

Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

Toute surface $K3$ est Kählérienne

Astérisque, tome 126 (1985), p. 137-140

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__137_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TOUTE SURFACE K3 EST KÄHLÉRIENNE

Arnaud BEAUVILLE

On démontre dans cet exposé que toute surface K3 est kählérienne, en suivant la méthode de Siu [1]. L'idée de la démonstration est la suivante. Soit (X_0, σ) une surface K3 marquée. D'après l'Exposé X, (X_0, σ) a même période qu'une surface K3 kählérienne marquée (X'_0, σ') . Il s'agit de prouver que X_0 est isomorphe à X'_0 , donc kählérienne. Il faut pour cela étendre à ce cadre le "lemme principal" de Burns-Rapoport (Exposé IX, n°2), puis adapter la fin de la démonstration du théorème de Torelli (Exposé IX).

1. EXTENSION DU "LEMME PRINCIPAL"

Proposition. Soient $f : X \rightarrow S$ et $f' : X' \rightarrow S$ deux familles de surfaces K3 sur une variété analytique S , et $\varphi : R^2 f_* (\mathbb{Z}) \rightarrow R^2 f'_* (\mathbb{Z})$ un isomorphisme. Soient T une partie de S et o un point d'accumulation de T . On suppose que X'_o est kählérienne, et qu'il existe pour chaque $t \in T$ un isomorphisme $u_t : X'_t \rightarrow X_t$ tel que $u_t^* = \varphi_t$. Alors X_o et X'_o sont isomorphes.

C'est le même énoncé que la Proposition 4 de l'Exposé IX, mais sans hypothèse kählérienne sur X_o .

On a déjà observé (Exposé IX, n°2, remarque) que cette hypothèse a été utilisée dans la démonstration de la Prop. 4 uniquement pour borner le volume de Γ_t , et plus précisément le terme $\int_{X'_t} \kappa'_t \wedge u_t^* \kappa_t$. On va choisir sur X et X' des métriques hermitiennes particulières permettant de borner cette intégrale.

Sur X' , nous choisirons comme dans l'Exposé IX une métrique hermitienne induisant sur chaque fibre X'_s une métrique kählérienne, dont nous noterons κ'_s la

forme de Kähler. D'autre part, soit κ_o la forme de Kähler d'une métrique standard sur X_o , et soit θ_o une 2-forme réelle fermée telle que $\theta_o^{1,1} = \kappa_o$ (Exposé XI, th.1). Quitte à réduire S , on peut supposer qu'il existe une rétraction r (de classe C^∞) de X sur X_o , et d'autre part une métrique kähliérienne sur S , de classe de Kähler π . Considérons la 2-forme fermée $\theta = r^* \theta_o + f^* \pi$, et posons $\kappa = \theta^{1,1}$; en réduisant de nouveau S , on peut supposer que κ est positive non dégénérée. On munit X de la métrique hermitienne de forme de Kähler κ . On a alors

$$\int_{X'_t} \kappa'_t \wedge u_t^* \kappa_t = \int_{X'_t} \kappa'_t \wedge u_t^* \theta_t = [\kappa'_t] \cdot \varphi_t [\theta_t],$$

et cette fonction de t est la restriction à T d'une fonction continue sur S , donc bornée au voisinage de o . $\square$

2. LA CLASSE D'UNE MÉTRIQUE STANDARD

Soit X une surface K3. Nous noterons comme précédemment $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ l'orthogonal de ω dans $H^2(X, \mathbb{R})$, de sorte que toute classe $x \in H^2(X, \mathbb{R})$ s'écrit $x = c\omega + k + \bar{c}\bar{\omega}$, avec $c \in \mathbb{C}$ et $k \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. Soit κ la forme de Kähler d'une métrique hermitienne standard sur X .

Lemme .

- a) Il existe une 2-forme réelle fermée θ sur X telle que $\kappa = \theta^{1,1}$.
- b) La composante k de $[\theta]$ dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ est indépendante du choix de θ ; on peut choisir θ , de manière unique, de façon que $[\theta] = k$.
- c) On a $k^2 > 0$ et $k \cdot [D] > 0$ pour tout diviseur effectif D sur X .
- d) Si X est kähliérienne, k appartient à la chambre kähliérienne κ_X (Exposé VII, n°2).

L'assertion a) a été démontrée dans l'exposé précédent. La forme θ est bien déterminée à l'addition près d'une 2-forme réelle fermée de type $(2,0) + (0,2)$, donc de la forme $c\omega + \bar{c}\bar{\omega}$ pour $c \in \mathbb{C}$. On en déduit immédiatement l'unicité de k ; d'autre part la condition $[\theta] \cdot [\omega] = 0$ détermine c , et donc θ , de manière unique.

Choisissons la forme $\theta = \alpha + \kappa + \bar{\alpha}$ vérifiant cette condition; on a alors

$$k^2 = \int_X \theta \wedge \theta = 2 \int_X \alpha \wedge \alpha + \int_X \kappa \wedge \kappa > 0,$$

et pour tout diviseur effectif D

$$k.[D] = \int_D \theta = \int_D \kappa > 0 ,$$

d'où c).

Supposons qu'il existe sur X une métrique kählérienne, de forme de Kähler ξ . Considérons pour $0 \leq t \leq 1$ la 2-forme $t\xi + (1-t)\theta$; elle est fermée et sa composante de type (1,1) est positive non dégénérée. On déduit de c) que le segment $[[\xi], k]$ dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ est contenu dans une chambre de $\mathcal{C}_X$, qui est nécessairement K_X puisqu'elle contient $[\xi]$, d'où d). $\square$

On a ainsi associé à toute métrique hermitienne standard sur X une classe de cohomologie $k \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$, qui possède des propriétés très analogues à celles de la classe d'une métrique kählérienne (et qui coïncide avec celle-ci lorsque la métrique standard se trouve être kählérienne).

3. LE THÉORÈME DE Y.T. SIU

Théorème [1]. Toute surface K3 est kählérienne.

Soit (X_0, σ) une surface K3 marquée, et soit $P \subset L_{\mathbb{R}}$ sa période. Choisissons une métrique hermitienne standard sur X_0 ; notons κ_0 sa forme de Kähler et k_0 la classe associée dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X_0)$ (n°2). D'après le lemme ci-dessus, l'élément $\sigma(k_0)$ de $L_{\mathbb{R}}$ est orthogonal à P , de carré > 0 , et n'est orthogonal à aucun élément de Δ_P . Il résulte donc de l'Exposé X, n°4, prop., qu'il existe une surface K3 kählérienne marquée (X'_0, σ') , de période P , et une classe de Kähler $k'_0 \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X'_0)$ telle que $\sigma(k_0) = \sigma'(k'_0)$. Alors $\varphi_0 = \sigma'^{-1} \circ \sigma$ est une isométrie de Hodge de $H^2(X_0, \mathbb{R})$ dans $H^2(X'_0, \mathbb{R})$, telle que $\varphi_0(k_0) = k'_0$.

On a vu (Exposé IX, n°5) qu'on peut alors construire des déformations locales universelles $f : X \rightarrow S$ et $f' : X' \rightarrow S$ pour X_0 et X'_0 ($o \in S$), et un isomorphisme $\varphi : R^2 f_* (\mathbb{Z}) \rightarrow R^2 f'_* (\mathbb{Z})$ induisant pour chaque $s \in S$ une isométrie de Hodge $\varphi_s : H^2(X_s, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X'_s, \mathbb{Z})$ (et induisant l'isométrie donnée φ_0 au point o). De plus S s'identifie à un ouvert du domaine des périodes Ω , de sorte qu'il existe une partie dense T de S telle que X_t et X'_t soient projectives pour $t \in T$ (cf. par exemple Exposé VI). Il s'agit de montrer que φ_t est effective pour $t \in T$ assez proche de o : en effet on déduira alors du théorème de Torelli, pour chaque $t \in T$, un isomorphisme $u_t : X'_t \rightarrow X_t$ tel que $u_t^* = \varphi_t$, et la proposition permettra de conclure que X_0 est isomorphe à X'_0 , donc kählérienne.

Soit θ'_0 une forme de Kähler sur X'_0 de classe k'_0 , et soit θ_0 une 2-forme réelle fermée sur X_0 telle que $\theta_0^{1,1} = \kappa_0$ et $[\theta_0] = k_0$ (n°2, lemme). Quitte à réduire S ,

on peut comme ci-dessus étendre θ_o et θ'_o en des formes fermées θ sur X et θ' sur X' dont les composantes de type $(1,1)$ sont positives non dégénérées. Pour $s \in S$, notons k_s la composante de $[\theta_s]$ dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X_s)$ et k'_s celle de $[\theta'_s]$ dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X'_s)$. Comme $\varphi_o(k_o) = k'_o$, on a $\varphi_s([\theta_s]) = [\theta'_s]$ pour tout $s \in S$, d'où, puisque φ_s est une isométrie de Hodge, $\varphi_s(k_s) = k'_s$. Lorsque X_s et X'_s sont kähleriennes (en particulier lorsque $s \in T$), on déduit alors du lemme, d), que φ_s est effective, ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y-T. Siu : Every K3 surface is Kähler, *Inventiones Math.* 73 (1983), 139-150.

Bâtiment de Mathématiques 425
 Université de Paris-Sud
 ERA du CNRS n° 653
 91405 ORSAY CEDEX (France)