

# *Astérisque*

PAUL GAUDUCHON

## **Théorème de Torelli local pour les surfaces K3**

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 59-77

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_126\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__59_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

THÉOREME DE TORELLI LOCAL POUR LES SURFACES  $K3$ 

Paul GAUDUCHON

1. DÉFORMATION D'UNE STRUCTURE COMPLEXE (INTRODUCTION)

Nous considérons une variété complexe compacte  $X$  (lisse, connexe) de dimension réelle  $2n$ . Pour un géomètre différentiel un tel objet est d'abord une variété différentielle munie ensuite d'une structure complexe conçue comme structure additionnelle ; il est naturel dans cette optique de définir une déformation de  $X$  comme une modification de la structure complexe additionnelle sur la variété différentiable sous-jacente. Mais souvent la situation se présente de façon différente si, par exemple,  $X$  est définie par un système d'équations dans un espace ambiant  $\tilde{X}$ , ou comme quotient d'une variété complexe par un groupe d'automorphismes  $\Gamma$  ; dans ce cas, en modifiant légèrement les équations ou le groupe  $\Gamma$  nous obtenons des variétés complexes "proches" de  $X$  -dans un sens qu'il faut préciser- mais distinctes de  $X$  même d'un point de vue différentiable. Toutefois, si ces modifications sont légères, toutes ces variétés sont difféomorphes entre elles de sorte que par un choix approprié -explicite- de ces difféomorphismes cette seconde notion de déformation -plus exactement de famille de variétés complexes- se ramène à la première. Ainsi, tant que nous nous limitons à des déformations petites, les deux points de vue s'équivalent, mais le passage de l'un à l'autre n'est pas canonique en général.

Pour illustrer ce double point de vue un exemple simple est celui des tores complexes à une dimension (complexe). Ceux-ci sont naturellement définis comme quotient de plan complexe  $\mathbb{C}$  par un réseau que nous pouvons considérer comme engendré par 1 et  $\tau$ , où  $\tau$  est un complexe de partie imaginaire positive, i.e. un élément du demi-plan de Poincaré  $H$  ; quand

$\tau$  varie dans  $H$  nous obtenons une famille  $T_\tau$  de variétés complexes paramétrées par  $H$ . Toutes ces variétés complexes sont difféomorphes au produit  $S^1 \times S^1$  du cercle par lui-même, mais elles ne sont isomorphes que si :

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} ,$$

où  $a, b, c, d$  sont des entiers tels que le déterminant  $ad - bc$  soit égal à 1. Le passage de ce point de vue à l'autre ici est simple car il existe un difféomorphisme évident de  $T_\tau$  sur  $S^1 \times S^1$  qui consiste à associer au couple  $(u, v)$  de  $S^1 \times S^1$  -  $u$  et  $v$  sont deux réels définis à un entier près - la classe d'équivalence de  $u + v \cdot \tau$  dans  $T_\tau$ . Si  $\xi$  et  $\eta$  sont les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial u}$  et  $\frac{\partial}{\partial v}$  respectivement de  $S^1 \times S^1$  la structure complexe, associé à  $\tau$ , sur  $S^1 \times S^1$  est déterminé, en termes d'opérateur presque-complexe  $J_\tau$  par les relations :

$$(1) \quad \begin{aligned} J_\tau \xi &= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \xi + \frac{1}{\beta} \cdot \eta \\ J_\tau \eta &= -\frac{|\tau|^2}{\beta} \cdot \xi + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \xi , \end{aligned}$$

si  $\tau = \alpha + i\beta$  (où  $\beta > 0$  rappelons-le) ; on note que la structure complexe "naturelle" de  $S^1 \times S^1$  correspond à  $\tau = i$ , c'est-à-dire au réseau carré.

Dans cet exemple, le paramètre  $\tau$  évolue lui-même dans une variété complexe. Plus généralement, nous définissons une famille analytique (lisse) de variétés complexes (compactes, lisses) par la donnée :

- . d'un espace de paramètres  $S$  qui est une variété complexe (lisse) de dimension complexe  $m$
- . d'une variété compacte  $\mathfrak{X}$  de dimension complexe  $m+n$  ;
- . d'une application holomorphe  $p$  de  $\mathfrak{X}$  sur  $S$ , propre et de rang maximal .

Ainsi chaque fibre  $p^{-1}(s)$ ,  $s \in S$ , est une variété complexe compacte, de dimension complexe  $n$ , qui dépend analytiquement de  $s$  au sens qui vient d'être défini. L'exemple ci-dessus de la famille  $T_\tau$  entre dans ce cadre avec  $S = H$  et  $\mathfrak{X}$  quotient de  $\mathbb{C} \times H$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(z, \tau)$  et  $(z + a + b\tau, \tau)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On note, en revanche, que le caractère analytique de la déformation n'apparaît pas à l'évidence sur les relations (1).

Faisons choix, dans la famille  $\mathfrak{X} \xrightarrow{p} S$ , d'une fibre de référence  $X_0$  au-dessus d'un point-base  $s_0$  de  $S$ . L'hypothèse de rang maximal implique

que  $p$  est, d'un point de vue différentiable, localement trivial, i.e. qu'il existe un voisinage  $\Delta$  de  $s_0$  dans  $S$  et un difféomorphisme  $\Phi$  de  $p^{-1}(\Delta)$  sur le produit  $X_0 \times \Delta$  ([ 6 ], th. 4.1, p. 19-20). Au moyen de  $\Phi$  nous pouvons transporter la structure complexe de  $X_s = p^{-1}(s)$ ,  $s \in \Delta$  sur  $X_0$ , obtenant ainsi une famille de structures complexes sur la seule et même variété différentiable sous-jacente à  $X_0$ . Nous sommes ainsi ramenés à notre point de vue initial. Toutefois le choix de  $\Phi$  est arbitraire et nous avons été obligé de nous borner à un voisinage  $\Delta$  de  $s_0$  dans  $S$ .

Explicitement la déformation de  $X_0$  se décrit comme suit ; pour  $\Delta$  assez petit, nous pouvons choisir sur  $p^{-1}(\Delta)$  des cartes  $\mathcal{U}_i$  de la forme  $\Phi^{-1}(U_i \times \Delta)$  où  $\{U_i\}$  est un atlas de  $X_0$  ; l'hypothèse de rang maximal implique que l'on puisse choisir, sur chaque  $\mathcal{U}_i$ , des coordonnées complexes du type  $(z_i^1, \dots, z_i^n, t^1, \dots, t^m)$  où  $(t^1, \dots, t^m)$  sont des coordonnées complexes de  $\Delta$  ; nous obtenons ainsi, par transport par  $\Phi$ ,  $n$  fonctions complexes  $\zeta_i^1(x, t), \dots, \zeta_i^n(x, t)$  sur chaque ouvert  $U_i$  de  $X_0$ , telles que, pour  $t$  fixé sur  $\Delta$ , elles constituent un système de coordonnées complexes pour la structure complexe associée à  $t \in \Delta$  ; sur  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  on a :

$$\zeta_i^\alpha(x, t) = h_{ij}^\alpha(\zeta_j(x, t), t) ,$$

où les  $h_{ij}^\alpha$  sont des fonctions holomorphes de  $\mathbb{C}^{m+n}$  dans  $\mathbb{C}$ . Les fonctions  $\zeta_i^\alpha(x, t)$  sont elles-mêmes  $C^\infty$  sur  $U_i \times \Delta$  ; on peut montrer qu'il est possible, par un choix approprié de  $\Phi$  -mais non pour un  $\Phi$  quelconque- de faire que ces fonctions dépendent elles-mêmes analytiquement du paramètre  $t$  ([ 5 ], ch. IV).

A partir de maintenant nous ne considérons que des familles locales au voisinage d'une variété complexe  $X_0$ , soit encore des germes de familles en ce sens que  $(S, s_0)$  est égal à  $(\Delta, 0)$ , où  $\Delta$  est une boule ouverte de  $\mathbb{C}^m$ , centrée à l'origine et de rayon réductible à volonté. Alternativement nous considérons des déformations locales de la structure complexe  $X_0$  déterminées soit par des coordonnées complexes  $\{\zeta_i^\alpha(x, t)\}$ , dépendant analytiquement du paramètre  $t \in \Delta$ , soit de la façon que nous allons développer à présent.

## 2. FAMILLE ANALYTIQUE DE STRUCTURES COMPLEXES

Une structure presque-complexe sur une variété différentielle  $X$ , de dimension  $2n$  équivaut à la donnée d'un sous-fibré  $\mathbb{C}$ -vectoriel de rang  $n$ ,  $T^{0,1}X$  du fibré tangent complexifié  $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes \mathbb{C}$  tel que

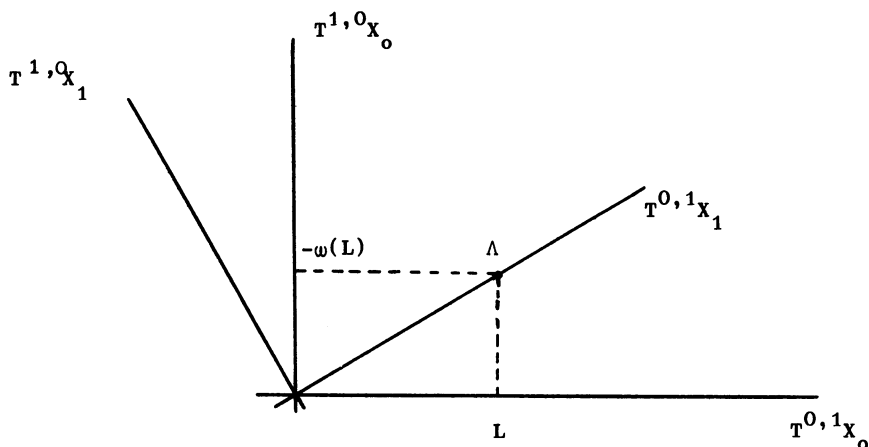
$$T_{\mathbb{C}}X = \overline{T^{0,1}X} \oplus T^{0,1}X ,$$

c'est-à-dire tel que  $T^{0,1}X$  et le fibré complexe conjugué  $T^{1,0}X$  n'aient que la section nulle en commun. L'opérateur presque-complexe correspondant  $J$  est alors défini par le fait que  $T^{0,1}X$  (resp.  $T^{1,0}X$ ) est le sous-fibré propre de  $T_{\mathbb{C}}X$  relativement à la valeur propre  $-i$  (resp.  $+i$ ).

Donnons-nous une structure presque-complexe de référence  $X_0$  sur  $X$ , avec la décomposition en types :

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X_0 \oplus T^{0,1}X_0 .$$

Une structure presque complexe  $X_1$  sur  $X$  est dite à distance finie de  $X_0$  si la projection de  $T_{\mathbb{C}}X$  sur  $T^{0,1}X_0$  définie par la structure  $X_0$  induit un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme de  $T^{0,1}X_1$  sur  $T^{0,1}X_0$  ; cela veut dire qu'en chaque point  $x$  de  $X$ ,  $T^{0,1}X_1$  se situe dans la portion "finie" de la grassmannienne des  $n$ -plans complexes de  $(T_{\mathbb{C}}X)_x$  déterminée par  $(T^{0,1}X_0)_x$ . Nous obtenons ainsi le schéma :



Tout élément  $\Lambda$  de  $T^{0,1}X_1$  se décompose en

$$\Lambda = L + L' ,$$

avec  $L \in T^{0,1}X_0$  et  $L' \in T^{1,0}X_0$  ;  
 puisque  $\Lambda$  et  $L$  se correspondent bijectivement dans cette décomposition,  
 celle-ci induit un  $\mathbb{C}$ -homomorphisme de  $T^{0,1}X_0$  dans  $T^{1,0}X_0$  que nous noterons  
 $-\omega$ , déterminé par

$$L' = -\omega(L) \quad .$$

Cet homomorphisme  $\omega$  détermine à son tour la structure  $X_1$  puisque  $T^{0,1}X_1$   
 est, par construction, constitué des éléments de  $T_{\mathbb{C}}X$  qui sont de la forme :

$$(2) \quad \Lambda = L - \omega(L) \quad .$$

Toutefois un  $\mathbb{C}$ -homomorphisme  $\omega$  de  $T^{0,1}X_0$  dans  $T^{1,0}X_0$  ne détermine une  
 structure presque-complexe  $X_1$  sur  $X$  que si le sous-fibré de  $T_{\mathbb{C}}X$  défini  
 par (2) engendre, avec son conjugué, le fibré  $T_{\mathbb{C}}X$  tout entier ; ce qui  
 équivaut à dire que 1 n'est pas valeur propre de l'homomorphisme  $\bar{\omega} \circ \bar{\omega}$   
 de  $T^{0,1}X_0$  ([5], p. 38) ; cette condition est vérifiée pour  $\omega$  assez proche  
 de zéro (bien entendu zéro correspond à la structure  $X_0$  elle-même).

Les vecteurs complexes de  $T^{0,1}X_1$ , c'est-à-dire les vecteurs  
 définis par la relation (2), sont les vecteurs de type (0,1) relativement  
 à  $X_1$ . Une fonction (locale)  $f$  de  $X$  est holomorphe (relativement à  $X_1$ ) si  
 et seulement si  $\Lambda \cdot f$  est nul pour tout vecteur  $\Lambda$  de type (0,1) relativement  
 à  $X_1$ , autrement dit si et seulement si :

$$(3) \quad L \cdot f - \omega(L) \cdot f = 0$$

pour tout vecteur  $L$  de type (0,1) (relativement à la structure de référen-  
 ce  $X_0$ ).

La structure  $X_1$  (définie par  $\omega$ ) est intégrable par définition, si  
 elle est induite par une structure complexe, c'est-à-dire s'il est possi-  
 ble, au voisinage de tout point de  $X$ , de trouver un système de  $n$  fonctions  
 holomorphes  $\zeta^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , indépendantes, i.e. telles que  $\{d\zeta^\alpha\}$  constitue  
 un système indépendant sur le voisinage considéré.

On observe que la condition (3) qui détermine les fonctions holomor-  
 phes pour  $X$ , équivaut à celle-ci :

$$(4) \quad d''f - d'f \lrcorner \omega = 0 \quad ,$$

où  $\omega$  est considéré comme une 1-forme de type (0,1) à valeurs dans le fibré

tangent holomorphe  $T^{1,0}_{X_0}$  et où le symbole  $\lrcorner$  désigne la contraction de la 1-forme de type (1,0) d' $f$  avec la partie fibrée de  $\omega$ .

Notons  $A^{0,p}(T^{1,0}_{X_0})$  l'espace des  $p$ -formes de type (0,p) à valeurs dans le fibré tangent holomorphe  $T^{1,0}_{X_0}$  de  $X_0$ , et  $A^{0,*}(T^{1,0}_{X_0})$  l'espace somme directe des  $A^{0,p}(T^{1,0}_{X_0})$ . Il est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire d'une opération crochet  $[.,.]$   $\mathbb{C}$ -bilineaire vérifiant :

- (i)  $[\varphi, \psi] = (-1)^{pq} [\psi, \varphi]$  ,  $\forall \varphi \in A^{0,p}(T^{1,0}_{X_0})$  ,  $\forall \psi \in A^{0,q}(T^{1,0}_{X_0})$
- (ii)  $(-1)^{pr} [\varphi, [\psi, \chi]] + (-1)^{qp} [\psi, [\chi, \varphi]] + (-1)^{rq} [\chi, [\varphi, \psi]] = 0$  ,  
 $\forall \varphi \in A^{0,p}(T^{1,0}_{X_0})$  ,  $\forall \psi \in A^{0,q}(T^{1,0}_{X_0})$  ,  
 $\forall \chi \in A^{0,r}(T^{1,0}_{X_0})$  .

En outre, cette opération est compatible avec l'opérateur  $d''$  défini sur les formes à valeurs dans  $T^{1,0}_{X_0}$  en ce sens que :

$$d''[\varphi, \psi] = [d''\varphi, \psi] + (-1)^p [\varphi, d''\psi] ,$$

$$\forall \varphi \in A^{0,p}(T^{1,0}_{X_0}) , \forall \psi \in A^{0,*}(T^{1,0}_{X_0}) .$$

Relativement à une carte complexe locale  $\{z^\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  de  $X_0$ , ce crochet est défini par :

$$[\varphi, \psi] = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n (\varphi^\lambda \wedge \partial_\lambda \psi^\alpha + (-1)^{pq+1} \psi^\lambda \wedge \partial_\lambda \varphi^\alpha)$$

pour  $\varphi$  dans  $A^{0,p}(T^{1,0}_{X_0})$  et  $\psi$  dans  $A^{0,q}(T^{1,0}_{X_0})$ .

Cette parenthèse étant faite, il est très facile de voir, à partir de (4), que le fait que  $X_1$  soit intégrable implique que  $\omega$  vérifie la relation d'intégrabilité suivante :

$$(5) \quad d''\omega - [\omega, \omega] = 0 .$$

On vérifie aisément que cette condition d'intégrabilité équivaut à dire que la différentielle extérieure d'une forme  $\theta$  de type (1,0) dans la structure  $X_1$  appartient, en tout point, à l'idéal engendré par les formes de type (1,0), c'est-à-dire que  $d\theta$  est la somme d'une forme de type (2,0) et d'une forme de type (1,1) pour la structure  $X_1$ . Nous obtenons ainsi une

condition de Frobenius complexe. Newlander et Nirenberg ont montré que cette condition nécessaire est aussi suffisante :

si  $\omega$  satisfait la condition d'intégrabilité (5) il existe, pour tout point  $x$  de  $X$ , un voisinage  $U$  et  $n$  fonctions complexes  $\{\zeta^\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , solutions de (4) et indépendantes en tout point de  $U$ . Le système (4) qui définit des fonctions holomorphes de  $X_1$  équivaut alors, sur  $U$ , au système :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}^\mu} = 0 \quad , \quad \forall \mu = 1, \dots, n \quad .$$

(cf. [10] ou [2].)

Supposons à présent que nous ayons une famille (locale) de structures presque complexes  $X_{(t)}$  sur  $X$  définie par une famille  $\omega(t)$  d'éléments de  $A^{0,1}(T^{0,1}X_o)$ , où  $t$  appartient à  $\Delta$ , telle que  $\omega(0) = 0$ , c'est-à-dire, telle que  $X_{(0)} = X_o$  ; nous dirons que cette famille locale est analytique si les composantes  $\omega_\mu^\lambda(t)$  de  $\omega(t)$  dans une carte complexe  $\{z^\alpha\}$  de  $X_o$  sont des fonctions holomorphes de  $t$ . La famille  $\omega(t)$  induit une structure presque complexe sur le produit  $X \times \Delta$  de la façon suivante : à tout  $(x, t)$  de  $X \times \Delta$  nous associons le sous-espace  $(T^{0,1}X_{(t)})_x \oplus (T^{0,1}\Delta)_t$  de  $(T_{\mathbb{C}}(X \times \Delta))_{(x,t)}$  ; relativement à la structure complexe de référence, cette structure presque complexe est déterminée par la forme  $\tilde{\omega}$  définie par :

$$\tilde{\omega}((L, \xi))_{(x,t)} = (\omega(t)(L), 0) \quad , \quad \forall (L, \xi) \in (T^{0,1}(X_o \times \Delta))_{(x,t)} \quad .$$

En particulier, pour tout point  $x$  de  $X$ , la structure presque complexe définie par restriction de  $\tilde{\omega}$  à  $\{x\} \times \Delta$  coïncide avec la structure complexe naturelle de  $\Delta$ . On vérifie aisément que la condition d'intégrabilité (5) appliquée à  $\tilde{\omega}$  se décompose en deux conditions portant sur  $\omega(t)$  :

$$(6) \quad \text{et} \quad d''\omega(t) - [\omega(t), \omega(t)] = 0 \quad , \quad \forall t \in \Delta$$

$$\partial_{\bar{t}}\omega(t) = 0$$

tandis que le système (4) définissant les fonctions holomorphes sur  $X \times \Delta$  se décompose lui-même en :



$$(7) \quad \text{et} \quad d''f(t) - d'f(t) \lrcorner \omega(t) = 0 \quad , \quad \forall t \in \Delta$$

$$\partial_{\bar{t}} f(t) = 0$$

où  $f(t)$  désigne la restriction à  $X \times \{t\}$  de  $f$ .

**Définition** . Une déformation (locale) de  $X_0$  est une famille (locale) analytique de structures presque complexes intégrables au voisinage de  $X_0$ .

Comme nous venons de voir, une telle déformation paramétrée par  $\Delta$  détermine une structure presque complexe intégrable sur le produit  $X \times \Delta$  telle que la projection  $p$  de  $X \times \Delta$  sur  $\Delta$  soit holomorphe et telle que les sous-variétés  $\{x\} \times \Delta$  soient des sous-variétés complexes de  $X \times \Delta$ , pour tout  $x$  de  $X$ , isomorphes à  $\Delta$ .

En particulier, il est possible d'exhiber localement sur  $X \times \Delta$  des cartes complexes  $\xi_i^A(x, t)$ ,  $A = 1, \dots, m+n$ , définies sur des ouverts  $\mathcal{U}_i$  -que l'on peut choisir de la forme  $U_i \times \Delta$  pour  $\Delta$  assez petit- holomorphes pour la structure  $\tilde{\omega}$  de  $X \times \Delta$  et donc, en particulier, holomorphes en  $t$ . Ces cartes peuvent être choisies de la forme  $(\zeta_i^\alpha(x, t), t^1, \dots, t^m)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ .

**Observation** . Nous venons d'obtenir à partir d'une déformation locale analytique de  $X_0$  une famille (locale) analytique de variétés complexes au voisinage de  $X_0$ . Inversement, on a vu au § 1 qu'une telle famille induit, par le biais d'un difféomorphisme  $\Phi$ , une famille de structures presque complexes intégrables sur  $X$  au voisinage de  $X_0$  mais en général cette famille est seulement  $C^\infty$  et non analytique. On peut montrer toutefois que pour un choix convenable de  $\Phi$  elle est analytique (cf. [ 5 ], Ch. 4).

**Illustration** . Reprenons l'exemple de la famille  $T_\tau$  des tores complexes à une dimension. Choisissons la structure complexe naturelle de  $S^1 \times S^1$  associée à  $\tau = i$  comme structure de référence  $X_0 = T_i$ . Un élément de  $A^{1,0}(T^{1,0}X_0)$  est déterminé par un nombre complexe : en effet,  $T^{0,1}X_0$  est engendré par  $\xi \oplus i\eta$  tandis que  $T^{1,0}X_0$  est engendré par  $\xi - i\eta$ . On vérifie aisément que  $\omega(\tau)$  est tel que :

$$\omega(\tau)(\xi + i\eta) = \frac{\tau - i}{\tau + i} (\xi - i\eta) \quad ,$$

c'est-à-dire que  $\omega(\tau)$  est "égal" à  $\frac{\tau - i}{\tau + i}$ . Or, l'application  $\tau \rightarrow \frac{\tau - i}{\tau + i} = t$  est

précisément l'isomorphisme canonique du demi-plan de Poincaré marqué en  $i$  ( $H, i$ ) sur le disque ouvert de centre 0 dans  $\mathbb{E}(\Delta, 0)$ . Ainsi, en prenant  $(\Delta, 0)$  comme nouvel espace de paramètres, l'application  $(\Delta, 0) \rightarrow (A^{1,0}(T^{1,0}X_0), 0)$  se ramène à l'identité qui est évidemment analytique.

### 3. DÉFORMATION INFINITÉSIMALE. THÉORÈME DE KODAIRA-NIRENBERG-SPENCER

Nous venons de voir qu'une déformation (locale) de  $X_0$  est définie par une famille  $\omega(t)$  d'éléments de  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  variant analytiquement en  $t$  et telle que :

$$d''\omega(t) - [\omega(t), \omega(t)] = 0, \quad \forall t \in \Delta.$$

En outre,  $\omega(0)$  est nulle.

Nous avons ainsi une application holomorphe de  $\Delta$  dans  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  telle que l'image de 0 soit zéro.

L'application tangente en 0 envoie un élément  $V = \sum_{i=1}^m V^i \frac{\partial}{\partial t^i}$  de  $(T^{1,0}\Delta)_0$  dans  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$ . Comme  $\omega(0) = 0$ , l'image de  $V$  par cette application tangente est une forme  $d''$ -fermée qui détermine ainsi un élément de  $H^1(X_0, \odot)$  premier espace de cohomologie de  $X_0$  à valeurs dans le faisceau  $\odot$  des germes de champs de vecteurs holomorphes.

Nous obtenons de cette manière un  $\mathbb{C}$ -homomorphisme de  $(T^{1,0}\Delta)_0$  dans  $H^1(X_0, \odot)$  qui est l'application de Kodaira-Spencer, notée  $\rho$ .

Considérons les cartes  $\{\zeta_i^\alpha(x, t)\}_{i \in I}$  qui, pour  $t$  fixé, déterminent la structure complexe  $\omega(t)$ ; chaque  $\zeta_i^\alpha(x, t)$  est holomorphe sur  $U_i \times \Delta$  muni de la structure  $\tilde{\omega}$  et vérifie donc les relations (7); il en résulte que la forme  $\sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial}{\partial t^a} \omega(t)|_{t=0}$  qui représente  $\rho(V)$  (et que nous noterons elle-même  $\rho(V)$  par abus de langage) s'exprime localement sur  $U_i$ , par :

$$(8) \quad \rho(V) = \sum_{\alpha=1}^n d'' \left( \sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial}{\partial t^a} \zeta_i^\alpha(x, t)|_{t=0} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\alpha},$$

où  $\{z^\alpha(x)\} = \{\zeta^\alpha(x, 0)\}$  sera une carte complexe de  $X_0$ .

Ainsi  $\rho(V)$  est, localement, l'image par  $d''$  d'un champ de vecteur de type

$$(1, 0) \text{ d'expression } \sum_{\alpha=1}^n \left( \sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial}{\partial t^a} \cdot \zeta_i^\alpha(x, t)|_{t=0} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \text{ défini sur } U_i;$$

lorsque on passe de  $U_i$  à  $U_j$ , la différence de ces deux champs est égale,

sur  $U_i \cap U_j$  (supposé non vide), à :

$$\sum_{\alpha=1}^n \left( \sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial}{\partial t^a} h_{ij}^\alpha(x,t) \Big|_{t=0} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z^\alpha} ,$$

où les  $h_{ij}^\alpha$  sont les fonctions de transitions entre les  $\zeta_i^\alpha$  et les  $\zeta_j^\alpha$  introduites au n° 1 ; nous obtenons ainsi sur chaque intersection  $U_i \cap U_j$  non vide un champ de vecteur holomorphe et donc une 1-cochaîne à valeurs dans le faisceau  $\mathbb{C}$  défini sur le nerf du recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X_0$  ; cette 1-cochaîne est un 1-cocycle par construction (en tant que cobord d'une 0-cochaîne différentiable) ; la classe de cohomologie de Čech qu'elle détermine est, par construction même, le correspondant de  $\rho(V)$  dans l'isomorphisme canonique qui lie, sur une variété, les cohomologies de Dolbeault et de Čech. Nous obtenons ainsi une définition équivalente de l'application de Kodaira-Spencer à l'aide des seules fonctions de transitions  $h_{ij}^\alpha$  (cf. [ 6 ], Ch. 1, § 3).

Si la déformation est triviale, i.e. s'il existe un isomorphisme de  $X \times \Delta$  sur  $X_0 \times \Delta$  commutant avec les projections sur  $\Delta$ , il est possible de choisir des cartes  $\zeta^\alpha(x,t)$  indépendantes de t, de sorte que l'application  $\rho$  est nulle.

Les difféomorphismes de  $X$  induisent une action sur l'ensemble des structures complexes de  $X$  ; l'orbite, sous l'action du groupe des difféomorphismes de  $X$ , d'une structure complexe est constitué de toutes les structures complexes qui lui sont isomorphes ; on a vu que l'ensemble  $\mathcal{M}$  des structures complexes à distance finie constitue un sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de l'espace vectoriel  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  et que "l'espace tangent" en 0, c'est-à-dire en  $X_0$ , est constitué de formes d"-fermées de  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  ; on vérifie que les "vecteurs tangents" à la trajectoire de  $X_0$  sous l'action du groupe  $\text{Diff}(X)$  des difféomorphismes sont des formes du type  $d^"z$ , pour  $z$  un champ  $C^\infty$  de vecteurs de type  $(1,0)$  ; ainsi  $\rho$  mesure-t-elle, au niveau infinitésimal, les variations des classes d'isomorphismes de structures complexes qui interviennent dans la déformation de  $X_0$ .

On peut se demander, dès lors, s'il n'existe pas, au voisinage de 0 dans  $\mathcal{M}$ , une section transverse à l'orbite de 0 sous l'action de  $\text{Diff}(X)$ , isomorphe à un voisinage ouvert de l'origine dans  $H^1(X_0, \mathbb{C})$ , déterminant ainsi un possible objet universel dans la catégorie des déformations locales de  $X_0$ .

Un début de réponse est donné par le théorème suivant, dans le cas où  $H^2(X_0, \mathbb{C})$  est réduit à zéro :

Théorème de Kodaira-Nirenberg-Spencer [7] . Soit  $X_0$  une variété complexe compacte, telle que  $H^2(X_0, \mathbb{C}) = \{0\}$  ; il existe une déformation (analytique) de  $X_0$  paramétrée par un ouvert de  $H^1(X_0, \mathbb{C})$  telle que l'application de Kodaira-Spencer associée soit l'identité.

La démonstration de [7] consiste à choisir arbitrairement une section transverse à l'action du groupe  $\text{Diff}(X)$  dans l'espace tangent, c'est-à-dire un sous-espace  $H$  de l'espace des formes  $d''$ -fermées de  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  qui se projette isomorphiquement sur  $H^1(X_0, \mathbb{C})$ , et à construire une application injective d'un voisinage de l'origine de  $H$  dans  $\mathcal{M}$ , appliquant l'origine de  $H$  en 0, telle que l'application tangente à l'origine soit l'identité, définissant ainsi la section transverse désirée dans  $\mathcal{M}$  en 0.

Pour ce faire, nous nous donnons une base  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  de  $H$ ,  $m = \dim H^1(X_0, \mathbb{C})$ , et nous cherchons un élément de  $\mathcal{M}$  sous la forme d'une série entière :

$$\omega(t) = \sum_{a=1}^m t_a \eta_a + \omega_2(t) + \dots + \omega_r(t) + \dots$$

où les  $\omega_r(t)$  sont des polynômes homogènes de degré  $r$  en les  $(t_1, \dots, t_m)$ , avec  $\omega_1(t) = \sum_{a=1}^m t_a \cdot \eta_a$ .

Si une telle série entière, à coefficients dans  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$ , peut être construite convergente, il est clair que le problème sera résolu. L'hypothèse relative à  $H^2(X_0, \mathbb{C})$  intervient dans la construction formelle de  $\omega(t)$  que nous reproduisons ici pour cette raison. Nous renvoyons le lecteur à [K-N-S] pour la preuve de la convergence qui utilise des estimés de Douglis-Nirenberg sur les solutions d'équations elliptiques.

La construction formelle de  $\omega(t)$  se fait par récurrence sur  $r$ . L'équation  $d''\omega - [\omega, \omega] = 0$  qui définit  $\mathcal{M}$  équivaut à la suite d'équations :

$$(9) \quad d''\sigma_r(t) - [\sigma_r(t), \sigma_r(t)] \equiv 0 \pmod{t^{r+1}} \quad \forall r,$$

où  $\sigma_r$  désigne la somme partielle  $\sum_{i=1}^r \omega_i(t)$  ; cette condition est vérifiée au cran  $r=1$  puisque  $\sum_{a=1}^m t_a \cdot \eta_a$  est  $d''$ -fermée et  $[\sum_{a=1}^m t_a \cdot \eta_a, \sum_{a=1}^m t_a \cdot \eta_a]$  est un polynôme de degré 2. Supposons que (9) soit vérifiée jusqu'au cran  $r$  et posons :

$$\psi_{r+1} = d''\sigma_r - [\sigma_r, \sigma_r] \pmod{t^{r+2}},$$

où  $\psi_{r+1}$  est un polynôme homogène de degré  $(r+1)$  ; il se trouve que  $\psi_{r+1}$  est  $d''$ -fermée ; en effet :

$$\begin{aligned} d''\psi_{r+1} &= -d''[\sigma_r, \sigma_r] & (\text{mod. } t^{r+2}) \\ &= -2[d''\sigma_r, \sigma_r] & (\text{mod. } t^{r+2}) \\ &= -2[[\sigma_r, \sigma_r], \sigma_r] - 2[\psi_{r+1}, \sigma_r] & (\text{mod. } t^{r+2}) . \end{aligned}$$

Or, le second membre de la dernière égalité est au moins de degré  $(r+2)$  ; comme  $d''\psi_{r+1}$  est homogène de degré  $(r+1)$ , il est nul. Mais  $\psi_{r+1}$  est une  $(0,2)$ -forme à valeurs dans  $T^{1,0}X_0$  ; étant  $d''$ -fermée, elle est  $d''$ -exacte en vertu de l'hypothèse  $H^2(X_0, \mathbb{Q}) = \{0\}$  ; il existe donc  $\varphi_{r+1}$  dans  $A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  telle que :

$$\psi_{r+1} = d''\varphi_{r+1} .$$

Nous posons alors :

$$\sigma_{r+1} = \sigma_r - \varphi_{r+1}$$

et vérifions aisément que  $\sigma_{r+1}$  vérifie (9) au cran  $r+1$ . Nous avons ainsi construit notre série formelle  $\omega(t)$ . Pour obtenir une série convergente le choix des  $\varphi_r$  ne devra pas être arbitraire ; on pourra, par exemple, se donner une métrique hermitienne auxiliaire sur  $X_0$  et choisir  $\varphi_{r+1}$  égal à  $\delta''G\psi_{r+1}$ , où  $G$  est l'opérateur de Green associé à la métrique et  $\delta''$  l'adjoint de  $d''$  pour cette métrique.

Nous obtenons ainsi une famille locale du type désiré, sous l'hypothèse que  $H^2(X_0, \mathbb{Q})$  est réduit à zéro. Kodaira et Spencer [9] montrent ensuite que cette famille est complète en ce sens que, pour toute famille (locale) analytique  $(\mathcal{X}, X_0) \rightarrow (\mathcal{S}, S_0)$  au voisinage de  $X_0$ , il existe un morphisme de cette famille dans celle que nous venons de construire ; ce morphisme est unique si l'espace  $H^0(X_0, \mathbb{Q})$  est réduit à zéro ; dans ce cas la déformation locale de [7] est effectivement un objet universel.

Dans le cas où  $H^2(X_0, \mathbb{Q})$  n'est pas nul, il est possible encore, en utilisant le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach, de construire une déformation locale semi-universelle de  $X_0$  ; l'espace des paramètres est alors, soit un voisinage ouvert de l'origine de  $H^1(X_0, \mathbb{Q})$ , comme précédemment, soit un sous-espace analytique de  $H^1(X_0, \mathbb{Q})$  avec une

singularité à l'origine, tel que l'espace tangent de Zariski en ce point soit  $H^1(X_0, \mathcal{O})$  tout entier ([5] ou [1]).

#### 4. L'ESPACE DES PÉRIODES

Nous considérons désormais une surface complexe  $X$  (compacte, connexe, lisse). D'après l'appendice A à l'exposé 3, l'espace  $H^2(X, \mathbb{C})$  admet une décomposition de Hodge :

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X) \quad .$$

La forme d'intersection  $\langle ., . \rangle$  induit une forme d'intersection hermitienne sur les 2-formes définie par

$$(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \bar{\psi} \rangle \quad .$$

La restriction de cette forme hermitienne à  $H^{2,0}(X)$  et  $H^{0,2}(X)$  est définie positive. Elle est définie négative sur  $H^{1,1}(X)$  si  $b_1(X)$  est impair et de signature  $(1, b_1(X) - 1)$  si  $b_1(X)$  est pair.

La dimension (complexe) de  $H^{2,0}(X)$  est le genre géométrique de  $X$  que nous noterons  $h$ .

Nous définissons l'espace des périodes  $\Omega$  de la surface  $X$  comme la partie de la grassmannienne  $\text{Gr}(H^2, h)$  des  $h$ -plans complexes de  $H^2(X, \mathbb{C}) = H^2$ , constituée des  $h$ -plans isotropes pour la forme d'intersection et tels que la restriction de la forme d'intersection hermitienne soit définie positive.

Ainsi, chaque point de  $\Omega$  correspond à une structure de Hodge "possible" pour une "possible" structure complexe sur  $X$ .

Soit  $\mu$  un point de  $\Omega \subset \text{Gr}(H^2, h)$ . L'espace tangent en  $\mu$  à la grassmannienne  $\text{Gr}(H^2, h)$  s'identifie canoniquement à :

$$T_\mu \text{Gr}(H^2, h) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu, \frac{H^2}{\mu}) \quad .$$

L'identification se fait ainsi :

un vecteur  $U$  tangent en  $\mu$  est déterminé par une courbe locale  $\gamma(u)$ ,  $u \in ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ , avec  $\gamma(0) = 0$ ,  $\dot{\gamma}(0) = U$ . A tout point  $\varphi \in \mu$  nous associons l'élément  $\frac{d}{du} \tilde{\gamma}(u)|_{u=0}$  de  $H^2$ , où  $\tilde{\gamma}$  est un relèvement de  $\gamma$  passant par  $\varphi$  ;

cet élément est parfaitement déterminé, modulo  $\mu$ , par  $\varphi$  seulement.

Considérons à présent une courbe complexe locale  $C(\tau)$  dans  $\text{Gr}(H^2, h)$ ,

où  $\tau = u + iv$  est un complexe proche de zéro, telle que  $C(0) = \mu$ . L'homomorphisme qui à  $\varphi \in \mu$  associe  $\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \tilde{C}(\tau)|_{\tau=0}$  (modulo  $\mu$ ), où  $\tilde{C}(\tau)$  est un relèvement de  $C(\tau)$  passant par  $\varphi$ , correspond au vecteur (réel)  $\frac{1}{2} (C_* (\frac{\partial}{\partial u}) - i JC_* (\frac{\partial}{\partial v}))_0$  ; de même l'homomorphisme qui associe à  $\varphi$   $\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{C}(\tau)|_{\tau=0}$  (modulo  $\mu$ ) correspond au vecteur  $\frac{1}{2} (C_* (\frac{\partial}{\partial u}) + i JC_* (\frac{\partial}{\partial v}))_0$ .

Ainsi la courbe  $C(\tau)$  est holomorphe en 0 si et seulement si  
 $\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \tilde{C}(\tau)|_{\tau=0}$  appartient à  $\mu$ .

Si tel est le cas l'homomorphisme :  $\varphi \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{C}(\tau)|_{\tau=0}$  (modulo  $\mu$ ) s'identifie à  $C_* (\frac{\partial}{\partial u})$ .  
 L'espace des périodes  $\Omega$  est un ouvert de la sous-variété  $Q$  de  $Gr(H^2, h)$  définie par l'équation

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \quad .$$

L'espace tangent en  $\mu \in \Omega$  à  $\Omega$  s'identifie donc à :

$$T_\mu \Omega = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu, \frac{\mu^\perp}{\mu})$$

où  $\mu^\perp$  désigne l'orthogonal de  $\mu$  dans  $H^2$  pour la forme d'intersection (comme  $\mu$  est isotrope, il appartient à son orthogonal  $\mu^\perp$ ).

Le sous-espace  $\mu$  de  $H^2$  induit une structure de Hodge "virtuelle"  
 $H^2 = \mu \oplus H_\mu^{1,1} \oplus \bar{\mu}$ , et  $H_\mu^{1,1}$  s'identifie précisément à  $\mu^\perp / \mu$  de sorte que :

$$T_\mu \Omega = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu, H_\mu^{1,1}) \quad .$$

## 5. APPLICATION DES PÉRIODES

Soit  $X_0$  une surface complexe et  $\omega : \Delta \rightarrow A^{0,1}(T^{1,0}X_0)$  une déformation (analytique) de  $X_0$ , où  $\Delta$  est une boule ouverte de  $\mathbb{C}^m$  centrée à l'origine.

A tout point  $t$  de  $\Delta$  est associé une structure complexe  $X_{(t)}$  sur la variété  $X$  sous-jacente à  $X_0$ , et donc une structure de Hodge sur  $H^2(X, \mathbb{C})$ . Nous notons  $p(t)$  le point correspondant de  $\Omega$  et  $p$  est dite application des périodes associée à la déformation.

Théorème . L'application des périodes est holomorphe.

Preuve : Soit  $t_0 \in \Delta$  et  $\mu_0 = p(t_0) \in \Omega$ . Je considère  $\varphi_0 \in \mu_0$  une 2-forme holomorphe de  $X_{(t_0)}$ . L'application des périodes  $p$  est holomorphe en  $t_0$  si pour toute courbe holomorphe (locale) de  $\Delta$  passant par  $t_0$  et paramétrée par  $\tau$  la courbe correspondante  $C(\tau)$  de  $\Omega$  est elle-même holomorphe en 0. Pour appliquer le critère du paragraphe précédent, il nous faut un relèvement  $C^\infty \tilde{C}$  de  $C$  passant par  $\varphi_0$ ; on peut, par exemple, utiliser une métrique hermitienne  $g_t$ , fonction  $C^\infty$  de  $t$ , et considérer la partie  $\Delta''$ -harmonique de la composante de type  $(2,0)$  - dans  $X_{(t)}$  - de  $\varphi_0$ ; la courbe  $\tilde{C}(\tau)$  ainsi obtenue est  $C^\infty$  en vertu de la régularité de l'opérateur de Green utilisé (cf. [K-S 1], § 2). Localement,  $\tilde{C}(\tau)$  s'écrit :

$$\tilde{C}(\tau) = \varphi_{12}(\tau) d\zeta^1(x, \tau) \wedge d\zeta^2(x, \tau)$$

relativement à la carte  $\{\zeta^1(x, \tau)\}$  introduite à la fin du n° 2. Comme les  $\zeta^\alpha(x, \tau)$  dépendent analytiquement de  $\tau$ ,  $\frac{\partial \tilde{C}(\tau)}{\partial \tau}$  appartient à  $C(\tau)$  pour tout  $\tau$ , ce qui démontre le théorème.

Plaçons-nous au point 0 de  $\Delta$  et notons encore  $\mu_0$  l'image de 0 dans  $\Omega$  correspondant à la structure de Hodge initiale. Nous nous proposons de déterminer l'application tangente en 0 de l'application des périodes  $p$ . Soit  $V = \sum V^a \frac{\partial}{\partial \mu^a}$  un vecteur tangent (de type  $(1,0)$ ) en 0 à  $\Delta$  déterminé par une courbe holomorphe locale de  $\Delta$  paramétrée par  $\tau$ .

L'image de  $V$  par  $dp_0$  est le vecteur (de type  $(1,0)$ ) en  $\mu_0$  dont la partie réelle correspond à l'homomorphisme

$$\varphi \longrightarrow \frac{\partial \tilde{C}(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \quad (\text{modulo } \mu)$$

puisque  $p$  est holomorphe. Nous obtenons ainsi (en confondant un vecteur de type  $(1,0)$  et sa partie réelle et en identifiant  $\mu_0^\perp / \mu_0$  avec  $H^{1,1}(X_0)$  :

$$dp_0(V) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 d'' \zeta^\alpha(x, 0) \wedge dz^\beta$$

soit encore, en vertu de (8) :

$$(10) \quad dp_0(V) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \varphi_{\alpha\beta} \frac{\dot{w}(V)}{\mu} dz^{\bar{\alpha}} \wedge dz^\beta .$$



# 6. LE TRIANGLE FONDAMENTAL (cf. [3], II)

Le fibré tangent holomorphe  $T^{1,0}X_0$  est dual du fibré cotangent holomorphe, de sorte que les espaces de cohomologie  $H^p(X_0, \mathcal{O})$  ( $p = 0, 1, 2$ ) à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{O}$  se contractent avec les espaces  $H^{p,q}(X_0)$  qui s'identifient, rappelons-le, aux espaces  $H^q(X_0, \Omega^p)$ . Par contraction avec  $H^{2,0}(X_0) \simeq H^0(X_0, \Omega^2)$  nous obtenons ainsi trois homomorphismes de cup-produit -contraction que nous écrivons sous la forme :

$$\begin{aligned} H^0(X_0, \mathcal{O}) &\xrightarrow{K_0} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_0), H^{1,0}(X_0)) \\ H^1(X_0, \mathcal{O}) &\xrightarrow{K_1} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_0), H^{1,1}(X_0)) \\ H^2(X_0, \mathcal{O}) &\xrightarrow{K_2} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_0), H^{1,2}(X_0)) \quad . \end{aligned}$$

En termes de cohomologie de Dolbeault tous les espaces s'expriment en termes de formes d"-fermées, formes scalaires de type (p,q) pour les espaces  $H^{p,q}(X_0)$ , formes de type (0,p) à valeurs dans  $T^{1,0}X_0$  pour les espaces  $H^p(X_0, \mathcal{O})$ . Les homomorphismes  $K_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  s'explicitent alors ainsi, relativement à une carte locale  $\{z^\alpha\}$  de  $X_0$  :

$$(11) \quad \begin{aligned} K_0(\xi)\varphi &= \sum_{\alpha, \lambda=1}^2 \varphi_{\alpha\lambda} \cdot \xi^\lambda dz^\alpha \\ K_1(\theta)\varphi &= \sum_{\alpha, \lambda=1}^2 \varphi_{\alpha\lambda} \cdot \theta_{\bar{\mu}}^\lambda dz^{\bar{\mu}} \wedge dz^\alpha \\ K_2(\sigma)\varphi &= \sum_{\alpha, \lambda=1}^2 \varphi_{\alpha\lambda} \cdot \sigma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^\lambda dz^{\bar{\mu}} \wedge dz^{\bar{\nu}} \wedge dz^\alpha \end{aligned}$$

pour  $\varphi$  2-forme holomorphe.

On se souvient que  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(X_0), H^{1,1}(X_0))$  s'identifie canoniquement à  $T_{\mu_0} \Omega$  ; nous obtenons ainsi le triangle fondamental :

$$\begin{array}{ccc} T_0 \Delta & \xrightarrow{dp_0} & T_{\mu_0} \Omega = \text{Hom}(H^{2,0}(X_0), H^{1,1}(X_0)) \\ & \searrow \rho & \nearrow K_1 \\ & H^1(X_0; \mathcal{O}) & \end{array}$$

et la simple confrontation de (10) et (11) montre que ce triangle est

commutatif.

7. LE THÉORÈME D'ANDREOTTI-WEIL (cf. [4], th. 17)

Si le fibré canonique de  $X_0$  est trivial,  $H^{2,0}(X_0)$  est un espace de dimension 1 engendré par une 2-forme holomorphe sans zéro. Il en résulte immédiatement que les homomorphismes  $K_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  du § 6 sont des isomorphismes, et donc :

$$\dim H^0(X_0; \mathbb{C}) = h^{1,0}$$

$$\dim H^1(X_0; \mathbb{C}) = h^{1,1}$$

$$\dim H^2(X_0; \mathbb{C}) = h^{1,2} = h^{1,0} .$$

En particulier, si  $X_0$  est une surface K3,  $H^0(X_0, \mathbb{C})$  est réduit à  $\{0\}$ , ce qui exprime que le groupe des automorphismes de  $X_0$  est discret,  $H^1(X_0, \mathbb{C})$  est un espace vectoriel complexe de dimension 20 et  $H^2(X_0, \mathbb{C})$  est réduit à  $\{0\}$ . Nous pouvons alors appliquer les théorèmes de Kodaira-Nirenberg-Spencer et Kodaira-Spencer et obtenir un espace de déformations locales universel de  $X_0$  paramétré par un voisinage ouvert de  $H^1(X_0, \mathbb{C})$ , tel que l'application  $\rho$  de Kodaira-Spencer soit l'identité.

En reportant ces observations sur le triangle fondamental nous concluons que  $dp_0$  s'identifie à  $K_1$  et est donc un isomorphisme, ce qui prouve le

Théorème d'Andreotti-Weil . L'application des périodes associée à la famille universelle de déformations locales d'une surface K3  $X_0$  est un isomorphisme local.

Corollaire . Les surfaces K3 algébriques sont denses dans la famille universelle de déformations de  $X_0$ .

Preuve : Observons tout d'abord que, dans le cas d'une surface K3, la grassmannienne  $Gr(H^2, h)$  est l'espace projectif associé à  $H^2(X_0, \mathbb{C})$ , et  $\Omega$  est un ouvert de la quadrique définie par l'équation :

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 .$$

Si  $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{22})$  est une base de  $H_2(X_0; \mathbb{Z})$  un point de  $\Omega$  est déterminé par ses coordonnées homogènes qui sont les intégrales d'une 2-forme  $\varphi$  correspondante sur les  $\Gamma_i$ . En particulier, le point  $\mu_0$  de  $\Omega$ , correspondant à la structure  $X_0$  de référence, est déterminé par le 22-uple :

$$\left( \int_{\Gamma_1} \varphi : \dots : \int_{\Gamma_{22}} \varphi \right) = (m_1 : \dots : m_{22})$$

où  $\varphi$  est une 2-forme holomorphe de  $X_0$ . Ce 22-uple  $(m_1 : \dots : m_{22})$  peut être approché d'aussi près qu'on veut par un 22-uple de nombres rationnels-complexes, i.e. de nombres complexes à parties réelles et imaginaires rationnels.

Ces points correspondent, en vertu du théorème d'Andreotti-Weil, à des structures complexes proches de  $X_0$ . Il reste à montrer qu'elles sont algébriques. Or ces surfaces possèdent une 2-forme holomorphe dont les parties réelle et imaginaire représentent des éléments de  $H^2(X, \mathbb{Z})$  dans  $H^2(X, \mathbb{C})$  et engendrent dans le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $H^2(X, \mathbb{Q})$  un espace de dimension 2 tel que la restriction à ce sous-espace de la forme d'intersection soit définie positive ; son orthogonal dans  $H^2(X, \mathbb{Q})$  est un sous-espace de dimension 20 et de signature (1,19). Il existe donc un élément de  $H^2(X, \mathbb{Q})$  -et donc aussi un élément de  $H^2(X, \mathbb{Z})$ - de carré positif et orthogonal à  $H^{2,0}$ , i.e. de type (1,1), i.e. une classe de Chern de carré positif ce qui implique que notre surface est algébrique (cf. Exposé III).

\*  
\*  
\*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Douady : Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki 1964-1965, Exposé No 277.
- [2] G.D. Folland, J.J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann equation, Annals of Math . Studies 75, Princeton Univ. Press (1972).
- [3] P. Griffiths : Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II, Amer. J. Math . 90 (1968), 568-626, 805-865.

- [4] K. Kodaira : On the structure of compact complex analytic surfaces, I, Amer. J. Math . 86 (1964), 751-798.
- [5] M. Kuranishi : Deformations of compact complex manifolds, Presses de l'Université de Montréal 39 (1971).
- [6] K. Kodaira, J. Morrow : Complex manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New-York (1971).
- [7] K. Kodaira, L. Nirenberg, D. Spencer : On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math . 68 (1958) 450-459.
- [8] K. Kodaira, D. Spencer : On deformations of complex analytic structures, I, Annals of Maths. 67 (1958), 328-466.
- [9] K. Kodaira, D. Spencer : A theorem of completeness for complex analytic fibre structures, Acta Math 100 (1958), 281-294.
- [10] D. Newlander, L. Nirenberg : Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Annals of Math . 65 (1957), 391-404.

53, rue de Lyon  
75012 PARIS