Astérisque

E. Pardoux

Sur les équations aux dérivées partielles stochastiques, de type parabolique

Astérisque, tome 132 (1985), p. 71-87

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__71_0>

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES, DE TYPE PARABOLIQUE.

E. PARDOUX

Introduction

Le but de cet article est de présenter les principaux résultats concernant les Equations aux Dérivées Partielles Stochastiques (E.D.P.S.) de type parabolique. Etant donné des opérateurs aux dérivées partielles A, B_i, $i \in \mathbb{N}$, et une collection $\{w_t^i, t \geq o;\ i \in \mathbb{N}\}$ de processus de Wiener standard indépendants, on cherche un processus $u_t(x,\omega)$ solution de :

$$(0.1)\quad d\,u_t = A(u_t)dt + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(u_t)dw_t^i$$

avec u_o donné, et éventuellement des conditions aux limites. On cherchera la solution comme un processus $\{u_t, t \geq o\}$ à valeurs dans un espace fonctionnel (i.e. un espace de fonction de x; $x \in D$, D domaine de $\mathbb{R}^d$), qui sera un espace de Hilbert ou de Banach. A et B seront alors considérés comme des opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert. Nous laissons donc volontairement de coté l'étude des processus à valeurs mesures (cf. par exemple DAWSON [10]) ou à valeurs dans des espaces nucléaires (cf. USTUNEL [36]), ainsi que l'étude des solutions d'EDPS en tant que champs aléatoires.

Après des remarques sur la notion d'EDPS parabolique, notre exposé sera divisé en quatre parties: la méthode des semi-groupes appliquée aux EDPS linéaires, la méthode variationnelle appliquée aux EDPS non linéaires avec condition de monotonie, l'approche type "problème de martingales" dans un cadre variationnel, et enfin les résultats concernant les EDPS intervenant dans la théorie du filtrage non linéaire.

Notations : Dans toute la suite, on se donnera une suite de processus de Wiener standards indépendants $\{w_t^i, t \geq o;\ i \in \mathbb{N}\}$ définis sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$, t.q. $\forall i$, w_t^i soit une $\underline{\underline{F}}_t$-P martingale. Etant donné un espace de Banach X, $p \geq 1$ et $T > o$, on notera $M^p(o,T;X)$ l'espace des classes de processus $\{u_t,\ o \leq t \leq T\}$ qui sont $\underline{\underline{F}}_t$- progressivement mesurables à valeurs dans X, et tels que :

$$E \int_o^T \|u_t\|_X^p \, dt < \infty$$

$M^p(o,T;X)$ est un espace de Banach. $M^2(o,T;X)$ est un espace de Hilbert si X en est un. Nous utiliserons la notion d'intégrale stochastique pour des processus à valeurs hilbertiennes (cf. METIVIER-PELLAUMAIL [27], METIVIER [26]), et les notations suivantes :

si $\varphi \in M^2(o,T;X)$, X espace de Hilbert, et

si les trajectoires de φ_t sont p.s. continues à valeurs dans X, on définit respectivement :

l'intégrale de Ito :
$$\int_o^t \varphi_s \, dw_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{n-1} \varphi_{t_k^n} (w_{t_{k+1}^n} - w_{t_k^n})$$

l'intégrale de Stratonovitch :
$$\int_o^t \varphi_s \circ dw_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{n-1} \frac{\varphi_{t_k^n} + \varphi_{t_{k+1}^n}}{2} (w_{t_{k+1}^n} - w_{t_k^n})$$

avec $t_k^n = \frac{k}{n} t$. Si φ_t a les propriétés ci-dessus, mais est $\underline{\underline{G}}_t = \sigma\{w_s - w_t,\ t \leq s \leq T\}$- adapté (au lieu de $\underline{\underline{F}}_t$ adapté), on utilisera l'intégrale de Ito rétrograde, que l'on peut définir par :

$$\int_t^T \varphi_s \oplus dw_s = \sum_{n\to\infty}^{n-1} \varphi_{\tau_{k+1}^n} (w_{\tau_{k+1}^n} - w_{\tau_k^n})$$

avec $\tau_k^n = t + \frac{k}{n}(T-t)$.

1. Remarques sur les EDPS de type parabolique.

Supposons pour l'instant que A et B sont deux opérateurs linéaires (éventuellement non bornés) définis sur un espace de Hilbert H. On considère l'équation d'évolution :

(1.1) $du_t = Au_t \, dt + Bu_t \, dw_t, \quad u_o \in H$

a- Il résulte de la formule de Ito (au moins formellement):
$$E\|u_t\|_H^2 = E \int_o^t [2(A u_s, u_s) + \|B u_s\|_H^2] ds + \|u_o\|_H^2$$

on voit immédiatement que si l'on veut utiliser une propriété d'ellipticité pour obtenir des estimations à priori, la condition d'ellipticité devra porter sur l'opérateur :

$$-A - \frac{1}{2} B^* B$$

Ceci entraîne en particulier que si A est un opérateur aux dérivées partielles du second ordre, B peut être au plus un opérateur du premier ordre.

b - Supposons de plus que les opérateurs A et B commutent. Alors on a, au moins formellement :

$$u_t = e^{[(A - \frac{B^2}{2})t + B w_t]} u_o$$

Pour que cette expression ait un sens, il faut que $A - \frac{B^2}{2}$ soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, et que B soit le générateur infinitésimal d'un groupe. Remarquons que dans le cas où A est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre 2, et B un opérateur d'ordre au plus 1, les termes d'ordre 2 des opérateurs $A - \frac{1}{2} B^2$ et $A + \frac{1}{2} B^* B$ coïncident.

c - Considérons maintenant l'EDPS au sens de Stratonovitch :

$$d u_t = A u_t dt + B u_t \circ d w_t$$

cette équation est équivalente à l'équation suivante au sens de Ito :

$$d u_t = (A + \frac{1}{2} B^2) u_t dt + B u_t d w_t$$

qui nous conduit à une condition d'ellipticité portant sur l'opérateur :

$$- A - \frac{1}{2}(B + B^*) B$$

qui, dans le cas A du second ordre et B du premier ordre, est équivalente à une condition d'ellipticité sur -A.

Il peut sembler plus naturel, au vu de cette remarque, d'étudier les EDPS écrites au sens de Stratonovitch. Cependant, nous écrirons par la suite la plupart des équations au sens de Ito, ce qui possède d'autres avantages. Signalons qu'en ce qui concerne les EDPS de type hyperbolique (A et B opérateurs du premier ordre), il est indispensable de les étudier sous forme Stratonovitch - cf. Remarque 5.1 ci-dessous.

2. Equations linéaires : méthode de semi-groupe.

On considère l'équation (0.1), avec un nombre fini de processus de Wiener pour simplifier l'exposé :

$$(2.1) \qquad d u_t = A u_t dt + \sum_{i=1}^{k} B_i u_t d w_t^i$$

où A et $\{B_i\ ; i=1,\dots,k\}$ sont des opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert réel séparable H. On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, t.q. $\exists M>o$ et $\rho>o$ avec :

$$\|e^{tA}\| \leqslant M\, e^{-\rho t}$$

on va en fait chercher à résoudre l'équation (2.2) suivante qui, lorsque les deux équations ont un sens, est équivalente à (2.1):

$$(2.2) \qquad u_t = e^{tA} u_o + \sum_{i=1}^{k} \int_o^t e^{(t-s)A} B_i\, u_s\, d w_s^i$$

On est donc amené à étudier l'application :

$$I : M^2(o,T;H^k) \to M^2(o,T;H)$$

définie par :

$$[I(v)]_t = \sum_{i=1}^{k} \int_o^t e^{(t-s)A} v_s^i\, d w_s^i$$

Nous allons énoncer un résultat de DA PRATO [9], en nous restreignant pour simplifier au cas où A est auto-adjoint, et $A \leqslant -\alpha I < o$:

Proposition 2.1 : Sous les hypothèses ci-dessus sur l'opérateur A, on a :

$$\|(-A)^{1/2} I(v)\|^2_{M^2(o,T;H)} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \|v^i\|^2_{M^2(o,T;H)}$$

Remarque 2.2 : Ce résultat est optimal. Il nous dit que I envoit $M^2(o,T;H)$ dans $M(o,T;D((-A)^{1/2}))$. On peut le rapprocher du résultat classique concernant l'opérateur J défini par :

$$[J(v)]_t = \int_o^t e^{(t-s)A}\, v(s)\, ds$$

qui envoit $L^2(o,T;H)$ dans $L^2(o,T;D(-A))$, cf. par ex. LIONS - MAGENES [25].

□

On fait alors les hypothèses suivantes :

(i) $u_o \in H$

$$(ii) \begin{cases} B_i \in \mathcal{L}(D((-A)^{1/2});H);\ i=1 \dots k, \text{ et} \\ \exists\, \eta \in [0,1[\text{ t.q. } \frac{1}{2} \sum_{1}^{k} \|B_i\, y\|^2 \leqslant \eta\, \|(-A)^{1/2} y\|^2, \quad \forall y \in D((-A)^{1/2}). \end{cases}$$

Il résulte de la Proposition (2.1) et de (ii) que l'opérateur Γ défini par :

$$[\Gamma(u)]_t = \sum_1^k \int_o^t e^{(t-s)A} B_i\, u_s\, d w_s^i$$

est une contraction stricte dans l'espace $M^2(o,T;D((-A)^{1/2}))$, d'où l'on déduit immédiatement le :

<u>Théorème 2.3</u> : Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (2.2) admet une solution unique $u \in M^2(o,T;D((-A)^{1/2}))$.

□

Une telle solution de l'équation (2.2) est appelée dans la littérature anglo-saxonne une "mild solution" de l'équation (2.1). De nombreux auteurs se sont intéressés à ce type de formulation, avec des hypothèses en général plus restrictive que (ii), par exemple en supposant les B_i bornés. Citons notamment BALAKRISHNAN [1], CHOJNOWSKA-MICHALIK [7], CURTAIN [8], ICHIKAWA [14].

On démontre la continuité p.s. dans H de la solution u_t de (2.2) en intégrant par parties l'intégrale de convolution :

$$\int_o^t e^{(t-s)A} B_i\, u_s\, d w_s = \int_o^t B_i\, u_s\, d w_s + A \int_o^t e^{(t-s)A} X_s\, ds$$

avec $\quad X_s = \int_o^t B_i\, u_s\, d w_s$

Dans le cas où e^{tA} est un semi-groupe de contraction, ou plus généralement vérifie :

$$\| e^{tA} \| \leqslant e^{ct}, \quad c \in \mathbb{R},$$

KOTELENEZ [17] déduit la continuité d'une inégalité de type "sous-martingale".

Le résultat ci-dessus s'étend à des opérateurs A non auto-adjoints, et dépendant du temps. Donnons enfin un exemple d'application du Théorème 2.3 :

<u>Exemple 2.4</u> : Supposons que $H = L^2(O,1)$, A est défini par (1) :

$$D(A) = H^2(O,1) \cap H_o^1(O,1)\,;\; A\,u = \frac{d^2u}{dx^2},\; u \in D(A)$$

$$k = 1\,;\; B\,u = \theta\, \frac{d\,u}{d\,x},\; u \in D((-A)^{1/2}) = H_o^1(0,1)$$

Alors l'hypothèse (ii) est vérifiée si et seulement si $\theta^2 < 2$.

On aboutit à la même condition en suivant l'argument du §1. b

----

(1) Pour la définition des espaces de Sobolev $H^p(D)$ ou $H_o^p(D)$, D ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \geqslant o$, on renvoit par exemple à LIONS-MAGENES [25].

ci-dessus, ou en appliquant la théorie variationnelle exposée au §3 ci-dessous. Les résultats de DA PRATO dans le cas A non auto-adjoint permettent de traiter le cas où l'opérateur A est donné par :

$$A\,u = a\,\frac{d^2u}{dx^2}\ , \text{ avec :}$$

$a \in C([0,1])$, $o < c \leqslant a(x) \leqslant C$, les autres données étant comme ci-dessus, à condition que $\theta^2 < c$. Remarquons que ce dernier exemple ne peut pas être traité par les méthodes variationnelles du §3.

□

3. Equations non linéaires monotones: méthode variationnelle.

On considère à nouveau l'équation :

$$(3.1)\quad \begin{cases} d\,u_t = A(u_t)dt + \sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i(u_t)\,d\,w_t^i \\ u_o \in H \end{cases}$$

On se donne, outre l'espace de Hilbert séparable H, un espace de Banach réflexif et séparable V, dense dans H, avec injection continue. On identifie H à son dual. Alors H s'identifie à un sous espace de V', i.e. on a le schéma :

$$V \subset H \simeq H' \subset V'$$

Et on se donne A comme opérateur de V dans V', et les B_i comme opérateurs de V dans H.

Remarque 3.1 : Dans le cas linéaire, si $A \in \mathcal{L}(V,V')$, $A = A^* \leqslant -\alpha I < o$, alors $V = D((-A)^{1/2})$, et $A \in \mathcal{L}(V,V')$ est une extension d'un opérateur non borné sur H, de domaine $D(A) \triangleq \{u \in V,\ A\,u \in H\}$.

□

On note à nouveau $\|\,.\,\|$ et $(.,.)$ la norme et le produit scalaire dans H, et $<.,.>$ le produit de dualité V,V'.

Pour obtenir des estimations à priori, on a besoin de disposer d'un calcul différentiel stochastique pour la classe des processus dans laquelle on cherche une solution à l'équation (3.1), à savoir l'espace $M^p(o,T;V)$. En particulier, on voudrait pouvoir écrire l'égalité :

$$(3.2)\quad \begin{cases} \|u_t\|^2 = \|u_o\|^2 + 2\int_o^t <A(u_s),u_s>ds + \sum\limits_i \int_o^t \|B_i(u_s)\|^2\,ds\ + \\ \qquad + 2\sum\limits_i \int_o^t (u_s, B_i(u_s))\,d\,w_s^i \end{cases}$$

Il faut remarquer que (3.2) ne résulte pas du calcul différentiel stochastique usuel dans les espaces de Hilbert. En effet, u_t n'est pas une semi-martingale à valeurs dans H, mais la somme d'une martingale à valeurs dans H, et d'un processus à variations bornées à valeurs dans V'. Cependant u_t est p.p. et p.s. dans V. Ceci permet d'établir le :

Théorème 3.2 : (PARDOUX [30],[31]):

Soit $\{u_t, t \in [o,T]\}$ un processus continu à valeurs dans V', $p > 1$, t.q.:

$$u \in M^p(o,T;V)$$

et $\exists\, u_o \in H$, $v \in M^{p'}(o,T;V')$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$ et une martingale $\{M_t, t \in [o,T]\}$ continue et de carré intégrable à valeurs dans H, t.q.:

$$u_t = u_o + \int_o^t v_s\, ds + M_t,$$

alors :

(i) $u \in C([o,T];H)$ p.s.

(ii) Le calcul différentiel stochastique de Ito s'applique à $\Phi(u_t)$, pour une large classe de fonctionnelles $\Phi : H \to \mathbb{R}$.

□

Dans [30] et [31], la démonstration du Théorème 3.2 est imbriquée avec l'étude d'une classe d'EDPS. KRYLOV-ROSOVSKII [19] en ont proposé une démonstration plus directe.

Prenant l'espérance dans (3.2), on obtient :

$$E\|u_t\|^2 = \|u_o\|^2 + E\int_o^t (2 < A(u_s), u_s > + \sum_i \|B_i(u_s)\|^2)\, ds$$

Au vu de cette égalité, et de la théorie des EDP paraboliques non linéaires monotones (cf. LIONS [24]), on devine aisément les hypothèses et le résultat suivants :

Hypothèses : $\exists\, p > 1$, $\alpha > o$, λ et k t.q. $\forall u, v, \bar{v} \in V$.

(i) Coercivité:

$$2 < A(u), u > + \sum_i \|B_i(u)\|^2 + \alpha \|u\|_V^p \leqslant k + 2\lambda \|u\|^2$$

(ii) Monotonie :

$$2 < A(u) - A(v), u-v > + \sum_i \|B_i(u) - B_i(v)\|^2 \leqslant 2\lambda \|u-v\|^2$$

(iii) Croissance:

$$\|A(u)\|_{V'} \leq k\,(1 + \| u \|_V^{p-1})$$

(iv) Continuité:

$$z \to \langle A(u + z\,v), \bar{v} \rangle \text{ est continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Théorème 3.3: (PARDOUX [30],[31], KRYLOV-ROSOVSKII [19]):

Sous les hypothèses (i) à (iv), l'équation (3.1) admet une unique solution $u \in M^p(o,T;V)$, t.q. de plus :

$$u \in C([o,T];H) \text{ p.s.}$$

□

Ce théorème a été démontré dans [30],[31] en supposant en outre les B_i localement lipchitziens, puis sous la forme ci-dessus dans [19]. On peut en fait décomposer A en une somme d'opérateurs A^j, B_i en une somme de B_i^j, chaque $\{A^j, B_i^j, i \in \mathbb{N}\}$ satisfaisant (i) à (iv) avec un espace V_j et un exposant p_j différent, ce qui permet en particulier d'étudier :

Exemple 3.4 : Soit $H = L^2(O,1)$, $V_1 = H_o^1(O,1)$, $p_1 = 2$,

$A_1 = \frac{d^2}{dx^2}$, $B^1 = \theta\,\frac{d}{dx}$; $V_2 = L^4(O,1)$, $p_2 = 4$,

$A_2(u) = -u^3$, $B^2(u) = \delta\,u^2$. Avec les conditions $\theta^2 < 2$, $\delta^2 < 3/2$, on peut appliquer le Théorème 3.3 à l'équation :

$$\begin{cases} d\,u_t = (\dfrac{d^2u_t}{dx^2} - u_t^3)\,dt + \theta\,\dfrac{du_t}{dx}\,d\,w_t^1 + \delta\,u_t^2\,d\,w_t^2 \\ u_o \in L^2(O,1) \end{cases}$$

□

GYÖNGY [13],[11] a généralisé les Théorèmes 3.2 et 3.3, pour étudier des équations du type :

$$(3.3) \qquad d\,u_t = A(u_t)\,d\,N_t + \sum_i B_i(u_t)\,d\,M_t^i$$

où N_t est un processus croissant, les M_t^i sont des martingales quasi continues à gauche et localement de carré intégrable (nous supposons pour simplifier les M^i deux à deux orthogonales). On suppose alors que les processus N_t et $\langle M^i \rangle_t$ (i=1,2,...) sont absolument continus par rapport à un processus croissant D_t. On a un résultat analogue au Théorème 3.3, à condition de remplacer partout dans les hypothèses :

$$A(u) \text{ par } A(u)\,\frac{dN_t}{dD_t}\,, \text{ et}$$

$$\| B_i(u) \|^2 \text{ par } \| B_i(u) \|^2 \frac{d < M^i >_t}{d D_t}, \text{ les conditions (i)...(iv)}$$

devant être satisfaites $\forall t$ et p.s.; on impose également la restriction: $\exists \varepsilon > o$ t.q. $\Delta D_t \lambda \leqslant 1 - \varepsilon$, $\forall t$ et p.s. (où λ est la constante qui intervient dans (i) et (ii)).

Remarque 3.5 : a - On pourrait s'intéresser à l'équation :

$$d u_t = A(u_{t^-}) \, d N_t + \sum_i B_i(u_{t^-}) \, d M_t^i$$

dont l'étude est plus délicate que celle de (3.3) puisque en particulier à chaque instant de saut de N_t, la solution perd de la régularité, ce qui oblige à imposer des conditions supplémentaires sur A et B.

b - Pour une généralisation au cas où le passé de la trajectoire de la solution intervient dans $d u_t$, voir REAL [34].

c - En choisissant $V = H = \mathbb{R}^d$, on déduit des résultats ci-dessus un résultat d'existence et d'unicité forte pour les équations différentielles stochastiques, qui n'est pas classique. L'hypothèse de monotonie permet de traiter des coefficients non lipchitziens. C'est un exemple (probablement rare) de résultat pour des équations en dimension infinie, qui a produit un nouveau résultat en dimension finie. En fait, il s'agit d'une technique d'étude des EDP non linéaires, qui s'est révélée utile pour l'étude des EDS en dimension finie, cf. BENSOUSSAN-LIONS [2], JACOD [16], GYÖNGY_KRYLOV [12].

4. Problème de Martingales

En dimension finie, la théorie des solutions faibles d'EDS (en particulier via la résolution du "problème de martingales") permet d'obtenir des résultats dans des cas inaccessibles par la théorie classique de Ito. Il en est de même pour les EDPS. En particulier, la méthode de compacité, qui permet de résoudre des EDP non linéaires qui ne satisfont pas d'hypothèse de monotonie, par exemple les équations de Navier-Stokes cf. LIONS [24], se généralise aux EDPS dans leur formulation faible, mais pas dans leur formulation forte.

Nous allons indiquer le formalisme et les résultats de VIOT [37].

Les notations étant les mêmes qu'au §3, on choisit comme espace canonique :

$$\Omega = L^2(o,T;V) \cap C([o,T];\overline{H})$$

où $\overline{H}$ désigne l'espace H, muni de sa topologie faible. On munit Ω du supremum de la topologie faible de $L^2(o,T;V)$, et de la topologie de la convergence dans $\overline{H}$ uniforme en t. Soit $\underline{\underline{F}}$ la plus petite σ-algèbre de parties de Ω, qui rend mesurables les applications $\omega \to \omega(t)$, de Ω à valeurs dans H. On définit le processus :

$$u_t(\omega) = \omega(t)$$

On cherche une mesure de probabilité P sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ telle que :

(i) $P(u_o(\omega) = u_o) = 1$

(ii) $M_t^v(\omega) \triangleq (u_t(\omega),v) - (u_o(\omega),v) - \int_o^t \langle A(u_s(\omega)), v \rangle ds$

est une P-martingale réelle continue, de processus croissant :

$$\langle M^v \rangle_t = \sum_i \int_o^t (B_i(u_s),v)^2 ds,$$

$\forall$ v appartenant à un sous espace dense de V.

L'espace Ω est un espace de Lusin, complètement régulier. Bien que ce ne soit pas un espace polonais, le critère de relative compacité de Prohorov est vrai sur Ω. De plus on a le critère suivant de relative compacité d'une partie K de Ω :

"Une c.s. pour que $K \subset \Omega$ soit relativement compacte est :

a) K est un borné de $L^2(o,T;V)$, $\sup_{t \leq T, \omega \in K} \|\omega(t)\|_H < \infty$

b) l'ensemble des applications : $t \to (\omega(t),h)$, de $[o,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où ω parcourt K et h parcourt un sous ensemble dense de H, est équicontinue".

L'existence d'une solution au problème de martingales s'obtient par approximation (par exemple, approximation en dimension finie, par la méthode de Galerkine). L'unicité s'obtient en démontrant l'unicité trajectorielle. On en déduit alors, comme en dimension finie (cf. IKEDA-WATANABE [15]) l'existence et l'unicité d'une solution forte.

A l'aide de ce formalisme, on peut établir la convergence en loi vers une EDPS d'une suite d'EDP à coefficients fonctions d'un processus ergodique, généralisant ainsi des résultats en dimension finie de PAPANICOLAOU [29] et d'autres.

Nous allons décrire un résultat de BOUC-PARDOUX [5]. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{L}(H_o^1(D), H^{-1}(D))$ un opérateur aux dérivées partielles du second ordre, t.q. -A soit elliptique, à coefficients C_b^∞. Supposons donnée pour tout $z \in \mathbb{R}^p$, $B(z) \in \mathcal{L}(H^1(D), L^2(D))$, opérateur du premier ordre à coefficient C_b^∞. Soit enfin Z_t un processus de diffusion stationnaire ergodique, défini sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}},\bar{P})$, t.q. $E[B(Z_t)]=0$. Soit u_t^ε la solution de l'EDP :

$$\frac{du_t^\varepsilon}{dt} = A\,u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} B(Z_{t/\varepsilon^2})u_t^\varepsilon$$

$$u_o^\varepsilon = u_o$$

Soit Q^ε la loi de u^ε sur l'espace canonique Ω. Alors, sous certaines hypothèses, $Q^\varepsilon \Rightarrow Q$, lorsque $\varepsilon \to o$, où Q est la solution du problème de martingales associé à l'EDPS:

$$du_t = [A + \int_o^\infty E(B(Z_s)B(Z_o))ds]\,u_t\,dt + K(u_t)\,d\,W_t$$

où W_t est un mouvement brownien cylindrique sur $H = L^2(D)$ (i.e. l'opérateur de covariance de W_t est $t\,I$), et $\forall\, u \in H_o^1(D)$, $K(u) \in \mathcal{L}(H)$ est tel que $R(u) = K(u)K^*(u)$ est donné par :

$$(R(u)v,v) = 2\int_o^\infty E[(B(Z_o)u,v)(B(Z_s)u,v)]ds,\quad \forall\, v \in H$$

5. <u>Les équations du filtrage: ellipticité et hypoellipticité</u>.

Nous allons maintenant indiquer des résultats récents concernant la régularité de la solution d'une EDPS, qui intervient en théorie du filtrage non linéaire. Commençons par énoncer le problème de filtrage.

Soit X_o, X_i $(i=1,\dots,d)$ et $\tilde{X}_j$ $(j=1,\dots,k)$ des champs de vecteurs à coefficients de classe C_b^∞ sur $\mathbb{R}^p$, $\ell \in C_b^\infty(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^k)$ et $\{w_t^i\}$, $i=1,\dots,d$; $\{\tilde{w}_t^j\}$, $j=1,\dots,k$ des processus de Wiener standard réels indépendants définis sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$. On considère les processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ solution de :

$$(5.1)\quad \begin{cases} dx_t = X_o(x_t)dt + \sum_{i=1}^{d} X_i(x_t)\circ d\,w_t^i + \sum_{j=1}^{k} \tilde{X}_j(x_t)\circ(\ell^j(x_t)dt + d\tilde{w}_t^j) \\ d\,y_t = \ell(x_t)dt + d\,\tilde{w}_t \\ x_o \text{ est une v.a. } \underline{\underline{F}}_o \text{ mesurable, de loi } \mu_o;\ y_o = 0 \end{cases}$$

On pose $\underline{\underline{G}}_t^s \overset{\Delta}{=} \sigma\{y_r - y_s,\ s \leqslant r \leqslant t\}$, $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{G}}_t^o$.

Le problème de filtrage consiste à déterminer la loi conditionnelle de x_t, sachant $\underline{\underline{G}}_t$, ce qui revient à calculer les quantités $E[f(x_t)/\underline{\underline{G}}_t]$, par exemple pour tout f dans $C_b(\mathbb{R}^p)$. Etant donné :

$$z_t^s = \exp[\sum_{j=1}^{k}(\int_s^t \ell^j(x_s)dy_s^j - \frac{1}{2}\int_s^t(\ell^j(x_s))^2ds)],\quad z_t = z_t^o$$

on définit une nouvelle probabilité $\overset{\circ}{P}$ sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ telle que $\forall\, t \geqslant o$,

$$\left.\frac{d\overset{\circ}{P}}{dP}\right|_{\underline{\underline{F}}_t} = z_t^{-1}$$

On a alors :

$$E[f(x_t)/\underline{\underline{G}}_t] = \frac{\overset{\circ}{E}[f(x_t)\,z_t/\underline{\underline{G}}_t]}{\overset{\circ}{E}[\,z_t/\,\underline{\underline{G}}_t\,]}$$

De plus,

$$(5.2)\qquad dx_t = X_o(x_t)dt + \sum_{i=1}^{d} X_i(x_s)\circ dw_s^i + \sum_{j=1}^{k} \tilde{X}_i(x_s)\circ dy_s^j$$

où $\{w_t^i\}$, $i=1,\ldots,d$; $\{y_t^i\}$, $j=1,\ldots,k$ sont des $\overset{\circ}{P}$-wiener standards indépendants.

$$(5.3)\qquad z_t = \exp\Big[\sum_{j=1}^{k}\Big(\int_o^t \ell^j(x_s)\circ dy_s^j - \frac{1}{2}\int_o^t (\tilde{X}_j\ell^j + (\ell^j)^2)(x_s)ds\Big)\Big]$$

On pose :

$$(5.4)\qquad u_s(x) = \overset{\circ}{E}_{sx}[f(x_t)\,z_t^s\,/\,\underline{\underline{G}}_t^s\,]$$

où $\overset{\circ}{P}_{sx}$ désigne la solution du problème de martingales associé à (5.2), avec la condition initiale $x_s = x$. On remarque que :

$$(5.5)\qquad \overset{\circ}{E}[f(x_t)\,z_t\,/\,\underline{\underline{G}}_t] = \langle \mu_o, u_o \rangle$$

Conditionner par $\underline{\underline{G}}_t^s$ revient à fixer la trajectoire observée $\{y_r, s \leqslant r \leqslant t\}$ dans (5.2) et dans l'expression (5.3) de z_t . Il résulte donc formellement de la formule de Feynman-Kac que u_s satisfait l'équation d'évolution rétrograde :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial s} + L_s u_s + \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\Big(\ell^j\,\frac{dy_s^j}{ds} - \frac{1}{2}\tilde{X}_j\ell^j + (\ell^j)^2\Big)u_s = 0, \quad s \leqslant t \\ u_t = f \end{cases}$$

où $\quad L_s = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{d} X_i^2 + X_o + \sum_{j=1}^{k}\frac{dy_s^j}{ds}\,\tilde{X}_j$

Cette équation se réécrit, sous forme Ito rétrograde :

$$(5.6)\qquad \begin{cases} du_s + A\,u_s\,ds + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} B_j\,u_s \oplus dy_s^j = 0 \\ u(t) = f \end{cases}$$

où $\quad A = \dfrac{1}{2}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{d} X_i^2 + \sum_{j=1}^{k}\tilde{X}_j^2\Big) + X_o + \sum_j \ell^j\,\tilde{X}_j$

$$B_j = \tilde{X}_j + \ell^j$$

Le raisonnement ci-dessus se justifie : l'unique solution de (5.6) satisfait (5.4) (cf. PARDOUX [31],[32],KUNITA [21]).

Considérons maintenant l'équation de Zakaï, dont la solution est un processus à valeurs mesure :

$$d < \mu_s, f > = < \mu_s, A f > ds + \sum_{j=1}^{k} < \mu_s, B_j f > dy_s^j, \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^p)$$

$$\mu_o = \text{loi de } X_o$$

Alors (sous certaines hypothèses de régularité) le processus réel $< \mu_s , u_s >$ est p.s. constant, d'où, en utilisant (5.5),

$$\mathring{E}[f(x_t) z_t \ / \ \underline{\underline{G}}_t] = < \mu_t , f >$$

$$E[f(x_t) \ / \ \underline{\underline{G}}_t] = \frac{< \mu_t, f >}{< \mu_t, 1 >}$$

L'existence d'une densité régulière pour la loi conditionnelle est équivalente à l'existence d'une densité régulière $p_t(x)$ pour la mesure μ_t, qui satisfait alors l'EDPS :

$$d \ p_t = A^* p_t \ dt + \sum_{j=1}^{k} B_j^* \ p_t \ dy_t^j$$

Cette équation a été étudiée sous une hypothèse d'ellipticité, lorsque la loi μ_o admet une densité par KRYLOV-ROSOVSKII [18]et PARDOUX [31] par la méthode esquissée au §3, et lorsque μ_o est une masse de Dirac par ROSOVSKII-SHIMIZU [35], PARDOUX [33]. Remarquons que l'hypothèse d'ellipticité se traduit ici par le fait que les $\{X_i(x),\ i=1,\dots,d\}$ engendrent $\mathbb{R}^p$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$.

Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à démontrer l'existence d'une densité régulière $p_t(x)$, lorsque μ_o est la mesure de Dirac δ_{x_o}, sous des conditions d'hypoellipticité, généralisant ainsi aux EDPS un célèbre théorème d'Hörmander. BISMUT-MICHEL [4], KUNITA [20], KUSUOKA-STROOCK [23] ont adapté à cette situation le calcul de Malliavin. CHALEYAT-MAUREL-MICHEL [6] ont adapté la démonstration analytique de Kohn du théorème d'Hörmander; cf. aussi MICHEL [28]. La condition la plus faible d'hypoellipticité, obtenue en particulier par BISMUT-MICHEL [4], est la suivante : il faut que l'algèbre de Lie engendrée par les X_i $(i=1,\dots,d)$, et les crochets des X_i avec X_o et les $\tilde{X}_j$ $(j=1,\dots,k)$ (crochets où apparait au moins un des X_i), engendre $\mathbb{R}^d$, au point x_o. On voit que X_o, et les coefficients des dy^j dans (5.2) agissent en quelque sorte comme des dérives indépendantes.

Les mêmes résultats sont encore vrais pour le problème de lissage, puisque la loi conditionnelle de x_s, sachant $\underline{\underline{G}}_t$ $(s \leqslant t)$ admet la densité :

$$u_s(x) p_s(x) \left(\int_{\mathbb{R}^p} u_s(x) p_s(x) dx\right)^{-1}$$

où p est la solution de l'équation de Zakaï, u celle de l'équation (5.6) avec la condition $u_t(x) \equiv 1$ (cf. PARDOUX [32]).

<u>Remarque 5.1</u> : Considérons l'équation d'évolution stochastique au sens de Stratonovitch (avec A et les B_j linéaires):

$$dv_t = A\, v_t\, dt + \sum_{j=1}^{k} B_j\, v_t \circ d\, w_t^j$$

dont la solution est un processus à valeurs dans l'espace de Hilbert H. Cette équation est équivalente (au moins formellement) au système suivant :

$$\begin{cases} d\Phi_t = \sum_{j=1}^{k} B_j\, \Phi_t \circ d\, w_t^j, \quad \Phi_o = I \\ \dfrac{du_t}{dt} = \Phi_t^{-1} A\, \Phi_t\, u_t, \quad u_o = v_o \\ v_t = \Phi_t\, u_t \end{cases}$$

où Φ_t est un opérateur linéaire défini sur H, I désigne l'opérateur identité.

Lorsque l'opérateur Φ_t peut être explicité, cette transformation peut permettre de ramener l'étude de certaines propriétés de v à celles de u, qui est la solution d'une équation d'évolution non stochastique.

Dans l'application de cette idée à l'équation de Zakaï, deux cas se présentent :

a- le cas où $\tilde{X}_j = 0$, $j=1,\dots,k$. Alors l'opérateur B_j est la multiplication par la fonction $\ell^j(x)$, et l'opérateur Φ_t est la multiplication par $\exp(\sum_{j=1}^{k} \ell^j(x) y_t^j)$, cf. PARDOUX [32].

b- le cas général, où l'opérateur Φ_t peut encore être explicité, en utilisant la théorie des flots. En effet, le noyau de l'opérateur Φ_t est la solution fondamentale d'une EDPS hyperbolique du premier ordre, qui peut s'expliciter par une méthode des caractéristiques tout à fait analogue à celle qui permet d'écrire la solution d'une EDP hyperbolique déterministe. Ceci permet, dans le cas elliptique, de ramener l'étude de la régularité de la densité conditionnelle, à un théorème classique sur les EDP - cf. BISMUT-MICHEL [4]. Pour l'étude des EDPS hyperboliques du premier ordre par la méthode des caractéristiques, nous renvoyons à BISMUT [3] et KUNITA [21].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BALAKRISHNAN: Stochastic Bilinear Partial Differential Equations. U.S. Italy Conf. on Variable Struture Systems, Oregon (1974).

[2] A. BENSOUSSAN-J.L.LIONS: Application des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique. Dunod (1978)

[3] J.M. BISMUT: Mécanique Aléatoire, Lecture Notes in Math. 866, Springer (1981)

[4] J.M. BISMUT-D. MICHEL: Diffusions Conditionnelles. I Hypoelliplicité Partielle. II Générateur Conditionnel. Application au Filtrage, J. of Funct. Anal. 44, 174-211 (1981) et 45,274-292 (1982).

[5] R. BOUC-E. PARDOUX: Asymptotic Analysis of PDEs with Wide-Band Driving Noise, à paraître.

[6] M. CHALEYAT-MAUREL-D. MICHEL: Hörmander Condition and Filtering, à paraître.

[7] A. CHOJNOWSKA-MICHALIK: Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces and Applications, Thèse, Institut de Mathématiques, Acad-Sciences de Pologne (1977).

[8] R. CURTAIN: Stochastic Evolution Equations with General White Noise Disturbances, J. Math. Anal. Appl. 60, 570-595 (1977).

[9] G. DA PRATO: Some Results on linear Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces by the Semi-Group Method, J.Stoch. Anal. and Appl. 1 (1983)

[10] D. DAWSON: Stochastic Evolution Equations and Related Measure Processes, J. Mult. Anal. 5, 1-52 (1975).

[11] I. GYÖNGY: Stochastic Equations with Respect to Semimartingales III, Stochastics 7, 231-254 (1982)

[12] I. GYONGY-N. KRYLOV: On Stochastic Equations with Respect to Semimartingales I, Stochastics 4, 1-21(1980).

[13] I. GYONGY-N. KRYLOV: On Stochastic Equations with Respect to Semimartingales II. Ito Formula in Banach Spaces, Stochastics 6, 153-173 (1982).

[14] A. ICHIKAWA: Linear Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces, J. Diff. Equ. 28, 266-277 (1978).

[15] N. IKEDA-S. WATANABE: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland (1981).

[16] J. JACOD: Une Condition d'Existence et d'Unicité pour les Solutions Fortes d'Equations Différentielles Stochastiques, Stochastics 4, 23-38 (1980).

[17] P. KOTELENEZ: A Submartingale Type Inequality with Applications to Stochastic Evolution Equations, Stochastics 8, 139-151 (1982).

[18] N. KRYLOV-B. ROSOVSKII: On Conditional Distributions of Diffusion Processes Math. USSR Izvestija 12, 336-356 (1978).

[19] N. KRYLOV-B. ROSOVSKII: Equations de Ito dans les espaces de Banach (en russe) Itogi Nauki i Techniki, Serie Math., 14, 72-147 (1979).

[20] H. KUNITA:Density of a Measure Valued Process Governed by a SPDE, Systems and Control Letters 1, 100-104 (1981).

[21] H. KUNITA: Stochastic Partial Differential Equations Connected with Non linear Filtering, in Non linear Filtering and Stochastic Control, S. Mitter-A.Moro Eds,Lecture Notes in Math. 972, Springer (1982).

[22] H. KUNITA: First Order Stochastic Partial Differential Equations, à paraître.

[23] S. KUSUOKA-D. STROOCK: The Partial Malliavin Calculus and its Application to Non linear Filtering, à paraître.

[24] J.L. LIONS: Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux limites Non linéaires, Dunod (1969).

[25] J.L. LIONS-E. MAGENES: Problèmes aux limites non Homogènes et Applications, Vol 1 et 2, Dunod (1968).

[26] M. METIVIER: Semimartingales : a Course on Stochastic Processes, de Gruyter (1982).

[27] M. METIVIER-J. PELLAUMAIL: Stochastic Integration, Acad. Press (1980).

[28] D. MICHEL: Conditional Laws and Hörmander's Condition, à paraître in Proceedings Katata Workshop 1982.

[29] G. PAPANICOLAOU: Asymptotic Analysis of Stochastic Equations, in Studies in Probability Theory, M.Rosenblatt Ed, 111-179, MAA Studies in Math.14, The Math.Assoc. of America (1978).

[30] E. PARDOUX: Equations aux Dérivées Partielles Stochastiques Non linéaires Monotones. Thèse, Univ. Paris XI (1975).

[31] E. PARDOUX: SPDEs and Filtering of Diffusion Processes, Stochastics 3, 127-167 (1979).

[32] E. PARDOUX: Equations du Filtrage Non linéaire, de la Prédiction et du lissage, Stochastics 6, 193-231 (1982).

[33] E. PARDOUX: Equations of Non linear Filtering, and Application to Stochastic Control with Partial Observation, in Non linear Filtering and Stoch. Control, S. Mitter. A. Moro Eds, Lecture Notes in Math 972, Springer (1982).

[34] J. REAL: Stochastic Partial Differential Equations with Delays, Stochastics 8, 81-102 (1982).

[35] B. ROSOVSKII-A. SHIMIZU: Smoothness of Solutions of Stochastic Evolution Equations and the Existence of a Filtering Transition Density, Nagoya Math. J. 84, 195-208 (1981).

[36] A. USTUNEL: Calcul Stochastique sur les Espaces Nucléaires et ses Applications, Thèse, Univ. Paris VI (1981).

[37] M. VIOT: Solutions Faibles d'EDPS Non linéaires. Thèse, Univ. Paris VI (1976).

U.E.R. de Mathématiques
Université de Provence
3, Place Victor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 3.