

Astérisque

MICHEL RAYNAUD

Hauteurs et isogénies

Astérisque, tome 127 (1985), p. 199-234

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__199_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HAUTEURS ET ISOGÉNIES

Michel RAYNAUD

INTRODUCTION

Considérons un corps de nombres K , une K -variété abélienne A_K et son modèle de Néron A sur l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ de K . Si ω_A est le $\mathcal{O}$ -module inversible des formes différentielles sur A , de degré maximum et invariants par translations, on a sur ω_A une structure d'Arakelov et en particulier, ω_A a un degré $\deg(\omega_A)$. Si de plus A est semi-stable, on définit la hauteur de A_K :

$$ht(A_K) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg(\omega_A) .$$

Dans cet exposé on étudie le comportement de $\deg(\omega_A)$ par isogénie.

Soit donc $u_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie et $u : A \rightarrow B$ son extension aux modèles de Néron.

Dans le §1 on exprime $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)$ en fonction de la ramification de u , et plus précisément, en fonction de la différentielle de $\text{Ker}(u)$, lorsque u est plat.

Au §2, on montre que si A' est le modèle de Néron de la variété duale A'_K de A_K , on a $\deg(\omega_{A'}) = \deg(\omega_{A'})$. Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite du volume ; la preuve est locale et plaide en faveur des propriétés différentielles du modèle de Néron, y compris dans le cas où A n'est pas semi-stable.

Les résultats essentiels pour la suite se trouvent au §4. On suppose A semi-stable et on établit le résultat suivant :

THÉORÈME. - L'ensemble des hauteurs des variétés abéliennes B_K , K -isogènes à A_K est fini. Son cardinal, ainsi que les différences $|ht(A_K) - ht(B_K)|$ peuvent être majorés de façon effective.

La démonstration du théorème a pour point de départ le résultat suivant, dû

à Faltings :

Soient p un nombre premier, $(A_K)_{p^\infty} = \bigcup_n (A_K)_{p^n}$, le K -groupe p -divisible constitué par la torsion p -primaire de A_K , $T_p(A_K)$ son module de Tate. Considérons $H_K = \bigcup_n (H_K)_{p^n}$ un sous- K -groupe p -divisible de $(A_K)_{p^\infty}$. Il lui correspond un sous- $\mathbb{Z}_p$ -module M de $T_p(A_K)$, stable sous l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$; soit h le rang de M . Supposons pour simplifier $K = \mathbb{Q}$. Faltings calcule la puissance du caractère cyclotomique qui décrit l'action de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $\wedge^h M$, au moyen d'un invariant local, lié à la réduction de H_K en p . Cette relation entraîne que les isogénies $u_K : A_K \rightarrow B_K$, de noyau $(H_K)_{p^n}$, conservent le degré d'Arakelov pour $n \gg 0$.

Ceci étant, les sous-groupes p -divisibles de $(A_K)_{p^\infty}$, du type H_K , qui apparaissent dans la démonstration de Faltings, s'introduisent de façon non effective : ils sont extraits, par un argument de compacité des noyaux, de familles infinies de p -isogénies.

Pour sauver l'effectivité, dans cette partie galoisienne de la démonstration, on remplace la considération des sous-groupes p -divisibles H_K , par celle des sous-groupes $(H_K)_{p^n}$, dont les points à valeurs dans $\bar{K}$, sont du type $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$. Autrement dit, au lieu des groupes p -divisibles, appelés aussi de Barsotti-Tate (BT), on utilise les groupes de Barsotti-Tate tronqués (BT_n) . Les propriétés différentielles des BT_n , ainsi que les propriétés de déformation dont on a besoin, sont établies dans ce volume Exp. VI.

Que l'on utilise les BT ou bien les BT_n , il arrive que ceux-ci se spécialisent mal en les places ramifiées de K . On contrôle ce phénomène, de façon effective, au §3, grâce à la "presque décomposition de Hodge-Tate" des schémas en groupes finis, mise en évidence par Fontaine.

J'ai appris l'idée d'utiliser les BT_n dans une lettre de Parshin. Le §4 doit également beaucoup à l'exposé de Deligne au séminaire Bourbaki.

I.- ISOGÉNIES ET DIFFÉRENTE

1.0.- Notations : Dans la suite K sera un corps de l'un des deux types suivants :

Cas global : K est un corps de nombres, extension finie de $\mathbb{Q}$.

Cas local : K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

Dans les deux cas, on note $\mathcal{O}$ l'anneau d'entiers de K et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K .

Partant d'un corps global K et d'une place finie v de K , on obtient par

complétion de K en v un corps local K_v , d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_v$, de corps résiduel fini k_v .

1.1.- Modèle de Néron et isogénies

Soient A_K une K -variété abélienne de dimension g et A son modèle de Néron sur $\mathcal{O}$. Donc A est $\mathcal{O}$ -schéma en groupes lisse, séparé, de type fini, de fibre générique A_K . On note A^0 le sous-schéma en groupes ouvert de A , à fibres connexes. Nous dirons abusivement que A^0 est le modèle de Néron connexe de A_K sur $\mathcal{O}$.

Soit $u_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie entre K -variétés abéliennes, de noyau M_K . Le degré d de u_K est le cardinal de $M_K(\bar{K})$:

$$d = \# M_K(\bar{K}).$$

Le morphisme u_K s'étend canoniquement en un $\mathcal{O}$ -morphisme des modèles de Néron $u : A \rightarrow B$. Soit $u^0 : A^0 \rightarrow B^0$ la restriction de u aux modèles de Néron connexes. On pose $M = \text{Ker } u^0$ qui est un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes.

Si K est global et si v est une place finie de K , par changement de base on obtient $A_v = A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$, $A_{K_v} = A_K \otimes_K K_v \dots$, et A_v est un modèle de Néron de A_{K_v} sur $\mathcal{O}_v$.

La proposition suivante est immédiate : (cf. [5], 2.2.1) :

PROPOSITION 1.1.1.- *Supposons K local. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $u : A \rightarrow B$ est plat.
- (ii) M est plat sur $\mathcal{O}$
- (iii) M est quasi-fini sur $\mathcal{O}$
- (iv) $(u^0) \otimes_{\mathbb{R}} k$ est surjectif.

De plus, lorsque ces conditions sont réalisées, on a une suite exacte de schémas en groupes pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (fppf) :

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^0 \xrightarrow{u^0} B^0 \rightarrow 0.$$

Exemples 1.1.2 : Supposons K local.

- a) Si A_K a bonne réduction sur $\mathcal{O}$, u et M sont finis et plats.
- b) Si A_K a réduction semi-stable sur $\mathcal{O}$, u et M sont quasi-finis et plats.
(car u se factorise à travers la multiplication par $d : A \rightarrow A$ qui a un noyau quasi-fini).
- c) Si $(d, p) = 1$, alors u et M sont étales.

d) Supposons que A ne soit pas semi-stable. Prenons $A_K = B_K$ et pour u_K la multiplication par p . Alors u est la multiplication par p dans A et u n'est pas plate.

1.2.- Schémas en groupes quasi-finis

Supposons K local.

Soit X un $\mathcal{O}$ -schéma quasi-fini et séparé. Alors, comme $\mathcal{O}$ est complet (hensélien suffirait), X se décompose canoniquement en

$$X = X_1 \amalg X_2,$$

où X_1 est fini sur $\mathcal{O}$ et X_2 est au-dessus de $\text{Spec}(K)$. Le schéma X_1 n'est autre que la complétion de X le long de sa fibre au-dessus de k ; nous le notons désormais $\hat{X}$ et nous dirons que $\hat{X}$ est la partie finie de X .

Si X est un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes, $\hat{X}$ est un sous-schéma en groupes ouvert et fermé de X . Si de plus X est plat sur $\mathcal{O}$ et est un schéma en groupes commutatifs, le groupe quotient fppf $X/\hat{X}$ est un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes étale, prolongement par zéro sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$ de sa fibre générique.

1.3.- Différente (cf. Exp. VI, 4.9.4).

Considérons à nouveau une isogénie u_K , comme dans 1.1, et ses extensions u (resp. $u^{\mathcal{O}}$) aux modèles de Néron (resp. aux modèles de Néron connexes).

Soit $\omega_{A/\mathcal{O}}$ le faisceau inversible sur A des formes différentielles relatives, de degré maximum, et soit ω_A l'image réciproque de $\omega_{A/\mathcal{O}}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$, par la section unité de A . On a donc $\omega_A = \det(\text{Lie } A)^{\vee}$, où $\vee$ désigne le $\mathcal{O}$ -module dual. On définit de même ω_B .

Considérons le $\mathcal{O}$ -module inversible $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$. Lorsque $u^{\mathcal{O}}$ est surjectif, de sorte que l'on a une suite exacte fppf de schémas en groupes :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^{\mathcal{O}} \xrightarrow{u^{\mathcal{O}}} B^{\mathcal{O}} \longrightarrow 0,$$

alors $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ s'interprète en terme du noyau $M: \omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ est l'image réciproque, par la section unité de M , du module dualisant relatif $\omega_{M/\mathcal{O}}$.

En effet, si $\mathcal{J}$ est le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{A^{\mathcal{O}}}$ qui définit M , M est localement intersection complète dans $A^{\mathcal{O}}$ et l'on a :

$$\omega_{M/\mathcal{O}} = \omega_{A^{\mathcal{O}}/\mathcal{O}} \otimes \det(\mathcal{J}/\mathcal{J})^{\vee} = \omega_{A^{\mathcal{O}}/\mathcal{O}} \otimes (u^{\mathcal{O}})^*(\omega_{B^{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}^{-1}) = f^*(\omega_A \otimes \omega_B^{-1}),$$

où $f: M \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$ est le morphisme structural.

Dans le cas où M n'est pas plat sur $\mathcal{O}$, $\omega_A \otimes \omega_B^{-1}$ n'a plus de raison de se calculer au moyen de M , mais est déterminé par u et nous poserons :

$$\omega_A \otimes \omega_B^{-1} = \omega_u.$$

Du fait que u_K est étale, la flèche canonique $\omega_B \rightarrow \omega_A$, déduite de u , est injective. Par tensorisation avec ω_B^{-1} , on obtient donc une injection canonique :

$$0 \hookrightarrow \omega_A \otimes \omega_B^{-1} = \omega_u,$$

et il existe un idéal non nul $\mathcal{I}_u$ de $\mathcal{O}$, tel que $\omega_u = \mathcal{O}(\mathcal{I}_u^{-1})$.

En d'autres termes, l'application $\text{Lie}(u) : \text{Lie}(A) \rightarrow \text{Lie}(B)$ est injective et si, dans des bases locales, on calcule son déterminant, celui-ci engendre $\mathcal{I}_u$. En particulier, on voit que $\mathcal{O}/\mathcal{I}_u$ a pour support les places v où u_v n'est pas étale et nous dirons que $\mathcal{I}_u$ est la différente de u . Pour justifier cette terminologie, nous allons esquisser le lien avec la notion classique de différentielle, en une place v où M_v est quasi-fini.

Pour ce faire, "rappelons" (cf. [7], Appendix), que si on a un morphisme fini et plat de S -schémas lisses :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

on dispose d'une application canonique sur les différentielles relatives de degré maximum, la trace :

$$\text{Tr} : u_*(\omega_{X/S}) \rightarrow \omega_{Y/S}$$

qui est $\mathcal{O}_Y$ -linéaire et telle que

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{Tr}(f u_*(\omega)) &= \text{Tr}_{X/Y}(f)\omega, \quad \forall V \text{ ouvert de } Y, \\ &\quad \forall f \in \mathcal{O}_X|_{u^{-1}(V)}, \forall \omega \in \omega_{Y/S}|_V. \end{aligned}$$

De plus, l'application $\mathcal{O}_X$ -linéaire associée :

$$(2) \quad \begin{aligned} \omega_{X/S} &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \omega_{Y/S}) \\ \omega &\longmapsto (f \mapsto \text{Tr}(f\omega)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Tensorisant les deux membres de (2) par $\omega_{Y/S}^{-1}$, on en déduit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules inversibles :

$$(3) \quad \omega_{X/S} \otimes \omega_{Y/S}^{-1} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)$$

qui est la formule de passage clé entre le calcul du complexe dualisant relatif $\omega_{X/Y}$ en terme de présentation par des schémas lisses d'une part, et en terme du morphisme fini et plat, localement intersection complète $u : X \rightarrow Y$ d'autre part.

Par ailleurs, l'application canonique déduite de $u: u^*(\omega_{Y/S}) \rightarrow \omega_{X/S}$ donne une flèche $\mathcal{O}_X \rightarrow \omega_{X/S} \otimes \omega_{Y/S}^{-1}$ qui, composée avec (3) fournit une application $\mathcal{O}_X$ -linéaire :

$$(4) \quad \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) .$$

D'après (1), (4) n'est autre que l'application

$$f \mapsto (g \mapsto \text{Tr}_{X/Y}(gf)) .$$

Supposons de plus que la restriction de u à un ouvert U de X , schématiquement dense dans X , soit étale. Alors (4) est un isomorphisme au-dessus de U et il existe un idéal inversible $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ tel que (4) s'identifie à l'application canonique

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{I}^{-1} .$$

Alors $\mathcal{I}^{-1}$ coïncide avec la différentielle inverse classique, formée des sections méromorphes f de $\mathcal{O}_X$, telles que $\text{Tr}(fx) \in \mathcal{O}_Y, \forall x \in \mathcal{O}_X$.

Supposons de plus que X et Y soient des S -schémas en groupes et que u soit un morphisme de S -schémas en groupes. Alors $\mathcal{I}$ est un faisceau équivariant sur X , donc est l'image réciproque, d'un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_S$, noté encore $\mathcal{I}$. De plus $H = \text{Ker}(u)$ est un S -schéma en groupes fini et plat et par le changement de base $S \rightarrow Y$ défini par la section unité, on trouve que $\mathcal{I} \mathcal{O}_H$ est bien la différentielle classique de la $\mathcal{O}_S$ -algèbre finie, génériquement étale $\mathcal{O}_H$.

Revenons à notre isogénie u_K et à son prolongement u^0 . Supposons u quasi-fini et soit $\hat{M}$ la partie finie (1.2) de M , de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \hat{M} \rightarrow A^0 \xrightarrow{\hat{u}} A^0/\hat{M} \rightarrow 0$$

avec $\hat{u}$ fini et un morphisme étale

$$v: A^0/\hat{M} \rightarrow B^0$$

tels que $u = v\hat{u}$.

Comme v est étale, $\mathcal{I}_u = \mathcal{I}_{\hat{u}}$ et les considérations précédentes montrent que $\mathcal{I}_u \mathcal{O}_M$ est l'idéal différentiel de la $\mathcal{O}$ -algèbre finie $\hat{\mathcal{O}}_M$.

1.4.- Isogénie et degré d'Arakelov

Dans ce numéro, K est un corps global.

Soit $\tau: K \rightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe de K . Partant d'une isogénie $u_K: A_K \rightarrow B_K$ comme dans 1.1, on en déduit par le changement de corps τ , une isogénie de tores complexes $u_\tau: A_\tau \rightarrow B_\tau$.

Rappelons (exposé I §3-3) que sur ω_{A_τ} on a une métrique hermitienne telle que

$$\langle \omega, \omega \rangle_\tau = \int_{A_\tau} |\omega \wedge \bar{\omega}|$$

où le second membre désigne l'intégrale pour une mesure de Haar normalisée par un facteur ne dépendant que de la dimension de A .

On munit le faisceau $\omega_{u_\tau} = \omega_{A_\tau} \otimes \omega_{B_\tau}^{-1} = \mathcal{L}_{u_\tau}^{q-1}$ de la métrique "différence".

Soit $\omega \in \omega_B$. On a

$$\int_{A_\tau} |u^*(\omega) \wedge u^*(\bar{\omega})| = d \int_{B_\tau} |\omega \wedge \bar{\omega}|,$$

où d est le degré de u_K .

C'est dire que la section 1 de $\omega_u = \mathcal{L}_u^{q-1}$ est telle que

$$\langle 1, 1 \rangle_\tau = d.$$

Donc, si v est une place à l'infini de K , la valeur absolue v -adique de la section 1 de $\mathcal{L}_u^{q-1}$ est telle que

$$\begin{aligned} \|1\|_v &= d \text{ si } v \text{ est complexe} \\ \|1\|_v &= d^{1/2} \text{ si } v \text{ est réelle.} \end{aligned}$$

La contribution des places à l'infini dans le calcul du degré d'Arakelov (réf.

exposé I §1, corollaire de la proposition 1.1) de la section 1 de $\mathcal{L}_u^{q-1}$ est alors:

$$-\sum_v \text{infini} \log \|1\|_v = -\log(d) [K:\mathbb{Q}]/2.$$

Par ailleurs, le degré, à distance finie de la section 1 de $\mathcal{L}_u^{q-1}$ est $\log \# (0/\mathcal{L}_u^q)$. D'où la proposition :

PROPOSITION 1.4.1.-

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \deg(\omega_u) = \deg(\mathcal{L}_u^{q-1}) = -\log(d) [K:\mathbb{Q}]/2 + \log \# (0/\mathcal{L}_u^q).$$

COROLLAIRE 1.4.2.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_B)$,

(ii) $\#(0/\mathcal{L}_u^q) = d [K:\mathbb{Q}]/2$

(iii) $d [K:\mathbb{Q}]/2$ est un entier et engendre l'idéal $\text{Norm}_{0/\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_u^q)$,

(iv) Pour tout nombre premier p , si p^h est la puissance de p qui divise d , on a :

$$h[K:\mathbb{Q}]/2 = \sum_{\mathfrak{p}/p} v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{L}_u^q) d_{\mathfrak{p}},$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation de $0_{\mathfrak{p}}$, de groupe de valeurs $\mathbb{Z}$ et $d_{\mathfrak{p}}$ est le degré

du corps résiduel $k_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathbb{F}_p$.

COROLLAIRE 1.4.3. - Les conditions de 1.4.2, sont en particulier satisfaites, si pour tout p premier et toute place $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$ au-dessus de p , on a

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}) = e_{\mathfrak{p}} h/2$$

où h et $v_{\mathfrak{p}}$ sont comme dans 1.4.2 et $e_{\mathfrak{p}}$ est l'indice de ramification de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ au-dessus de $\mathbb{Z}_p$.

De plus, si ces conditions sont réalisées, le faisceau d'Arakelov $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G} \otimes 2}$ est trivial. Pour que le faisceau d'Arakelov $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}$ soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe $f \in K$, tel que $f^2 = \alpha d$, où α est une racine de l'unité.

Démonstration de 1.4.3

Si pour toute place $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$ au-dessus de p on a $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}) = e_{\mathfrak{p}} h/2$, la condition iv) de 1.4.2 est vérifiée car $\sum_{\mathfrak{p}/p} e_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} = [K:\mathbb{Q}]$, d'où la première assertion.

Supposons que $v_{\mathfrak{p}}(\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}) = e_{\mathfrak{p}} h/2$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$. Alors d engendre $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G} \otimes 2}$, donc $1/d$ engendre $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}^{-2}}$. Par ailleurs, pour tout plongement complexe $\tau : K \rightarrow \mathbb{C}$, la section 1 du faisceau d'Arakelov $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}^{-2}}$ est telle que $\langle 1, 1 \rangle_{\tau} = d^2$, donc $\langle 1/d, 1/d \rangle_{\tau} = 1$ et $1/d$ trivialise le faisceau d'Arakelov $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}^{-2}}$.

Enfin, si le faisceau d'Arakelov $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}$ est trivialisé par une section f , on a $f^2 = \alpha d$, où α est une unité de $\mathcal{O}$, qui dans tout plongement complexe est de module 1, donc α est une racine de l'unité.

Remarque 1.4.4 : Les conditions de 1.4.2 sont celles qui interviennent dans la démonstration de Faltings. Elles introduisent une moyenne des valuations de $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}$ en les diverses places de $\mathcal{O}$ au-dessus de tout premier p . On peut les traduire encore en disant que le faisceau d'Arakelov $\text{Norm}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}})$ est trivial.

La condition de 1.4.3 est locale sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. C'est elle qui intervient, au numéro suivant, dans la comparaison du degré d'une variété abélienne et celui de sa duale.

2.- DEGRÉ D'ARAKELOV D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE ET DE SA DUALE

2.1.- Soient K un corps local ou global (1.0), $u_K : A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie entre K -variétés abéliennes, $u'_K : B'_K \rightarrow A'_K$ l'isogénie duale, d le degré commun de u_K et u'_K . On étend ces isogénies en des morphismes $u : A \rightarrow B$ et $u' : B' \rightarrow A'$, entre les modèles de Néron sur l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ de K . On dispose alors des idéaux différents $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{G}'}$ (1.3).

THÉORÈME 2.1.1.- On a $\mathcal{L}_u^2 \mathcal{L}_{u'}^2 = (d)$.

Remarque 2.1.2 : Supposons dans 2.1.1 que A ait bonne réduction sur 0 . Alors il en est de même de A' ; u et u' sont finis et plats et ont pour noyaux des 0 -schémas en groupes finis et plats, duaux l'un de l'autre pour la dualité de Cartier. Dans ce cas, 2.1.1 résulte de [8] , appendice prop. 9.

Il suffit clairement d'établir le théorème dans le cas d'un corps local, ce qui fera l'objet des numéros suivants. Pour l'instant, donnons quelques corollaires.

COROLLAIRE 2.1.3.- Supposons K global. Soient A_K une K -variété abélienne, A'_K la variété abélienne duale, A et A' les modèles de Néron respectifs de A_K et A'_K sur l'anneau d'entiers 0 . Alors les faisceaux d'Arakélov ω_A^2 et $\omega_{A'}^2$ sont isomorphes ; en particulier $\deg(\omega_A) = \deg(\omega_{A'})$.

Démonstration du corollaire : Soit L_K un faisceau ample sur A_K . On lui associe, de la manière habituelle, une isogénie autoduale :

$$u_K : A_K \longrightarrow A'_K .$$

Soit $u : A \longrightarrow A'$ son extension aux modèles de Néron et soit d le degré de u_K . Comme u_K est autoduale, le théorème 2.1.1 entraîne :

$$\mathcal{L}_u^2 = (d) .$$

Alors $1/d$ trivialisait le faisceau inversible $\mathcal{L}_u^{\ell-2}$. Compte tenu des métriques à l'infini, calculées dans 1.4, $1/d$ est même une trivialisaiton du faisceau d'Arakélov $\mathcal{L}_u^{\ell-2}$.

Comme on a $\omega_A = \omega_{A'} \mathcal{L}_u^{\ell-1}$, égalité entre faisceaux d'Arakélov, on a bien $\omega_A^2 = \omega_{A'}^2$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.1.4.- Gardons les hypothèses de 2.1.1 et supposons K global.

1) On a :

$$|\deg(\omega_A) - \deg(\omega_{A'})| \leq \frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} \text{Log}(d) .$$

2) Supposons $d = p^n$, avec p premier. Alors

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_{A'}) = \frac{m}{2} \text{Log}(p)$$

avec m entier, $|m| \leq [K:\mathbb{Q}]n$.

Démonstration du corollaire : d'après 1.4.1, on a :

$$\deg(\omega_A) - \deg(\omega_{A'}) = -\frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} \text{Log}(d) + \text{Log}(\text{Norme}_{0/\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_u^{\ell})) .$$

D'après 2.1.1, on a $\mathcal{V}_u \supset (d)$, donc $\text{Norme}_{0/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u) \supset d^{[K:\mathbb{Q}]}$, d'où :

$$0 \leq \text{Log}(\text{Norme}_{0/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u)) \leq [K:\mathbb{Q}] \text{Log}(d).$$

L'assertion 1) en résulte. Si $d = p^n$, $\text{Norme}_{0/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_u) = p^h$, avec h entier, $0 \leq h \leq [K:\mathbb{Q}]n$. Alors $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B) = \log(p) \left[h - \frac{[K:\mathbb{Q}]}{2} n \right] = \text{Log}(p) \frac{m}{2}$ avec $m = 2h - [K:\mathbb{Q}]n$, d'où l'assertion 2).

Remarque 2.1.5 : Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et soit C une k -courbe algébrique intègre, régulière. Considérons le modèle de Néron sur C d'une variété abélienne définie sur le corps des fractions de C et soit A' le modèle de Néron de la variété duale. On dispose alors sur C des faisceaux inversibles ω_A et $\omega_{A'}$. Si A est semi-stable, Moret-Bailly a montré dans [8] qu'il existe N entier > 0 , tel que $\omega_A^N \simeq \omega_{A'}^N$, ce qui apparaît comme un substitut à 2.1.3. Le cas des modèles de Néron non semi-stables reste ouvert.

2.2.- Jusqu'à la fin du §2, on suppose K local donc (1.0) de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$.

Pour démontrer 2.1.1, on peut, quitte à remplacer 0 par le complété d'une extension maximale non ramifiée de 0 , supposer k algébriquement clos. Nous allons d'abord donner une démonstration "géométrique", utilisant les structures pro-algébriques sur les groupes de cohomologie. Ces structures ont été étudiées par Lucile Bégueri [1] et complètent la théorie du corps de classes d'un corps local à corps résiduel algébriquement clos de J.-P. Serre [12].

Après cet effort, et pour se rassurer un peu, nous donnerons également une démonstration "arithmétique", valable lorsque k est fini et basée sur les mêmes idées, mais où l'on remplace les arguments géométriques par un décompte de points.

Notons π une uniformisante de 0 et v la valuation de K telle que $v(\pi) = 1$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $0_n = 0/\pi^n 0$. Si X est un 0 -schéma X_n est le 0_n -schéma $X \otimes_{0_n} 0_n$.

Rappelons ([4] et [13]) que le foncteur de Greenberg de niveau n associe à X_n un k -schéma $\text{Gr}(X_n)$ et une bijection fonctorielle :

$$(\text{can}) \quad X(0_n) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}(X_n)(k).$$

On ne s'intéresse qu'à la structure quasi-algébrique sous-jacente à $\text{Gr}(X_n)$, notée $\underline{X}_n$.

On a de plus des morphismes de transition $\underline{X}_{n+1} \longrightarrow \underline{X}_n$ qui, par les applications (can) correspondent aux applications naturelles de réduction mod π^n $X(0_{n+1}) \longrightarrow X(0_n)$. On définit alors $\underline{X} = \varprojlim_n \underline{X}_n$, de sorte que l'on a une bijection $\text{can} : X(0) \longrightarrow \underline{X}(k)$. Si X est lisse sur 0 , équidimensionnel de dimension relative d , $\text{Gr}(X_n)$ est lisse sur k , équidimensionnel, de

dimension nd .

Le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ transforme $\mathcal{O}$ -schémas en groupes en k -groupes pro-algébriques. De plus ces constructions sont compatibles aux extensions finies étales de $\mathcal{O}$ et au passage au complété d'une extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}$.

Sous les hypothèses de 2.1.1, appliquons le foncteur de Greenberg au morphisme $u: A \rightarrow B$. On obtient un morphisme $\underline{u}: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ de k -groupes pro-algébriques, de noyau $\underline{M}$ et soit $\underline{S}$ le conoyau, de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \underline{M} \rightarrow \underline{A} \xrightarrow{u} \underline{B} \rightarrow \underline{S} \rightarrow 0.$$

LEMME 2.2.1.- $\underline{S}$ est un groupe quasi-algébrique, de dimension $v(\mathcal{V}_u)$

Démonstration : Pour n entier $\gg 0$, l'application exponentielle réalise un isomorphisme de $\pi^n \text{Lie}(A)$ sur $\text{Ker } A(\mathcal{O}) \rightarrow A(\mathcal{O}_n)$, compatible avec les structures pro-algébriques, et de même pour B . On en déduit un diagramme commutatif de groupes pro-algébriques, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \pi^n \text{Lie}(A) & \rightarrow & \underline{A} & \rightarrow & \underline{A}_n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Lie}(u) & & \downarrow \underline{u} & & \downarrow \underline{u}_n \\ 0 & \rightarrow & \pi^n \text{Lie}(B) & \rightarrow & \underline{B} & \rightarrow & \underline{B}_n \rightarrow 0 \end{array}.$$

Le lemme du serpent fournit alors une suite exacte de k -groupes pro-algébriques :

$$(2) \quad 0 \rightarrow \underline{M} \rightarrow \text{Ker}(\underline{u}_n) \rightarrow \text{Coker } \text{Lie}(u) \rightarrow \underline{S} \rightarrow \text{Coker}(\underline{u}_n) \rightarrow 0.$$

Or $\underline{M}$ est fini, (car $M(\mathcal{O})$ est fini) et $\text{Ker}(\underline{u}_n)$ et $\text{Coker}(\underline{u}_n)$ ont même dimension car $\underline{A}_n$ et $\underline{B}_n$ ont même dimension, égale à n fois la dimension g de la K -variété abélienne A_K . $\text{Coker}(\text{Lie } u)$ est un $\mathcal{O}$ -module de longueur finie égale à $v(\mathcal{V}_u)$; le groupe $\text{Coker}(\text{Lie } u)$ a donc pour dimension $v(\mathcal{V}_u)$. On déduit de (2) que $\underline{S}$ est quasi-algébrique, de dimension finie, égale à $v(\mathcal{V}_u)$, d'où le lemme.

Dualement, on a une suite exacte de k -groupes pro-algébriques :

$$(1') \quad 0 \rightarrow \underline{M}' \rightarrow \underline{B}' \xrightarrow{u'} \underline{A}' \rightarrow \underline{S}' \rightarrow 0$$

et on a de même $\dim(\underline{S}') = v(\mathcal{V}_{u'})$.

2.3.- Supposons maintenant k algébriquement clos et considérons la suite exacte de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte de K -groupes

$$\begin{array}{ccccccc} \text{algébriques} & 0 & \rightarrow & M_K & \rightarrow & A_K & \xrightarrow{u_K} B_K \rightarrow 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & M(K) & \rightarrow & A(K) & \xrightarrow{u_K} B(K) \rightarrow H^1(K, M_K) \rightarrow H^1(K, A_K) \rightarrow H^1(K, B_K) \rightarrow 0 \end{array}$$

(comme $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ est de dimension cohomologique 1 ([13]II 3.3), les groupes de cohomologie de degré ≥ 2 sont nuls

Puisque A et B sont des modèles de Néron, les applications naturelles $A(\mathcal{O}) \rightarrow A(K)$ et $B(\mathcal{O}) \rightarrow B(K)$ sont bijectives et $u(K)$ s'identifie à $u(\mathcal{O})$ de conoyau $\underline{S}(k)$.

Posons $T = \ker H^1(\quad / K, A_K) \longrightarrow H^1(\quad / K, B_K)$. De (3) on déduit la suite exacte :

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \underline{S}(k) \longrightarrow H^1(\quad / K, M_K) \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

Rappelons, maintenant quelques-uns des résultats de [1].

a) le groupe $H^1(\quad / K, M_K)$ est le groupe des k -points d'un k -groupe quasi-algébrique de dimension $v(d)$ ([1] th. 4.3.3).

b) Pour tout entier m , le sous-groupe de $H^1(\quad / K, A_K)$ annulé par m est le groupe des points rationnels d'un groupe quasi-algébrique ([1] 8.1.1) et donc $H^1(\quad / K, A_K)$ est un groupe ind-algébrique.

c) On a un isomorphisme canonique, fonctoriel en la variété abélienne A_K :

$$H^1(\quad / K, A_K) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(\underline{A}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qui identifie la partie de p -torsion du H^1 , au "dual de Serre" du groupe pro-algébrique A' ([1], 8.3.6).

De ces considérations et de ([1] 8.1.1), on déduit que la suite exacte (4) est une suite exacte de groupes de points rationnels de k -groupes quasi-algébriques. On a vu que $H^1(\quad / K, M_K)$ était de dimension $v(d)$ et que $\underline{S}$ était de dimension $v(\mathcal{V}_u)$. Reste à voir que T a même dimension que $\underline{S}'$, à savoir $v(\mathcal{V}_u)$.

Or si on applique le "foncteur $\text{Rhom}(\quad, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})"$ à la suite exacte (1'), on trouve compte tenu de c), que $\text{Ext}^1(\underline{S}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est isogène à T , donc a même dimension que T . Enfin $\text{Ext}^1(\underline{S}', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le dual de Serre du groupe unipotent $(\underline{S}')^0$, composante neutre de $\underline{S}'$, donc a bien même dimension que $\underline{S}'$.

2.4.- Nous considérons maintenant le cas où le corps résiduel k est fini, de cardinal q .

On peut alors utiliser les énoncés de dualité sur les corps locaux établis par Tate en place des résultats de [1]. Les arguments de dimension utilisés dans la démonstration géométrique, sont remplacés par des décomptes de points de k -groupes quasi-algébriques du type $\underline{S}$. Pour distinguer la contribution de la composante neutre $\underline{S}^0$ de celle du groupe des composantes connexes $\underline{S}/\underline{S}^0$, on est amené à considérer aussi les extensions non ramifiées $\mathcal{O}_T$ de $\mathcal{O}$, de corps résiduel k_T à q^T éléments ; on note K_T le corps des fractions de $\mathcal{O}_T$.

Commençons par rappeler les résultats de Tate.

a) Soient M_K un K -schéma en groupes fini d'ordre d et M'_K son dual de Cartier.

1) Les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\quad / K, M_K)$ sont finis, nuls pour $i \neq 0, 1, 2$. On note $h^i(M_K)$ le cardinal de $H^i(\quad / K, M_K)$.

2) $h^1(M_K)/h^0(M_K)h^2(M_K) = \#(0/d0)$

3) Le cup produit :

$$H^i(\mathbb{A}^1/K, M_K) \times H^{2-i}(\mathbb{A}^1/K, M'_K) \longrightarrow H^2(\mathbb{A}^1/K, G_m) \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est une dualité parfaite pour $i=0,1,2$.

b) Soit A_K une K -variété abélienne. Alors $H^1(\mathbb{A}^1/K, A_K)$ est canoniquement isomorphe au dual de Pontryagin $\text{Hom}(A'(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Les résultats de a) sont démontrés dans [14] II §5, et b) figure dans [15].

Partons de l'isogénie : $0 \longrightarrow M_K \longrightarrow A_K \xrightarrow{u_K} B_K \longrightarrow 0$ et, pour tout entier $r > 0$, de son extension à K_r :

$$0 \longrightarrow M_{K_r} \longrightarrow A_{K_r} \longrightarrow B_{K_r} \longrightarrow 0.$$

On déduit alors de la suite exacte de cohomologie galoisienne, la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(A(K_r) \longrightarrow B(K_r)) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}^1/K_r, M_{K_r}) \longrightarrow \text{Ker}(H^1(\mathbb{A}^1/K_r, A_{K_r}) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}^1/K_r, B_{K_r})) \longrightarrow 0$$

Compte tenu de b) ci-dessus et du fait que A, B, A', B' sont des modèles de Néron, cette suite se réécrit :

$$(5) \quad 0 \longrightarrow \text{Coker}(A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}^1/K_r, M_{K_r}) \longrightarrow \text{Hom}(\text{Coker}(B'(\mathcal{O}_r) \longrightarrow A'(\mathcal{O}_r)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

D'après les rappels de a) ci-dessus, on a pour $r \gg 0$

$$\log_q(h^1(M_{K_r})) = v(d)r + \text{cte}.$$

Notons que si $\underline{G}$ est un K_r -groupe pro-algébrique, sa composante neutre $\underline{G}^0$ est telle que $H^1(\mathbb{A}^1/K_r, \underline{G}^0) = 0$ d'après le théorème de Lang [10], p.119.

Comme $H^i(\mathbb{A}^1/K_r, \underline{G}) = 0$ pour $i \geq 2$ ([14]3.3), l'application canonique $H^1(\mathbb{A}^1/K_r, \underline{G}) \xrightarrow{\sim} H^1(K_r, \underline{G}/\underline{G}^0)$ est bijective. Si de plus $\underline{G}/\underline{G}^0$ a tous ses points rationnels sur K_r , auquel cas nous posons $\pi_0(\underline{G}) = (\underline{G}/\underline{G}^0)(K_r)$, on a un isomorphisme canonique $H^1(\mathbb{A}^1/K_r, \underline{G}) \simeq \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{K}_r/K_r), \pi_0(\underline{G})) \simeq \pi_0(\underline{G})$, qui associe à un homomorphisme $a : \text{Gal}(\bar{K}_r/K_r) \longrightarrow \pi_0(\underline{G})$ l'image par a du Frobenius sur K_r .

Considérons alors la suite exacte (1) de k -groupes pro-algébriques

$$0 \longrightarrow \underline{M} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{S} \longrightarrow 0.$$

Notons $\bar{\underline{A}}$ l'image de $\underline{A}$ dans $\underline{B}$, de sorte que l'on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \underline{M} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \bar{\underline{A}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \bar{\underline{A}} \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow \underline{S} \longrightarrow 0.$$

Choisissons $r \gg 0$ pour que les groupes $\underline{M}$, $\underline{A}/\underline{A}^0$, $\underline{B}/\underline{B}^0$ aient tous leurs points rationnels sur K_r . Alors si

$$\alpha : \text{Coker}(A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)) \longrightarrow S(K_r)$$

est l'application canonique, $\text{ker}(\alpha)$ et $\text{coker}(\alpha)$ sont finis constants, respectivement isomorphe à $\text{Ker } \pi_0(M_{K_r}) \longrightarrow \pi_0(A_{K_r})$ et $\text{Ker } \pi_0(\bar{A}_{K_r}) \longrightarrow \pi_0(B_{K_r})$.

Donc pour $r \gg 0$, le cardinal de $\text{coker } A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)$ est le produit d'une constante par $\# \underline{S}(k_r)$.

Or $\underline{S}$ est de dimension $v(\mathcal{V}_u)$ (2.2.1), de torsion, donc $\underline{S}^0$ est unipotent par suite $\log_q(\# \underline{S}(k_r)) = rv(\mathcal{V}_u) + \text{cte.}$ Finalement :

$$\log_q(\# \text{coker } A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)) = rv(\mathcal{V}_u) + \text{cte.}$$

De même on a $\log_q(\# \text{coker } B'(\mathcal{O}_r) \longrightarrow A'(\mathcal{O}_r)) = rv(\mathcal{V}_{u'}) + \text{cte.}$

Il résulte alors de (5) que pour $r \gg 0$, on a

$$v(d)r + \text{cte} = v(\mathcal{V}_u)r + v(\mathcal{V}_{u'})r + \text{cte},$$

d'où $v(d) = v(\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_{u'})$, ce qui achève la démonstration de 2.1.1 lorsque k est fini.

Remarque 2.4.1 : il est bien sûr possible d'estimer $\text{Coker } A(\mathcal{O}_r) \longrightarrow B(\mathcal{O}_r)$ sans parler de structure pro-algébriques, en reprenant la suite exacte (2) et en étudiant u_n par filtration suivant les puissances de π .

3.- AFFAISSEMENT DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE TRONQUÉS

3.1.- Dans ce paragraphe, K est un corps local (1.0). On note $\underline{m}$ l'idéal maximal de l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ de K , π un générateur de $\underline{m}$, v la valuation de K normalisée par $v(\pi) = 1$ et $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de $\mathcal{O}$.

On considère un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes commutatif M_n , fini et plat, dont la fibre générique $(M_n)_K$ est un K -groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n (en abrégé BT_n) (cf. Exp. VI, 1). C'est dire simplement que $M_n(\bar{K})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h$, pour un certain entier h que nous appellerons le p -rang de M_n . Par analogie avec les groupes de Barsotti-Tate, h devrait plutôt s'appeler la hauteur, mais dans ce volume, le mot hauteur est réservé en général à un autre usage.

Quand $\mathcal{O}$ est ramifié, ou quand $p=2$ et $e=1$, M_n n'est pas nécessairement un BT_n sur $\mathcal{O}$, car il se produit certaines dégénérescences, un "affaissement", quand on passe de la fibre générique à la fibre spéciale.

Commençons par donner l'exemple le plus simple d'affaissement. Supposons que $\mathcal{O}$ contienne les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité (i.e $(p-1)|e$). On dispose alors d'un morphisme de schémas en groupes $u : (\mathbb{Z}/p \mathbb{Z})_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mu_p$, qui envoie l'image de 1 sur une racine primitive p -ème de 1 ; u_K est un isomorphisme, tandis que $u_{\mathcal{O}/K} = 0$. Partant, de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mu_{p^2} \longrightarrow \mu_p \longrightarrow 0,$$

si on prend l'image réciproque de cette extension par u , on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dans laquelle $E_K \simeq (\mu_{p^2})_K$ est un BT_2 , tandis que $E \otimes_0 k$ est isomorphe à $(\mu_p)_k \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$, donc est annihilée par p ; par suite, E n'est pas un BT_2 .

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de contrôler le phénomène d'affaïssissement.

Pour tout entier i , $0 \leq i \leq n$ soit $(M_i)_K$ le noyau de p^i dans $(M_n)_K$ qui est donc un BT_i sur K et notons M_i l'adhérence schématique de $(M_i)_K$ dans M_n . Alors M_i est un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes fini et plat, annihilé par p^i , mais qui est strictement plus petit que $\text{Ker}(M_n \xrightarrow{p^i} M_n)$ lorsque ce dernier n'est pas plat sur $\mathcal{O}$.

La multiplication par p dans M_i se factorise à travers M_{i-1} et induit par passage au quotient un $\mathcal{O}$ -morphisme :

$$t_{i-1} : M_i/M_{i-1} \longrightarrow M_{i-1}/M_{i-2}$$

qui est un isomorphisme sur la fibre générique. On dispose ainsi d'une collection de morphismes de transition :

$$M_n/M_{n-1} \xrightarrow{t_{n-1}} M_{n-1}/M_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_2/M_1 \xrightarrow{t_1} M_1.$$

LEMME 3.1.1.- Pour que M_n soit un BT_n , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

1) si $n=1$, posons $\overline{M}_1 = \overline{M}_1 \otimes_0 k$. Alors la suite de k -schémas en groupes :

$$\overline{M}_1 \xrightarrow{F} \overline{M}_1^{(p)} \xrightarrow{V} \overline{M}_1$$

(où F est le Frobenius et V le Verschiebung) est exacte.

2) Si $n \geq 2$, les flèches de transition :

$$M_i/M_{i-1} \xrightarrow{t_{i-1}} M_{i-1}/M_{i-2}$$

sont des isomorphismes pour $i=2, \dots, n$.

Démonstration : pour $n=1$, la condition n'est autre que la condition (iii) de Exp VI 1.1. Supposons $n \geq 2$ et que les flèches de transition soient des isomorphismes ; montrons que M_n est un BT_n . La multiplication par p^{n-1} dans M_n se factorise en $u : M_n \longrightarrow M_1$ et u est la composée de la projection $M_n \longrightarrow M_n/M_{n-1}$ et des flèches de transition $t_{n-1}, \dots, t_1$ donc est plate. Il en résulte que $M(n-1) = \text{ker } p : M_n \longrightarrow M_n$ est plat, et donc égal à M_{n-1} . De proche en proche on montre que $M_i = \text{Ker } p^i : M_n \longrightarrow M_n$ et que les suites

$$M_n \xrightarrow{p^{n-i}} M_n \xrightarrow{p^i} M_n$$

sont exactes. On conclut que M_n est un BT_n à l'aide de Exp. VI, 1.1 et 1.3 a). La réciproque est immédiate.

3.2.- Propriétés de rigidité des BT_n dans le cas peu ramifié

PROPOSITION 3.2.1.- Soit M_n comme dans 3.1 .

- 1) si $e=1$ et si $n=1$, M_1 est un BT_1 .
- 2) si $e < p-1$ et $n \geq 2$, M_n est un BT_n
- 3) si $e=p-1$ et $n \geq 2$ et si $M_n \otimes_{\mathcal{O}} k$ est soit connexe, soit ne contient pas de sous-groupe de type multiplicatif non nul, alors M_n est un BT_n .

COROLLAIRE 3.2.2.- Si $e=1$ et si $p \neq 2$, M_n est un BT_n .

Démonstration de la proposition.

- 1) Supposons $e=1$, $n=1$. On doit montrer que la suite :

$$\bar{M}_1 \xrightarrow{F} \bar{M}_1^{(p)} \xrightarrow{V} \bar{M}_1$$

est exacte (3.1).

1ère méthode : Par passage à la complétion de l'extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}$, on se ramène au cas où k est algébriquement clos.

Puis, par dévissage (Exp. VI 1.3 f)), au cas où $M_1(\bar{K})$ correspond à une représentation irréductible de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. Il résulte alors de [8] 3.3.7, que M_1 est un schéma en $\mathbb{F}_q$ -vectoriels, pour une certaine puissance q de p . Le fait que $\ker(V) = \text{Im}(F)$ résulte alors de la remarque 1.5.4 de loc. cit. (en fait la propriété est énoncée mais non démontrée).

2ème méthode : On utilise la classification des schémas en groupes commutatifs, finis et plats, sur $\mathcal{O}$ non ramifié, due à Fontaine et Laffaille ([3] 9).

Soit $\bar{M}$ un k -schéma en groupes fini, commutatif, annulé par p et soit $\mathcal{M}$ son module de Dieudonné. Alors, la donnée d'un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes commutatif, fini et plat M qui relève $\bar{M}$ équivaut à la donnée d'un sous- k -vectoriel $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$ tel que :

- (i) $\mathcal{L}$ est un supplémentaire de $F(\mathcal{M})$,
- (ii) La restriction de V à $\mathcal{L}$ est injective.

Alors, comme $\text{Ker}(V)$ contient de toute façon $F(\mathcal{M})$, puisque $VF=0$, les conditions (i) et (ii) entraînent que $\text{Ker}(V) = F(\mathcal{M})$, d'où la proposition dans ce cas.

Passons à la démonstration de 2) et 3). On doit vérifier que, sous les condi-

tions énoncées, les morphismes de transition t_i sont des isomorphismes (3.1.1), mais cela résulte de [9] 3.3.3 et 3.3.5.

3.3.- Un résultat de Fontaine

Soit G un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes commutatif, fini et plat. Notons Ω_G le $\mathcal{O}$ -module (de torsion) des formes différentielles de degré 1 sur G , invariantes par translation.

Notons $\bar{\mathcal{O}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}$ dans $\bar{K}$ et $\Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$ le $\bar{\mathcal{O}}$ -module de torsion des formes différentielles de $\bar{\mathcal{O}}$ relativement à $\mathcal{O}$.

Soit $u \in G(\bar{\mathcal{O}})$ un point de G à valeurs dans $\bar{\mathcal{O}}$. Il lui correspond donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\bar{\mathcal{O}}) & \xrightarrow{u} & G \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec}(\mathcal{O}) & \end{array}$$

d'où une application naturelle :

$$\Omega_G \otimes_{\mathbb{Z}} G(\bar{\mathcal{O}}) \longrightarrow \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}}$$

$$\omega \otimes u \longmapsto u^*(\omega) .$$

Cette application peut s'interpréter aussi comme une application $\bar{\mathcal{O}}$ -linéaire, fonctorielle en G :

$$\bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} G(\bar{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\varphi_G} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega_G, \Omega_{\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}})$$

$$a \otimes u \longmapsto (\omega \longmapsto a u^*(\omega)) .$$

Soit w la valuation de $\bar{\mathcal{O}}$ telle que $w(p) = 1$. L'anneau $\mathcal{O}$ est fini sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k et on note $\mathcal{I}_{\mathcal{O}/W(k)}$ l'idéal de $\mathcal{O}$ différent de la $W(k)$ -algèbre $\mathcal{O}$. Soit α un élément de $\bar{\mathcal{O}}$ tel que

$$w(\alpha) = 1/p-1 + w(\mathcal{I}_{\mathcal{O}/W(k)}) = 1/p-1 + v(\mathcal{I}_{\mathcal{O}/W(k)})/e .$$

On pose $\delta_{\mathcal{O}} =$ partie entière de $w(\alpha)$.

Dans [2] §4, Fontaine introduit une "presque" décomposition de Hodge-Tate pour un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes commutatif G , fini et plat. Il montre en particulier que l'application φ_G définie ci-dessus a un conoyau annulé par α ([2] §4, th.3, cor.).

COROLLAIRE 3.3.1. - Soit $t: G_m \longrightarrow H_m$ un morphisme de BT_m sur 0 qui est un isomorphisme sur la fibre générique et qui n'est pas un isomorphisme. Alors on a $m \leq \delta_0$.

Démonstration : Soit d_G (resp. d_H) la dimension de l'algèbre de Lie de $G \otimes k$ (resp. $H \otimes k$). Alors le 0 -module des différentielles invariantes sur G_m (resp. H_m) est $(0/p^m)^{d_G}$ (resp. $(0/p^m)^{d_H}$) (Exp. VI cor. 4.9) et la différentielle $\mathcal{N}_{G_m}$ est (p^{md_G}) , (resp. (p^{md_H})).

Par hypothèse $t: G_m \longrightarrow H_m$ n'est pas un isomorphisme, donc H_m est strictement plus ramifié sur 0 que G_m , donc $d_G < d_H$. Il résulte alors de la structure des 0 -modules de longueur finie, que l'application sur les différentielles invariantes déduite de t :

$$\Omega_{H_m} \xrightarrow{dt} \Omega_{G_m}$$

contient dans son noyau un facteur direct de Ω_{H_m} isomorphe à $0/p^m 0$.

Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_m(\bar{0}) & \xrightarrow{t(\bar{0})} & H_m(\bar{0}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bar{0} \\ \varphi_{G_m} \downarrow & & \downarrow \varphi_{H_m} \\ \text{Hom}(\Omega_{G_m}, \Omega_{\bar{0}/0}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\Omega_{H_m}, \Omega_{\bar{0}/0}) \end{array}$$

D'après ([2], §1, Th.1), $\Omega_{\bar{0}/0}$ est isomorphe à $\bar{K}/\bar{0}$, donc le calcul ci-dessus entraîne que le conoyau de la flèche inférieure contient un facteur isomorphe à $\bar{0}/p^m \bar{0}$. Par ailleurs, comme t_K est un isomorphisme, il en est de même de $t(\bar{0})$ et d'après le résultat de Fontaine coker φ_{H_m} est annulé par α donc $w(\alpha) \geq w(p^m) = m$. Par définition de δ_0 on a donc $m \leq \delta_0$.

3.4.- Contrôle de l'affaïssement

Revenons à la situation considérée dans 3.1, où l'on se donne un 0 -schéma en groupes M_n fini et plat dont la fibre générique est un BT_n de rang h . Pour $0 \leq i \leq n$, on dispose des sous-schémas en groupes M_i de M_n . Pour a et b entiers vérifiant $0 \leq a \leq b \leq n$, on pose :

$$M_{[a,b]} = M_b/M_a$$

qui est un 0 -schéma en groupes fini et plat, dont la fibre générique est un BT_{b-a} de rang h . Avec ces notations, on a $M_i = M_{[0,i]}$ et on dispose des

des morphismes de transition :

$$M_{[n-1,n]} \xrightarrow{t_{n-1}} M_{[n-2,n-1]} \xrightarrow{t_{n-2}} \dots \xrightarrow{t_1} M_{[0,1]} .$$

qui sont des isomorphismes sur la fibre générique.

Nous dirons qu'il y a un saut en i si

$$M_{[i,i+1]} \xrightarrow{t_i} M_{[i-1,i]}$$

n'est pas un isomorphisme, c'est-à-dire si la différentielle $\mathcal{N}_{M_{[i-1,i]}}$ du schéma en groupes $M_{[i-1,i]}$ est strictement contenue dans la différentielle de $M_{[i,i+1]}$.

LEMME 3.4.1.- Il y a au plus eh sauts.

En effet, rappelons que si H est un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes commutatif, fini et plat, tel que la $\mathcal{O}$ -algèbre $\mathcal{O}_H$ soit de rang d , et si H' est le dual de Cartier de H , on a, entre les différentielles, la relation

$$\mathcal{N}_H \mathcal{N}_{H'} = (d) .$$

([9] appendice prop. 9).

En particulier on a $v(\mathcal{N}_H) \leq v(d)$.

Appliquons ce résultat à $M_1 = M_{[0,1]}$, on trouve

$$v(\mathcal{N}_{M_{[0,1]}}) \leq v(p^h) = eh ,$$

d'où le lemme.

LEMME 3.4.2.- Soient $0 \leq a < b \leq n$, avec a et b entiers et $b-a \geq 2$. Alors $M_{[a,b]}$ est un BT_{b-a} si et seulement si, l'intervalle $]a,b[$ ne contient pas de sauts.

Démonstration : on applique 3.1.1.

LEMME 3.4.3.- Soient des entiers a,b,c,d vérifiant

$$0 \leq a < b \leq c < d \leq n$$

et tels que

- 1) $b-a = d-c = \ell \geq 2$
- 2) il n'y a pas de sauts dans $]a,b[$ et dans $]c,d[$
- 3) il existe un saut dans $[b,c]$

Alors on a $\ell \leq \delta_0$ (3.3).

Démonstration : Les conditions 1) et 2) et le lemme 3.4.2 entraînent que $M_{[a,b]}$ et $M_{[c,d]}$ sont des BT_ℓ . Notons d_1 la dimension de $M_{[a,b]}$ et d_2 celle de $M_{[c,d]}$.

La multiplication par p^{d-b} dans M_d se factorise à travers M_b et induit, par passage au quotient un morphisme $t: M_{[c,d]} \longrightarrow M_{[a,b]}$, qui est un isomorphisme sur la fibre générique. La différentielle de $M_{[c,c+1]}$ est engendrée par p^{hd_2} , celle de $M_{[b-1,b]}$ par p^{hd_1} . Comme il y a un saut dans $[b, c]$, on a $d_1 > d_2$. Par suite t n'est pas un isomorphisme, et donc (3.3.1), $\ell \leq \delta_0$.

THÉORÈME 3.4.4.- Soit M_n un $\mathcal{O}$ -schéma en groupes commutatif, fini et plat, tel que $M_n(K) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$ et soit δ_0 l'entier défini dans 3.3.

Alors, si $n > (he+1) \max(1, \delta_0)$, il existe un unique plus grand intervalle $[r, n-s] \subset [0, n]$ tel que $r+s \leq he \max(1, \delta_0)$ et tel que $M_{[r, n-s]}$ soit un $BT_{n-(r+s)}$.

COROLLAIRE 3.4.5.- Posons $\delta = \delta_{0,h} = he \max(1, \delta_0)$. Alors, si $n > 2\delta$, $M_{\delta, n-\delta}$ est un $BT_{n-2\delta}$.

Démonstration du théorème : d'après 3.4.1, il y a au plus he sauts et ceux-ci découpent $[0, n]$ en au plus $he+1$ intervalles. Vu l'hypothèse faite sur n , l'un au moins de ces intervalles a une longueur $\ell > \max(1, \delta_0)$. D'après 3.4.3, un tel intervalle est unique ; notons le $[r, n-s]$ avec $r < n-s$. Alors $r+s$ est la somme des longueurs de au plus he intervalles, de longueur au plus $\max(1, \delta_0)$, donc $r+s \leq he \max(1, \delta_0)$.

Démonstration du corollaire : on peut supposer $h > 0$. On a alors :

$$n > 2\delta = 2he \max(1, \delta_0) \geq (he+1) \max(1, \delta_0)$$

donc on peut appliquer le théorème 3.4.4. D'où un intervalle $[r, n-s]$ tel que $r+s \leq he \max(1, \delta_0) = \delta$. Par suite $[\delta, n-\delta] \subset [r, n-s]$ et comme $M_{[r, n-s]}$ est un $BT_{n-(r+s)}$, $M_{[\delta, n-\delta]}$ est un $BT_{n-2\delta}$.

Commentaires 3.4.6.- La valeur de δ donnée dans 3.4.5 n'est pas du tout satisfaisante. Cela est dû à notre majoration du nombre des sauts, qui est très grossière, et sans doute aussi au fait que nous n'avons pas tiré le meilleur parti possible des résultats de Fontaine.

4.- HAUTEURS ET ISOGÉNIES : THÉORÈMES DE FINITUDE

Dans ce paragraphe, on établit le théorème de finitude énoncé dans l'introduction avec des bornes effectives, précisées dans 4.4.8.

4.1.- "Belles p-isogénies"

Définition 4.1.1 : Soient K un corps local ou global (1.0), A_K une K -variété abélienne, dont le modèle de Néron A sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$ est *semi-stable*.

Soient p un nombre premier, n et h des entiers ≥ 0 . On dit qu'une K -isogénie $u_K : A_K \rightarrow B_K$ est une belle p -isogénie, de niveau n de p -rang h , si son extension $u^{\mathcal{O}} : A^{\mathcal{O}} \rightarrow B^{\mathcal{O}}$, aux modèles de Néron connexes, a un noyau M qui vérifie les conditions suivantes :

$$1) M(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h,$$

2) Pour toute place v de $\mathcal{O}$, la partie finie (1.2) $\hat{M}_v$ de M en v est un BT_n sur $\mathcal{O}_v$.

Notons que la condition 2) équivaut à la conjonction des 2 propriétés suivantes :

2 i) Pour toute place v de $\mathcal{O}$, où A_K n'a pas bonne réduction, $\hat{M}_v(K_v)$ est un facteur direct de $M(\bar{K}_v)$ (donc est de la forme $(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{h_v}$),

2 ii) Pour toute place v de $\mathcal{O}$ au-dessus de p , $\hat{M}_v$ est un BT_n sur $\mathcal{O}_v$. On note d_v la dimension de $\hat{M}_v$ (Exp. VI 2.2.2). (Bien sûr, 2 i) pour $v|p$ est conséquence de 2 ii)).

Exemples 4.1.2.- a) (niveau 1). Si aucune place $v|p$ n'est ramifiée, toute isogénie de noyau annulée par p est belle de niveau 1. En effet, la condition 2 i) est automatique et la condition 2 ii) est réalisée d'après 3.2.1. 1).

b) cas peu ramifié). Si toute place $v|p$ a un indice de ramification $< p-1$, (donc $p \neq 2$), la condition 2 ii) découle des autres dès que $n \geq 2$ d'après 3.2.1.

Pour une belle isogénie, la différentielle $\mathcal{V}_M^{\mathcal{O}}$ de M (1.3) en une place $v|p$ se calcule au moyen de la dimension locale d_v de $\hat{M}_v$. En effet (Exp. VI 4.9 ii))

$$\mathcal{V}_M^{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v = p^{nd_v}.$$

Dans le cas d'un corps K global, on a donc :

$$\text{Norme}_{\mathcal{O}/\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_M^{\mathcal{O}}) = p^{n(\sum_{v|p} [K_v:\mathbb{Q}_p] d_v)}.$$

On déduit alors de 1.4.2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.1.3.- Dans le cas d'un corps global K , pour qu'une belle p -isogénie, de p -rang h , conserve le degré d'Arakelov, il faut et il suffit, que les dimensions locales d_v du noyau M vérifient :

$$[K:\mathbb{Q}]h/2 = \sum_{v|p} [K_v:\mathbb{Q}_p]d_v.$$

4.2.- Déterminant du noyau d'une belle isogénie

4.2.1.- Pour p premier et n entier, on note

$$\chi_{n,p} : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$$

le caractère qui décrit l'action de Galois sur les racines p^n -èmes de l'unité $\mu_{p^n}(K) \subset \bar{K}$.

De même $\chi_{\infty,p} : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère qui décrit l'action de Galois sur les racines de l'unité, d'ordre une puissance de p : $\mu_{\infty,p}(\bar{K}) = \bigcup_n \mu_{p^n}(\bar{K})$.

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur le nombre premier p , on écrit simplement χ_n et χ_{∞} au lieu de $\chi_{n,p}$ et $\chi_{\infty,p}$.

4.2.2.- Si M_K est un K -schéma en groupes tel que $M_K(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, donc décrit par une représentation $\rho : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \text{GL}_h(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, on note $\det(M_K)$ le K -schéma en groupes $\Lambda^h(M_K)$, décrit par le caractère :

$$\Psi[M_K] = \Lambda^h \rho : \text{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*.$$

Nous allons étudier $\Psi[M_K]$ dans le cas où M_K est la fibre générique du noyau M d'une belle p -isogénie. Commençons par traiter le cas d'un corps local. Le lemme 4.2.4 contient l'information clé tirée de l'étude de la monodromie en une place de mauvaise réduction semi-stable ; le lemme 4.2.5 est en quelque sorte la justification, dans cet exposé, de la considération des BT_n .

4.2.3.- Etude locale

LEMME 4.2.4.- Soient K un corps local, A_K une K -variété abélienne, A^0 son modèle de Néron connexe sur $\mathcal{O}$, supposé semi-stable, M_K un K -sous-schéma en groupes fini de A_K , M l'adhérence schématique de M_K dans A^0 , $\hat{M}$ la partie finie de M . Alors le quotient $M_K/\hat{M}_K$ est non ramifié sur $\mathcal{O}$.

Démonstration : supposons d'abord qu'il existe un entier m tel que M_K soit le noyau ${}_m A_K$ de la multiplication par m dans A_K . Comme A^0 est semi-stable, le noyau ${}_m A^0$ de la multiplication par m dans A^0 est plat sur $\mathcal{O}$, donc est égal à l'adhérence schématique de ${}_m A_K$ dans A^0 . L'assertion résulte alors de [5] exposé IX, et plus précisément de la proposition 3.5 lorsque m est inversible dans $\mathcal{O}$ et du théorème 5.2 (5.2.2), pour m quelconque.

Dans le cas général, soit m un entier qui annule M_K . On a $M_K \subset {}_m A_K$, donc $M \subset {}_m A^0$ et par suite $\hat{M} \subset {}_m \hat{A}^0$. Finalement $\hat{M} \subset M \cap {}_m \hat{A}^0$ et comme ce dernier est fini sur 0 , $\hat{M} = M \cap {}_m \hat{A}^0$. En particulier, sur la fibre générique, on a $\hat{M}_K = M_K \cap ({}_m \hat{A}^0)_K$ et donc $M_K / \hat{M}_K$ est contenu dans ${}_m A_K / ({}_m \hat{A}^0)_K$.

On vient de rappeler que ce dernier est non ramifié sur 0 ; il en est donc de même de $M_K / \hat{M}_K$.

LEMME 4.2.5.- Soient K un corps local et M un BT_n (resp. BT) sur l'anneau 0 des entiers de K , annulé par une puissance de la caractéristique résiduelle p de 0 . On suppose que M est de p -rang h (4.1.1) (resp. de hauteur h) et soit d sa dimension (Exp. VI 2.2.2.b)). Soit $\psi[M_K]$ le caractère de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ qui décrit la puissance extérieure h -ème de M_K . Alors on a :

$$\psi[M_K] | \text{Inertie} = \chi_n^d | \text{Inertie} \quad (\text{resp. } \chi_\infty^d | \text{Inertie}) .$$

Démonstration : quitte à remplacer 0 par la complétion de l'extension maximale non ramifiée de 0 , on peut supposer k algébriquement clos. Le lemme n'est autre alors que le cor. 4.10 de Exp. VI.

Remarques 4.2.6.- i) Historiquement, le premier résultat dans la direction de 4.2.5 a été obtenu par Tate (cf [16] §4 Th.3), dans le cas d'un BT . En utilisant les décompositions de Hodge-Tate, il montrait que $\psi[M]$ coïncidait avec χ_∞^d sur un sous-groupe ouvert du groupe d'Inertie.

ii) On doit également pouvoir établir 4.2.5 en mettant bout à bout quelques-uns des articles de Fontaine reliant les représentations de Galois d'un corps local à des structures de Dieudonné convenablement filtrées.

C'est sans doute la méthode promise au plus bel avenir.

COROLLAIRE 4.2.7.- Soient ℓ un nombre premier et M le noyau d'une belle ℓ -isogénie, de niveau n , de rang h , définie sur l'anneau d'entiers 0 d'un corps local K et soit $\psi[M_K]$ le caractère de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ associé à $\wedge^h M_K$. Alors :

1) Si $\ell \neq p$, caractéristique résiduelle de 0 , $\psi[M_K]$ est non ramifié sur 0 .

2) Si $\ell = p$, $\psi[M_K] | \text{Inertie} = \chi_{n,p}^d | \text{Inertie}$, où d est la dimension de $\hat{M}$.

Démonstration : On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{M}_K \longrightarrow M_K \longrightarrow M_K / \hat{M}_K \longrightarrow 0$$

de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -modules, libres sur $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ d'après 4.1.1. Donc

$$\Psi[M_K] = \Psi[\hat{M}_K] \Psi[M_K/\hat{M}_K] .$$

Le caractère $\Psi[M_K/\hat{M}_K]$ est non ramifié d'après 4.2.3. Pour $\ell \neq p$, $\Psi[\hat{M}_K]$ est évidemment non ramifié, et pour $\ell = p$, sa restriction au groupe d'inertie est $\chi_{n,p}^d$, d'après 4.2.5, d'où le corollaire.

4.2.8.- Etude globale

Posons $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $H = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ qui devient un sous-groupe de G , une fois choisie un isomorphisme $\bar{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \bar{K}$.

Sur les plus grands quotients abéliens, on dispose de l'homomorphisme de transfert ([12] VII §8) :

$$(1) \quad \text{Ver} : G_{ab} \longrightarrow H_{ab} .$$

Rappelons quelques-unes de ses propriétés :

a) Localisation. Soit ℓ un nombre premier et $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Pour toute place v de K divisant ℓ , choisissons une place $\bar{v}$ de $\bar{\mathbb{Q}}$ au-dessus de v . Le choix de $\bar{v}$ permet de définir un plongement $\tau_{\bar{v}}$ de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et un diagramme commutatif entre groupes de Galois :

$$\begin{array}{ccccc} H_v & \longrightarrow & j_{\bar{v}} & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ G_\ell & \longrightarrow & i_{\bar{v}} & \longrightarrow & G \end{array}$$

où $G_\ell = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$, $K_v = \tau_{\bar{v}}(K)$, $\mathbb{Q}_\ell \subset \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et $H_v = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell/K_v)$.

De plus, les applications $i_{\bar{v}}$ (resp. $j_{\bar{v}}$) sont définies à conjugaison près par un élément de G (resp. H). On en déduit pour tout v un diagramme commutatif indépendant du choix des relèvements $\bar{v}$:

$$\begin{array}{ccc} (H_v)_{ab} & \xrightarrow{j_v} & H_{ab} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G_\ell)_{ab} & \xrightarrow{i} & G_{ab} . \end{array}$$

Par ailleurs, on dispose des transferts locaux $(\text{Ver})_v : (G_\ell)_{ab} \longrightarrow (H_v)_{ab}$ et on a

$$(2) \quad \text{Ver} \circ i = \sum_{v|\ell} j_v \circ (\text{Ver})_v .$$

b) Norme. L'application composée :

$$(G_\ell)_{ab} \xrightarrow{(\text{Ver})_v} (H_v)_{ab} \xrightarrow{\text{can}} (G_\ell)_{ab}$$

(3) est la multiplication par le degré local $[K_V:\mathbb{Q}_\ell]$.

c) Passage au corps résiduel. Notons I_ℓ (resp. I_V) le sous-groupe d'inertie de G_ℓ (resp. de H_V). On a des suites exactes :

$$1 \longrightarrow I_\ell \longrightarrow G_\ell \longrightarrow \text{Gal}(\bar{F}_\ell/F_\ell) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow I_V \longrightarrow H_V \longrightarrow \text{Gal}(\bar{F}_\ell/k_V) \longrightarrow 1$$

et une application de transfert

$$\overline{\text{Ver}} : \text{Gal}(\bar{F}_\ell/F_\ell) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{F}_\ell/k_V)$$

qui envoie le Frobenius φ_ℓ en ℓ sur le Frobenius φ_V en v .

Si e_V est l'indice de Ramification de K_V sur $\mathbb{Q}_\ell$, on a alors le diagramme commutatif :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} (G_\ell)_{\text{ab}} & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Gal}(\bar{F}_\ell/F_\ell) \\ (\text{Ver})_V \downarrow & & \downarrow e_V \overline{\text{Ver}} \\ (H_V)_{\text{ab}} & \longrightarrow & \text{Gal}(\bar{F}_\ell/k_V) \end{array}$$

THÉORÈME 4.2.9.— Soient p un nombre premier et $u^0 : A^0 \longrightarrow B^0$ une belle p -isogénie, de noyau M , de niveau n , de rang h (4.1.1).

Posons $\Psi_O[M_K] = \Psi[M_K] \circ \text{Ver} : G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})_{\text{ab}} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$. Alors :

$$\Psi_O[M_K] = \chi_{n,p}^d, \quad \text{où } d = \sum_{v|p} d_v [K_V:\mathbb{Q}_p].$$

Démonstration : d'après 4.2.7, si ℓ est un nombre premier $\neq p$, $\Psi[M_K]$ est non ramifié en toute place v de K divisant ℓ . Il résulte alors de (2) et (4) que $\Psi_O[M_K]$ est non ramifié en ℓ .

Toujours d'après 4.2.7, si $v|p$, $\Psi[M_K]|_{I_V} = \chi_{n,p}^{d_v}|_{I_V}$. Il résulte alors de (2) et (3) que $\Psi_O[M_K]|_{I_p} = \chi_{n,p}^d|_{I_p}$.

Alors $\Psi_O[M_K]\chi_{n,p}^{-d}$ est un caractère de G partout non ramifié, donc trivial puisque $\mathbb{Z}$ est simplement connexe, d'où le théorème.

Remarque 4.2.10.— Partant de M_K , c'est-à-dire d'une représentation ρ de H dans $V = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^h$, une autre façon naturelle de lui associer un caractère de G , consiste à induire ρ de H à G , puis à prendre le déterminant. Le caractère ainsi obtenu est lié au transfert par la formule :

$$\det(\text{Ind}_H^G(\rho)) = \epsilon^h(\det(\rho) \circ \text{Ver}),$$

où $\epsilon(g)$, pour $g \in G$, est la signature de la permutation définie par g

opérant par translation sur G/H (cf. [11] p.130, exer.). Ce caractère ϵ^h peut introduire des ramifications parasites en les nombres premiers ℓ ramifiés dans $\mathcal{O}$, contrairement au transfert.

4.3.- Degré d'Arakelov d'une variété abélienne et belles isogénies

4.3.1.- Dans la suite on considère un corps global K (1.1) et une K -variété abélienne A_K ayant réduction semi-stable A sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$. Soit B_K une variété abélienne isogène à A_K et B son modèle de Néron. On va comparer le degré d'Arakelov de ω_B à celui de ω_A .

4.3.2.- Commençons par rappeler l'argument galoisien, dû à Faltings, montrant que certaines isogénies, "extraites" d'un sous-groupe p -divisible de A , conservent le degré d'Arakelov.

Soit donc p un nombre premier et soit $M_K = \bigcup_n (M_n)_K$ un sous-groupe p -divisible, de A_K , de p -torsion, où $(M_n)_K$ désigne le noyau de la multiplication par p^n dans M_K . Supposons que pour tout entier $n \geq 0$, l'adhérence schématique M_n de $(M_n)_K$ dans la composante connexe $A^{\mathcal{O}}$ de A , soit le noyau d'une belle p -isogénie (4.1.1) :

$$u_n^{\mathcal{O}} : A^{\mathcal{O}} \longrightarrow B_{(n)}^{\mathcal{O}}.$$

Alors la condition 2 i) de 4.1.1 entraîne que pour toute place v , de mauvaise réduction, $\bigcup_n (\widehat{M}_{n,v})(\overline{K}_v)$ est p -divisible, où $\widehat{M}_{n,v}$ désigne la partie finie de M_n sur $\mathcal{O}_v$. La condition 2 ii) signifie que $\widehat{M}_v = \bigcup_n \widehat{M}_{n,v}$ est un BT sur $\mathcal{O}_v$ pour toute place $v|p$. Soit d_v la dimension de $\widehat{M}_v$ et h la hauteur du groupe p -divisible M_K , donc aussi le p -rang des groupes M_n .

Notons $\Psi[M_K]$ le caractère de $H = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ associé à $\Lambda^h M_K$ et soit $\Psi_{\mathcal{O}}[M_K] = \Psi[M_K] \circ \text{Ver}$. Il résulte de 4.2.9 que $\Psi_{\mathcal{O}}[M_K] = \chi_{\infty,p}^d$ avec

$$d = \sum_{v|p} d_v [K_v : \mathbb{Q}_p].$$

Soit ℓ un nombre premier distinct de p , non ramifié dans $\mathcal{O}$, tel que A_K ait bonne réduction en toute place de $\mathcal{O}$ divisant ℓ . Alors $\Psi_{\mathcal{O}}[M_K]$ est non ramifié en ℓ ; soit λ sa valeur sur le Frobenius φ_{ℓ} en ℓ . D'après le calcul précédent, $\lambda = \ell^d$. Mais d'autre part, les résultats de Weil appliqués aux réductions de A sur les corps finis au-dessus de F_{ℓ} entraînent que λ est un entier algébrique qui dans tout plongement complexe a pour valeur absolue $\ell^{h[K:\mathbb{Q}]/2}$. Donc $d = h[K:\mathbb{Q}]/2$ et d'après (4.1.3), chacune des isogénies $u_n^{\mathcal{O}}$ conserve le degré d'Arakelov.

Dans ce qui suit, nous allons adapter cet argument à de belles p -isogénies,

non nécessairement extraites d'un sous-groupe p -divisible M_K de A_K .

4.3.3.- On choisit un nombre premier ℓ tel que A_K ait bonne réduction en toute place v de $\mathcal{O}$ divisant ℓ (mais ℓ peut être ramifié dans $\mathcal{O}$). À partir de ℓ , on va pouvoir contrôler l'effet, sur le degré d'Arakelov, des isogénies de degré premier à ℓ . Pour traiter les ℓ -isogénies, il faudra utiliser un autre nombre premier ℓ' , à la place de ℓ .

Pour toute place w de $\mathcal{O}$ divisant ℓ , on note e_w l'indice de ramification de $\mathcal{O}_w$ sur $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ et r_w le degré résiduel $[k_w:F_\ell]$. Soit $A_{k_w} = A \otimes_{\mathcal{O}} k_w$ qui est une variété abélienne sur le corps fini k_w .

Pour tout nombre premier $p \neq \ell$, soit $T_p(A_{k_w})$ le module de Tate de A_{k_w} relatif à p ; c'est un $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang $2 \dim A_K = 2g$ muni d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}_w/k_w)$. D'après les résultats de Weil, le polynôme caractéristique de Frobenius φ_w en w est un polynôme à coefficients entiers, indépendant du nombre premier $p \neq \ell$, ne dépendant que de la classe d'isogénie de A_{k_w} , donc de la classe d'isogénie de A_K . De plus, pour tout plongement $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, les racines de ce polynôme caractéristique ont pour valeur absolue $\ell^{r_w/2}$.

Pour p premier $\neq \ell$, soit $u^0: A^0 \rightarrow B^0$ une belle p -isogénie, de niveau n , de rang h (4.1.1) et soit M son noyau. On associe à M le caractère $\Psi[M]: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et son composé avec le transfert

$$\Psi_O[M]: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*.$$

Alors $\Psi_O[M]$ est non ramifié en ℓ ; soit τ_ℓ sa valeur sur le Frobenius φ_ℓ en ℓ .

Les informations locales en p , fournissent un premier calcul de τ_ℓ . En effet, d'après 4.2.9, on a $\Psi_O[M] = \chi_{n,p}^d$, où $d = \sum_{v|p} d_v [K_v:\mathbb{Q}_p]$, d_v étant la dimension du $\widehat{BT}_n \hat{M}_V$, donc :

$$(1) \quad \tau_\ell = \ell^d \bmod p^n.$$

Utilisons maintenant les résultats de Weil. Pour $w|\ell$, la fibre $M \otimes_{\mathcal{O}} k_w$ de M au-dessus de k_w correspond à un facteur direct de rang h du $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module $T_p(A_{k_w})/p^n T_p(A_{k_w})$, stable par l'action de $\text{Gal}(\bar{k}_w/k_w)$. Prenant les puissances extérieures h -èmes, on trouve un facteur direct de rang 1 du $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module $\wedge^h T_p(A_{k_w})/p^n \wedge^h T_p(A_{k_w})$, sur lequel φ_w opère par multiplication par $\tau_w \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ et l'on a $\tau_w = \Psi[M](\varphi_w)$.

Si $P_{h,w}$ désigne le polynôme caractéristique de φ_w opérant sur $\wedge^h T_p(A_{k_w})$ on a donc :

$$(2) \quad P_{h,w}(\tau_w) = 0 \bmod p^n.$$

D'après 4.2.8, formules (2) et (4), on a :

$$(3) \quad \tau_\ell = \prod_{w|\ell} \tau_w^{e_w}.$$

Notons alors $E_{p,h,w}$ le $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\bar{F}_\ell/F_\ell)]$ -module qui a même espace sous-jacent que ${}^h T_p(A_K)$, mais sur lequel φ_ℓ opère comme opérerait $\varphi_w^{e_w}$. Finalement, considérons le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}_p$ des représentations $E_{p,h,w}$ de $\text{Gal}(F_\ell/F_\ell)$:

$$(3) \quad E_{p,h} = \bigotimes_{w|\ell} E_{p,h,w}.$$

Dans le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -module $E_{p,h}/p^n E_{p,h}$, on dispose donc d'un facteur direct de rang 1, stable par Galois, canoniquement associé à M , sur lequel φ_ℓ opère par multiplication par τ_ℓ .

Soit alors P_h le polynôme caractéristique de φ_ℓ opérant sur $E_{p,h}$. C'est un polynôme à coefficients entiers, indépendant de $p \neq \ell$, ne dépendant que de la classe d'isogénie de A_K et dont les racines, dans tout plongement complexe, ont pour valeur absolue $\ell^{(\sum_{w|\ell} e_w)h/2} = \ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2}$ et l'on a

$$(4) \quad P_h(\tau_\ell) = 0 \pmod{p^n}.$$

Les formules (1) et (4) résument les informations sur τ_ℓ que nous allons utiliser.

Considérons alors l'ensemble fini de puissances de ℓ de la forme

$$(5) \quad \mu = \ell^{\sum_{\alpha} d_{\alpha} n_{\alpha}}, \quad \mu \in I_h$$

tel que :

a) d_{α} entier ≥ 0 , $d_{\alpha} \leq \text{Minimum}(\dim A_K, h) = \text{Minimum}(g, h)$

b) n_{α} entier ≥ 1 , $\sum_{\alpha} n_{\alpha} = [K:\mathbb{Q}]$

c) $\sum_{\alpha} d_{\alpha} n_{\alpha} \neq [K:\mathbb{Q}] h/2$.

Alors aucun des μ n'est racine de P_h puisque celles-ci, ont pour valeurs absolues complexes $\ell^{[K:\mathbb{Q}]h/2}$. Donc

$$(6) \quad a_{\mu} = P_h(\mu), \quad \mu \in I_h$$

est un entier non nul.

THÉORÈME 4.3.4.— Pour p premier, $p \neq \ell$, et pour h entier, $1 \leq h \leq 2\dim A_K - 1$, notons $n_{p,h}$ le plus grand exposant m tel que p^m divise l'un des a_{μ} définis par (6), $\mu \in I_h$. Alors, pour toute K -variété abélienne A_K^1 , K -isogène à A_K , toute belle p -isogénie de source A_K^1 , de p -rang h , de niveau $n > n_{p,h}$ conserve le degré d'Arakelov.

Démonstration : Soit M le noyau d'une telle isogénie et pour toute place $v|p$, notons d_v la dimension de M_v . Posons $d = \sum_{v|p} d_v [K_v : \mathbb{Q}_p]$. Il nous faut montrer que $[K:\mathbb{Q}]h/2 = d$ (4.1.3). Or, s'il n'en était pas ainsi, le nombre ℓ^d serait de la forme (5), pour un certain $u \in I_h$. Or d'après (1) et (4), on a :

$$P_h(\ell^d) = 0 \pmod{p^{n\mathbb{Z}}}$$

Comme $n > n_{p,h}$, cette congruence contredit la définition de $n_{p,h}$; donc $d = [K:\mathbb{Q}]h/2$.

Gardons les notations de 4.3.4. Pour p premier, $p \neq \ell$, posons

$$n_p = \max_{1 \leq h \leq 2g-1} n_{p,h}, \text{ où } g = \dim A_K.$$

Soit S l'ensemble fini de nombres premiers p , $p \neq \ell$, tels que $n_p \geq 1$.

Soient N le nombre de places de $\mathcal{O}$ au-dessus de ℓ et $M = \binom{2g}{g}^N$, (où $\binom{n}{m}$ désigne le coefficient du binôme usuel). Le corollaire suivant donne alors une majoration effective des éléments de S et des exposants n_p :

COROLLAIRE 4.3.5. - Pour tout $p \in S$, on a :

$$(7) \quad n_p \leq 2^M \ell [K:\mathbb{Q}] g^M.$$

Démonstration : Reprenons les notations de 4.3.3. Pour tout $w|\ell$, le $\mathbb{Z}_p$ -module $E_{p,h,w}$ est de rang $\binom{2g}{h} \leq \binom{2g}{g}$; donc $E_{p,h}$ est de rang $\binom{2g}{h}^N = M_h \leq M$.

Par ailleurs, d'après (5), pour $\mu \in I_h$, on a :

$$\mu \leq \ell [K:\mathbb{Q}] \min(g, h) \leq \ell [K:\mathbb{Q}] g.$$

Comme les racines du polynôme unitaire P_h sont de valeur absolue complexe $\ell [K:\mathbb{Q}]h/2 \leq \ell [K:\mathbb{Q}] g$, on a :

$$|a_i| = |P_h(\mu)| \leq (\ell [K:\mathbb{Q}] g + \ell [K:\mathbb{Q}] \min(g, h))^M \leq (2\ell g [K:\mathbb{Q}])^M,$$

d'où le corollaire.

COROLLAIRE 4.3.6. - Soit R l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans $\mathcal{O}$ et soit A_K^1 une K -variété abélienne, K -isogène à A_K .

1) Toute K -isogénie $A_K^1 \rightarrow B_K^1$ de degré premier à ℓ URUS conserve le degré d'Arakélov.

2) Toute belle p -isogénie $A_K^1 \rightarrow B_K^1$ de niveau n , avec $p \neq \ell$ et $n > n_p$, conserve le degré d'Arakélov.

Démonstration : L'assertion 2) résulte immédiatement de 4.3.4 et de la définition de n_p (4.3.5). Pour établir l'assertion 1), on se ramène par dévissage au

cas d'une p -isogénie avec p premier, $p \notin \ell \cup R \cup S$, puis au cas où le noyau de l'isogénie est annulé par p . L'isogénie est alors automatiquement une belle p -isogénie de niveau ≤ 1 (4.1.2 a)) et l'assertion résulte encore de 4.3.4 et du fait que $n_p = 0$.

Enfin, notant que la borne obtenue dans 4.3.5 ne dépend que de ℓ et de g on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.3.7.— Soient ℓ un nombre premier, g un entier ≥ 0 , $\overline{S}$ l'ensemble des nombres premiers p , $p \neq \ell$, tels que $p \leq 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g^M}$ (4.3.5).

Soit J_K une K -variété abélienne, de dimension g , ayant réduction semi-stable sur $\mathcal{O}$ et bonne réduction en toute place divisant ℓ .

1) Toute K -isogénie de source J_K , de degré premier à $\overline{S}$, conserve le degré d'Arakélov.

2) Si $p \in \overline{S}$ et si n est un entier tel que $p^n > 2^M \ell^{[K:\mathbb{Q}]g^M}$, toute belle p -isogénie, de niveau n , de source J_K conserve le degré d'Arakélov.

4.4.- Degré d'Arakélov et isogénies, cas général

4.4.1.- Soit M un $\mathbb{Z}$ -module de type fini, annulé par une puissance d'un nombre premier p . Il existe deux suites d'entiers, uniquement déterminées :

$$0 < n_1 < \dots < n_r \text{ et } d_1, \dots, d_r$$

telles que $M \simeq (\mathbb{Z}/p^{n_1})^{d_1} \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}/p^{n_r})^{d_r}$. Nous appellerons les entiers n_i les exposants élémentaires de M .

Notons M_n le noyau de la multiplication par p^n dans M . Alors les quotients M_{n_i}/M_{n_i-1} sont des $\mathbb{Z}/p^{(n_i-n_{i-1})}$ -modules libres, de rang $d_i + \dots + d_r$ (en convenant que $M_0 = 0$). Si de plus un groupe G opère sur M , les sous-groupes M_n sont évidemment stables par G .

4.4.2.- Soit de nouveau K un corps global, A_K une K -variété abélienne de dimension g , ayant réduction semi-stable sur $\mathcal{O}$. Soit T l'ensemble des places de mauvaise réduction et $|T|$ son cardinal. On s'intéresse aux K -variétés abéliennes A_K^1 , K -isogènes à A_K .

LEMME 4.4.3.— Soit p un nombre premier et soit $u_K : A_K^1 \rightarrow B_K^1$ une p -isogénie de noyau M_K . Notons $n_1 < \dots < n_r$ les exposants élémentaires de $M_K(\overline{K})$. Alors on a $r \leq 2g$ et u_K se factorise en r isogénies $(u_i)_K$, telles que $\text{Ker}(u_i)_K(\overline{K})$ soit libre sur $(\mathbb{Z}/p^{n_i-n_{i-1}})$.

C'est clair.

LEMME 4.4.4. - Soit p un nombre premier et $u_K: A_K^1 \rightarrow B_K^1$ une K -isogénie de noyau M_K , avec $M_K(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n)^h$, u^0 son extension aux modèles de Néron connexes, $M = \text{Ker}(u^0)$.

Pour $v \in T$, place de mauvaise réduction, notons $\hat{M}_V$ la partie finie (1.2) de $M_V = M \otimes_0 \mathcal{O}_V$ et soit $m_1 < \dots < m_s$ la réunion des exposants élémentaires des groupes $\hat{M}_V(\bar{K}_V)$, $v \in T$.

Alors on a $s \leq h|T|$ et u_K se factorise en s K -isogénies, dont l'extension aux modèles de Néron connexes, a un noyau M_i , $i = 1, \dots, s$, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) $M_i(\bar{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^{m_i - m_i - 1})^h$,
- 2) Pour tout $v \in T$, $(\hat{M}_i)_V(\bar{K}_V)$ est facteur direct de $M_i(\bar{K}_V)$.

Etablissons d'abord un lemme.

LEMME 4.4.5. - Soient K un corps local (1.0), A_K une K -variété abélienne de réduction semi-stable, $v_K: A_K \rightarrow B_K$ une K -isogénie, $v^0: A^0 \rightarrow B^0$ son extension aux modèles de Néron connexes, $N' = \text{Ker } v^0$.

Soit N_K un sous-schéma en groupes fini de A_K qui contient N'_K , et soit N''_K son image par v_K dans B_K . Notons N (resp. N'') l'adhérence schématique de N_K (resp. N'_K) dans A^0 , (resp. B^0). Alors

(i) le morphisme $N \rightarrow N''$, induit par v^0 est fidèlement plat, de sorte que l'on a une suite exacte (fppf) de $\mathcal{O}$ -schémas en groupes :

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

(ii) La suite, déduite de la précédente, en prenant les parties finies

$$0 \rightarrow \hat{N}' \rightarrow \hat{N} \rightarrow \hat{N}'' \rightarrow 0$$

est aussi exacte.

Démonstration de 4.4.5 : Comme v^0 est plat (1.1), l'image réciproque de N'' par v^0 est plate sur $\mathcal{O}$, et par suite coïncide avec N . Comme v^0 est fidèlement plat, il en est de même de $N \rightarrow N''$ d'où la première assertion. La seconde s'en déduit par complétion le long des fibres fermées.

Remarque 4.4.6 : les assertions i) et ii) du lemme 4.4.5 ne sont plus nécessairement vraies si on travaille avec les modèles de Néron, au lieu des modèles de Néron connexes, car l'isogénie $v: A \rightarrow B$ n'est plus nécessairement fidèlement plate. Le lemme 4.4.5 est d'ailleurs la seule justification, dans cet exposé, de l'utilisation des modèles de Néron connexes.

Démonstration de 4.4.4.- Pour tout $v \in T$, $\widehat{M}_V(\overline{K}_V)$ est un sous-groupe de $M(\overline{K}_V)$, donc au plus h exposants élémentaires, d'où $s \leq h|T|$.

Pour $i = 1, \dots, s$, soit $(A_i)_K$ le quotient de A_K^1 par $(M_{m_i})_K$, et soit

$(u_i)_K : (A_{i-1})_K \longrightarrow (A_i)_K$ l'isogénie naturelle de noyau $(M_{m_i})_K / (M_{m_{i-1}})_K$.

Alors u_K est le composé $(u_s)_K \circ \dots \circ (u_1)_K$. Notons u_i^0 l'extension de $(u_i)_K$ aux modèles de Néron connexes et montrons que u_i^0 vérifient les propriétés 1) et 2) de 4.4.4.

La propriété i) est évidente. Prouvons 2). Le noyau de l'isogénie naturelle $(A^1)^0 \longrightarrow A_i^0$ est $M_{m_i} = \text{Ker } p^{m_i} : M \longrightarrow M$. Le lemme 4.4.5 entraîne que $\text{Ker } u_i^0 = M_{m_i} / M_{m_{i-1}}$.

Soit $v \in T$. Posons pour simplifier $N = M(\overline{K}_V)$, $\widehat{N} = \widehat{M}_V(\overline{K}_V)$. Alors $(\widehat{M}_{m_i})_V(\overline{K}_V) = \widehat{N}_{m_i}$, pour $i = 1, \dots, s$.

D'après le lemme 4.4.5, la partie finie en v de $\text{Ker } u_i^0 = M_{m_i} / M_{m_{i-1}}$, est le quotient des parties finies $(\widehat{M}_{m_i})_V$ et $(\widehat{M}_{m_{i-1}})_V$, donc a pour points dans $\overline{K}_V$, $\widehat{N}_{m_i} / \widehat{N}_{m_{i-1}}$. Vu le choix des m_i , le groupe $\widehat{N}_{m_i} / \widehat{N}_{m_{i-1}}$ est libre sur $\mathbb{Z}/p^{m_i - m_{i-1}}$, donc est facteur direct dans $M_{m_i} / M_{m_{i-1}}$. D'où la propriété 2).

4.4.7.- Pour obtenir de belles p -isogénies, il nous faut maintenant considérer la propriété 2 (ii) de 4.1.1, et donc tenir compte de l'affaîssement des parties finies $\widehat{M}_V$, pour $v|p$.

Pour p premier posons :

$$\Delta_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 2 \text{ et si } p \text{ n'est pas ramifié dans } 0, \\ 2g \sum_{v|p} \text{Maximum}(e_v, e_v \delta_v) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on a posé comme dans 3.4.5 : $\mathcal{V}_{0/\mathbb{Z}} =$ différentielle de 0 sur $\mathbb{Z}$, $\text{val}_v =$ valuation de 0_v qui vaut 1 sur une uniformisante,

$$\delta_v = \text{partie entière de } \frac{1}{p-1} + \text{val}_v(\mathcal{V}_{0/\mathbb{Z}}) / e_v.$$

Soit alors M le noyau d'une p -isogénie $u^0 : A^0 \longrightarrow B^0$ qui vérifie les conditions de 4.4.4 :

1) $M(\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^h$, 2) pour toute place v de mauvaise réduction, $\widehat{M}_V(\overline{K}_V)$ est facteur direct de $M(\overline{K}_V)$.

Pour tout n' , notons $M_{\{n'\}}$ l'adhérence schématique dans M du noyau de la multiplication par $p^{n'}$ dans M_K .

Supposons $n \geq 2\Delta_p$. D'après 4.4.5 (i), l'isogénie u^0 se factorise en trois isogénies, entre modèles de Néron connexes, de noyaux respectifs :

$M_{\{\Delta_p\}}$, $M_{\{n-\Delta_p\}}/M_{\{\Delta_p\}}$, $M/M_{\{n-\Delta_p\}}$. Notons que chacune de ces isogénies vérifie encore l'analogie des conditions 1) et 2) ci-dessus, comme il résulte de 4.4.5 ii). De plus, on déduit de 3.4.5 et 3.2.2 que l'isogénie médiane est une belle p -isogénie, de niveau $n-2\Delta_p$.

Nous résumons les résultats obtenus dans 4.4, par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.4.8.- Soit A_K une K -variété abélienne, de dimension g , ayant réduction semi-stable sur 0 et mauvaise réduction en au plus $|T|$ places. Alors pour tout nombre premier p , toute p -isogénie $u_K: A_K \rightarrow B_K$ se factorise en $4g^2|T|$ belles p -isogénies et $8g^2|T|$ isogénies de degré $\leq p^{\Delta_p} 2g$.

Combinons maintenant 4.4 avec les résultats de 4.3.

THÉOREME 4.4.9.- Soient T un ensemble fini de places de 0 , de cardinal $|T|$ ℓ et ℓ' deux nombres premiers distincts tels qu'aucune place de T ne divise ℓ ou ℓ' . Soit R l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans 0 .

Soit A_K une K -variété abélienne, de dimension g , ayant réduction semi-stable sur 0 et bonne réduction en dehors de T .

Pour tout p premier, on a défini des entiers $\Delta_p \geq 0$ (4.4.7), ne dépendant que de 0 et de g , nuls si $p \notin \{2\} \cup R$.

Pour tout p premier $\neq \ell$, on a défini dans 4.3.5 des entiers $n_p \geq 0$, dépendant de A_K et de ℓ , nuls en dehors d'un ensemble fini S , tels que pour $p \in S$, on a : $p^{n_p} \leq 2^{M_\ell} [K:\mathbb{Q}] g^M$ où N est le nombre de places de K au-dessus de ℓ et $\binom{2g}{g}^N$.

Remplaçons ℓ par ℓ' et prenons $p = \ell$, on obtient un autre entier n_p noté $n_{\ell, \ell'}$, tel que $\ell^{n_{\ell, \ell'}} \leq 2^{M'_{\ell'}} [K:\mathbb{Q}] g^{M'}$, où N' est le nombre de places de ℓ' au-dessus de ℓ' et $M' = \binom{2g}{g}^{N'}$.

Considérons les K -variétés abéliennes B_K , K -isogènes à A_K .

1) L'ensemble des hauteurs des variétés abéliennes B_K est fini, de cardinal majoré par :

$$\left[\prod_{\substack{p \in R \cup S \cup \{2\} \\ p \neq \ell}} ((2\Delta_p + n_p) 8g^3 [K:\mathbb{Q}] |T| + 1) ((2\Delta_\ell + n_{\ell, \ell'}) 8g^3 |T| [K:\mathbb{Q}] + 1) \right].$$

2) On a :

$$|ht(A_K) - ht(B_K)| \leq \left[\left(\sum_{\substack{p \in R \cup S \cup \{2\} \\ p \neq \ell}} (2\Delta_p + n_p) \log(p) \right) + (2\Delta_\ell + n_{\ell, \ell'}) \log(\ell) \right] 2g^3 |T|.$$

Démonstration : Rappelons que si B est le modèle de Néron de B_K sur $\mathcal{O}$, la hauteur de B_K , $ht(B_K)$, est $\deg(\omega_B)/[K:\mathbb{Q}]$.

Pour établir le théorème, on peut, d'après 4.3.6, et quitte à remplacer A_K par une K -variété abélienne isogène, se borner à étudier les p -isogénies pour $p \in \ell \cup R \cup S$.

D'après 4.4.7, une p -isogénie se décompose en $4g^2|T|$ belles p -isogénies et $8g^2|T|$ isogénies de degré $\leq p^{\Delta} p^{2g}$.

D'après 4.3.6, toute belle p -isogénie de niveau $n > n_p$, pour $p \neq \ell$, et de niveau $n > n_{\ell, \ell'}$, pour $p = \ell$, conserve le degré d'Arakelov.

Enfin, il résulte de 2.1.4, que si $u: A \rightarrow B$ est une p -isogénie de degré p^n , $\deg(\omega_A) - \deg(\omega_B)$ peut prendre au plus $2n[K:\mathbb{Q}] + 1$ valeurs et que l'on a $|ht(A_K) - ht(B_K)| \leq \frac{n}{2} \log(p)$. Plus généralement, ces majorations s'étendent au cas où on passe de A à B par une suite finie de p -isogénies dont le produit des degrés est $\leq p^n$.

D'après les considérations qui précèdent, pour contrôler les p -isogénies qui, a priori, ne conservent pas le degré d'Arakelov, on peut prendre

$$n = (\Delta_p - 2g) 8g^2|T| + (n_p - 2g) 4g^2|T| = (2\Delta_p + n_p) 8g^3|T|, \text{ pour } p \neq \ell$$

$$\text{et } n = (2\Delta_{\ell} + n_{\ell, \ell'}) 4g^3|T| \text{ pour } p = \ell.$$

On obtient alors l'assertion 1) (resp. 2)) du théorème en prenant le produit (resp. la somme) des majorations relatives aux différents "mauvais" nombres premiers p .

B I B L I O G R A P H I E

- [1] L. BÉGUERI. *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mémoire Soc. Math. de France, supplément t. 108, 1980, 117 p.
- [2] J-M. FONTAINE. *Formes différentielles et modules de Tate des Variétés abéliennes sur les corps locaux*, Invent. Math. 65, 1982, 379-409.
- [3] J-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE. *Construction de représentations p-adiques*, Publ. Université Sc. et Méd. de Grenoble, 1981.
- [4] M. GREENBERG. *Schemata over local rings*, Annals of Math. 73, 1961, 624-648.
- [5] A. GROTHENDIECK. *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Sémin. de géom. Alg. du Bois-Marie 1967-1969, SGA 7 I, Lectures Notes in Math. n° 288, Springer-Verlag, 1972.
- [6] R. HARTSHORNE. *Residues and Duality*, Lect. Notes in Math. n°20, Springer Verlag, 1966.
- [7] B. MAZUR et L. ROBERTS. *Local Euler characteristics*, Invent. math. 9, 1970, pp. 201-234.
- [8] L. MORET-BAILLY. *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, à paraître.
- [9] M. RAYNAUD. *Schémas en Groupes de type $(p, \dots, p)$* , Bull. Soc. Math. de Fr. t. 102, 1974, 241-280.
- [10] J-P. SERRE. *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1962.
- [11] J-P. SERRE. *Groupes pro-algébriques*, Publ. Math. I.H.E.S n°7, 1960.
- [12] J-P. SERRE. *Corps locaux*, Hermann, 1962.
- [13] J-P. SERRE. *Corps locaux à corps résiduel algébriquement clos*, Bull. Soc. Math. de Fr, t.89 , 1961, 105-154.

- [14] J-P. SERRE. *Cohomologie Galoisienne*, Lect. Notes in Math. n°5, Springer-Verlag, 1965.
- [15] J. TATE. *WC-groups over p-adic fields*, Sémin. Bourbaki 156, Déc. 1957, W.A. Benjamin, New York, 1965.
- [16] J. TATE. *p-divisible groups, Local fields*, Nuffic Sum. School at Driebergen, Springer-Verlag, 1967, pp. 158-184.
- [17] A. WEIL. *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, 1948.

Michel RAYNAUD
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX