

Astérisque

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

**Conjecture de Shafarevich pour les corps de fonctions
sur \mathbb{Q} [Appendice à l'exposé IX]**

Astérisque, tome 127 (1985), p. 256-259

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__256_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONJECTURE DE SHAFAREVICH POUR LES
CORPS DE FONCTIONS SUR \mathbb{Q}

M. MARTIN-DESCHAMPS

On se propose d'étendre au cas d'un corps de type fini sur \mathbb{Q} la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres, c'est-à-dire de montrer le résultat suivant :

THÉOREME : Soient L une extension de type fini de \mathbb{Q} , g un entier positif, et X un schéma normal de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, de corps de fractions L . L'ensemble des classes de L -isomorphismes de L -variétés abéliennes de dimension g , principalement polarisées, qui ont bonne réduction en tout point de codimension 1 de X , est fini.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur l'entier d , degré de transcendance de L sur \mathbb{Q} .

- $d = 0$: c'est la conjecture de Shafarevich pour un corps de nombres
- $d \neq 0$: quitte à restreindre X , on peut supposer que c'est un schéma affine $X = \text{Spec } R$, où R est une \mathbb{Z} -algèbre de type fini : $R = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$.

Pour tout $i = 1, \dots, r$:

$$0 \leq \deg \text{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}] - \deg \text{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_i] \leq 1$$

donc il existe $s \leq r-1$ tel que l'anneau $R' = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ définisse un schéma X' de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, tel que la fibre générique de la projection canonique $f : X \longrightarrow X'$ induite par l'homomorphisme $\mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_s] \subset \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_r]$, soit une courbe.

Soit Y un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 de X , qui domine X' :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X \\ & & \downarrow f \\ & & X' \end{array}$$

et Y^0 l'ouvert des points normaux de Y , qui est donc un schéma normal de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$, dont le corps de fractions M est de degré de transcendance $d-1$ sur \mathbb{Q} .

LEMME 1. - Soit A une L -variété abélienne qui a bonne réduction aux points de codimension 1 de Y , et B la M -variété abélienne qu'elle définit par restriction. Alors B a bonne réduction en tout point de codimension 1 de X qui est un point régulier de X .

Démonstration : La variété abélienne A se prolonge en un schéma abélien \mathcal{A} au-dessus d'un ouvert U de X contenant tous les points de codimension 1. Soit ℓ un nombre premier. Par pureté \mathcal{A} qui est un revêtement étale de $U \otimes \mathbb{Z}[1/\ell]$ se prolonge en tous les points réguliers de X dont la caractéristique résiduelle est première à ℓ , donc le module de Tate $T_\ell(\mathcal{A})$ se prolonge en un schéma \mathcal{C}_ℓ au-dessus d'un voisinage U_ℓ de tous ces points.

Soit y un point de codimension 1 de Y , qui est un point de codimension 2 régulier de X . Soit ℓ un entier premier à la caractéristique résiduelle de y . D'après de ce qui précède, y appartient à U_ℓ et on a des isomorphismes :

$$T_\ell(B) \approx T_\ell(\mathcal{A}) \times_{U \text{ Spec } M} \mathcal{C}_\ell \times_{U_\ell \text{ Spec } M}$$

ce qui prouve que $T_\ell(B)$ se prolonge sur l'ouvert $U_\ell \cap Y^0$ en un schéma pro-étale $\mathcal{E}_\ell|_{U_\ell \cap Y^0}$. D'après le critère de Serre - Tate, appliqué à l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{Y,y}$, on en déduit que B a bonne réduction en y .

Fin de la démonstration du théorème

Le lieu singulier de X est de codimension au moins 2, donc il existe un ouvert non vide Y^1 de Y^0 dont tous les points de codimension 1 sont des points réguliers de X .

L'hypothèse de récurrence s'applique à Y^1 et il suffit par prouver le théorème de montrer que l'ensemble des classes de L -isomorphismes de L -variétés abéliennes A , principalement polarisées, ayant bonne réduction aux points de codimension 1 de X , dont les restrictions au point $\text{Spec } M$ sont isomorphes à une M -variété abélienne donnée B , est fini.

Soit S la fibre générique de $f : X \longrightarrow X'$. Les points fermés de S sont des points de codimension 1 de X , donc une variété abélienne A ayant les propriétés annoncées se prolonge en un S -schéma abélien, et on est ramené à montrer le résultat suivant :

LEMME 2. - Soit S un schéma de type fini sur un corps k de caractéristique 0, s un point fermé de S , A_0 une $k(s)$ -variété abélienne. L'ensemble \mathcal{E} des classes d'isomorphismes de S -schéma abéliens de dimension g , principalement polarisés, munis d'un isomorphisme $\lambda : \mathcal{A} \times_S \text{Spec } k(s) \approx A_0$ est fini.

Démonstration : Des arguments standard (utilisant le fait que $\pi_1(S \otimes_k \mathbb{C})$ est de type fini) permettent de mettre sur tous ces schémas abéliens une structure de niveau. D'après les résultats de [F], la famille considérée est une famille limitée : il existe un k -schéma de type fini T , un schéma abélien \mathcal{A}_T sur $S \times T$ et pour tout élément A de \mathcal{E} un point rationnel t de T tel que A soit isomorphe (en tant que S -schéma abélien principalement polarisé) à la fibre de \mathcal{A}_T en t :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{A}_T \\ \downarrow & & \downarrow \\ S \times k(t) & \longleftarrow & S \times T \end{array}$$

Soit $\mathcal{A}_T^i = \mathcal{A}_T \times_S \text{Spec } k(s)$. C'est une famille de $k(s)$ -variétés abéliennes, principalement polarisées et munies d'une structure de niveau, paramétrisée par T . Il existe un plus grand sous-schéma fermé T' de T tel que $\mathcal{A}_T^i|_{T'}$ soit isomorphe à $A_0 \times T'$. Soit T'' une composante irréductible de T' .

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times T'' & \hookrightarrow & \mathcal{A}_T|_{T''} = \mathcal{A}_{T''} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k(s) \times T'' & \hookrightarrow & S \times T'' \end{array}$$

Soit t un point rationnel de T'' et $A = \mathcal{A}_T \times_T \text{Spec } k(t)$. Nous allons montrer que $\mathcal{A}_{T''}$ et $A \times T''$ sont isomorphes :

soient ℓ un nombre premier et n un entier. On obtient deux revêtements étales de $S \times T''$ en considérant les deux schémas ${}_{\ell^n} \mathcal{A}_{T''}$ et $({}_{\ell^n} A) \times T''$, qui sont isomorphes d'une part sur $\text{Spec } k(s) \times T''$ et d'autre part sur $S \times \text{Spec } k(t)$ (les deux isomorphismes coïncidant sur $\text{Spec } k(s) \times k(t)$).

Or, comme nous sommes en caractéristique nulle, $\pi_1(S \times T'')$ s'identifie à $\pi_1(S) \times \pi_1(T'')$ par les homomorphismes naturels ; par suite les deux revêtements considérés sont isomorphes.

On en déduit un isomorphisme des modules de Tate $T_{\ell}(\hat{\mathcal{A}}_{T''}) \approx T_{\ell}(A) \times T''$. Par construction, cet isomorphisme provient au point (s, t) d'un isomorphisme de variétés abéliennes. On conclut, d'après [G], qu'il provient d'un isomorphisme des $S \times T''$ -schémas abéliens $\hat{\mathcal{A}}_{T''}$ et $A \times T''$.

B I B L I O G R A P H I E

- [F] G. FALTINGS.- *Anakelov Theorem for Abelian Varieties*. Inv. Math. 73 1983, pp.337-347.
- [G] A. GROTHENDIECK.- *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*. Inv. Math. 2. 1966, pp. 59-78.

Mireille MARTIN-DESCHAMPS
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05