Astérisque

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

# Groupes d'holonomie des varietes riemanniennes

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 169-180

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__169_0>

*EXPOSÉ XV*

# GROUPES D'HOLONOMIE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Jean-Pierre BOURGUIGNON

Dans cet exposé nous nous proposons de discuter les résultats connus sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. Nous portons une attention particulière aux groupes d'holonomie spéciaux qui apparaissent sur certaines variétés kählériennes. Le groupe d'holonomie est un invariant riemannien qui en dit d'autant plus sur la variété riemannienne qu'il est petit (ainsi une variété plate a un groupe d'holonomie fini). Aussi ne distingue-t-il que des variétés ayant des propriétés spéciales. Nous supposons que les variétés considérées sont $C^\infty$ et connexes.

Rappelons pour commencer la définition du <u>groupe d'holonomie d'une variété riemannienne</u> $(M,g)$. Nous verrons ultérieurement qu'il serait plus juste de parler de la <u>représentation d'holonomie</u>.

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ une courbe $C^1$ par morceaux tracée sur $M$. Nous désignons par $D$ la dérivation covariante de la métrique riemannienne $g$ et par $\dot\gamma$ le vecteur-vitesse de la courbe $\gamma$. <u>Le transport parallèle</u> $\tau_\gamma$ le long de $\gamma$ est la résolvante de l'équation différentielle linéaire $D_{\dot\gamma}X = 0$ le long de $\gamma$, i.e. l'application linéaire qui au vecteur $X_o$ tangent en $p$ à $M$ associe la valeur pour $t = 1$ de la solution de l'équation ayant $X_o$ pour condition initiale. On peut remarquer que, l'équation différentielle étant homogène, $\tau_\gamma$ ne dépend pas du paramétrage de $\gamma$ ; de plus la connexion de Levi-Civita étant métrique, $\tau_\gamma$ est en fait une isométrie. Le groupe d'holonomie en $p$, soit $Hol_p$, est le sous-groupe de $O(T_pM,g_p)$ engendré par les transformations $\tau_\lambda$ lorsque $\lambda$ parcourt l'espace $\mathcal{L}_p$ des lacets en $p$ $C^1$ par morceaux définis au paramétrage près. En fait l'application $\tau$ qui, à la classe d'un lacet $\lambda$, associe $\tau_\lambda$ est de façon évidente un homomorphisme de groupes de $\mathcal{L}_p$ dans $Hol_p$.

On voit alors facilement que, si on change le point-base $p$ en le point $q$, il y a coïncidence entre $Hol_q$ et $\tau_\gamma \circ Hol_p \circ \tau_\gamma^{-1}$ où $\gamma$ désigne une courbe arbitraire de $p$ à $q$. Ainsi la représentation d'holonomie est bien définie à équivalence près quel que soit le point base.

En ne considérant que le groupe $\mathcal{L}_p^o$ des lacets homotopes à zéro, on définit le <u>groupe</u> (ou <u>la représentation</u>) <u>d'holonomie restreinte</u>, soit $Hol_p^o$. On a bien entendu un homomorphisme de $\pi_1(M,p)$ dans le groupe quotient $Hol_p/Hol_p^o$.

Le reste de cet exposé est consacré à décrire quelles représentations peuvent être des représentations d'holonomie. Nous examinons comment se traduisent en termes géométriques, notamment en termes de courbure, les propriétés de ces représentations. (Au niveau de généralité où nous nous sommes placés jusqu'à maintenant, toutes les notions introduites ont un sens pour toute connexion sur un G-fibré où G est un groupe de Lie, cf[4] par exemple).

## 1 . <u>PROPRIÉTÉS DE LA REPRÉSENTATION D'HOLONOMIE (RESTREINTE)</u>

1) (Borel-Lichnerowicz) <u>Le groupe $Hol_p^o$ est un sous-groupe de Lie fermé de $SO(T_pM)$.</u>

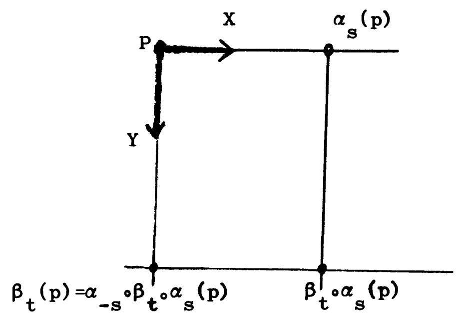
En effet le groupe $Hol_p^o$ est connexe par arcs comme image continue du groupe $\mathcal{L}_p^o$ qui est connexe par arcs. D'après un théorème de Yamabe (cf[6]) cela implique que $Hol_p^o$ est un sous-groupe intégral de $SO(T_pM)$. Pour montrer qu'il est fermé, la preuve est plus délicate car il faut s'assurer que la partie centrale est au plus de dimension 1 ce qui nécessite d'étudier l'action de $Hol_p^o$ dans le cas réductible. (Pour une preuve complète, voir [3] page 73).

2) (Ambrose-Singer [1]) <u>L'algèbre de Lie $\mathcal{H}ol_p$ du groupe $Hol_p$ est engendrée par les transformations antisymétriques de la forme $\tau_\gamma^{-1} \circ R_{x,y} \circ \tau_\gamma$ où $x,y$ sont des vecteurs de $T_qM$ et $\gamma$ un chemin quelconque de $p$ à $q$.</u>

(Pour une preuve complète, voir [3] page 89).

Nous expliquons seulement ici le lien dans un sens. Soient $x$ et $y$ deux vecteurs tangents en $p$ à $M$. On peut les prolonger au voisinage de $p$ en deux champs de vecteurs $X$ et $Y$ tels que $[X,Y] = 0$. Notons $(\alpha_s)_{s\in I}$ et $(\beta_t)_{t\in J}$ les flots de $X$ et $Y$. Il suit que la courbe $\gamma_{XY}^{st}$ obtenue en suivant pendant le temps $s$ la courbe intégrale de $X$, puis pendant le temps $t$ celle de $Y$ issue de $\alpha_s(p)$, puis pendant le temps $s$ à nouveau celle de $-X$ issue de $\beta_t \circ \alpha_s(p)$ et enfin pendant le temps $s$ celle de $-Y$ issue de $\beta_t(p) = \alpha_{-s} \circ \beta_t \circ \alpha_s(p)$ (comme $[X,Y] = 0$, les flots de $X$ et $Y$

commutent) est en fait un lacet $C^1$ par morceaux en p .




Par définition de la courbure, nous avons alors

$$R_{x,y} = \frac{d^2}{dt^2}(\tau_{\gamma_{XY}}^{tt})\Big|_{t=0} .$$

C'est ainsi que la courbure apparaît liée à l'holonomie. C'est par ce biais aussi que la symétrie de la connexion de Levi-Civita va intervenir pour restreindre les groupes d'holonomie possibles. En effet l'absence de torsion de D implique que la courbure vérifie <u>la première identité de Bianchi</u>

$$R_{x,y}z + R_{y,z}x + R_{z,x}y = 0$$

pour tous vecteurs tangents x, y et z .

Deux autres remarques concernant le théorème d'Ambrose-Singer peuvent être faites :

i) il montre que l'holonomie tient compte de la courbure en <u>tout</u> point de la variété M ;

ii) il présente surtout un intérêt théorique, car pour l'utiliser il faut connaître le transport parallèle sur tout M , donc en fait connaître l'holonomie. Cependant par un choix judicieux de lacets en p (plus compliqués que ceux introduits précédemment), on montre que pour tous vecteurs $x_1,\dots,x_{k+2}$ tangents en p les dérivées $(D^k_{x_1,\dots,x_k} R)_{x_{k+1},x_{k+2}}$ appartiennent aussi à l'algèbre d'holonomie.

## 2 . HOLONOMIE ET OBJETS PARALLÈLES

On rappelle qu'un champ d'objets géométriques (tenseurs, densités, k-plans) est dit <u>parallèle le long d'une courbe</u> $\gamma$ s'il est invariant par transport parallèle le long de $\gamma$ et <u>parallèle</u> si sa dérivation covariante est nulle, donc s'il est parallèle le long de toute courbe.

Principe d'holonomie. Tout champ d'objets parallèle définit en chaque point un objet invariant par le groupe d'holonomie et réciproquement.

Le sens direct est évident par définition même du groupe d'holonomie. Pour la réciproque, si $t_p$ est un objet géométrique en $p$ , pour tout point $q$ de $M$ on peut définir la valeur en $q$ de $t$ en prenant pour $t(q)$ le transporté parallèle de $t_p$ le long d'un chemin $\gamma$ de $p$ à $q$ . Si nous avions pris un autre chemin $\gamma'$ de $p$ à $q$ , nous aurions obtenu le même résultat puisque $\tau_{\gamma'}^{-1} \circ \tau_{\gamma}(t_p) = t_p$ , $\tau_{\gamma'}^{-1} \circ \tau_{\gamma}$ appartenant à $\mathrm{Hol}_p$ .

Il est intéressant de regarder quelques exemples d'objets géométriques parallèles :

Exemple 0 . La métrique $g$ elle-même comme nous l'avons déjà fait remarquer. En fait génériquement seuls les objets déduits algébriquement de $g$ sont parallèles. Une façon algébrique de traduire cette propriété : le groupe d'holonomie d'une variété riemannienne générique est le groupe orthogonal entier (dont les seuls invariants sont les objets déduits de $g$) . On obtient cette propriété, en perturbant si nécessaire la métrique(par exemple en ajoutant dans une boule au voisinage d'un point la métrique de la sphère) dès que les transformations $\{R_{x,y} | x,y \in T_pM\}$ engendrent l'espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ des transformations antisymétriques.

Exemple 1. Pour une métrique kählérienne, il est connu que la structure presque complexe $J$ (ou la forme de Kähler $\omega$) est parallèle. Le groupe d'holonomie est alors nécessairement contenu dans $U(T_pM,J_p,g_p) = G\ell(T_pM,J_p) \cap O(T_pM,g_p)$ ,le groupe unitaire. On montre que génériquement une variété kählérienne a le groupe unitaire tout entier comme groupe d'holonomie. (La preuve se fait de façon analogue au cas riemannien, en perturbant la métrique kählérienne au voisinage d'un point en lui ajoutant le potentiel kählérien de la métrique de Fubini-Study du projectif complexe $\mathbb{C}P^m$) .

Exemple 2. Si une variété kählérienne a un élément de volume complexe parallèle $\nu$ , i.e. une m-forme différentielle extérieure holomorphe ( $m$ est la dimension complexe de $M$), alors son groupe d'holonomie est contenu dans $SU(T_pM,J_p)$ .

On peut dans ce cas démontrer la

Proposition 1. Une métrique kählérienne est à courbure de Ricci nulle si et seulement si son groupe d'holonomie restreinte est contenu dans le groupe spécial unitaire.

Preuve. On se sert de la partie directe du théorème d'Ambrose-Singer. Nous avons vu dans l'Exposé II que la courbure de Ricci $r$ d'une métrique kählérienne peut se définir comme

$$r_{x,y} = \mathrm{Trace}_{\mathbb{C}}(R_{x,y}) \ .$$

Rappelons que cette propriété est une conséquence de la première identité de Bianchi pour la courbure, donc de la symétrie de la connexion.

Par suite nous obtenons que, pour chaque point q de M ,

$$\{R_{x,y} | x,y \in T_qM\} \subset \mathfrak{su}(T_qM,J_q) .$$

Réciproquement, si le groupe d'holonomie est contenu dans $SU(T_pM,J_p)$, cela signifie qu'il existe une section parallèle du fibré en droites complexes des m-formes extérieures complexes. Ce fibré est donc plat et sa courbure,qui s'identifie à la courbure de Ricci, comme nous l'avons vu dans l'Exposé II est donc nulle. □

<u>Exemple</u> 2bis. Le cas du groupe $SU_2$ est un peu spécial car il s'identifie au groupe des quaternions unités, le groupe $Sp_1$ . Il n'est donc pas surprenant que l'on puisse donner une description particulière des objets parallèles lorsque le groupe d'holonomie est $SU_2$ . Lorsque seulement le groupe d'holonomie restreinte est $SU_2$ , alors les objets parallèles n'existent que localement.

Dans notre présentation, outre <u>la forme de Kähler</u> $\omega$ définie par $\omega_{x,y} = g_{Jx,y}$ qui est parallèle (puisque g et J le sont), il y a la 2-forme de volume complexe $\nu$ (de type (2,0)) et la 2-forme complexe conjuguée $\bar{\nu}$ (de type (0,2)). Outre $\omega$ il est possible de prendre $\mathfrak{Re}\,\nu = \frac{\nu+\bar{\nu}}{2}$ et $\mathfrak{Im}\,\nu = \frac{\nu-\bar{\nu}}{2i}$ comme base des formes parallèles. L'avantage que présentent ces dernières formes est leur caractère réel.

Une autre description de ces trois formes ne fait pas jouer de rôle privilégié à une structure complexe particulière. Nous la donnons maintenant. L'espace des 2-formes d'un espace euclidien de dimension 4 admet une décomposition en deux sous-espaces de dimension 3 qui, dès qu'une orientation est choisie, sont les sous-espaces propres de l'opérateur $*$ de Hodge. (Par définition, si $\alpha$ est une k-forme, $*\alpha$ est la (n-k)-forme telle que $\alpha \wedge *\alpha = g(\alpha,\alpha)\, v_g$). On note alors

$$\Lambda^2T^*M = \Lambda^+T^*M \oplus \Lambda^-T^*M$$

puisqu'en dimension 4 l'opérateur $*$ est une involution, donc que ses valeurs propres sont + 1 et - 1 .

Comme, en un point p de M , $\Lambda^2T_p^*M$ s'identifie à l'algèbre de Lie du groupe $SO_4$ , la décomposition précédente peut aussi se lire comme celle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_4$ en ses 2 idéaux irréductibles isomorphes à $\mathfrak{so}_3 \simeq \mathfrak{su}_2$ . (Ces 2 idéaux ne sont pas isomorphes comme $SO_4$-modules). La réduction de l'holonomie de $SO_4$ à $SU_2 = Sp_1$ s'interprète comme le fait qu'un des 2 facteurs est laissé invariant (chaque facteur est un idéal dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_4$), d'où l'apparition d'un espace de dimension 3 de 2-formes parallèles. Il est facile de voir que les éléments de longueur 1 de ce sous-espace s'identifient aux structures complexes sur TM induisant toutes la même orientation. (L'autre sous-espace est formé des multiples des structures complexes induisant l'orientation opposée).

Lorsque la représentation d'holonomie se réduit à $SU_2$ , il y a donc une sphère $S^2$ de structures complexes parallèles, donc pour lesquelles la métrique est kählérienne.

Ce point de vue est relié au fait que $SU_2 = Sp_1$ . Toute base orthonormée (I,J,K) du facteur laissé invariant s'identifie à une base des quaternions imaginaires, définissant une structure de $\mathbb{H}$-module sur chaque espace tangent. Il est possible de trouver de telles structures sous des hypothèses globales sur une variété de dimension 4 . Ainsi nous avons

Théorème. Soit M une variété compacte de dimension 4 orientable spinorielle (i.e. à deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ nulle) à signature $\sigma(M)$ non nulle. Toute métrique à courbure scalaire positive ou nulle sur M admet $SU_2$ comme groupe d'holonomie restreinte.

Corollaire. Toute métrique à courbure scalaire non négative sur la variété différentielle M sous-jacente à une surface complexe K3 est à groupe d'holonomie $SU_2$ .

En effet, comme $w_2(M) \equiv c_2(M,J)$ (mod 2), M est spinorielle. De plus $\sigma(M) = \pm 16$ suivant l'orientation choisie. Par ailleurs M est simplement connexe, d'où le passage au groupe d'holonomie entier. De plus de telles structures existent grâce à la solution par S.T. Yau de la conjecture de Calabi.

Idée de la Preuve : On considère l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ agissant sur les champs de spineurs. Comme $\sigma(M) \neq 0$ , il existe nécessairement d'après le théorème de l'indice un champ de spineurs $\psi \neq 0$ tel que $\mathcal{D}\psi = 0$ (on dit que $\psi$ est harmonique). Comme

$$\mathcal{D}^2\psi = D^*D\psi + \frac{u}{4}\psi$$

(où D désigne la dérivée covariante de Levi-Civita et u la courbure scalaire), on trouve en intégrant l'équation contre $\psi$ , que $u \geq 0$ implique $D\psi = 0$ et $u \equiv 0$ .

Exemple 3. Une généralisation à des dimensions supérieures de l'holonomie $SU_2 = Sp_1$ est le cas où la représentation d'holonomie se réduit à $Sp_r$ le sous-groupe compact maximal de $G\ell(r,\mathbb{H})$ où $\mathbb{H}$ désigne le corps des quaternions agissant en dimension $4r$. Les objets parallèles sont engendrées par la métrique $g$ et trois champs d'endomorphismes $I$, $J$ et $K$ vérifiant $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}$ et $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, autrement dit se comportant comme la base canonique de l'espace des quaternions imaginaires. Le fibré tangent devient donc un fibré en $\mathbb{H}$-modules. Comme la représentation de $Sp_r$ est une sous-représentation de $SU_{2r}$, toute métrique riemannienne dont la représentation d'holonomie est $Sp_r$ est à courbure de Ricci nulle d'après la Proposition donnée dans l'exemple 2. De plus, si $I$ est pris comme structure complexe de référence, alors $J+iK$ définit une 2-forme de type $(2,0)$ par rapport à $I$ qui, étant parallèle, est nécessairement holomorphe. C'est en fait une caractérisation de l'holonomie $Sp_r$.

Proposition 2. Une métrique kählérienne admet $Sp_r$ comme groupe d'holonomie si et seulement si une 2-forme holomorphe non-nulle est parallèle.

Exemple 4. Cas des formes différentielles extérieures.
Remarquons d'abord que, $D$ étant symétrique, toute k-forme différentielle extérieure $\alpha$ parallèle est fermée car

$$d\alpha_{x_o,\dots,x_k} = \sum_{i=o}^{k} (-1)^i \, (D_{x_i}\alpha)_{x_o,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_k} .$$

(ainsi pour une 1-forme différentielle $\alpha$ et des extensions $X$ et $Y$ de vecteurs tangents $x$ et $y$

$$\begin{aligned}(d\alpha)_{x,y} &= x.(\alpha_Y) - y.(\alpha_X) - \alpha_{[X,Y]} \\ &= (D_x\alpha)_y + \alpha_{D_xY} - (D_y\alpha)_x - \alpha_{D_yX} - \alpha_{[X,Y]}\end{aligned}$$

et les termes ne contenant pas de dérivées de $\alpha$ font exactement intervenir la torsion de la connexion $D$).

Un cas particulièrement intéressant est fourni par la "k-forme volume" d'un champ de k-plans. Il est en effet facile de voir qu'un champ de k-plans est invariant par transport parallèle si et seulement si la forme-volume qu'il définit est parallèle. Il suit alors de la remarque précédente et du théorème de Frobénius qu'il est complètement intégrable comme noyau de la forme fermée $*\alpha$ où $*$ est l'opérateur de Hodge lui-meme parallèle. Il définit donc un feuilletage dont les feuilles sont totalement géodésiques.

(En effet si $\gamma$ est une géodésique de $M$ tangente en un point à une feuille intégrale de la forme $\alpha$ , alors elle l'est en tout point, donc est restée dans la feuille, car le long de $\gamma$ nous avons

$$D_{\dot\gamma}(\iota_{\dot\gamma}\alpha) = \iota_{D_{\dot\gamma}\dot\gamma}\alpha + \iota_{\dot\gamma}(D_{\dot\gamma}\alpha) = 0$$

avec comme condition initiale $\iota_{\dot\gamma}\alpha(0) = 0$.)

Ceci nous amène à l'application principale du concept d'holonomie, à savoir l'étude de la réductibilité (locale ou globale) des variétés riemanniennes.

Le théorème de décomposition locale s'énonce comme suit :

Si la représentation d'holonomie restreinte agit trivialement sur le sous-espace $V_o$ et préserve la décomposition $V_o^\perp = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ , alors il existe un voisinage $U$ de $p$ tel que $U$ s'écrive comme le produit riemannien $U = \prod_{i=o}^{k} U_i$ où la métrique est plate sur le facteur $U_o$ et coïncide sur les autres facteurs avec celle induite par celle de $U$ . De plus la représentation $Hol_p$ se décompose en un produit de représentations internes à chaque facteur. (Pour une preuve, voir [3] page 185).

C'est dans l'étude de la réductibilité qu'il est important de penser à l'holonomie comme une représentation. Le groupe d'holonomie n'est pas un groupe abstrait. C'est un sous-groupe (défini à conjugaison près) du groupe orthogonal agissant par sa représentation fondamentale sur un espace euclidien. Supposons par exemple que deux sous-groupes agissant dans deux facteurs d'une décomposition en produit riemannien soient abstraitement isomorphes. Il n'est pas possible que le groupe d'holonomie soit isomorphe à un de ces sous-groupes et agisse diagonalement sur les deux facteurs. On dit quelquefois qu'il y a nécessairement réductibilité forte.

Le théorème de décomposition globale (dit théorème de de Rham) s'obtient alors à partir du théorème local par application du principe de monodromie.

Soit $M$ une variété riemannienne complète. Si la représentation d'holonomie de $M$ est réductible, alors $M$ est revêtue par un produit riemannien de variétés complètes.

(Pour une preuve, voir [3] page 187).

Bien sûr, si $M$ est simplement connexe, le théorème précédent implique que $M$ est globalement un produit. Il permet de ramener l'étude des variétés riemanniennes à celle des variétés riemanniennes irréductibles ou plates. En effet il faut prendre garde à ce que si, localement, toute variété plate est bien un produit riemannien, il n'en est rien globalement même pour les tores car tous les tores ne sont pas rectangulaires!

## 3 . LE THÉORÈME DE CLASSIFICATION

Grâce aux symétries de la courbure et à la description de l'algèbre d'holonomie donnée par le théorème d'Ambrose-Singer, le théorème suivant a été obtenu

(Berger-Simons). Le groupe d'holonomie restreinte d'une variété riemannienne irréductible $M$ de dimension $n$ est transitif sur la sphère-unité $S^{n-1}$ dès que $M$ n'est pas un espace riemannien localement symétrique de rang $\geq 2$ .

Rappelons les définitions équivalentes d'un espace riemannien localement symétrique $M$ :

i) la courbure de Riemann $R$ est parallèle ;

ii) pour tout point $p$ de $M$ , la symétrie géodésique $\tau_p$ définie localement autour de $p$ est une isométrie riemannienne ;

iii) $M$ est un espace homogène riemannien $G/K$ muni d'une involution $\sigma$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que la composante connexe de l'ensemble de ses points fixes s'identifie à la composante connexe de l'identité $K^o$ de $K$ .

De plus le rang de l'espace riemannien localement symétrique est la dimension maximale des sous-variétés plates totalement géodésiques.

La démonstration originelle de M. Berger (cf.[2]) a été simplifiée par J. Simons (cf.[5]) . Malgré tout, elle reste très compliquée et en particulier le fait que, hormis le cas symétrique, $Hol_p$ agit transitivement sur la sphère unité $S_pM$ de $T_pM$ n'a pas de démonstration directe.

Donnons une bribe de la démonstration qui montre encore une fois le rôle joué par la première identité de Bianchi.

Soit $x$ un point de $S_pM$ . D'après l'esquisse de démonstration du théorème d'Ambrose-Singer, pour des éléments quelconques $y$, $z$ de $T_pM$ , le vecteur $R_{y,z}\, x$ est tangent à l'orbite de $x$ sous le groupe $Hol_p^o$ . Si nous supposons que $Hol_p^o$ n'est pas transitif sur $S_pM$ , il existe au moins un vecteur $x'$ tangent à $S_pM$ orthogonal à cette orbite, d'où, pour tous $y$, $z$ dans $T_pM$ ,

$$g(R_{y,z}\, x, x') = 0 \ .$$

Mais la première identité de Bianchi implique que la courbure $R$ a la propriété de symétrie "par paires"

$$g(R_{y,z}\, x,x') = g(R_{x,x'} y,z) \ .$$

Il suit donc que l'endomorphisme antisymétrique $R_{x,x'}$ est nul. On peut ainsi construire beaucoup d'endomorphismes de courbure nuls, puis par utilisation du théorème d'Ambrose-Singer (et beaucoup de travail!) suffisamment de sous-variétés totalement géodésiques pour aboutir au fait que $M$ est localement symétrique de rang $\geq 2$ .

Comme les groupes de Lie agissant transitivement sur les sphères sont connus, il est possible de dresser le tableau suivant des représentations d'holonomie irréductibles. Nous le complétons par les conséquences géométriques, les générateurs de l'algèbre des formes extérieures invariantes (qui donnent donc lieu à des formes différentielles extérieures parallèles) et des exemples (locaux, complets ou compacts). Remarquez que les objets invariants se construisent à partir de formes extérieures : cela est dû à la structure de l'algèbre des représentations du groupe orthogonal.

REPRÉSENTATIONS D'HOLONOMIE RESTREINTE IRRÉDUCTIBLES NON NECESSAIREMENT SYMÉTRIQUES

| | *Signification géométrique* | *Les formes extérieures invariantes sont engendrées par* | *Exemples* |
|---|---|---|---|
| $SO_n = SO_n$ | | | métrique riemannienne générique mais aussi la métrique canonique de $S^n$ ou de l'espace hyperbolique $H^n$ |
| $U_m \subset SO_{2m}$ | métrique kählérienne | la 2-forme de Kähler | métrique kählérienne générique mais aussi la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{C}P^m$ ou de son dual symétrique |
| $SU_m \subset SO_{2m}$ | métrique kählérienne à courbure de Ricci nulle | la 2-forme de Kähler, la forme-volume complexe et sa duale | exemples compacts depuis la solution de la conjecture de Calabi comme les surfaces K3 |
| $Sp_1 . Sp_r \subset SO_{4r}$ | métrique quaternionienne (automatiquement d'Einstein) | la 4-forme quaternionienne $\theta = I^2 + J^2 + K^2$ | des exemples homogènes complets ; seuls exemples compacts connus $\mathbb{H}P^r$ muni de sa métrique canonique ou les quotients compacts de son dual symétrique |
| $Sp_r \subset SO_{4r}$ | métrique hyperkählérienne (quaternionienne à courbure de Ricci nulle) | les trois 2-formes correspondant aux champs I, J et K | des exemples complets comme le fibré cotangent à $\mathbb{C}P^r$ ; des exemples compacts (voir l'exposé XVI de ce séminaire) |
| $Spin_9 \subset SO_{16}$ | métrique localement isométrique à la métrique canonique de $\mathbb{C}a\, P^2$ | | $\mathbb{C}a\, P^2$ avec sa métrique canonique ou son dual symétrique et ses quotients compacts |
| $Spin_7 \subset SO_8$ | métrique à courbure de Ricci nulle | une 4-forme | pas d'exemple connu, même local |
| $G_2 \subset SO_7$ | métrique à courbure de Ricci nulle | une 3-forme et la 4-forme duale | pas d'exemple connu, même local |

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Ambrose, I.M. Singer: A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428-443.

[2] M. Berger: Sur les groupes d'holonomie homogènes des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), 279-330.

[3] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry, Interscience, Wiley, Volume I, New-York (1963).

[4] W.A. Poor: Differential geometric structures, Mc Graw Hill, New-York (1981).

[5] J. Simons: On transitivity of holonomy systems, Ann. of Math. 76 (1962), 213-234.

[6] H. Yamabe: On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Osaka Math.J. 2 (1950), 13-14.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex (France)

"L.A. du C.N.R.S. n°169"