Astérisque

R. BRYANT
M. DUFLO
J. TITS

Annexe : Résumé des autres conférences

Astérisque, tome S131 (1985), p. 435-441
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__S131__435_0>

ANNEXE

RÉSUMÉS

DES AUTRES CONFÉRENCES

THE CHARACTERISTIC VARIETY AND MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY

BY

R. BRYANT

SUMMARY. — Let M be a smooth manifold and let $I \subseteq \Omega^*(M)$ denote a differentially closed exterior ideal generated in positive degrees and let $\omega \in \Omega^n(M)$ denote a non-zero n-form, thought of as an independence condition for n dimensional submanifolds $N^n \subseteq M$. We define the classical notions of integral manifolds of (I, ω), integral elements, polar spaces and Cartan characters of (I, ω). We state the classical condition of *involutivity* of (I, ω) and the Cartan-Kähler theorem implies that an involutive analytic (I, ω) always has integral manifolds.

We define the characteristic variety of an integral element E of (I, ω) and we relate the dimension and degree of this variety with the Cartan characters of (I, ω). We state the integrability theorem in the involutive case due to OFER.

The remainder of the talk is devoted to examples illustrating the sort of geometric information about given problems in differential geometry which can be understood in terms of the characteristic variety.

Our first example is the study of the isometric imbedding problems undertaken by BERGER, BRYANT, GRIFFITHS and YANG. We discuss how the characteristic variety is reflected in the asymptotics and show that for $M^3 \subseteq \mathbf{E}^5$, the characteristics provide an obstruction to analytically, isometrically, nondegenerately imbedding S^3 into $\mathbf{E}^5$.

Our second example is a class of equations with empty characteristic variety and whose solutions therefore depend at most on constants.

Our final example is a class of determined equations with degenerate symbol. Our basic model is the equation $d\alpha = F(\alpha)$ where α is a 1-form on $\mathbf{R}^3$ and $F : \Lambda^2\mathbf{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbf{R}^3)$ is some fixed function. The degeneracies of this model are then compared to more complicated equations for the Riemann curvature tensor in dimension 3 and a perturbed Ricci equation in dimensions at least 3.

ANALYSE HARMONIQUE NON COMMUTATIVE ET SOUS-GROUPES DE CARTAN GÉNÉRALISÉS

PAR

M. DUFLO

RÉSUMÉ. — É. CARTAN et H. WEYL ont montré l'importance des sous-groupes de Cartan dans les problèmes d'analyse harmonique sur les groupes compacts. On sait qu'il en est de même pour les groupes réductifs. Le but de l'exposé est de montrer (sur des exemples) que pour des groupes non réductifs, les groupes qui jouent un rôle ne sont pas les sous-groupes de Cartan (en général), mais la partie réductive du stabilisateur des formes linéaires génériques sur l'algèbre de Lie. É. CARTAN a généralisé la théorie de Cartan-Weyl aux espaces symétriques compacts et utilisé pour cela ce qu'on appelle maintenant des "sous-espaces de Cartan". Je propose de même une généralisation de la notion de sous-espaces de Cartan pour les espaces symétriques G/H non nécessairement réductifs.

AVATARS DES GRANDS THÉORÈMES DE CLASSIFICATION D'ÉLIE CARTAN

PAR

J. TITS

RÉSUMÉ. — Parmi les résultats fondamentaux dûs à Élie CARTAN, plusieurs peuvent être vus comme des "théorèmes de classification". Ils concernent par exemple :

(I) les algèbres de Lie complexes semi-simples (la terminologie n'est évidemment pas celle de CARTAN, qui parle de "structure")†;

(I*) les groupes analytiques complexes semi-simples;

(II) les algèbres de Lie et groupes analytiques réels semi-simples;

(III) les espaces riemanniens symétriques;

(IV) les représentations linéaires complexes (resp. réelles) de dimension finie des groupes analytiques complexes (resp. réels) semi-simples;

(V) les "groupes infinis et continus".

Chacun de ces résultats a été l'origine de multiples développements et a inspiré d'autres théorèmes de classifications présentant souvent une analogie remarquable avec ceux de CARTAN, même lorsque des méthodes différentes de celles de CARTAN s'avéraient nécessaires pour les établir. Citons (sans prétendre le moins du monde à être complet) la classification :

(I′) des groupes algébriques semi-simples sur un corps algébriquement clos (CHEVALLEY);

(II′) des groupes algébriques semi-simples sur un corps fini (CHEVALLEY, HERTZIG, STEINBERG, TITS; puis SUZUKI et KEE, et — dernier avatar — la classification par TUTTI QUANTI des groupes finis simples); idem sur un corps localement compact non discret (KNESER, BRUHAT-TITS); idem sur n'importe quel corps ("indice" + noyau anisotrope : TITS);

† Classification basée sur des travaux antérieurs de KILLING.

(III′) des espaces symétriques pseudo-riemanniens (BERGER) ; des “espaces symétriques non archimédiens” (immeubles affines localement finis : TITS) ;

(IV′) des représentations rationnelles irréductibles — sur le corps de base — d’un groupe algébrique semi-simple sur un corps arbitraire (“invariant de Brauer” : TITS) ;

(V′) des pseudo-groupes simples (STERNBERG et al.) ; des algèbres de Lie graduées satisfaisant à certaines conditions (V. KAC).

La conférence a porté principalement sur les classifications (I′), (II′), (III′). Au préalable, on a rappelé les résultats de (I), (II), (III) exprimés en termes de graphes de Dynkin “étendus” ainsi qu’une série d’algorithmes permettant de déduire un grand nombre de données concrètes des diagrammes en question.

ABSTRACT. — In this volume are gathered eighteen talks given by prominent specialists at the C.N.R.S.-N.S.F. Seminar "The mathematical heritage of Élie CARTAN" held in June 1984 in Lyon (France). Recent developments on topics originating in Élie CARTAN's work such as Systems of Partial Differential Equations, Representations of Lie Groups, Riemannian and Conformal Geometries, General Relativity and Symmetric Spaces are presented.