

# *Astérisque*

PAUL GAUDUCHON

**Les métriques standard d'une surface complexe  
compacte a premier nombre de Betti pair**

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 129-135

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_126\\_\\_129\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__129_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES MÉTRIQUES STANDARD D'UNE SURFACE  
COMPLEXE COMPACTE A PREMIER NOMBRE DE BETTI PAIR

Paul GAUDUCHON

Les deux exposés qui suivent sont consacrés à la démonstration du fait que toutes les surfaces K3 sont kähleriennes. L'objet de cet exposé est de démontrer le résultat suivant, qui fournit l'ingrédient technique essentiel :

Théorème 1. Toute métrique hermitienne sur une surface complexe compacte à premier nombre de Betti pair est conforme à une métrique hermitienne, unique à homothétie près, dont la forme de Kähler est la partie de type (1,1) d'une 2-forme réelle fermée.

Nous déduirons ce Théorème 1 d'un résultat général de géométrie hermitienne, le Théorème 2, et de la structure de Hodge particulière, déterminée par K. Kodaira, d'une surface complexe compacte à  $b_1$  pair.

Avant d'énoncer et de démontrer le Théorème 2 nous introduisons quelques éléments indispensables de géométrie hermitienne.

### 1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Nous désignons par  $(M, J)$  une variété presque complexe de dimension  $n = 2m$ ,  $TM$  le fibré tangent de  $M$ ,  $\Lambda^r M$  le fibré des  $r$ -formes extérieures (réelles),  $r = 0, \dots, n$ ,  $\Lambda^* M = \sum_{r=0}^n \Lambda^r M$  le fibré des formes extérieures.

Une métrique hermitienne est une métrique riemannienne  $g$  telle que l'opérateur presque complexe  $J$  soit une isométrie de l'espace tangent en tout point de  $M$ .

La forme de Kähler de  $g$  est la 2-forme réelle de type (1,1)  $\omega$  définie en un point  $x$  de  $M$  pour tous vecteurs  $X, Y$  de  $T_x M$  par

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) .$$

L'opérateur  $J$  s'étend, par dualité métrique, au fibré  $\Lambda^* M$  des formes extérieures. En fait, cette extension, encore notée  $J$ , ne dépend pas de la métrique hermitienne  $g$  et est définie pour  $X_1, \dots, X_r \in T_x M$  et  $\varphi \in \Lambda_x^2 M$  par

$$J\varphi(X_1, \dots, X_r) = (-1)^r \varphi(JX_1, \dots, JX_r)$$

A côté de la différentielle extérieure  $d$  nous définissons l'opérateur  $d^c$  par la formule

$$d^c = -J^{-1}dJ.$$

Nota. Lorsque  $J$  est intégrable, les opérateurs  $d$  et  $d^c$  se décomposent, à la manière usuelle, en

$$d = d' + d'' \quad , \quad d^c = i(d'' - d')$$

Le produit scalaire ponctuel (resp. global) de deux champs de vecteurs ou de deux formes extérieures est noté  $(\cdot, \cdot)$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ).

En particulier, la trace  $\text{tr} \varphi$  d'une 2-forme  $\varphi$  est le produit scalaire  $(\varphi, \omega)$  de  $\varphi$  et de la forme de Kähler  $\omega$ .

Les adjoints formels de  $d$  et  $d^c$  sont notés  $\delta$  et  $\delta^c$  respectivement ( $\delta^c = -J^{-1}\delta J$ ).

L'opérateur \* de Hodge est défini, à la manière usuelle, pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\Lambda_x^* M$ , par

$$\varphi \wedge (*\psi) = (\varphi, \psi) \cdot v_g$$

où  $v_g = \frac{1}{m!} \omega^m$  est la forme volume de  $g$ .

$$\delta \wedge a \quad \delta = - *d* \quad , \quad \delta^c = - *d^c* \quad .$$

Si  $n = 4$ , l'opérateur \* de Hodge induit une involution sur le fibré  $\Lambda^2 M$ . Les 2-formes \*-invariantes (resp. \*-anti-invariantes) sont dites auto-duales (resp. anti-auto-duales). Le fibré  $\Lambda^+ M$  des 2-formes auto-duales est engendré, en chaque point de  $M$ , par la forme de Kähler  $\omega$  et les formes réelles de type  $(2,0) \oplus (0,2)$ , tandis que le fibré  $\Lambda^- M$  des 2-formes anti-auto-duales s'identifie à celui des 2-formes (réelles) primitives (= de trace nulle) de type  $(1,1)$ .

Le laplacien riemannien  $\delta d + d\delta$  est noté  $\Delta$ . Nous introduisons le laplacien complexe  $L$  et le laplacien complexe adjoint  $L^*$  définis par

$$(1) \quad L(f) = - (dd^c f, \omega) = - \operatorname{tr}(dd^c f)$$

$$(2) \quad L^*(f) = \delta\delta^c(f, \omega) .$$

Les trois laplaciens  $\Delta, L$  et  $L^*$  ont même symbole principal mais sont distincts en général. Leur différence est mesurée par la 1-forme  $\theta = - \delta^c \omega$ . Plus précisément, on a

$$(3) \quad L(f) = \Delta(f) - (\theta, df)$$

$$(4) \quad L^*(f) = \Delta(f) + (\theta, df) - \delta\theta \cdot f$$

(la vérification de ces deux relations est facile; l'une et l'autre valent que  $J$  soit intégrable ou non).

Une métrique hermitienne telle que  $\Delta$  et  $L$  coïncident, c'est-à-dire telle que la forme de Kähler soit co-fermée, est dite co-symplectique (semi-kählérienne si  $J$  est intégrable). Ceci équivaut à dire que  $L$  est auto-adjoint.

Définition. Une métrique hermitienne est standard si la 1-forme  $\theta$  est co-fermée.

De façon équivalente,

- . le terme d'ordre zéro de  $L^*$  est nul ( $L^*(1) = 0$ ) ;
- . la forme de Kähler  $\omega$  est annulée par  $\delta\delta^c$  ;
- .  $\omega^{m-1}$  est  $dd^c$ -fermée.

Si  $n = 4$  ( $m=2$ ), une métrique hermitienne standard est une métrique hermitienne dont la forme de Kähler est  $dd^c$ -fermée.

## 2. RAPPELS SUR LES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

Rappelons l'énoncé du principe du maximum pour les opérateurs elliptiques du second ordre, dû à E. Hopf [3] :

Proposition. Soient  $M$  une variété différentielle,  $m$  un point de  $M$  et  $A: \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  un opérateur différentiel elliptique du second ordre, sans terme d'ordre zéro. Soit  $f$  une fonction admettant un maximum relatif en  $m$  et telle que  $A(f) \geq 0$  au voisinage de  $m$ . Alors  $f$  est constante au voisinage de  $m$ .

Par opérateur elliptique on entend ici un opérateur (du 2<sup>e</sup> ordre) dont le symbole est positif non dégénéré (si l'on a, dans un système de coordonnées locales,

$$A = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

le symbole de  $A$  en  $m$  est la forme quadratique  $\sigma_2(m, \xi) = \sum a_{ij}(m) \xi_i \xi_j$ ).

Dans le cas compact, on déduit immédiatement du principe du maximum le résultat suivant :

Corollaire 1. Supposons de plus  $M$  compacte connexe. Alors toute fonction  $f$  sur  $M$  telle que  $A(f) \geq 0$  est constante (et  $A(f)$  est nulle).

La conséquence suivante a été observée par T. Aubin [1] :

Corollaire 2. Soient  $M$  une variété différentielle connexe, et  $A$  un opérateur elliptique (réel) du second ordre. Soit  $f$  une fonction positive sur  $M$ , non identiquement nulle, telle que  $A(f) = 0$ . Alors  $f$  ne s'annule en aucun point de  $M$ .

Supposons en effet que  $f$  s'annule en un point  $m$  de  $M$ . Choisissons un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $m$ , et considérons une forme linéaire  $\xi$  en les  $x_i$ . Soit  $A_\xi$  l'opérateur elliptique défini par

$$A_\xi(g) = A(e^{\langle \xi, x \rangle} g) - g A(e^{\langle \xi, x \rangle}) .$$

La fonction  $g_\xi = e^{-\langle \xi, x \rangle} f$  satisfait à

$$A_\xi(g_\xi) = -g_\xi A(e^{\langle \xi, x \rangle}) = -f P(x, \xi) ,$$

où  $P(x, \xi)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  en  $\xi$ , dont la partie homogène de degré 2 est le symbole  $\sigma_2(x, \xi)$ . Puisque  $A$  est elliptique, on a pour  $\xi$  assez grand  $P(m, \xi) > 0$ , d'où  $A_\xi(g_\xi) \leq 0$  dans un voisinage de  $m$ . La fonction  $g_\xi$  admettant un minimum relatif en  $m$ , on conclut de la proposition (appliquée à  $-g_\xi$ ) que  $f$  s'annule dans un voisinage de  $m$ , d'où le corollaire.  $\square$

### 3. LE THÉORÈME DES MÉTRIQUES HERMITIENNES STANDARDS

Théorème 2 [2]. Toute métrique hermitienne sur une variété presque complexe

compacte de dimension 2m est conforme à une métrique hermitienne standard, unique à homothétie près.

Preuve. Soit  $g$  une métrique hermitienne quelconque sur  $M$  ; considérons une métrique conforme  $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ , où  $\sigma$  est une fonction réelle. Le laplacien complexe  $\tilde{L}$  et le laplacien complexe adjoint  $\tilde{L}^*$  relatifs à  $\tilde{g}$  s'écrivent pour toute fonction scalaire  $f$ .

$$\tilde{L}(f) = e^{-2\sigma} L(f) \quad \tilde{L}^*(f) = e^{-2m\sigma} L^*(e^{2(m-1)\sigma} f)$$

Comme  $g$  est standard si et seulement si  $L^*(1)$  est nul, nous sommes ainsi ramenés à montrer que  $L^*$  a une solution strictement positive  $\varphi$ , unique à un facteur constant positif près. La métrique standard sera alors égale à  $\frac{1}{\varphi^{m-1}} g$ .

Lemme 1. Le noyau Ker  $L^*$  est de dimension 1.

En effet l'indice de  $L$ , égal à celui de  $\Delta$  puisque  $L$  et  $\Delta$  ont même partie principale, est nul puisque  $\Delta$  est autoadjoint. Ainsi Ker  $L^*$  et Ker  $L$  ont même dimension ; mais le Cor.1 au principe du maximum entraîne que Ker  $L$  est réduit aux fonctions constantes, donc de dimension un.  $\square$

Le lemme 1 démontre l'assertion d'unicité du Théorème 2.

L'existence résulte du lemme suivant :

Lemme 2. Ker  $L^*$  est engendré par une fonction  $\varphi$  strictement positive en tout point.

En vertu de la théorie de Hodge pour l'opérateur elliptique  $L$ , l'espace  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  se décompose en somme directe orthogonale

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \text{Ker } L^* \oplus \text{Im } L.$$

Soit  $\varphi$  un élément non nul de Ker  $L^*$  ; alors la fonction  $\varphi$  est de signe constant sur  $M$ . Dans le cas contraire, en effet, il existerait une fonction de classe  $C^\infty$  positive, non identiquement nulle, orthogonale à  $\varphi$ , donc aussi à Ker  $L^* = \mathbb{R}\varphi$  et appartenant de ce fait à l'image de  $L$ . Or ceci est exclu par le Cor.1 au principe du maximum. On peut donc supposer  $\varphi$  positive, et le Cor.2 au principe du maximum permet de conclure que  $\varphi$  est strictement positive en tout point.  $\square$

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

La partie de type (1,1) d'une 2-forme réelle fermée  $\theta$  est  $dd^c$ -fermée : écrivons en effet  $\theta = \alpha + \kappa + \bar{\alpha}$ , où  $\alpha$  est de type (2,0) et  $\kappa$  de type (1,1) ; la condition  $d\theta = 0$  se traduit par  $d'\alpha + d''\kappa = 0$ , ce qui entraîne  $d'd''\kappa = 0$ . Ainsi les métriques que nous cherchons sont des métriques standard ; pour prouver le Théorème 1 (à partir du Théorème 2), il suffit de montrer inversement que la forme de Kähler  $\omega$  de toute métrique standard  $g$  sur une surface complexe compacte avec  $b_1$  pair est la partie de type (1,1) d'une 2-forme réelle fermée.

Soit donc  $g$  une métrique standard sur  $M$  ; considérons l'espace de cohomologie  $H^2(M; \mathbb{R})$  comme l'espace des 2-formes réelles harmoniques sur  $M$  (relativement à  $g$ ). L'opérateur de Hodge  $*$  commute à  $\Delta$  et induit de ce fait une involution sur  $H^2(M; \mathbb{R})$  qui se décompose ainsi en deux sous-espaces orthogonaux  $H^+$  et  $H^-$  (de dimension respectives  $b_+$  et  $b_-$ ) constitués respectivement des 2-formes fermées autoduales et anti-autoduales.

Le sous-espace  $H^-$  est ainsi constitué des 2-formes (réelles) primitives de type (1,1) fermées (cf.1). Le sous-espace  $H^+$  contient, pour sa part, l'espace  $B$  des formes réelles de type (2,0)  $\oplus$  (0,2) dont la dimension est égale au double  $2p_g$  du genre géométrique de la surface complexe  $M$ .

Comme le premier nombre de Betti  $b_1$  de  $M$  est pair, la dimension  $b_+$  de  $H^+$  est égale à  $2p_g + 1$  (Exposé III).

Il existe donc, dans  $H^+$ , une 2-forme fermée  $\varphi$  (unique à un facteur près) orthogonale à  $B$ , de la forme

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \varphi \cdot \omega + \beta + \bar{\beta}$$

où  $\beta$  est une forme de type (2,0) et où  $\operatorname{tr} \varphi$  n'est pas identiquement nulle. La composante de type (1,1) de  $\varphi$  est  $dd^c$ -fermée et aussi  $dd^c$ -cofermée puisque  $\omega$  est autoduale, de sorte que  $\frac{1}{2} \operatorname{tr} \varphi$  appartient au noyau de  $\operatorname{Ker} L^*$  (cf. n°1). Il en résulte, puisque  $g$  est standard, que  $\frac{1}{2} \operatorname{tr} \varphi$  est une constante (non nulle !), que l'on peut naturellement choisir égale à 1. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.  $\square$

Remarque 1. Supposons que  $b_1$  soit nul. Les espaces  $H^1(M; \mathbb{C})$  (où  $\mathbb{C}$  désigne le faisceau de champs de vecteurs holomorphes) et  $H^1(M; \Omega^2)$

définis à l'aide de la  $d''$ -cohomologie sont eux-mêmes réduits à zéro ; si  $\omega$  est la forme de Kähler d'une métrique hermitienne standard, la  $(2,1)$ -forme  $d'\omega$  est  $d''$ -fermée et donc aussi  $d''$ -exacte, de sorte que

$$d'\omega = d''\beta$$

où  $\beta$  est de type  $(2,0)$ . Il est clair alors que la 2-forme réelle  $\omega - \beta - \bar{\beta}$  est fermée, d'où le Théorème 2 dans ce cas.

Remarque 2. Lorsque  $\omega$  est fixée, toute 2-forme réelle fermée  $\psi$  dont  $\omega$  est la composante de type  $(1,1)$  se déduit de  $\varphi$  en lui ajoutant un élément quelconque de  $B$ , c'est-à-dire la partie réelle d'une forme holomorphe quelconque (qui est fermée sur une surface complexe).

En d'autres termes, si on désigne par  $H^{1,1}$  l'orthogonal de  $B$  dans  $H^2(M; \mathbb{R})$  -  $B$  et  $H^{1,1}$  sont orthogonaux à la fois relativement à  $\langle, \rangle$  et à la forme d'intersection de sorte que  $H^{1,1}$  ne dépend pas de la métrique hermitienne - la composante, dans  $H^{1,1}$ , de la classe de cohomologie  $[\psi]$  ne dépend que de  $\omega$  et non de  $\psi$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Aubin: Equations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. pures et appl. 55, (1976), 269-296.
- [2] P. Gauduchon: Le théorème de l'excentricité nulle, C.R. Acad. Sc. Paris, A t. 285 (1977), 387-390.
- [3] E. Hopf: Elementare Bemerkungen über die Lösung partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Sitzungber. preuss. Akad. Wiss., Physik. Math. Kl t19 (1927), 147-152.

53 rue de Lyon  
75012 PARIS