in \lambda$ le fait que le sommet x_i appartienne au triangle T_λ et $\alpha_i^M \lambda$ l'angle en x_i de T_λ dans la surface considérée. Mais par ailleurs T détermine un triangle du plan euclidien, à savoir celui dont les longueurs des côtés sont égales à celles de T_λ . Notons $\alpha_{i,\lambda}^\mathcal{T}$ les angles correspondants de ce triangle euclidien (figure 30).

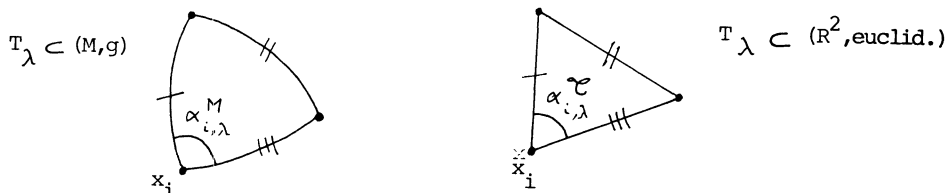


Fig. 30

Définissons la courbure de $\mathcal{T}$ en x_i par

$$K^\mathcal{T}(x_i) = 2\pi - \sum_{\lambda \in i} \alpha_{i,\lambda}^\mathcal{T}$$

la somme portant donc sur les triangles T_λ qui ont x_i pour sommets. Notez que l'on a toujours

$$\sum_{\lambda \in i} \alpha_{i,\lambda}^M = 2\pi.$$

Pour des triangles très petits la formule de Gauss entraîne que

$$K^\mathcal{T}(x) = \frac{1}{3} K^M(x) \cdot \text{surface de l'étoile en } x + o(\cdot)$$

la notation $o(\cdot)$ référant à des triangulations de plus en plus fines. On voit donc comment obtenir la courbure K de la surface par des triangulations de plus en plus fines dont on calcule la courbure, qui est une distribution de support les sommets d'icelle. Il faudra seulement prendre garde — un danger connu de STEINER dès 1840 — à ne pas prendre des triangulations qui s'écrasent (figure 31) :

Le problème est maintenant de passer aux dimensions supérieures. Il est important pour de nombreuses raisons. Par principe d'abord remarquons

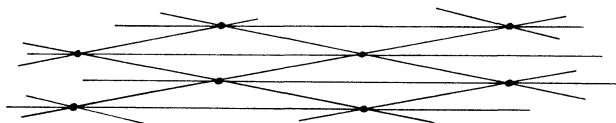


Fig. 31

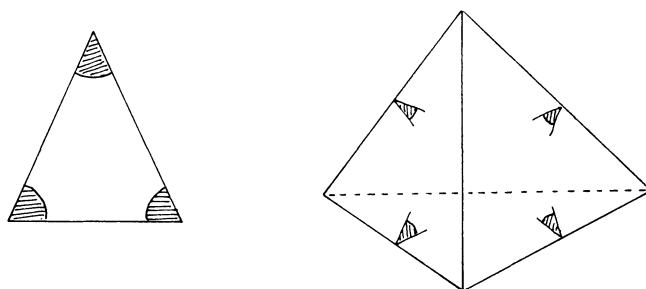


Fig. 32

qu'on ne peut saisir une v.r. sur ordinateur qu'en la discrétisant, à l'exception peut-être de variétés très particulières données par des équations simples. Tous les problèmes de mécanique des fluides doivent en passer par là. Par exemple pour résoudre une équation aux dérivées partielles. Un exemple important est celui du travail de T. REGGE mentionné plus bas. Sur une discrétisation, il faudra alors étudier des notions telles que :

- (I) trouver la courbure
- (II) interpréter des notions telles que $K \geq k$ ou $K \leq k$
- (III) calculer des invariants globaux, tels que par exemple le spectre du laplacien, les nombres caractéristiques, la caractéristique d'Euler.

C'est là un vaste programme qui, contrairement à ce que le cas des surfaces pourrait laisser croire, s'est avéré extrêmement difficile. C'est moins surprenant si l'on constate qu'une notion correcte pour les nombres caractéristiques conduit à une formule combinatoire pour les classes de Pontryagin, un problème ouvert depuis longtemps : voir [Ga] et plus bas dans cette section.

Précisons d'abord ce que l'on fait. On part d'une triangulation $\mathcal{T}$ d'une v.r. (M, g) . Chaque n -simplexe de $\mathcal{T}$ est équipé par la métrique de (M, g) avec les distances mutuelles entre ses sommets, ce sont si l'on veut les longueurs de ses arêtes. Encore qu'en pratique on ne se préoccupe pas de la réalisation par des plus courts chemins. On considère, c'est toujours possible si le n -simplexe T est assez petit, le simplexe, noté encore T , de $\mathbf{R}^n$ qui a mêmes longueurs d'arêtes dans $\mathbf{R}^n$ que T dans (M, g) .

Donc T est équipé avec toute une série d'angles, dont les plus intéressants sont les *angles diédraux* (voir figure 32), à savoir ceux entre les deux $(n-1)$ -faces qui contiennent une $(n-2)$ -face donnée. A l'aide des angles euclidiens de T on peut calculer des invariants en se donnant des polynômes universels où l'on substitue ces angles, ceci pour chaque k -simplexe donné de $\mathcal{T}$. Et l'on fait la somme sur tout le k -squelette Σ^k de $\mathcal{T}$. Soit $I^{\mathcal{T}}$ un tel invariant.

La question (III) schématisée plus haut peut être précisée : étant donné un invariant global I^M des variétés riemanniennes, existe-t-il un invariant $I^{\mathcal{T}}$ du type ci-dessus des triangulations tel que

$$I^{(M,g)} = \lim_{\mathcal{T}} I^{\mathcal{T}} ?$$

La limite est entendu au sens de prendre des triangulations de plus en plus fines de M .

C'est une question *dangereuse* et *difficile*. Dangereuse car on a vu plus haut qu'il faut faire attention à prendre la limite sur des triangulations qui ne s'écrasent pas. Précisément appelons *épaisseur* de $\mathcal{T}$ la borne inférieure sur tous ses n -simplexes T des rapports (figure 33) :

$$\frac{\text{rayon de la sphère circonscrite à } T \text{ euclidien}}{\text{rayon de la sphère inscrite à } T \text{ euclidien}}.$$

Alors on convient de ne travailler qu'avec des triangulations d'épaisseur minorée positivement uniformément.

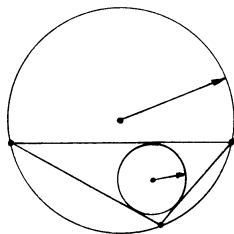


Fig. 33

En 1961 REGGE considérait comme évident ce qui suit. Soit σ un $(n-2)$ -simplexe de $\mathcal{T}$, associons lui une *courbure* $K_{(2)}(\sigma)$ qui est l'exacte généralisation de celle des sommets lorsque $n = 2$, à savoir :

$$K_{(2)}^{\mathcal{T}}(\sigma) = 2\pi - \text{somme des angles dièdres en } \sigma \text{ des } n\text{-simplexes qui contiennent } \mathcal{T}.$$

En sommant sur tout le $(n-2)$ -squelette Σ^{n-2} de $\mathcal{T}$ on obtient un invariant, invariant dont REGGE (par analogie avec le cas des surfaces?) pensait qu'il

représente l'intégrale la plus simple fabriquée avec la courbure, à savoir celle de la courbure scalaire u . C'est-à-dire que REGGE énonçait :

$$\int_M u^M = \lim_{\tau} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma^{n-2}} K_{(2)}(\sigma) \cdot \text{Volume}(\sigma) \right)$$

L'invariant riemannien de gauche est bien connu, mais ce n'est un invariant topologique que si $n = 2$. Sinon il n'a de toute façon pas le degré d'homogénéité qu'il faut sous les changements d'échelles. En fait cet invariant rentre dans une série entière d'*invariants* $I_{(2p)}(M, g)$ qui le généralisent. Pour tout entier p il existe un polynôme universel $K_{(2p)}$ de degré p portant sur des êtres type tenseur de courbure; les invariants cherchés sont les

$$I_{(2p)}(M, g) = \int_M K_{(2p)}(R(g)).$$

On appelle les $K_{(2p)}(R(g))$ les *courbures de Lipschitz-Killing* de (M, g) . Un de leurs intérêts est que, lorsque $n = 2p$ ce sont eux qui donnent la généralisation de la formule de Gauss-Bonnet :

$$I_{(n)}(M, g) = \chi(M)$$

pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n paire (formule de Allendoerfer-Weil).

Dans [C-M-S] en 1984 J. CHEEGER, W. MÜLLER, R. SCHRADER ont démontré ceci : pour tout entier p inférieur à la partie entière de la dimension en jeu, on peut associer de façon universelle à chaque $(n-2p)$ -simplexe d'une triangulation d'une (M, g) une courbure $K_{(2p)}(\sigma)$, calculée avec un polynôme de degré p en les angles des n -simplexes qui contiennent σ . Ces courbures ont la propriété suivante : pour tout $p \leq [n/2]$ on a

$$\int_M K_{(2p)}(R(g)) = \lim_{\tau} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma^{n-2p}} K_{(2p)}(\sigma) \cdot \text{Vol}(\sigma) \right).$$

La limite est entendu au sens de triangulations de plus en plus fines de M mais uniformément minorées en épaisseur. En fait les auteurs démontrent beaucoup plus, à savoir une convergence *en mesure* des courbures $K_{(2p)}$ vers $K_{(2p)}(R(g))$, c'est-à-dire que

$$\int_U K_{(2p)}(R(g)) = \lim_{\tau} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma^{n-2p}} K_{(2p)}(\sigma) \cdot \text{Vol}(\sigma \cap U) \right)$$

pour tout ouvert U de M . Dans le cas $n = 2$ nous avons démontré plus haut qu'il y avait même convergence ponctuelle. Dans le cas des dimensions plus grandes la question est ouverte.

La démonstration, même dans le cas $p = 1$ et que REGGE admettait, est longue et très délicate. Notez que lorsque $n = 2p$ on obtient une formule de Gauss-Bonnet pour des triangulations. T. BANCHOFF en avait déjà trouvé une dans [Ba], mais avec une autre formule portant sur les angles extérieurs des n -simplexes et non comme ici les intérieurs. L'équivalence n'en est pas immédiate.

Le résultat précédent est bien une réponse à la question (III) pour les $I_{(2p)}$. Ce résultat a des applications. La première est celle qu'en donnait lui-même REGGE (et qui était sa motivation). Le problème était de résoudre les équations d'Einstein sur une variété Lorentzienne donnée pour un tenseur d'impulsion-énergie donné et avec des conditions initiales sur une section d'espace. Le fait que le cadre soit celui des variétés Lorentziennes au lieu des v.r. ne crée pas de difficultés trop sérieuses. Or HILBERT avait montré que les équations d'Einstein sont en fait la traduction d'un principe variationnel pour l'invariant $\int_M u$ précisément. La méthode de REGGE consiste (voir [R] et [W-M], ch. 42) à résoudre ainsi les équations d'Einstein sur une triangulation par des calculs finis en regardant ce que devient le principe variationnel pour une triangulation. Pour d'autres applications, plus ou moins en cours, voir [Mü 1], [Do], [D-P], [F-L], [F²-L-R].

Toujours dans le cadre de la question (III), le cas des valeurs propres du laplacien est lui assez spécial. Il s'agit de résoudre l'équation aux dérivées partielles $\Delta f = \lambda f$ sur (M, g) . Ici la méthode classique des différences finies s'applique, sans difficulté géométrique, et l'on peut obtenir un nombre fini donné de valeurs propres avec des triangulations de plus en plus fines par des méthodes classiques. Il semble que cela, bien connu des analystes, ait été redécouvert indépendamment par plusieurs géomètres riemanniens, voir par exemple [Ca], [Do], [Kw]. Pour éviter des "résonances" éventuelles on est content en particulier d'avoir des minoration pour $\lambda_1(g)$, la première valeur propre non nulle de (M, g) .

Par contre si l'on veut approximer simultanément toutes les valeurs propres, le problème est plus difficile. On trouvera des résultats de ce genre dans [Mü 1], [D], [D-P] et bien sûr [Ch 3].

Qu'en est-il maintenant des questions (I) et (II)? Lorsque $n = 2$ ce que l'on a vu plus haut répond à toutes les questions. Par contre dès que $n \geq 3$ comment pourrait-on espérer retrouver toute la courbure sectionnelle, qui est une fonction "directionnelle" $K : G_M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, avec seulement des triangulations de plus en plus fines? La grande difficulté de la question (I) est bien illustrée par le résultat surprenant que voici de CHEEGER. Regardons d'abord le cas $n = 2$. On a vu plus haut qu'une bonne notion de courbure pour une triangulation $\mathcal{T}$ était de le concentrer en ses sommets (les 0-simplexes).

Ainsi la condition $K \geq 0$ se traduirait-elle naturellement par

$$\text{pour tout sommet } x_i \quad : \quad \sum_{j \in i} \alpha_{i,j}^\tau \leq 2\pi.$$

On peut donc peut être penser que l'analogue en dimension n quelconque de la condition $K \geq 0$ (resp. > 0) serait

$$\text{pour tout } \sigma \in \Sigma^{n-2} \quad : \quad K_{(2)}^\tau(\sigma) \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0)$$

c'est-à-dire que pour tout $(n-2)$ -simplexe la somme des angles dièdres en lui des n -simplexes qui le contiennent doit toujours être inférieure à 2π . Or CHEEGER a démontré ([Ch 2]) que *cette condition*, si elle est stricte, entraîne que tous les nombres de Betti réels, de $i = 1$ à $i = n-1$, de M sont nuls, dès que cela arrive pour une seule triangulation. Si la condition est $K \geq 0$ alors ces nombres de Betti, $b_i(M)$ sont inférieurs ou égaux à $\binom{n}{i}$ (noter que ce sont les nombres de Betti des tores T^n).

Or l'on a vu plus haut qu'il existe beaucoup de variétés à $K > 0$ et à nombres de Betti non triviaux, les projectifs complexes pour commencer. Si l'on veut suggérer une interprétation pour une v.r. de la condition de positivité écrite plus haut sur le $(n-2)$ -squelette d'une triangulation de cette variété, il faut plutôt qu'à la courbure sectionnelle songer à l'opérateur de courbure. Par opérateur de courbure d'une v.r. en un point p , on désigne l'endomorphisme symétrique de l'espace $\bigwedge^2 T_p M$ des 2-formes extérieures que définit, à l'aide de la dualité, la forme 4-linéaire $R(x, y, z, t)$ dont on a vu qu'elle est alternée effectivement en x, y et en z, t . Si cet endomorphisme de $\bigwedge^2 T_p M$ est défini positif en tout point p de M , on dira que (M, g) est à opérateur de courbure strictement positif. Or un résultat de D. MEYER ([Me]) dit que cette condition entraîne que tous les $b_i(M)$ sont nuls pour $i = 1, \dots, n-1$.

La démonstration de CHEEGER du résultat analogue pour les v.r. triangulées n'est pas directe et géométrique, elle est très détournée et utilise l'Analyse L^2 sur les variétés plates à singularités dont nous allons justement parler. Une démonstration directe reste à trouver.

La situation, lorsque $K \leq 0$ est plus satisfaisante. D. STONE a en effet montré que si $K_{(2)}^\tau(\sigma) \leq 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma^{n-2}$ alors la variété est PL-homéomorphe (piecewise linear) à $\mathbb{R}^n$, c'est donc bien un théorème "à la Cartan-Hadamard" (cf. [St]).

17. Les variétés riemanniennes triangulées vues comme variétés riemanniennes plates à singularités

Un article très important de CHEEGER ([Ch 3] étudie, entre autres, les v.r. triangulées $(M, g, \mathcal{T})$ par le biais suivant. Chaque n -simplexe ouvert $\overset{\circ}{T}$ de $\mathcal{T}$ est muni de la métrique riemannienne *non complète* plate qu'il a comme simplexe de R^n . Puisque $\mathcal{T}$ est une triangulation de M , les $(n-1)$ -faces de $\mathcal{T}$ se recollent bien deux à deux et ceci entraîne que l'on obtient finalement une variété riemannienne plate avec des singularités éventuelles au plus sur le $(n-2)$ -squelette de $\mathcal{T}$. Par exemple cette $(M, g, \mathcal{T})$ sera lisse et donc plate au sens usuel si la courbure, au sens précédent, de chaque $(n-2)$ -simplexe de $\mathcal{T}$ est nulle. La section précédente montre qu'il est difficile aujourd'hui de munir d'une courbure portée par Σ^{n-2} qui soit complètement significative du cas riemannien que l'on veut approximer. Sauf dans le cas $n = 2$ où par exemple la sphère S^2 , trianguler par un octaèdre régulier, donne lieu à six sommets chacun de courbure égale à $2\pi - 4 \cdot \pi/3 = 2\pi/3$ (figure 34). Comparer aussi à la phrase d'Élie CARTAN dans un premier jet des Leçons ([C3]) : "... un espace de Riemann est au fond formé d'une infinité de petits morceaux d'espaces euclidiens..."

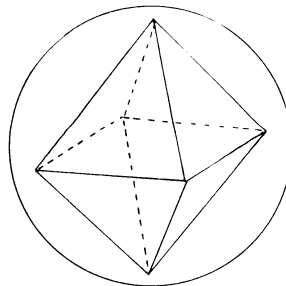


Fig. 34

L'analyse de CHEEGER est l'aboutissement de nombreux travaux antérieurs, motivés par un problème sans rapport direct avec ce qui précède à savoir la solution d'une conjecture de RAY-SINGER sur le calcul de la torsion de Reidemeister à l'aide du spectre. Actuellement le point de départ de CHEEGER est d'étudier le spectre, via l'équation de la chaleur (sans négliger au besoin celle des ondes) d'une structure riemannienne ayant une seule singularité conique (figure 35) :

C'est-à-dire que l'on considère ici une v.r. de dimension n , soit (N, h) le cône $\mathbf{R} \times N$ muni de la métrique plate

$$g = dt^2 + t^2 h$$

où t est la distance au sommet et $N = t^{-1}(1)$. On complète au besoin ce cône, à partir d'un certain t , par une v.r. qui fait que le tout est, le sommet

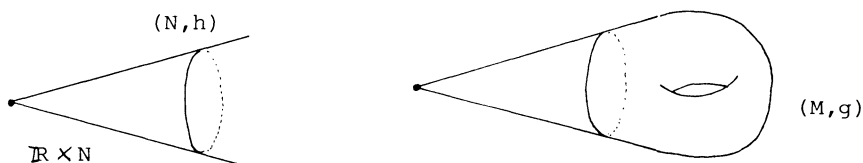


Fig. 35

du cône ôté, une v.r. *non complète*, plate au voisinage du sommet. Et à singularité si l'on ajoute le sommet. Lorsque $(N, h) = (S^{n-1}, \text{stand.})$, il n'y a en fait pas de singularité, car on a affaire à $\mathbf{R}^n$ déguisé en coordonnées polaires.

Pour de tels variétés, CHEEGER construit une théorie L^2 , qui dépend en fait seulement pour l'essentiel de (N, h) . Sur cet objet il bâtit une théorie spectrale complète. Ensuite on fait des constructions itérées de ce type et l'on peut ainsi obtenir toutes les v.r. triangulées précédentes. Pour plus de détails renvoyons le lecteur à [Ch 3]. Mentionnons seulement ceci. CHEEGER ayant fait une théorie très complète, il obtient des développements asymptotiques, et étend sa théorie au cas à bord. Dans le cas sans singularité, c'est la théorie de l'invariant η (voir [A-P-S]). Alors CHEEGER peut calculer "explicitement" les nombres caractéristiques d'une $(M, g, \mathcal{T})$. Une application consiste à prendre une triangulation "idéale" (ce qui n'est pas défendu, par construction) où toutes les arêtes de tous les simplexes aient pour longueur le même réel 1. Ceci entraîne immédiatement une formule combinatoire pour les nombres caractéristiques; c'était un vieux problème, entamé seulement récemment par A. GABRIELOV [Ga].

Les v.r. à singularités sont donc un sujet d'avenir. Mentionnons le travail de W. MÜLLER sur les variétés où les singularités sont des pointes ("cusps") hyperboliques. Et celui de C.H. WU et V. PATI qui étudient les surfaces algébriques à singularités résolues. Voir [Mü 2], [W-P].

L'étude des v.r. à singularités a de nombreuses applications. Citons entre autres : pour $n \geq 4$ la théorie même de REGGE en Relativité Générale, la quantification de la gravitation. En dimension 2 et 3 la théorie géométrique des défauts (dislocations, disclinations) dans les milieux ordonnés, la mécanique statistique des verres. En dimension 2 la mécanique statistique des surfaces aléatoires et les applications à la théorie de la matière condensée (surfaces de cristaux, parois dans les aimants, émulsion, polymères bi-dimensionnelles).

Mentionnons aussi que CHEEGER avec l'aide de M. TAYLOR, appliqua sa théorie à la diffraction des ondes par des obstacles du type des singularités précédentes ([C-T]) (figure 36) :

Enfin noter que la théorie L^2 de CHEEGER pour les singularités sur une variété non complète est *invariante par quasi-isométries*.

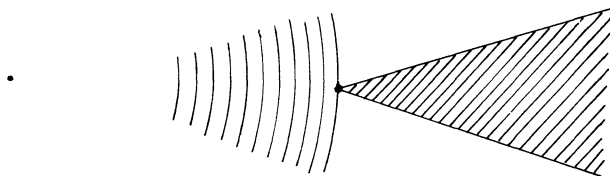


Fig. 36

18. Retour sur courbure et métrique : en suivant les traces de K. MENGER

Pour l'essentiel nous avons justifié la définition métrique de la courbure par la formule de la section 4 et des inégalités telles que $K \geq k$ par le théorème RAT. On peut désirer faire une géométrie plus purement métrique. Ne fût-ce que parce que dans l'inégalité d'Élie CARTAN ou dans le théorème RAT figure un angle et que cet angle nécessite de dériver la métrique pour être calculé. Nous avons rencontré rapidement ce genre de question dans la Note à la fin de la section 9.

C'est d'abord le lieu de rappeler ici que RIEMANN, dans le début de son texte fondateur, définissait en fait, non les variétés riemanniennes, mais des (U, g) où l'élément de longueur g était la donnée d'une *norme* sur chaque espace tangent. Ce n'est qu'ensuite qu'il spécialisait son étude au cas de normes partout euclidiennes, en disant ceci : "l'étude de cette classe plus générale ne demanderait pas de principes différents, mais exigerait beaucoup de temps et proportionnellement donnerait peu de lumière nouvelle sur l'étude de l'Espace, spécialement parce que les résultats ne peuvent pas être exprimés géométriquement."

Ces espaces généraux sont ceux dits aujourd'hui "de Finsler". Sur ceux-ci on pourra consulter [Rd] et surtout [Bs 2] pour des résultats métriques. Malgré de nombreux efforts il nous semble que les espaces de Finsler sont encore très mal compris aujourd'hui. Une catégorie très intéressante d'espaces est celle introduite par H. BUSEMANN dans [Bs 1], les G -spaces. Ils sont à la fois plus généraux que ceux de Riemann-Finsler et plus restreints. Dans cet ouvrage par exemple BUSEMANN définit une notion de "courbure négative" par la condition $d \leq d'/2$ dans tous les triangles (figure 37) :

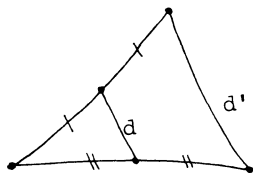


Fig. 37

Une référence sur les espaces métriques est [Bl]; voir aussi [B-M]. Nous allons maintenant suivre les traces de K. MENGER. Son idée était de faire du "métrique pur". Commençons par l'espace euclidien. *Comment reconnaître si un espace métrique (M, d) est isométrique à $\mathbf{R}^n$?*

Regardons d'abord $\mathbf{R}^2$; trois de ses points $\{x_i\}_{i=1,2,3}$ forment un triple bien déterminé, à une isométrie de $\mathbf{R}^2$ près, par les trois distances mutuelles $d_{ij} = dx_i, x_j$. Soient maintenant quatre points $\{x_i\}_{i=1,2,3,4}$ et réfléchissons aux six distances mutuelles d_{ij} (voir figure 38). Ce que l'on vient de dire montre que les cinq premières $d_{12}, d_{13}, d_{23}, d_{14}, d_{24}$ déterminent le quadruple des x_i à une isométrie près et à la symétrie près autour de la droite x_1x_2 . Donc moralement d_{34} n'a que deux valeurs possibles, heuristiquement données par une équation du second degré puisque tout ici est algébrique. Il est effectivement classique, depuis EULER au moins, que les six d_{ij} vérifient la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

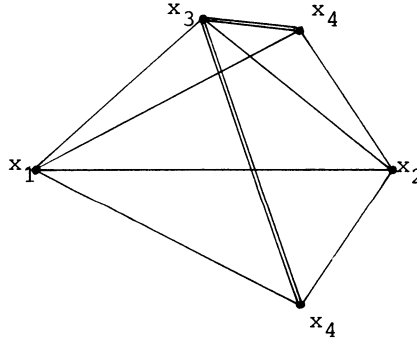


Fig. 38

En dimension n quelconque $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ vérifient toujours la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{1,2}^2 & \cdots & d_{1,n+2}^2 \\ d_{2,1}^2 & 0 & \cdots & d_{2,n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n+2,1}^2 & d_{n+2,2}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

comme l'a exprimé CAYLEY. Réciproquement MENGER a montré que *si un espace métrique vérifie cette relation pour tout $(n+2)$ -uple de ses points*, plus les conditions évidemment nécessaires d'être complet et pas de dimension $\leq n-1$, alors il est globalement isométrique à $\mathbf{R}^n$ (1928, voir [Bl]).

Si l'on remarque que, sur une sphère donnée de $\mathbf{R}^{n+1}$, il y a une relation universelle entre la distance sur cette sphère et la distance dans R^{n+1} , on voit que, pour tout $k > 0$, les distances mutuelles d_{ij} de tout $(n+2)$ -uplet de points de $\mathbf{S}_k^n$ vérifient une relation universelle $F_k(d_{12}, \dots, d_{n+1n+2}) = 0$, où la fonction F_k ne dépend que de k . Une telle relation subsiste facilement pour les $\mathbf{S}_k^n$ avec $k < 0$. Et le résultat de Menger reste valable, cette relation caractérise les $\mathbf{S}_k^n$: voir [Bl].

Dans l'optique de Menger on peut se poser un certain nombre de questions naturelles, comme :

- (i) caractériser les variétés riemanniennes parmi les espaces métriques
- (ii) caractériser métriquement les $\mathbf{S}_k^n$ de façon moins draconienne que ci-dessus
- (iii) caractériser métriquement les conditions $K \geq k$ ou $K \leq k$
- (iv) calculer K métriquement.

La formule de la section 4 est une réponse à (iv), bien qu'elle ne soit pas enthousiasmante. Le genre de questions ci-dessus est moins gratuit, ou "mathématique pure" qu'il n'en a l'air, nous l'avons justifié dans la précédente section.

Nous avons vu plus haut comment BUSEMANN interprétait $k \leq 0$ (donc comme un cas particulier de la fin de la section 9). Avec sa condition BUSEMANN démontrait par exemple qu'un G -space à $K \leq 0$ avait R^n comme revêtement universel et beaucoup d'autres choses, voir le chapitre V de [Bs 1]. RINOW a généralisé la définition de BUSEMANN pour répondre à (iii) en toute généralité, dans [Rw]. Soit, dans $\mathbf{S}_k^2$, la fonction $\Lambda(a, b, c, k)$ définie comme la distance entre les milieux des côtés de longueur respective b et c d'un triangle de côtés ayant a, b, c pour longueurs. Pour un triangle $\{p, q, r\}$ d'une (M, g) notons q', r' les milieux des côtés pq et pr . Alors RINOW montre que (voir figure 39) $K \geq k$ (resp. $\leq$) est équivalent à $d(q'r') \leq \Lambda(a, b, c, k)$ (resp. $\geq$) pour tous les triangles assez petits de (M, g) et dont les longueurs des côtés sont égales à a, b, c .



Fig. 39

Cette équivalence résulte directement du théorème RAT ou de l'extension du théorème d'Élie CARTAN par RAUCH. Mais son intérêt est de fournir une définition applicable à toute espace métrique. C'est ainsi que RINOW peut caractériser les S_k^n parmi les espaces métriques (dans lesquels il existe une notion d'angle entre les courbes) par la condition $K \geq k$ et $K \leq k$ au sens précédent (soit $K = k$ si l'on veut). Si l'on veut que le résultat soit valable pour un espace métrique a priori quelconque il faut une condition analogue mais où les points q' et r' peuvent diviser les côtés pq et pr dans des rapports quelconques. Pour tout ceci voir [Rw], ainsi que [B-M].

On peut aussi caractériser les S_k^n par la condition qu'il existe une relation universelle entre les distances mutuelles de $n + 2$ points, cette relation étant a priori absolument quelconque. En fin de compte cette relation sera fonctionnellement déduite d'une F_k donc : voir [B2].

La question (i) semble la plus difficile, voire impossible, à résoudre, car la courbure sectionnelle n'est pas une fonction numérique. Sauf en dimension 2 où précisément on doit à WALD un résultat parfait (1936, voir [Wa] ou [Rw]). Disons qu'un quadruple $\{x_i\}_{i=1,2,3,4}$ d'un espace métrique absolument général (M, d) est plongeable dans S_k^2 s'il existe un quadruple $\{y_i\}_{i=1,2,3,4}$ de S_k^2 qui est isométrique au quadruple des x_i , c'est-à-dire que

$$d^M(x_i, x_j) = d^{S_k^2}(y_i, y_j) \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

WALD dit alors que (M, d) admet en $p \in M$ la courbure k si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ pour lequel tout quadruple de (M, d) contenu dans la boule métrique $B(p, \eta)$ est plongeable dans une $S_{k'}^2$, avec $k' \in]k - \epsilon, k + \epsilon[$. Pour que (M, d) soit une variété riemannienne de dimension 2 il faut et il suffit que M admette une courbure $k(p)$ en chacun de ses points p . En outre la fonction $p \mapsto K(p)$ est alors la courbure de Gauss de (M, g) .

En dimension $n \geq 3$ on ne peut guère espérer caractériser simplement que les S_k^n (ce qu'a fait RINOW, voir plus haut). Car en effet un résultat classique de SCHUR dit que si la courbure sectionnelle est une constante sur chaque $G_M^2(p)$, alors c'est une constante absolue.

Un texte "trigonométrique" récent, intéressant, est [Hs].

19. Métrique et coordonnées dans une variété riemannienne

Terminons avec une application récente des fonctions distances à l'Analyse sur les v.r. Les coordonnées, dites normales, déjà utilisées par RIEMANN, semblent les plus naturelles et donc les meilleures pour différentes estimées. C'est faux car lorsque l'on veut majorer la dérivée seconde de l'application exponentielle, celle donnée par les coordonnées normales précisément, on

trouve seulement une formule du type

$$|D^2 \exp|_v \leq \text{const } (R, DR)|v|$$

où la constante dépend de la courbure mais aussi de sa dérivée covariante DR . Et l'on ne peut pas faire mieux.

Une des philosophies de GROMOV est que les meilleures fonctions sur v.r. sont les fonctions distances à un point. Malheureusement prendre un ensemble de n fonctions $d(p_i, \cdot)$ à des points p_i est impraticable. On doit à H. KARCHER (voir KARCHER-JOST [K-J]) d'avoir découvert d'intéressantes fonctions sur les v.r., analogue aux doublets en magnétisme ou électricité. Remarquons si v est un vecteur unitaire d'un R^n alors la coordonnée $x = (v, \cdot)$ peut se calculer par la formule

$$x(p) = \frac{d^2(p, \epsilon v) - d^2(p, 0)}{2\epsilon}$$

quel que soit le réel $\epsilon > 0$. D'où l'idée de définir dans une v.r. (M, g) , pour $p \in M$ et un vecteur tangent unitaire $v \in T_p M$ une "coordonnée" associée par

$$x_v(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d^2(q, \exp_p(\epsilon v)) - d^2(q, p)}{2\epsilon}$$

On fabriquera alors un système de coordonnées de centre p en prenant les n fonctions x_{v_i} où $\{v_i\}$ est une base orthonormée de $T_p M$. Alors $|D^2 \exp_p|$ peut être majoré à l'aide seulement du tenseur de courbure de (M, g) . Pour des applications de ces coordonnées, voir [J-K] et, dans le présent texte, la section 12.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] AMBROSE (W.). — Parallel translation of Riemannian curvature, *Ann. of Math.*, t. **64**, 1956, p. 337–363.
- [AV] ALEXANDROV (A.D.). — *La géométrie intérieure des surfaces convexes*. — Akademie-Verlag, 1955, (existe en russe et en allemand).
- [A-P-S] ATIYAH (M.), PATODI (V.), SINGER (I.). — Spectral asymmetry and Riemannian Geometry I, II, III, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, t. **77**, 1975, p. 43–69, t. **78**, 1976, p. 405–432, t. **79**, 1976, p. 315–330.
- [B-E] BALLMANN (W.), EBERLEIN (P.). — (à paraître).
- [B-B-E] BALLMANN (W.), BRIN (M.), EBERLEIN (P.). — Structure of manifolds of non-positive curvature I, Preprint Univ. of Maryland 1984.
- [B-B-S] BALLMANN (W.), BRIN (M.), SPATZIER (R.). — Structure of manifolds of nonpositive curvature II, (à paraître).
- [Ba] BANCHOFF (T.). — Critical points and curvature for embedded polyhedra, *J. Diff. Geometry*, t. **1**, 1967, p. 245–256.
- [Bav] BAVARD (C.). — Courbure presque négative en dimension 3. Preprint École Polytechnique 1985.
- [B-P] BAVARD (C.), PANSU (P.). — Sur le volume minimal de R^2 . Preprint École Polytechnique 1984.
- [B1] BERGER (M.). — An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications, *Illinois J. Math.*, t. **6**, 1962, p. 700–712.
- [B2] BERGER (M.). — Une caractérisation purement métrique des variétés Riemanniennes à courbure constante, dans E.B. Christoffel, Birkhäuser 1981, p. 480–492.
- [B3] BERGER (M.). — H.E. Rauch, Géomètre différentiel, p. 1–14 de *Differential Geometry and Complex Analysis*, Berlin, Springer Verlag 1985.
- [Be] BESSE (A.). — *Manifolds all of whose geodesics are closed*. — Berlin, Springer-Verlag, 1978, (*Ergebnisse der Math.* n°93).
- [Bl] BLUMENTHAL (L.). — *Theory and Applications of Distance Geometry*. — Chelsea 1970.
- [B-M] BLUMENTHAL (L.), Menger (K.). — *Studies in Geometry*. — Freeman 1970.
- [B-D-S] BOURGUIGNON (J.-P.), DESCHAMPS (A.), SENTENAC (P.). — Conjecture de Hopf sur les produits de variétés et quelques variations particulières d'un produit de métriques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **5**, 1972, p. 277–302 et t. **6**, 1973 p. 1–16.
- [B-P] BOURGUIGNON (J.-P.), POLOMBO (A.). — Intégrands des nombres caractéristiques et courbure : rien ne va plus dès la dimension 6, *J. Diff. Geometry*, t. **16**, 1981, p. 537–550.
- [Bü] VON BRAUNMÜHL (A.). — Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades, *Math. Ann.*, t. XX, 1882, p. 557–586.
- [Br] BRITTAIN (D.). — (à paraître).
- [Bh1] BUCHNER (M.). — Simplicial structure of the real analytic cut-locus, *Proc. A.M. S.*, t. **64**, 1977, p. 118–121.
- [Bh2] BUCHNER (M.). — Stability of the cut-locus in $\dim \leq 6$, *Inventiones Math.*, t. **43**, 1977, p. 199–231.
- [Bh3] BUCHNER (M.). — The structure of the cut-locus in $\dim \leq 6$, *Compositio Math.*, t. **37**, 1978, p. 103–119.
- [B-C] BISHOP (R.), CRITTENDEN (R.). — *Geometry of Manifolds*. — Academic Press, 1964.
- [B-Z] BURAGO (Y.), ZALGALLER (D.). — Convex sets in Riemannian spaces of nonnegative curvature, *Russian Math. Surveys*, t. **32-3**, 1977, p. 1–57.

- [Bs1] BUSEMANN (H.). — *The Geometry of Geodesics*. — Academic Press, 1955.
- [Bs] BUSEMANN (H.). — *Recent synthetic Differential Geometry*. — Berlin, Springer-Verlag, 1970, (*Ergebnisse der Math.* n°54).
- [B-G] BUSER (P.), GROMOLL (D.). — Gromov's examples of almost negatively curved metrics on S^3 , prépublication Lausanne 1983.
- [B-K] BUSER (P.), KARCHER (H.). — Gromov's almost flat manifolds, in *Astérisque* n°81, Soc. Math. France 1981.
- [Ca] CALABI (E.). — (non publié).
- [C1] CARTAN (É.). — Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, t. 54, 1926, p. 214-264 et t. 55, 1927 p. 114-134 ou dans *Oeuvres complètes*.
- [C2] CARTAN (É.). — Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, t. 44, 1927, p. 345-467.
- [C3] CARTAN (É.). — *La géométrie des espaces de Riemann*. — Fascicule IX, Mémorial des Sciences mathématiques, Gauthier-Villars 1925.
- [C4] CARTAN (É.). — *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. — Gauthier-Villars, 1928, seconde édition 1951.
- [C5] CARTAN (É.). — Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, *J. Math. Pures Appl.*, t. 8, 1929, p. 1-33 ou dans *Oeuvres complètes*.
- [Ch1] CHEEGER (J.). — Finiteness theorems for a certain class of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, t. 92, 1970, p. 61-74.
- [Ch2] CHEEGER (J.). — On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. 36, A.M.S., 1980, p. 91-145.
- [Ch3] CHEEGER (J.). — Spectral Geometry of Singular Riemannian Spaces, *J. Diff. Geometry*, t. 18, 1983, p. 575-657.
- [Ch4] CHEEGER (J.). — Analytic torsion and the heat equation, *Ann. of Math.*, t. 109, 1979, p. 259-322.
- [C-E] CHEEGER (J.), EBIN (D.). — *Comparison theorems in Riemannian Geometry*. American Elsevier, 1975.
- [C-G] CHEEGER (J.), GROMOLL (D.). — On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, *Ann. of Math.*, t. 96, 1974, p. 413-443.
- [C-M-S] CHEEGER (J.), MÜLLER (W.), SCHRADER (R.). — On the curvature of piecewise flat spaces, *Comm. Math. Phys.*, t. 92, 1984, p. 405-454.
- [C-T] CHEEGER (J.), TAYLOR (M.). — On the diffraction of waves by conical singularities, I, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 35, 1982, p. 275-331 et p. 487-529.
- [Cr] CRITTENDEN (R.). — Minimum and conjugate points in symmetric spaces, *Cand. J. Math.*, t. 14, 1962, p. 320-328.
- [Do] DODZIUK (J.). — Finite-difference approach to the Hodge theory of harmonic forms, *Amer. J. Math.*, t. 98, 1976, p. 79-104.
- [D-P] DODZIUK (J.), PATODI (V.). — Riemannian structures and triangulations of manifolds, (preprint).
- [Du1] DURUMERIC (O.). — *Manifolds with almost equal diameter and injectivity radius*, (thèse). — Stony Brook 1982.
- [Du2] DURUMERIC (O.). — A generalization of Berger's almost $1/4$ -pinched manifolds theorem, I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 12, 1985, p. 260-264.
- [E1] ESCHENBURG (J.). — New examples of manifolds of strictly positive curvature, *Invent. Math.*, t. 66, 1982, p. 469-480.
- [E2] ESCHENBURG (J.). — *Freie isometrische Aktionen auf kompakten Lie-Gruppen mit positiv gekrümmten Orbiträumen*, (thèse). — Münster 1983.
- [E-H] ESCHENBURG (J.), HEINTZE (E.). — An elementary proof of the Cheeger-Gromoll splitting theorem, *Annals of Global Analysis and Geometry*, t. 2, 1984, p. 141-151.

- [F²-L-R] FEINBERG (G.), FRIEDBERG (R.), LEE (T.), REU (H.). — Preprint 1984, Columbia Univ.
- [Fe] FERUS (D.). — Symmetric submanifolds of Euclidean space, *Math. Ann.*, t. **247**, 1980, p. 81–93.
- [F-L] FRIEDBERG (R.), LEE (T.). — Preprint 1984, Columbia Univ.
- [Fu] FUKAYA (K.). — Finiteness theorems for negatively curved manifolds, (preprint 1983).
- [Ga] GABRIELOV (A.). — Combinatorial formulas for Pontryagin classes and GL-invariant chains, *Functional Anal. Applic.*, t. **12**, 1978, p. 1–7.
- [Gi] GASQUI (J.). — Équivalence projective et équivalence conforme, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **12**, 1979, p. 101–134.
- [G-S] GLUCK (H.), SINGER (D.). — Scattering of geodesics vector fields, *Ann. of Math.*, t. **108**, 1978, p. 347–372 et t. **110**, 1979, p. 202–225.
- [G-K-M] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.), MEYER (W.). — Riemannsche Geometrie im Grossen, Berlin, Springer-Verlag 1968, (*Lecture Notes in Math.*, **55**).
- [G-M] GROMOLL (D.), MEYER (W.). — On complete open manifolds of positive curvature, *Ann. of Math.*, t. **95**, 1969, p. 75–90.
- [G-W] GROMOLL (D.), WOLF (J.). — Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **77**, 1971, p. 545–552.
- [G1] GROMOV (M.). — Manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geometry*, t. **13**, 1978, p. 223–230.
- [G2] GROMOV (M.). — Conférences au Collège de France sur les variétés à courbure négative, à paraître rédigées par V. Schroeder.
- [G3] GROMOV (M.). — Volume and bounded cohomology, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **56**, 1983, p. 213–307.
- [G4] GROMOV (M.). — Curvature, diameter and Betti numbers, *Comment. Math. Helv.*, t. **56**, 1981, p. 179–195.
- [G5] GROMOV (M.). — Infinite groups as geometric objects, *Proceedings of ICM*, Warsaw 1983.
- [G-L-P] GROMOV (M.). — Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Textes Math. N°1, CEDIC-Nathan 1980.
- [G-L] GROMOV (M.), LAWSON (B.). — Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **58**, 1984.
- [G-S] GROVE (K.), SHIOHAMA (K.). — A generalized sphere theorem, *Ann. of Math.*, t. **106**, 1977, p. 202–211.
- [Ha] HADAMARD (J.). — Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. Math. Pures Appl.*, t. **4**, 1898, p. 27–73.
- [He] HEBDA (J.). — Conjugate and cut-loci and the Cartan-Ambrose-Hicks theorem, *Indiana Univ. Math. J.*, t. **31**, 1982, p. 17–26.
- [H-K] HEINTZE (E.), KARCHER (H.). — A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **11**, 1978, p. 451–470.
- [Hk] HICKS (N.). — Connexion preserving spray maps, *Ill. J. Math.*, t. **10**, 1966, p. 661–679.
- [Hks] HICKS (N.). — *Notes on Differential Geometry*. — Van Nostrand, 1965.
- [H-R] HOPF (H.), RINOW (W.). — Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen, *Comment. Math. Helv.*, t. **3**, 1931, p. 209–225.
- [Hs] HSIANG (W.Y.). — On the laws of trigonometries of two-point homogeneous spaces, (preprint Berkeley).

- [Hu] HUANG (H.). — Some remarks on the pinching problem, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, t. **9**, 1981, p. 389–401.
- [Ii] INNAMI (N.). — Convexity in Riemannian manifolds without focal points, dans *Advanced Studies in Pure Math.*, t. **3**, 1984, p. 311–332, Kinokuniya Tokyo et North-Holland, 1984.
- [J-K] JOST (J.), KARCHER (H.). — Geometrische Methoden zur Gewinnung von A-priori-Schranken für harmonische Abbildungen, *Manuscripta math.*, t. **40**, 1982, p. 27–77.
- [Ka] KARCHER (H.). — Vorlesungen über Differential Geometrie, cours polycopié Bonn.
- [Kt] KATSUDA (A.). — Gromov's convergence theorem and its applications, (preprint 1983).
- [Kl] KLINGENBERG (W.). — Riemannian Geometry, *de Gruyter Studies in Math.* n°1 1982.
- [Kw] KOMOROWSKI (J.). — Nets on a Riemannian manifold and finite-dimensional approximations of the Laplacian et A minorization of the first positive eigenvalue of the scalar Laplacian, (preprints de Inst. Math. Polish Acad. of Sciences, n°83 et 92).
- [L-Y] LAWSON (H.), YAU (S.T.). — Compact manifolds of nonpositive curvature, *J. Diff. Geometry*, t. **7**, 1972, p. 211–228.
- [vMt] VAN MANGOLDT (H.). — Über diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein, *Crelle J.*, t. **91**, 1881, p. 23–52.
- [Me] MEYER (D.). — Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **272**, 1971, p. 482–485.
- [Mi] MILNOR (J.). — Morse theory, *Ann. of Math. Studies* t. **51**, Princeton, 1963.
- [Mw1] MOSTOW (G.). — Strong rigidity of locally symmetric spaces, *Ann. of Math. Studies*, t. **78**, 1973, p. 1–195.
- [Mw2] MOSTOW (G.). — Discrete Subgroups of Lie Groups, *Advances in Math.*, t. **16**, 1975, p. 112–123.
- [Mü1] MÜLLER (W.). — Analytic torsion and R -torsion of Riemannian manifolds, *Advances in Math.*, t. **28**, 1978, p. 233–305.
- [Mü2] MÜLLER (W.). — Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula, Akad. Wiss. GDR report, 1982, et preprint I. H. E. S..
- [Mh] MUNKHOLM (H.). — Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm and Gromov's proof of Mostow's rigidity theorem (following Thurston), *Proc. Symp. Algebraic Topology*, Siegen 1979.
- [My1] MYERS (S.). — Connection between differential geometry and topology, I, II, *Duke Math. J.*, t. **1**, 1935, p. 376–391 et t. **2**, 1936, p. 95–102.
- [My2] MYERS (S.). — Riemannian manifolds with positive mean curvature, *Duke Math. J.*, t. **8**, 1941, p. 401–404.
- [Pa] PALAIS (R.). — On the differentiability of isometries, *Proc. A. M. S.*, t. **8**, 1957, p. 805–807.
- [Ps] PETERS (S.). — Cheeger's finiteness theorem for diffeomorphism classes of Riemannian manifolds, (preprint 1983).
- [Pé] POINCARÉ (H.). — Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **5**, 1905, p. 237–274.
- [Pr] PREISSMANN (A.). — Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comment. Math. Helv.*, t. **15**, 1942³, p. 175–216.
- [Rh] RAUCH (H.). — A contribution to differential geometry in the large, *Ann. of Math.*, t. **54**, 1951, p. 38–55.
- [Re] REGGE (T.). — General relativity without coordinates, *Nuovo Cimento*, t. **19**, 1961, p. 551–571.

- [Ri] RIEMANN (B.). — Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, traduite dans SPIVAK, *Differential Geometry*, vol. II.
- [Rw] RINOW (W.). — Die innere Geometrie der metrischen Räume, Berlin, Springer-Verlag, 1961, (*Grundlehren der Math. Wiss.*, **105**).
- [Ru] RUH (E.). — Almost flat manifolds, *J. Differential Geom.*, t. **17**, 1982, p. 1–14.
- [Rd] RUND (H.). — The differential geometry of Finsler spaces, Berlin, Springer-Verlag, 1959, *Grundlehren der Math. Wiss.*, **101**.
- [Si1] SAKAI (T.). — On cut-loci in compact Riemannian spaces, *Hokkaido Math. J.*, t. **6**, 1977, p. 136–161.
- [Si2] SAKAI (T.). — On the structure of cut-loci in compact Riemannian spaces, *Math. Annalen*, t. **235**, 1978, p. 129–148.
- [Si3] SAKAI (T.). — Cut-loci of Berger's spheres, *Hokkaido Math. J.*, t. **10**, 1980, p. 143–155.
- [Si4] SAKAI (T.). — Comparison and finiteness theorems in Riemannian Geometry, *Advanced Studies in Pure Math.*, t. **3**, 1984, p. 125–181, Kinokuniya Tokyo et North-Holland, 1984.
- [Sr] SCHROEDER (V.). — Finite volume and fundamental groups on manifolds of negative curvature, *J. Differential Geometry*, t. **20**, 1984, p. 175–183.
- [Sr1] SCHROEDER (V.). — Über die Fundamentalgruppe von Räumen nichtpositiver Krümmung mit endlichem Volumen, *Schriftenreihe Math. Inst. Münster*, 1984.
- [Sr2] SCHROEDER (V.). — A splitting theorem for spaces of nonpositive curvature, *Inventiones Math.*, t. **79**, 1985, p. 323–328.
- [Sa] SHIGA (K.). — Hadamard manifolds, *Geometry of Geodesics and related topics*, p. 239–281. — Kinokuniya, Tokyo et North-Holland (*Adv. Studies in Pure Math.*), 1984.
- [Sh] SHIOHAMA (K.). — Topology of complete noncompact manifolds, *Adv. Studies in Pure Math.*, t. **3**, Kinokuniya, Tokyo et North Holland, 1984.
- [Ss] SIMONS (J.). — On the transitivity of holonomy systems, *Annals of Math.*, t. **76**, 1962, p. 213–234.
- [S-T] SIU (Y.-T.), YAU (S.T.). — Compactifications of negatively curved complete Kähler manifolds of finite volume, *Ann. of Math. Studies*, t. **102**, 1982, p. 363–380.
- [S] STERNBERG (S.). — *Lectures on Differential Geometry*. — Prentice-Hall, 1964.
- [St] STONE (D.). — Geodesics in piecewise linear manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **215**, 1976, p. 1–44.
- [Ta] TAKEUCHI (M.). — On conjugate loci and cut-loci of compact symmetric spaces I, II, *Tsukuba J. Math.*, t. **2**, 1978, p. 35–68 et t. **3**, 1979, p. 1–29.
- [To1] TOPONOGOV (V.). — Riemannian spaces with curvature bounded below, *Uspehi Math. Nauk*, t. **14**, 1959, p. 87–135.
- [To2] TOPONOGOV (V.). — Riemannian spaces which contain straight lines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **37**, 1964, p. 287–290.
- [Vi1] VILLE (M.). — On $(1/4)$ -pinched 4-dimensional Riemannian manifolds of negative curvature, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1985.
- [Vi2] VILLE (M.). — Sur le volume des variétés riemanniennes pincées, *Bull. Soc. Math. France*, 1985.
- [Wl] WALL (C.T.C.). — Geometric properties of generic differentiable manifolds, *Geometry and Topology*, Berlin, Springer-Verlag, 1979, (*Lecture Notes in Math*, **597**).
- [Wa] WALD (A.). — Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen, *Ergebnisse der Math. Kolloq. Wien*, t. **7**, 1936, p. 24–46.
- [W-A] WALLACH (N.), ALOFF (S.). — An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **81**, 1975, p. 93–97.

- [Wr] WARNER (F.). — The conjugate locus of Riemannian manifold, *Amer. J. Math.*, t. **87**, 1965, p. 575–604.
- [We] WEINSTEIN (A.). — On the homotopy type of positively pinched manifolds, *Arch. Math.*, t. **18**, 1967, p. 523–524.
- [W-M-T] WHEELER (J.), MISNER (C.), THORNE (K.). — *Gravitation*. — Freeman 1974.
- [W-P] WU (C.H.), PATI (V.). — (à paraître).
- [Y] YAU (S.T.). — Seminar on Differential Geometry, edited by S.T. YAU, *Ann. of Math. Studies*, t. **102**, 1982, p. 669–706.

Marcel BERGER,
Université Paris VII,
U.E.R. de Mathématique et Informatique,
Tour 45-55, 5^{ième} Étage,
2, Place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.