

Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Préliminaires sur les périodes des surfaces $K3$

Astérisque, tome 126 (1985), p. 91-97

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__91_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRÉLIMINAIRES SUR LES PÉRIODES DES SURFACES K3

Arnaud BEAUVILLE

1. PÉRIODES

Nous rappelons ici, afin de fixer les notations, des définitions déjà introduites dans les exposés précédents.

Soit X une surface K3. Le cup-produit définit sur $H^2(X, \mathbb{Z})$ une forme quadratique entière unimodulaire, paire, de signature $(3, 19)$. Le \mathbb{Z} -module quadratique $H^2(X, \mathbb{Z})$ est donc isomorphe au réseau $L = (-E_8)^2 \oplus H^3$ (Exposé IV). Pour tout corps K , on notera $L_K = L \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

Définition. On appelle surface K3 marquée un couple (X, σ) , où X est une surface K3 et $\sigma : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L$ une isométrie.

La droite $\sigma_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X)) \subset L_{\mathbb{C}}$ est la période de (X, σ) . Elle définit un point du domaine des périodes $\Omega \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ défini par les équations

$$\omega^2 = 0, \quad \omega \cdot \bar{\omega} > 0.$$

C'est un ouvert d'une quadrique lisse de dimension 20.

La donnée de la période équivaut à celle de la structure de Hodge de poids 2 sur $L_{\mathbb{C}}$ déduite via σ de celle de $H^2(X, \mathbb{C})$.

Nous utiliserons le plus souvent une autre interprétation de Ω . Disons

qu'un sous-espace P de $L_{\mathbb{R}}$ est positif si la restriction à P de la forme quadratique est positive non dégénérée.

Lemme 1 . Le domaine des périodes Ω s'identifie canoniquement à la grassmannienne des 2-plans positifs orientés de $L_{\mathbb{R}}$.

A une droite complexe $D \subset L_{\mathbb{C}}$ on fait correspondre le 2-plan $(D \oplus \bar{D}) \cap L_{\mathbb{R}}$, orienté de façon que la base $(\operatorname{Re}(\omega), \operatorname{Im}(\omega))$ soit directe pour tout $\omega \in D$. Inversement, étant donné un 2-plan positif $P \subset L_{\mathbb{R}}$, le plan complexifié $P_{\mathbb{C}}$ contient deux droites isotropes, et le choix d'une de ces droites équivaut au choix d'une orientation de P . \square

Dans ce cadre la période de (X, σ) est le 2-plan $\sigma(P_X)$, avec

$$P_X = H^2(X, \mathbb{R}) \cap (H^{2,0} \oplus H^{0,2}) .$$

Si l'on pose $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) = H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}$, on a une décomposition orthogonale

$$H^2(X, \mathbb{R}) = P_X \oplus H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) .$$

Lemme 2 . Le domaine des périodes Ω est connexe.

Le lecteur savant déduira ce lemme du fait que le groupe $SO(3,19)$ a 2 composantes connexes et que $-I$ n'appartient pas à la composante neutre. Donnons une démonstration élémentaire pour être complet. Montrons d'abord que dans un espace vectoriel réel V muni d'une forme de signature (p,q) avec $p \geq 2$, l'ensemble V^+ des vecteurs de carré > 0 est connexe. Soit en effet F un sous-espace négatif de dimension q de V . La projection orthogonale de V^+ sur F est ouverte et ses fibres, qui s'identifient au complémentaire d'une boule dans F^{\perp} , sont connexes et non vides ; ceci entraîne que V^+ est connexe.

Soit alors Z la sous-variété de $L_{\mathbb{R}}^+ \times L_{\mathbb{R}}^+$ formée des couples (x,y) tels que $x \cdot y = 0$. Soit $p : Z \rightarrow L_{\mathbb{R}}^+$ la première projection ; elle est lisse et pour $v \in L_{\mathbb{R}}^+$, la fibre $p^{-1}(v)$ s'identifie à l'ensemble des vecteurs de carré > 0 dans v^{\perp} , qui est connexe d'après ce qui précède. Ainsi Z est connexe. Enfin l'application de Z dans Ω qui associe à un couple (x,y) le 2-plan $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$, orienté de façon que la base (x,y) soit directe, est continue et surjective, ce qui prouve le lemme. \square

Soit maintenant $f : X \rightarrow S$ une famille de surfaces K3 (par quoi nous entendrons toujours un morphisme propre et lisse dont les fibres sont des surfaces K3). Les groupes de cohomologie $H^2(X, \mathbb{Z})$, pour $s \in S$, forment un système local $R^2 f_{*}(\mathbb{Z})$. Nous appellerons marquage de cette famille un isomorphisme σ de $R^2 f_{*}(\mathbb{Z})$

sur le système constant L_S , qui induit en chaque point une isométrie

$\sigma_s : H^2(X_s, \mathbb{Z}) \longrightarrow L$. L'application des périodes $\rho : S \longrightarrow \Omega$ associée à (f, σ) est définie par $\rho(s) = \sigma_s(H^{2,0}(X_s))$. Elle est holomorphe (Exposé V). Rappelons aussi que si f est une déformation locale universelle de sa fibre X_o , pour $o \in S$, l'application des périodes est un isomorphisme local en o (th. de Torelli local, Exposé V).

2. UN PEU DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Soit P un 2-plan positif de $L_{\mathbb{R}}$. Notons $H_P^{1,1}$ l'orthogonal de P dans $L_{\mathbb{R}}$, et \mathcal{C}_P le cône des éléments $x \in H_P^{1,1}$ tel que $x^2 > 0$. La forme quadratique restreinte à $H_P^{1,1}$ est de signature $(1, 19)$, de sorte que \mathcal{C}_P a deux composantes connexes, qui sont échangées par la symétrie $x \longmapsto -x$. Pour que deux éléments x, y de \mathcal{C}_P appartiennent à la même composante connexe, il faut et il suffit qu'on ait $x \cdot y > 0$ (cf. Exposé IV, 4).

Soient Δ l'ensemble des éléments de L de carré (-2) , et Δ_P le sous-ensemble de Δ formé des éléments orthogonaux à P . Pour $\delta \in \Delta_P$, notons s_δ la réflexion orthogonale de $L_{\mathbb{R}}$ définie par $s_\delta(x) = x + (x, \delta)\delta$. Soit W_P le sous-groupe de $\text{Aut}(L_{\mathbb{R}})$ engendré par les réflexions s_δ pour $\delta \in \Delta_P$. Le groupe W_P opère sur $H_P^{1,1}$ et aussi sur \mathcal{C}_P .

Proposition 1. Le groupe discret W_P opère proprement sur \mathcal{C}_P .

Notons \mathcal{C}_P^1 l'ensemble des éléments de carré 1 de $H_P^{1,1}$. A cause de l'isomorphisme W_P -équivariant $\mathcal{C}_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_P^1 \times \mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer que W_P opère proprement sur \mathcal{C}_P^1 . Or le groupe $G = \text{Aut}(H_P^{1,1})$ opère transitivement sur \mathcal{C}_P^1 , et le stabilisateur K d'un point est compact (c'est le groupe orthogonal d'une forme quadratique négative non dégénérée). D'autre part le groupe W_P est discret dans $\text{Aut}(L_{\mathbb{R}})$ (puisqu'il est contenu dans $\text{Aut}(L)$), donc aussi dans G . Puisque G opère proprement sur $\mathcal{C}_P^1 = G/K$, il en est de même du sous-groupe discret W_P .

Lemme 3. Soit W un groupe discret opérant proprement sur un espace séparé X , et soit S une partie de W . Alors la réunion F des lieux fixes des éléments de S est fermée dans X .

Soit x un point de $X-F$, et soit W_x son stabilisateur; on a $W_x \cap S = \emptyset$. Puisque W opère proprement sur X , il existe un voisinage U de x dans X tel que $wU \cap U = \emptyset$ pour tout $w \in W-W_x$, en particulier pour tout $w \in S$. Ceci entraîne $U \subset X-F$, de sorte que $X-F$ est ouvert, d'où le lemme.

Grâce au lemme 3, on déduit aussitôt de la Proposition 1 le résultat suivant :

Corollaire. La réunion des hyperplans δ^\perp , pour $\delta \in \Delta_p$, est fermée dans \mathcal{C}_p .

On dit que les hyperplans δ^\perp sont les murs de \mathcal{C}_p ; les composantes connexes de $\mathcal{C}_p - \bigcup_{\delta \in \Delta_p} \delta^\perp$ sont appelées les chambres de \mathcal{C}_p . Elles sont ouvertes dans

\mathcal{C}_p (corollaire), donc aussi dans $H_p^{1,1}$.

Proposition 2. Soit \mathcal{C}_p^+ une des deux composantes connexes de \mathcal{C}_p . Le groupe W_p opère transitivement sur l'ensemble des chambres de \mathcal{C}_p^+ .

(Autrement dit, le groupe $W_p \times \{+1\}$ opère transitivement sur l'ensemble des chambres de \mathcal{C}_p .)

Observons d'abord que W_p préserve \mathcal{C}_p^+ . En effet, pour $x \in \mathcal{C}_p$, on a

$$s_\delta(x) \cdot x = x^2 + (x \cdot \delta)^2 > 0,$$

ce qui entraîne que x et $s_\delta(x)$ sont dans la même composante de \mathcal{C}_p .

Ainsi, puisque le groupe W_p préserve l'ensemble des murs de \mathcal{C}_p , il opère sur l'ensemble des chambres de \mathcal{C}_p^+ . Soient C, C' deux de ces chambres, et soit $x \in C'$; il s'agit de montrer que l'orbite Wx rencontre C .

Fixons un élément e de C . Pour $a \in \mathbb{R}$, la partie de \mathcal{C}_p^+ formée des éléments z de carré fixé et tels que $(e, z) \leq a$ est compacte ; d'autre part l'application $w \mapsto wx$ de W dans \mathcal{C}_p est propre (Proposition 1). On en déduit qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments w de W vérifiant $(e, wx) \leq a$, et par suite que la fonction $z \mapsto (e, z)$ sur Wx atteint son minimum en un point y . On a alors, pour tout $\delta \in \Delta_p$,

$$e \cdot s_\delta(y) \geq e \cdot y, \text{ soit } (e, \delta) (y, \delta) \geq 0.$$

Ainsi y est du même côté que e par rapport à tout mur, ce qui signifie que y appartient à C . \square

Remarque. La théorie des groupes engendrés par des réflexions (cf. [1], Ch. 5) donne en fait beaucoup plus : le groupe W_p opère simplement transitivement sur l'ensemble des chambres ; c'est un groupe de Coxeter, engendré par l'ensemble des réflé-

xions par rapport aux murs d'une chambre fixée. Nous n'utiliserons pas ces résultats; je renvoie pour plus de détails à l'exposé [3] ainsi qu'à la bibliographie qu'il contient.

Proposition 3 . Dans la grassmannienne $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$ des 3-plans positifs de $L_{\mathbb{R}}$, l'ensemble des 3-plans orthogonaux à un élément de Δ est fermé.

Le groupe $\text{Aut}(L_{\mathbb{R}})$ opère transitivement sur $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$, et le stabilisateur d'un 3-plan F est le sous-groupe compact $O(F) \times O(F^{\perp})$. On en déduit comme dans la prop.1 que W_p opère proprement sur $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$. D'autre part un 3-plan positif est fixé par la réflexion s_{δ} si et seulement s'il est orthogonal à δ . La Proposition 3 résulte donc du Lemme 3. \square

Soit maintenant X une surface K3; appliquons ce qui précède en identifiant L à $H^2(X, \mathbb{Z})$ à l'aide d'un marquage σ , et en prenant pour P la période de (X, σ) . Alors \mathcal{C}_p s'identifie au cône \mathcal{C}_X des éléments x de $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ tels que $x^2 > 0$, et Δ_p à l'ensemble Δ_X des classes de diviseurs de carré (-2) sur X . Les hyperplans δ^{\perp} , pour $\delta \in \Delta_X$, découpent un pavage de \mathcal{C}_X . Le groupe W_X (engendré par les réflexions s_{δ} , pour $\delta \in \Delta_X$) opère transitivement sur les chambres de \mathcal{C}_X , qui sont ouvertes.

Supposons de plus X kählérienne. On sait alors distinguer une composante \mathcal{C}_X^+ de \mathcal{C}_X , à savoir celle qui contient les classes de Kähler (cf. Exposé IV).

Notons Δ_X^+ l'ensemble des classes de diviseurs effectifs de carré (-2) sur X ; à cause du théorème de Riemann-Roch, on a $\Delta_X = \Delta_X^+ \cup (-\Delta_X^+)$. On note K_X la chambre de \mathcal{C}_X^+ formée des $x \in \mathcal{C}_X^+$ tels que $x \cdot \delta > 0$ pour tout $\delta \in \Delta_X^+$; elle contient les classes de Kähler. On dit que c'est la chambre kählérienne de \mathcal{C}_X . Les éléments x de K_X vérifient $x \cdot d > 0$ pour toute classe de diviseur effectif d (loc.cit.).

3. Le théorème de Torelli : énoncé

Soient X, X' deux surfaces K3 kählériennes, et $\varphi : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ une isométrie. On dit que φ est une isométrie de Hodge si elle est compatible aux structures de Hodge, c'est-à-dire si $\varphi_{\mathbb{C}}(H^{p,q}(X)) = H^{p,q}(X')$ pour $p+q = 2$; il suffit bien sûr de le vérifier pour $p = 2, q = 0$.

Lemme 4. Soit $\varphi : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge. Notons \mathcal{E}_X l'ensemble des classes de diviseurs effectifs dans $H^2(X, \mathbb{Z})$, et $\mathcal{E}_{X'}$ l'ensemble correspon-

dant pour X' . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\varphi(\mathcal{E}_{X'}) = \mathcal{E}_{X'}$, et $\varphi(\mathcal{C}_{X'}^+) = \mathcal{C}_{X'}^+$;
- (ii) $\varphi(\mathcal{K}_{X'}) = \mathcal{K}_{X'}$;
- (iii) $\varphi(\mathcal{K}_{X'}) \cap \mathcal{K}_{X'} \neq \emptyset$.

Lorsqu'elles sont réalisées, on dit que φ est une isométrie de Hodge effective.

Les implications (i) \implies (ii) \iff (iii) sont claires. Sous l'hypothèse (ii), on a évidemment $\varphi(\mathcal{C}_{X'}^+) = \mathcal{C}_{X'}^+$. Soit c la classe d'une courbe irréductible sur X' . Comme $\varphi(c)^2 = c^2 \geq -2$, le théorème de Riemann-Roch entraîne que $\varphi(c)$ ou $-\varphi(c)$ est la classe d'un diviseur effectif. La seconde possibilité est exclue car pour $k \in \mathcal{K}_{X'}$, on a $\varphi(c) \cdot k = c \cdot \varphi^{-1}(k) > 0$. Ceci prouve l'inclusion $\varphi(\mathcal{E}_{X'}) \subset \mathcal{E}_{X'}$; le même raisonnement appliqué à φ^{-1} prouve l'inclusion opposée. \square

Il est clair que si $u : X' \longrightarrow X$ est un isomorphisme, alors $u^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ est une isométrie de Hodge effective. Inversement :

Théorème de Torelli. Soient X , X' deux surfaces K3 kählériennes, et soit $\varphi : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ une isométrie de Hodge effective. Il existe un unique isomorphisme $u : X' \longrightarrow X$ tel que $u^* = \varphi$.

Corollaire. Soient (X, σ) et (X', σ') deux surfaces K3 kählériennes marquées admettant la même période. Alors X et X' sont isomorphes.

Considérons en effet l'isométrie $\varphi = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ de $H^2(X, \mathbb{Z})$ dans $H^2(X', \mathbb{Z})$. Puisque $\sigma(H^{2,0}(X)) = \sigma'(H^{2,0}(X'))$, φ est une isométrie de Hodge. Alors $\varphi(\mathcal{K}_{X'})$ est une chambre de $\mathcal{C}_{X'}$; la Proposition 2 entraîne qu'il existe $w \in W_{X'} \times \{\pm 1\}$ tel que $w\varphi(\mathcal{K}_{X'}) = \mathcal{K}_{X'}$. Alors $w\varphi$ est une isométrie de Hodge effective, d'où le corollaire. \square

Le théorème de Torelli pour les surfaces K3 kählériennes est dû à Burns-Rapoport [2], qui s'appuyaient sur le cas projectif démontré par Pjatečĭkii-Šapiro et Šafarevič [5]. Une version simplifiée de la démonstration, complétant quelques lacunes de [5], est exposée dans [4]. Les deux exposés qui suivent sont consacrés à ce résultat ; j'ai suivi d'assez près [4], avec quelques simplifications.

Voici le schéma de la démonstration. On prouve d'abord (c'est la partie la

plus délicate) que le théorème est vrai lorsque X est une surface de Kummer. On montre ensuite que les périodes des surfaces de Kummer sont denses dans Ω . Grâce au théorème de Torelli local, on construit alors, sur un ouvert S de Ω , des familles $(X_s)_{s \in S}$ et $(X'_s)_{s \in S}$ de surfaces K3 kähleriennes, telles que $X_o = X$ et $X'_o = X'$ ($o \in S$). A cause de ce qui précède, S contient une partie dense T telle que X_t et X'_t sont des surfaces de Kummer isomorphes. Le "lemme principal" de Burns-Rapoport permet alors de montrer que ces isomorphismes convergent, dans un certain sens, vers un isomorphisme de X' sur X .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Bourbaki : Groupes et algèbres de Lie, Ch.4,5,6, Masson, Paris (1981).
- [2] D. Burns, M. Rapoport : On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris 8 (1975), 235-274.
- [3] I. Dolgachev : Integral quadratic forms : applications to algebraic geometry (after V. Nikulin), Exposé n° 611, séminaire Bourbaki (juin 1983) ; Astérisque n° 105-106 (1983).
- [4] E. Looijenga, C. Peters: A Torelli theorem for Kähler K3 surfaces, Compositio Math. 42 (1981), 145-186.
- [5] I. Pjateckiï-Sapiro, I.R. Šafarevič : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math, USSR Izvestija 5 (1971), 547-588.

Bâtiment de Mathématiques 425
 Université de Paris-Sud
 ERA du CNRS n° 653
 91405 ORSAY CEDEX (France)