MARGUERITE FLEXOR

Endomorphismes de variétés abéliennes

Astérisque, tome 127 (1985), p. 235-248

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__235_0>

Exposé VIII

ENDOMORPHISMES DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Marguerite FLEXOR

Cet exposé a pour raison essentielle de montrer que pour K un corps de nombres :

(I) : *toute classe d'isogénies de K-variétés abéliennes est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphies*

(II) : *l'action de* $\mathrm{Gal}(\bar{K}:K)$ *sur* $V_\ell(A)$ *est semi-simple*, pour toute variété abélienne A définie sur K.

(III) : *La conjecture de Tate relative aux endomorphismes de variétés abéliennes définies sur* K.

Ces résultats, nous les obtiendrons à partir de l'énoncé de finitude, démontré au chapitre IV :

(R_1) : *Si* K *est un corps de nombres,* (g,n,h) *des entiers, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphies de variétés abéliennes polarisées* (A,Θ) *de dimension* g, *de degré de polarisation* n *et de hauteur de Faltings* $h_{\mathrm{Falt}}(A) \leq h$,

et de l'énoncé plus précis, relatif à une classe d'isogénie (ch. VI).

(R_2) : *Si* K *est un corps de nombres,* A *une variété abélienne semi-stable sur* K, *il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les hauteurs* $h_{\mathrm{Falt}}(B)$, *des variétés abéliennes* B *K-isogènes à* A.

Lorsque K est de type fini sur son corps premier, les énoncés (I,II,III) sont vrais, à condition de ne considérer dans (I) que des isogénies de degré premier à la caractéristique. Si $\mathrm{car}(K) > 0$, ceci a été démontré par J. Tate ([T-2]) pour K fini et par Zarhin ([Z]) et Mori ([Mo]) lorsque $\deg \mathrm{tr}(K:\mathbb{F}_q) > 0$. Si $\mathrm{Car}(K) = 0$, ceci est dû à G. Faltings ([F]). On trouvera dans la suite de ce séminaire une démonstration de ce dernier cas.

Beaucoup d'arguments, dans ce qui suit, ne dépendent pas de manière spécifique de la nature du corps K. On suppose donc seulement K de type fini sur son corps premier et il est explicitement indiqué là où l'hypothèse K, corps de nombres, est essentielle.

Notations : Si K est un corps, $\bar{K}$ sa clôture algébrique, $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}:K)$ et si A est une variété abélienne définie sur K, $\bar{A} = A \times_K \bar{K}$ et A^* désigne la variété abélienne duale de A. Pour tous entiers $m \geq 1$, ℓ premier à la caractéristique de K, on pose :

$$A_m = \mathrm{Ker}(\bar{A} \xrightarrow{m} \bar{A}) = \text{noyau de la multiplication par } m$$

$$T_\ell(A) = \varprojlim_n A_{\ell^n} = \mathbb{Z}_\ell\text{-module libre de rang } 2 \dim A$$

$$V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell .$$

1.- FINITUDE DES CLASSES D'ISOMORPHIES DANS UNE CLASSE D'ISOGÉNIES

Nous allons voir que dans (R_1), l'hypothèse sur le degré des polarisations n'est pas nécessaire.

PROPOSITION 1.- (Zarhin) : *Si A est une variété abélienne définie sur un corps K, $B = A^4 \times (A^*)^4$ est une variété abélienne principalement polarisée.*

La démonstration esquissée ici est une copie presque fidèle de celle donnée par L. Moret-Bailly dans [M.B], lui-même inspiré de notes de P. Deligne.

Soit $\psi : A \longrightarrow A^*$ une polarisation de A, i.e ψ est un homomorphisme tel que si $\bar{A} = A \times_K \bar{K}$, $\bar{\psi} = \psi \times 1_{\bar{K}} : A \longrightarrow A^*$ est défini par un faisceau inversible ample L sur $\bar{A}$, i.e $\bar{\psi} = \phi_L$ (si $x \in \bar{A}$, T_x la translation par x, $\Phi_L(x)$ = classe de $T_x^* L \otimes L^{-1}$ dans $\bar{A}^*$).

Soit T un $\mathbb{Z}$-module libre de rang r, $A \otimes_{\mathbb{Z}} T$ est une K-variété abélienne isomorphe à A^r et on a un isomorphisme canonique :

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} T)^* \simeq A^* \otimes_{\mathbb{Z}} T^*$$

où $T^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z})$, $(A \otimes_{\mathbb{Z}} T)^*$ = duale de $A \otimes_{\mathbb{Z}} T$.

Soit $B : T \times T \longrightarrow \mathbb{Z}$ une forme bilinéaire non dégénérée, $b : T \longrightarrow T^*$ l'homomorphisme correspondant. On lui associe de manière naturelle

$$\psi_b = \psi \otimes b : A \otimes_{\mathbb{Z}} T \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} T)^*$$

Clairement ψ_b est une isogénie, de plus ψ_b est une polarisation si et seulement si B est symétrique, définie positive. (En effet, ψ_b est de la forme ϕ_L, L faisceau inversible sur $\overline{A}\times_{\mathbb{Z}} T$ si et seulement si la forme de Riemann définie sur $T_\ell(A\otimes_{\mathbb{Z}} T)$

$$(x\otimes t, y\otimes t') \longrightarrow e_\ell(x\otimes t, \overline{\psi}_b(y\otimes t')) = B(t,t')e_\ell(x,\overline{\psi}(y)$$

est alternée (cf. [M] page 188, théorème 2) et est une polarisation si B est symétrique définie positive).

On suppose désormais B symétrique définie positive. Posons

$$K = \operatorname{Ker}\psi \quad \text{et} \quad A/K \xrightarrow[\sim]{\psi} A^* \quad .$$

Prenons T de la forme $N\oplus N$, où N est un $\mathbb{Z}$-module libre. On a les identifications suivantes :

$$A\otimes_{\mathbb{Z}} T \xrightarrow[\sim]{\text{can}} (A\otimes_{\mathbb{Z}} N)\times(A\otimes_{\mathbb{Z}} N) \xrightarrow[\sim]{\text{can}} (A\times A)\otimes_{\mathbb{Z}} N$$

$$\{0\}\times(K\otimes_{\mathbb{Z}} N) \subseteq (A\otimes_{\mathbb{Z}} N)\times(A\otimes_{\mathbb{Z}} N)$$

et
$$(A\otimes_{\mathbb{Z}} N)\times(A\otimes_{\mathbb{Z}} N)/_{\{0\}\times(K\otimes_{\mathbb{Z}} N)} \simeq (A\otimes_{\mathbb{Z}} N)\times(A^*\otimes_{\mathbb{Z}} N) \simeq (A\times A^*)\otimes_{\mathbb{Z}} N \quad .$$

Posons $\Theta : (A\times A)\otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow (A\times A^*)\otimes_{\mathbb{Z}} N$ l'isogénie de noyau $\{o\}\times(K\otimes_{\mathbb{Z}} N)$.
La polarisation ψ_b définie sur $(A\times A)\otimes_{\mathbb{Z}} N$ provient d'une polarisation Φ sur $(A\times A^*)\otimes_{\mathbb{Z}} N$ si et seulement si ([M] corollaire du théorème 2 §23, p. 231) :

a) $\operatorname{Ker}\Theta \subset \operatorname{Ker}\psi_b$ (il en est ainsi : $\operatorname{Ker}\Theta \subset K\otimes_{\mathbb{Z}} T \subset \operatorname{Ker}\psi_b$)

b) si e^{ψ_b} est la forme alternée $\operatorname{Ker}\psi_b\times\operatorname{Ker}\psi_b \longrightarrow \mathbb{G}_m$ associée à ψ_b , $e^{\psi_b}|_{\operatorname{Ker}\Theta\times\operatorname{Ker}\Theta} \equiv 1$.

Si $d = \deg\psi$, supposons que la forme bilinéaire induite par B sur $\{0\}\times N$ soit divisible par d^2 , alors on a effectivement

$$e^{\psi_b}|_{\operatorname{Ker}\Theta\times\operatorname{Ker}\Theta} \equiv 1 \quad .$$

Vérifions : si $x\otimes n \in K\otimes_{\mathbb{Z}} N$, $y\otimes m \in K\otimes_{\mathbb{Z}} N$

$$e^{\psi_b}((0,x\otimes n),(0,y\otimes m)) = B((0,n),(0,m))e^{\psi}(x,y) \in d^2\, e^{\psi}(x,y)\mathbb{Z} \quad .$$

Comme $x\in K$, $d^2x = 0$ et $d^2e^{\psi}(x,y) = e^{\psi}(d^2x,y) = 0$.
Calculons $\deg\Phi$:

$$\deg\Phi = \deg\psi_b/\operatorname{card}(\operatorname{Ker}\Theta) = \frac{(\deg\psi)^{2r}\operatorname{card}(\operatorname{coker} B)^{2g}}{d^{2r}} = \frac{d^{2r}\times(\det B)^{2g}}{d^{2r}} = (\det B)^{2g}$$

Résumons : pour prouver la proposition, il suffit de trouver une forme bilinéaire symétrique définie positive B sur un $\mathbb{Z}$-module libre $T = N \oplus N$ dont la restriction à $\{0\} \times N$ est divisible par d^2 et dont le déterminant est égal à 1.
Voici une solution particulière :

$T = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ = algèbre des quaternaires $a + bi + cj + dk$
$(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$

B = partie réelle d'une $\mathbb{H}$-forme hermitienne positive $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ à valeur dans $\mathbb{Z}$ (en particulier la matrice de $\mathcal{X}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$,

$a > 0$, $c > 0$, d divise c , $b \in \mathbb{H}$, $\bar{b}$ = conjugué de b), dont le déterminant vérifie

$$\det B = (ac - b\bar{b})^4 = 1 \quad .$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$1 = ac - (x^2+y^2+z^2+t^2) \quad (\text{si } b = x + iy + jz + kt)$$

avec $a > 0$, $c > 0$, d divise c , ce qui admet une solution puisque tout entier naturel est somme de 4 carrés.

PROPOSITION 2.-*Si* B *est une variété abélienne définie sur un corps* K , *il n'existe, à* K-*isomorphisme près, qu'un nombre fini de* K-*variétés abéliennes facteur direct de* B .

Démonstration :

Posons $E = \mathrm{End}_K B$ et $\mathrm{Idem}(E) = \{e \in E \ , \ e^2 = e\}$ et E^* l'ensemble des éléments inversibles de E. Rappelons que :

a) les décompositions $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$ (A_i = sous K-variété abélienne de B)

correspondent à :

b) des décompositions $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

ou encore

c) des décompositions $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, $e_i \in \mathrm{Idem}(E)$ tels que pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $e_i : B \xrightarrow{\text{proj}} A_i$, $A_i = e_i(B)$, $E_i = Ee_i$. De plus si e, $e' \in \mathrm{Idem}(E)$
$e(B) \simeq e'(B) \Longleftrightarrow Ee \simeq Ee$.

Comme $E_{\mathbb{Q}} = E \otimes \mathbb{Q}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de $E_{\mathbb{Q}}$-modules de rang 1. Le théorème de Jordan-Zassenhaus ([C.R] p.534) montre qu'il existe seulement un nombre fini de classes d'isomorphismes de E-réseaux de rang 1, en particulier du type Ee pour $e \in \mathrm{Idem}(E)$.

Des propositions 1 et 2 et des résultats R_1 et R_2 , on en déduit les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1.- *Si* K *est un corps de nombres,* g *et* h *des entiers, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphies de variétés abéliennes définies sur* K *de dimension* g *et de hauteur* $h(A) \leq h$.

THÉORÈME 2.- *Si* K *est un corps de nombres, une classe de* K*-isogénies de variétés abéliennes est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphies.*

Démonstration : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'isogénie de K-variétés abéliennes. Pour tout élément A de $\mathcal{C}$, on note $B(A) = A^4 \times (A^*)^4$, c'est une K-variété abélienne principalement polarisée (utiliser la proposition 1). Compte tenu de la proposition 2, il nous suffit de voir que les $B(A)$, pour $A \in \mathcal{C}$, ne constituent qu'un nombre fini de classes de K-isomorphies. Il suffit donc de montrer la finitude des classes de K-isomorphies pour une classe d'isogénies $\widetilde{\mathcal{C}}$ de variétés abéliennes principalement polarisées. Deux cas sont à envisager :

a) un élément (et donc tous) de $\widetilde{\mathcal{C}}$ est à réduction semi-stable. On peut alors appliquer (R_2) et (R_1) .

b) Dans le cas contraire, soit (A_o) un élément de $\mathcal{C}$. Il existe une extension finie K' de K telle que $A'_o = A_o \times_K K'$ est à réduction semi-stable. Les variétés abéliennes $A' = A \times_K K'$, pour $A \in \widetilde{\mathcal{C}}$, ne fournissent qu'un nombre fini de classes de K'-isomorphies. De plus, si B' est un élément de $\widetilde{\mathcal{C}}$, on a :

$$\# \{ \text{classes de K-isomorphies de variétés abéliennes } B \text{ telles que } B' \simeq B \times_K K' \} = \# H^1(\mathrm{Gal}(K':K), \mathrm{Aut}_{K'}(B')) \ .$$

Comme B' est principalement polarisée, $\mathrm{Aut}_{K'}(B')$ est fini et il en est de même de $H^1(\mathrm{Gal}(K':K), \mathrm{Aut}_{K'} B')$. Il s'ensuit que les éléments $A \in \widetilde{\mathcal{C}}$ ne fournissent qu'un nombre fini de classes de K-isomorphies.

2.- ÉNONCÉS DES CONJECTURES

2.1.- Soit A une variété abélienne définie sur un corps K . Le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}:K)$ opère sur A_{ℓ^n} pour tout ℓ premier et tout $n \geq 1$ et en passant à la limite, G opère sur $T_\ell(A)$.

Si A et B sont deux variétés abéliennes définies sur K et si $f : A \longrightarrow B$ est un K-homomorphisme, f définit par restriction un G-homomorphisme

$$A_{\ell^n} \longrightarrow B_{\ell^n} \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

et aussi, un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-homomorphisme :

$$T_\ell(f) : T_\ell(A) \longrightarrow T_\ell(B) .$$

On a construit ainsi un homomorphisme de groupes

$$\varphi_{A,B} : \mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell[G]}(T_\ell(A), T_\ell(B)) .$$

Cette application est toujours injective ([M] par. 19 th. 3). Le problème posé par J. Tate ([T.2]) et que nous désignerons par "Conjecture de Tate" :

$C_1(K)$: *Montrer que* $\varphi_{A,B}$ *est bijectif pour tout couple de variétés abéliennes* (A,B) *définies sur* K .

Cette conjecture peut se réduire de la manière suivante :

1) $\varphi_{A,B}$ est bijectif si et seulement si $\varphi_{A,B} \otimes 1_{\mathbb{Q}_\ell}$ l'est (cf. [T.2]) .

2) $\varphi_{A,B}$ est bijectif pour tout couple (A,B) si et seulement si $\varphi_{A,A}$ l'est pour toute variété abélienne A (définie sur K) .

En résumé, $C_1(K)$ est équivalente à la conjecture suivante que nous désignerons encore par $C_1(K)$:

$C_1(K)$: *Montrer que* $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathrm{End}_G(V_\ell(A))$ *pour toute variété abélienne* A *définie sur* K .

2.2.- Si X est une variété projective lisse sur K et si $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, le groupe G opère sur les groupes de cohomologie étale :

$$H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell) = (\varprojlim_n H^i(\overline{X}_{et}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \quad , \quad i \in \mathbb{N} .$$

D'où une représentation $\rho_i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell))$. J-P Serre, J.Tate (et A. Grothendieck) posent la conjecture suivante :

$C_2(K,X)$: *Montrer que les représentations* φ_i *sont semi-simples.*

Si A est une variété abélienne définie sur K , pour $n \geq 1$, la suite de Kummer :

$$0 \longrightarrow \mu_{\ell^n} \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\ell^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \quad (\mu_{\ell^n} = \ell^n\text{-ièmes racines de } 1)$$

est exacte pour la topologie étale. Il en est de même de la suite exacte longue de cohomologie

$$H^\circ(\bar{A},\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\ell^n} H^\circ(\bar{A},\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(\bar{A},\mu_{\ell^n}) \longrightarrow H^1(\bar{A},\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\ell^n} H^1(\bar{A},\mathbb{G}_m)$$

Comme la multiplication par ℓ^n est surjective dans $H^\circ(\bar{A},\mathbb{G}_m)$, $H^1(\bar{A},\mu_\ell n)$ s'identigie aux points d'ordre ℓ^n de $\mathrm{Pic}^\circ(\bar{A})$. Si A^* est la variété abélienne duale de A, on a :

$$H^1(\bar{A},Q_\ell)(1) = \varprojlim_n H^1(\bar{A},\mu_{\ell^n}) \simeq V_\ell(A^*) \quad .$$

De sorte que si on désigne par $C_2(K)$ la conjecture suivante :

$C_2(K)$: *Montrer que* $V_\ell(A)$ *est un* $\mathbb{Q}_\ell[G]$-*module semi-simple pour toute variété abélienne* A *définie sur* K .

Remarque : $C_2(K) \Longrightarrow C_2(K,A)$, *pour toute* K-*variété abélienne* A .

En effet, si $V_\ell(A)$ est un $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module semi-simple, le $\mathbb{Q}_\ell$-groupe algébrique engendré par l'image de G dans Aut $V_\ell(A)$ est réductif et comme on est en caractéristique zéro, toutes ses représentations sont semi-simples, en particulier $\overset{i}{\Lambda} H^1(\bar{A},\mathbb{Q}_\ell) = H^i(\bar{A},\mathbb{Q}_\ell)$.

Nous allons voir maintenant que dans une certaine mesure, $C_2(K)$ implique $C_1(K)$. Plus précisément :

PROPOSITION 3.- *Soit* A *une variété abélienne définie sur* K . *Si pour tout sous* $\mathbb{Q}_\ell[G]$-*module* W *de* $V_\ell(A)$, *il existe* $u \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ *tel que* $u(V_\ell(A)) = W$, *alors :*

1) $V_\ell(A)$ *est un* $\mathbb{Q}_\ell[G]$-*module semi-simple*

2) *Si* E_ℓ = *image de* $(\mathbb{Q}_\ell[G] \longrightarrow \mathrm{End}\, V_\ell(A))$, E_ℓ *est le commutant de* $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathrm{End}\, V_\ell(A)$

3) $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell = \mathrm{End}_G(V_\ell)$.

Démonstration : Posons $V_\ell = V_\ell(A)$ et rappelons que $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est une $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre semi-simple.
Montrons 1) : soit W un sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module de V_ℓ , il existe u dans $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ tel que $u(V_\ell) = W$. L'idéal à droite $u(\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell)$ est engendré par un idempotent v , i.e est un projecteur tel que $v(V_\ell) = W$.

Montrons que 1) et 2) entrainent 3) : Comme V_ℓ est semi-simple, E_ℓ est un anneau semi-simple et dans ces conditions l'égalité :

$$\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell = \mathrm{End}_G V_\ell$$

est équivalente, par le théorème de bicommutation, à :

$$E_\ell = \text{commutant de } \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell \text{ dans } \mathrm{End}\, V_\ell$$

Montrons finalement 2) (l'argument est dû à Tate [T.2]).
Soit D le commutant de $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathrm{End}\, V_\ell$, on a $E_\ell \subset D$. Si $d \in D$, pour tout sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module W de V_ℓ, il existe $u \in \mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ tel que $u(V_\ell) = W$. Par suite, $dW = du(V_\ell) = ud(V_\ell) \; W$, autrement dit d laisse stable tout sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module de V_ℓ. Par exemple si $x \in V_\ell$ il existe $a \in \mathbb{Q}_\ell[G]$ tel que $d(x) = ax$. Soit V un facteur simple de V_ℓ correspondant à un facteur simple E de E_ℓ, $d(V) \subset V$ et pour tout $x \in V$, il existe $a \in E$ tel que $d(x) = ax$. En particulier d commute avec les éléments de $\mathrm{End}_E(V)$, i.e $d_{|V}$ est une homothétie. Comme V_ℓ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, d est une homothétie.

3.- <u>DÉMONSTRATION DE I $\Longrightarrow$ II et III</u>

Grâce à la proposition 3 ci-dessus, il suffit de démontrer le théorème suivant dû à J. Tate ([T.2]).

<u>THÉORÈME 3</u>.- *Soit* A *une variété abélienne définie sur un corps* K. *Si la classe d'isogénie de* A *est composée d'un nombre fini de classes d'isomorphismes, pour tout sous* $\mathbb{Q}_\ell[G]$-*module* W *de* $V_\ell(A)$, *il existe* $u \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ *tel que* $u(V_\ell(A)) = W$.

<u>Démonstration</u> : Soit W un sous $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module de V_ℓ. Posons $T_\ell = T_\ell(A)$, $V_\ell = V_\ell(A)$ et

$$W^\circ = W \cap T_\ell$$

pour $n > 0$

$$W_n^\circ = W^\circ + \ell^n T_\ell \subset T_\ell$$

$$W_n = \psi_n(W_n^\circ) \qquad \text{si } \psi_n : T_\ell \xrightarrow{\text{cann}} T_\ell/\ell^n T_\ell .$$

On a $W_n \subset A_{\ell^n}$. Les variétés $B_n = A/W_n$ sont des variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes à A. De plus le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi_n", dash] \arrow[dr, "\ell_A^n"'] & & B_n \arrow[dl, "\lambda_n"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

où π_n est le morphisme quotient, λ_n et π_n sont définis sur K, λ_n est étale.

LEMME : $\lambda_n(T_\ell(B_n)) = W_n^\circ$

Il suffit pour voir cela de montrer que les deux membres de cette égalité ont même trace dans A_{ℓ^n} et que tous deux contiennent $\ell^n T_\ell(A)$.
Comme $\pi_n \circ \lambda_n \circ \pi_n = \ell_A^n \circ \pi_n$, on a $\pi_n \circ \lambda_n = \ell_{B_n}^n$ et par suite :

$$W_n = \mathrm{Ker}\, \pi_n = \lambda_n((B_n)_{\ell^n}) \ .$$

D'autre part, $\lambda_n((B_n)_{\ell^n}) \geq \lambda_n \circ \pi_n(A_{\ell^m}) = \ell^n A_{\ell^m} = A_{\ell^{m-n}}$ pour tout $m \geq n$.
D'où $\lambda_n(T_\ell(B_n)) \supset \ell^n\, T_\ell(A)$ et le lemme s'ensuit.

Les variétés abéliennes B_n , pour $n \in N^+$, ne fournissent qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes. Soit $I \subset N^+$ un ensemble infini pour lequel $B_i \simeq B_j$ pour $i, j \in I$. Soient n le plus petit élément de I et $v_i : B_n \xrightarrow{\sim} B_i$ un K-isomorphisme. Dans $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$, $\ell_A^n : A \longrightarrow A$ est inversible et il en est de même de $\lambda_n : B_n \longrightarrow A$:

$$\lambda_n^{-1} = 1/\ell^n \circ \pi_n \ .$$

Pour $i \in I$, définissons $u_i = \lambda_i \circ v_i \circ \lambda_n^{-1}$, c'est un élément de $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}$.
On a :

$$u_i(W_n^\circ) = \lambda_i \circ v_i \circ \lambda_n^{-1}(W_n^\circ)$$

et comme $W_n^\circ = \lambda_n(T_\ell(B_n))$ par le lemme 1, que $\pi_n \circ \lambda_n = \ell^n$

$$u_i(W_n^\circ) = \lambda_i \circ v_i(T_\ell(B_n)) = \lambda_i(T_\ell(B_i)) = W_i^\circ \subset W_n^\circ \ .$$

Comme $\mathrm{End}\, W_n^\circ$ est compact, on peut extraire de la suite $(u_i)_{i\in I}$ une sous-suite convergente $(u_j)_{j\in J}$ qui converge vers une limite u et comme $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est fermé dans $\mathrm{End}\, W_n^\circ$, u est aussi dans $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Comme W_n° est compact tout élément x de $u(W_n^\circ)$ est de la forme $x = \lim_{j\in J} x_j$, où $x_j \in u_j(W_n^\circ) = W_j^\circ$.
Par suite : $u(W_n^\circ) = \bigcap_{j\in J} W_j^\circ = T_\ell \cap W$.

COROLLAIRE 1.- *Si K est un corps tel que toute classe d'isogénies de K-variétés abéliennes est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphies, alors $C_i(K)$ est vrai pour $i = 1,2$. En particulier, si K est un corps de nombres, $C_i(K)$ est vrai pour $i = 1,2$.*

4.- CONSÉQUENCES DE $C_1(K)$ ET $C_2(K)$

THÉORÈME 4.- *Soit K un corps pour lequel $C_1(K)$ est vrai. Soient A et B deux variétés abéliennes définies sur K . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *A est K-isogène à une sous-variété abélienne de B définie sur K .*

2) *Il existe un nombre premier ℓ , $\ell \neq \mathrm{car}(K)$ et un $\mathbb{Q}_\ell[G]$-monomorphisme* $V_\ell(A) \hookrightarrow V_\ell(B)$.

Démonstration :

Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un K-homomorphisme, $2\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = \dim \mathrm{Ker}\, V_\ell(\varphi)$. En particulier, φ a un noyau fini si et seulement si $V_\ell(\varphi)$ est injectif. Il est clair que $1) \Longrightarrow 2)$.
Inversement, soit $\psi : V_\ell(A) \longrightarrow V_\ell(B)$ un $\mathbb{Q}_\ell[G]$-monomorphisme, $\psi \in \mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Dans tout voisinage U de ψ dans $\mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, il existe un élément $u \in \mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{Q}$. Comme $\dim V_\ell(A) < +\infty$, si U est suffisamment petit, l'image de u dans $\mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est injective et il en est de même de u . Un multiple de u est dans $\mathrm{Hom}_K(A,B)$ et a un noyau fini. Donc $2) \Longrightarrow 1)$.

COROLLAIRE : (mêmes hypothèses que dans le théorème) *A est K-isogène à B si et seulement si* $V_\ell(A) \simeq V_\ell(B)$.

THÉORÈME 5.- *Soit A et B deux variétés abéliennes définies sur un corps K , A et B sont K-isogènes si et seulement si*

1) *Si K est fini,* $\zeta_A = \zeta_B$ (ζ_A(resp. ζ_B) *fonction zêta de* A (resp. B)).

2) *Si K est un corps de nombres et si pour presque toute place v de K , les fonctions suivantes sont égales :*

$$L_v(A,s) = \frac{1}{\det(1-N(v)^{-s}F_v \mid H^1(\bar{A},\mathbb{Q}_\ell)^{I_v}(1))}$$

$$L_v(B,s) = \frac{1}{\det(1-N(v)^{-s}F_v \mid H^1(\bar{B},\mathbb{Q}_\ell)^{I_v}(1))}$$

où F_v est le morphisme de Frobenius de K_v , N(v) la norme de v , I_v l'inertie en la place v , $H^1(\bar{A},\mathbb{Q}_\ell)^{I_v}$(resp. $H^1(\bar{B},\mathbb{Q}_\ell)^{I_v}$) *les invariants sous l'action de I_v .*

Démonstration :

Montrons 1) : d'après le théorème 1, A et B sont K-isogènes si et seulement si $V_\ell(A) \simeq V_\ell(B)$, ou encore, si F_A (resp. F_B) est l'endomorphisme de Frobenius de A (resp. B), agissant semi-simplement sur $V_\ell(A)$ (resp. $V_\ell(B)$) et P_A(resp. P_B)

son polynôme caractéristique, si et seulement si $P_A = P_B$, ou encore si et seulement si $\zeta_A = \zeta_B$.

L'assertion 2) se démontre de la même manière en remarquant que

$H^1(\bar{A}_v, \mathbb{Q}_\ell)(1) = H^1(\bar{A}, \mathbb{Q}_\ell)(1) = V_\ell(A^*)$ (A^* = duale de A)

et $H^1(\bar{B}_v, \mathbb{Q}_\ell)(1) = H^1(\bar{B}, \mathbb{Q}_\ell)(1) = V_\ell(B^*)$ (B^* = duale de B).

G opérant sur $H^1(\bar{A}_v, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v}(1)$ (resp. $H^1(\bar{B}_v, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v}(1)$) à travers le quotient $G(\overline{k(v)}/k(v))$.

5.- <u>ENDOMORPHISMES DES POINTS DE ℓ-TORSION</u>

Les résultats que nous allons exposer dans ce paragraphe sont encore des conséquences de la finitude des classes d'isomorphies dans toute classe d'isogénies de variétés abéliennes sur les corps K envisagés.

<u>THÉORÈME 6</u>.- *Soient* K *un corps tel que toute classe d'isogénies de variétés abéliennes définies sur* K *est constituée d'un nombre fini de classes d'isomorphies,* A *une variété abélienne définie sur* K , ℓ *un nombre premier,* $\ell \neq \mathrm{car}(K)$
Si ℓ *est suffisamment grand, l'homomorphisme canonique :*

$$\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}_G(A_\ell)$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : Le plan de la démonstration est essentiellement celui utilisé pour démontrer $C_1(K)$:

1) *Pour tout* ℓ , $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *s'injecte dans* $\mathrm{End}_G A_\ell$. En effet, si $u : A \longrightarrow A$ s'annule sur A_ℓ , $u = \ell v$, $v \in \mathrm{End}_K A$. De plus, pour $\ell \gg 0$, $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est une algèbre semi-simple.

2) *Si pour tout* $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [G]-*sous-module* W *de* A_ℓ , *il existe* $u \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *tel que* $u(A_\ell) = W$,

$$\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \simeq \mathrm{End}_G A_\ell$$

En effet comme pour la proposition 3 (§2), ceci entraine que A_ℓ est un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [G]-module semi-simple et que tout endomorphisme de A_ℓ qui commute avec $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est une homothétie. On conclut grâce au théorème de bicommutation.

3.- <u>LEMME</u>.- *Soit* W *un sous* $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ [G]-*module de* A_ℓ . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe* $u \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *tel que* $u(A_\ell) = W$

a') *il existe* $u' \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *tel que* $(u')^2 = u'$, $u'(A_\ell) = W$.

b) *il existe* $v \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *tel que* $(\mathrm{Ker}\, v) \cap A_\ell = W$

b') *il existe* $v' \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *tel que* $(v')^2 = v'$, $\mathrm{Ker}\, v' \cap A_\ell = W$.

Comme $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est une algèbre semi-simple, tout idéal à droite (resp. à gauche) est engendré par un idempotent. Ceci montre l'équivalence de a) et a') (resp. celle de b) et b')) .Soit u' comme dans a'), si $v' = 1 - u'$, v' satisfait b') et réciproquement.

4) Montrons que : "*pour tout sous* $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G]$*-module* W *de* A_ℓ , *il existe* $u \in \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ *tel que* $u(A_\ell) = W$."

Pour tout nombre premier ℓ' , distinct de $\mathrm{car}(K)$, et tout sous $\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}[G]$-module W' de $A_{\ell'}$, les variétés abéliennes A/W' sont des variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes à A . Elles se répartissent donc dans les différentes classes d'isomorphies de telles variétés, qui sont en nombre fini.
Pour $\ell \gg 0$ et pour un tel $W \subset A_\ell$, il existe $\ell' \neq \ell$, un $\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}[G]$-module $W' \subset A_{\ell'}$ et un K-isomorphisme

$$r : A/W \simeq A/W' .$$

L'homomorphisme composé :

$$v : A \xrightarrow{\text{can}} A/W \xrightarrow[\sim]{r} A/W' \xrightarrow{\text{can}} A/A_{\ell'} \xrightarrow[\sim]{\times \ell'} A$$

vérifie $\mathrm{Ker}\, v \cap A_\ell = W$. On conclut grâce au lemme précédent.

<u>COROLLAIRE</u> : *Soient* K *et* A *comme dans le théorème* 6 . *Pour tout* ℓ *premier distinct de* $p = \mathrm{car}(K)$, *soit* $\rho_\ell : \mathbb{Z}_\ell[G] \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$ *la représentation naturelle. D'autre part posons* $\tilde{\mathbb{Z}} = \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_\ell$, $T(A) = \prod_{l \neq p} T_\ell(A)$, *et soit* $\rho : \tilde{\mathbb{Z}}[G] \longrightarrow \mathrm{End}_{\tilde{\mathbb{Z}}} T(A)$ *la représentation naturelle. Alors :*

a) *Pour presque tout* ℓ , $(\mathrm{Im}\, \rho_\ell)$ *est le commutant de* $\mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}_\ell$ *dans* $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$.

b) $\mathrm{Im}(\rho)$ *est d'indice fini dans le commutant de* $\mathrm{End}_K A$ *dans* $\mathrm{End}_{\tilde{\mathbb{Z}}} T(A)$.

<u>Démonstration</u> : Posons $E_\ell = \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}_\ell$, $\bar{E}_\ell = \mathrm{End}_K A \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$
$\bar{\rho}_\ell : \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathrm{End}(A_\ell)$ déduite de manière naturelle de ρ_ℓ .

a) le théorème 6 affirme que pour présque tout ℓ :

$$\overline{E}_\ell = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G]}(A_\ell)$$

le théorème de bicommutation que $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}_\ell = \mathrm{End}_{\overline{E}_\ell}(A_\ell)$ et le théorème de Nakayama que $\mathrm{Im}\,\rho_\ell = \mathrm{End}_{E_\ell}(T_\ell(A))$

b) c'est une conséquence de a) et de $C_1(K)$.

Note : G. Faltings a aussi démontré que les "conjectures de Tate" impliquent le résultat suivant : soit K un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$, $\overline{K}$ sa clôture algébrique, $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et A et B deux variétés abéliennes définies sur K . Alors l'application canonique $\mathrm{Hom}_K(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A(\overline{K}),B(\overline{K}))$ est un isomorphisme. Une démonstration a été présentée oralement par G. Faltings durant le séminaire. Une démonstration simplifiée a été rédigée par O. Gabber. Ce dernier n'a pas soumis son manuscrit à la publication.

BIBLIOGRAPHIE

[C.R] C.W CURTIS, I. REINER - *Methods of representation theory,* Vol.I Pure and applied Math., Wiley-Interscience.(1981).

[F] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inv. Math. Vol.73, Fasc.3 (1983), 349-366.

[M] D. MUMFORD - *Abelian Varieties*, Oxford University Press 1970.

[Mo] S. MORI - *On Tate conjecture concerning endomorphisms of abelian varieties*, Intl. Symp. of Alg. Geometry, Kyoto 1977, pp. 219-230.

[M.B] L. MORET-BAILLY - *Familles de Variétés abéliennes*, Astérisque, (à paraître).

[SGA] SGA 7 - Lecture Notes n°288, n°340.

[T] J.T.TATE - [T.1] - *Algebraic cycles and Poles of Zeta functions.* Arithmetical Algebraic Geometry, Harper & Row, (1963), 93-111.
- *Endomorphisms of Abelian Varieties over finite fields*, Invent. Math.2 - (134-144), 1966.

[Z] J.ZARHIN - *Endomorphisms of Abelian varieties over fields of finite characteristic,* Math. USSR Izvestija, Vol. 9 (1975) n°2, pp.255-260.

Marguerite FLEXOR
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX