

# *Astérisque*

ARNAUD BEAUVILLE

**Le théorème de Torelli pour les surfaces  $K3$  :  
fin de la démonstration**

*Astérisque*, tome 126 (1985), p. 111-121

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_126\\_\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__126__111_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES K3 : FIN DE LA DÉMONSTRATION

Arnaud BEAUVILLE

1. DENSITÉ DES PÉRIODES DES SURFACES DE KUMMER

Commençons par rappeler la terminologie en usage chez les spécialistes des formes quadratiques entières. On appelle réseau un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini, muni d'une forme quadratique entière. On dit qu'un réseau est pair, unimodulaire, ... s'il en est ainsi de sa forme quadratique.

Etant donné un sous-module  $M$  d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini  $L$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est facteur direct de  $L$  ;
- (ii)  $L/M$  est sans torsion ;
- (iii)  $M_{\mathbb{Q}} \cap L = M$  .

Si elles sont réalisées, on dit que  $M$  est un sous-module primitif de  $L$  . Nous utiliserons le résultat suivant sur les réseaux :

Proposition 1. Soit  $L$  un réseau pair, unimodulaire, de signature  $(s,t)$ , et soit  $M$  un réseau pair. Posons  $k = \min(s,t)$ .

- (i) Si  $\text{rg}(M) \leq k$ , il existe un sous-réseau primitif de  $L$  isomorphe à  $M$  .
- (ii) Si  $\text{rg}(M) \leq k-1$ , deux tels sous-réseaux se déduisent l'un de l'autre par une isométrie de  $L$  .

La démonstration de (i) est facile : soit  $(m_1, \dots, m_r)$  une base de  $M$  .

La classification des formes paires unimodulaires implique que  $L$  contient la somme directe de  $k$  plans hyperboliques. Il existe donc des éléments  $e_1, f_1, \dots, e_r, f_r$  de  $L$  satisfaisant à

$$e_i \cdot e_j = f_i \cdot f_j = 0 \text{ et } e_i \cdot f_j = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq r.$$

On définit une application linéaire  $i : M \longrightarrow L$  en posant

$$i(m_\ell) = e_\ell + \frac{1}{2}(m_\ell^2) f_\ell + \sum_{j < \ell} (m_j \cdot m_\ell) f_j ;$$

on vérifie aussitôt que  $i$  est une isométrie. Comme  $(i(m_1), \dots, i(m_\ell))$  fait partie d'une base de  $L$ , le sous-module  $i(M)$  est primitif, d'où (i).

La démonstration de (ii) est élémentaire mais longue ; je renvoie par exemple à [5].  $\square$

Revenons aux surfaces K3 et à leur domaine des périodes  $\Omega$ , que nous considérerons comme la grassmannienne des 2-plans positifs orientés de  $L_{\mathbb{R}}$  (Exposé VIII).

Proposition 2 . Soit  $P$  un 2-plan positif orienté de  $L_{\mathbb{R}}$ , tel que le réseau  $P_{\mathbb{Z}} = P \cap L$  soit de rang 2 et qu'on ait  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  pour tout  $x \in P_{\mathbb{Z}}$ . Alors  $P$  est la période d'une surface de Kummer marquée.

Notons  $T$  le  $\mathbb{Z}$ -module orienté  $P_{\mathbb{Z}}$  muni de la forme quadratique  $\frac{1}{2}(\cdot, \cdot)$ . On va d'abord construire un tore complexe  $A$  et un plongement de  $T$  dans  $H^2(A, \mathbb{Z})$  tels que  $T_{\mathbb{R}}$  soit la période de  $A$  ; on en déduira ensuite que la surface de Kummer  $X$  associée à  $A$ , munie d'un marquage convenable, admet  $P$  comme période.

#### a) Construction du tore complexe $A$

Soit  $\Gamma$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre orienté de dimension 4. Alors  $\Lambda^2 \Gamma$  est un réseau (cf. Exposé VIII, n°3), isométrique à  $H^3$ . D'après la Proposition 1(i), on peut identifier  $T$  à un sous-réseau primitif de  $\Lambda^2 \Gamma$ . Le 2-plan  $T_{\mathbb{C}}$  contient deux droites isotropes conjuguées  $\mathcal{C}^\omega$  et  $\overline{\mathcal{C}^\omega}$  ; on choisit  $\omega$  de façon que la base  $(\Re(\omega), \Im(\omega))$  de  $T_{\mathbb{R}}$  soit directe. La droite isotrope  $\mathcal{C}^\omega \subset \Lambda^2 \Gamma_{\mathbb{C}}$  définit un point de la grassmannienne  $G(2, \Gamma_{\mathbb{C}})$ , c'est-à-dire un 2-plan  $H$  de  $\Gamma_{\mathbb{C}}$  tel que  $\Lambda^2 H = \mathcal{C}^\omega$ . On a  $H \cap \overline{H} = (0)$  puisque  $\omega \cdot \overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega + \overline{\omega})^2 > 0$ , d'où une décomposition

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = H \oplus \overline{H}$$

qui définit sur  $\Gamma$  une structure de Hodge de poids un. Il existe alors (Exposé VIII, Lemme 5) un tore complexe  $A$  et un isomorphisme de structures de Hodge  $\sigma : H^1(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma$ . Identifions  $H^2(A, \mathbb{Z})$  à  $\Lambda^2 \Gamma$  par l'isomorphisme  $\Lambda^2 \sigma$ ; on a alors  $H^{2,0}(A) = \Lambda^2 H^{1,0}(A) = \mathbb{C}\omega$ , de sorte que la période de  $A$  est  $T_{\mathbb{R}}$ .

b) Fin de la démonstration

Soient  $X$  la surface de Kummer associée à  $A$ , et  $i : H^2(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  l'homomorphisme défini dans l'Exposé VIII, n°2. Posons  $P_X = H^2(X, \mathbb{R}) \cap (H^{2,0} \oplus H^{0,2})$ . On a  $i(T_{\mathbb{R}}) = P_X$ ; de plus, comme  $P_X$  est orthogonal aux courbes exceptionnelles de  $X$ , on a (Exposé VIII, Lemme 3)

$$P_X \cap H^2(X, \mathbb{Z}) = i(T_{\mathbb{R}}) \cap i(H^2(A, \mathbb{Z})) = i(T).$$

Or  $i(T)$  est isométrique au réseau  $P_{\mathbb{Z}}$ ; celui-ci est donc isométrique à un sous-réseau primitif de  $H^2(X, \mathbb{Z})$ . On déduit alors de la Proposition 1(ii) qu'il existe un marquage  $\sigma : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow L$  qui induit un isomorphisme (préservant l'orientation) de  $P_X \cap H^2(X, \mathbb{Z})$  sur  $P_{\mathbb{Z}}$ . Par suite la période de  $(X, \sigma)$  est  $P$ .  $\square$

Remarque. Pour toute surface  $X$ , on note  $S_X$  le sous-groupe de  $H^2(X, \mathbb{Z})$  engendré par les classes algébriques; sa dimension est appelée "nombre de Picard" de  $X$  et notée traditionnellement  $\rho$ . Puisque  $(S_X)_{\mathbb{C}}$  est contenu dans  $H^{1,1}(X)$ , on a  $\rho \leq h^{1,1}$ . Les surfaces pour lesquelles  $\rho = h^{1,1}$  sont dites exceptionnelles; il revient au même de dire qu'on a  $(S_X)_{\mathbb{C}} = H^{1,1}$ , ou que l'espace  $(H^{2,0} \oplus H^{0,2})$  est défini sur  $\mathbb{Q}$ .

Les surfaces construites dans la Proposition 2 sont exactement les surfaces de Kummer exceptionnelles; d'après la prop.1 (ii) et le théorème de Torelli, la donnée d'une telle surface équivaut à celle d'un réseau positif  $P_{\mathbb{Z}}$  de rang 2, tel que  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  pour tout  $x \in P_{\mathbb{Z}}$ .

Signalons qu'une construction plus compliquée permet de décrire explicitement toutes les surfaces K3 exceptionnelles [ 3 ]. Elles correspondent aux réseaux positifs pairs de rang 2.

Il reste maintenant à montrer que les 2-plans possédant la propriété énoncée dans la proposition sont denses dans  $G_2(L_{\mathbb{R}})$ .

Lemme 1. Soient  $M$  un réseau,  $m$  et  $n$  deux nombres entiers. Alors si l'ensemble des éléments primitifs  $e$  de  $M$  tels que  $e^2 \equiv m \pmod{n}$  n'est pas vide, son image dans  $\mathbb{P}(M_{\mathbb{R}})$  est partout dense.

Supposons que cet ensemble contienne un élément  $e_o$ . Soit  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{P}(M_{\mathbb{R}})$ ; alors  $U$  contient la classe d'un vecteur  $e$  primitif dans  $M$ . Posons  $e_N = e_o + Ne$ , pour  $N \in \mathbb{N}$ ; lorsque  $N$  tend vers l'infini, le point  $[e_N]$  dans  $\mathbb{P}(M_{\mathbb{R}})$  tend vers  $e$  sur la droite  $\langle e_o, e \rangle$ , et appartient donc à  $U$  pour  $N$  assez grand. De plus on a  $e_N^2 \equiv e_o^2 \pmod{N}$ , d'où  $e_N^2 \equiv m \pmod{n}$  si  $N$  est multiple de  $n$ .

Il reste à montrer que  $e_N$  est primitif pour un choix convenable de  $N$ . Comme  $e$  est primitif, il existe  $f \in M$  tel que  $(e, f)$  soit une base du réseau  $(\mathbb{Q}e_o + \mathbb{Q}e) \cap M$ ; on a  $e_o = ae + bf$ , avec  $(a, b) = 1$  puisque  $e_o$  est primitif. On a alors  $e_N = (a+N)e + bf$ , de sorte que  $e_N$  est primitif dès que  $N$  est multiple de  $b$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Proposition 3. Les périodes des surfaces de Kummer marquées sont denses dans  $\Omega$ .

D'après la Proposition 2, il s'agit de montrer que l'ensemble des 2-plans positifs  $P \subset L_{\mathbb{R}}$ , définis sur  $\mathbb{Q}$  et tels que  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  pour tout  $x \in P \cap L$ , est dense dans la grassmannienne des 2-plans positifs de  $L_{\mathbb{R}}$ . Soient  $P_o$  un 2-plan positif de  $L_{\mathbb{R}}$  et  $(e_1^o, e_2^o)$  une base orthonormale de  $P_o$ . Le Lemme 1 entraîne l'existence d'un élément primitif  $e_1$  de  $L$ , dont la classe dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{R}})$  est arbitrairement proche de celle de  $e_1^o$ , et tel que  $e_1^2 \equiv 4 \pmod{8}$ . Notons  $M$  l'orthogonal de  $e_1$  dans  $L$ . Comme  $e_1$  est contenu dans un plan hyperbolique de  $L$  (à cause de la Prop. 1 (ii)),  $M$  contient un plan hyperbolique, et par conséquent contient pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  un élément primitif de carré  $2k$ . Le Lemme 1 entraîne alors qu'il existe un élément  $e_2$  de  $M$ , arbitrairement proche de  $e_2^o$  dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{R}})$ , tel que  $e_2^2 \equiv 0 \pmod{64}$ . Le 2-plan  $P = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$  est défini sur  $\mathbb{Q}$ , et arbitrairement proche de  $P_o$ ; nous allons voir qu'il satisfait la condition  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  pour tout  $x \in P \cap L$ .

Posons  $e_1^2 = m_1$  et  $e_2^2 = m_2$ ; on a

$$m_1 \equiv 4 \pmod{8} \quad \text{et} \quad m_2 \equiv 0 \pmod{64}.$$

Soit  $x \in P \cap L$ . L'élément  $m_1 x - (e_1 \cdot x)e_1$  de  $P \cap L$  est orthogonal à  $e_1$ , donc de la forme  $be_2$  avec  $b \in \mathbb{Z}$  (puisque  $e_2$  est primitif). On a ainsi

$$m_1 x = a e_1 + b e_2, \quad \text{avec} \quad a = (e_1 \cdot x),$$

d'où

$$m_1^2 x^2 = a^2 m_1 + b^2 m_2.$$

Notons  $v_2(n)$  la valuation 2-adique d'un entier  $n$  (c'est-à-dire l'exposant de 2 dans la décomposition de  $n$  en facteurs premiers). On a alors

$$v_2(b^2 m_2) \geq 6 \quad \text{et} \quad v_2(a^2 m_1) = 2(v_2(a) + 1) ;$$

il en résulte que  $v_2(m_1^2 x^2) = 4 + v_2(x^2)$  est pair ou  $\geq 6$ , d'où notre assertion  $v_2(x^2) \geq 2$ . Ceci achève la démonstration de la proposition.  $\square$

Corollaire. Soient  $X_0$  une surface K3, et  $f : X \rightarrow S$  une déformation locale universelle de  $X_0$ . Il existe alors une partie dense  $T$  de  $S$  telle que la fibre  $X_t$ , pour  $t \in T$ , soit une surface de Kummer.

Quitte à réduire  $S$ , on peut choisir un marquage  $\sigma : R^2 f_{\#}(\mathbb{Z}) \rightarrow L_S$ , d'où une application des périodes  $\wp : S \rightarrow \Omega$  qui est un isomorphisme local (cf. Exposé V). Il existe donc (Prop.3) une partie dense  $T$  de  $S$  telle que  $\wp(t)$ , pour tout  $t \in T$ , soit la période d'une surface de Kummer. La surface  $X_t$ , qui a même période qu'une surface de Kummer, est donc une surface de Kummer (Proposition 1 de l'Exposé VIII), d'où le corollaire.  $\square$

Remarque. Il est immédiat que deux surfaces de Kummer sont difféomorphes ; le corollaire permet donc de retrouver le fait que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes (Exposé VI).

## 2. LE "LEMME PRINCIPAL" DE BURNS-RAPOPORT

Proposition 4. Soient  $f : X \rightarrow S$  et  $f' : X' \rightarrow S$  deux familles (lisses) de surfaces K3 kählériennes sur une variété analytique  $S$ , et  $\varphi : R^2 f_{\#}(\mathbb{Z}) \rightarrow R^2 f'_{\#}(\mathbb{Z})$  un isomorphisme. Soient  $T$  une partie de  $S$  et  $o$  un point d'accumulation de  $T$ . On suppose qu'il existe pour chaque  $t \in T$  un isomorphisme  $u_t : X'_t \rightarrow X_t$  tel que  $u_t^* = \varphi_t$ . Alors :

- a)  $X_0$  et  $X'_0$  sont isomorphes ;
- b) si de plus  $\varphi_0$  est une isométrie de Hodge effective, il existe un isomorphisme  $u_0 : X'_0 \rightarrow X_0$  tel que  $u_0^* = \varphi_0$ .

On éviterait facilement la formulation en termes de  $R^2 f_{\#}(\mathbb{Z})$  : l'énoncé étant local, on peut supposer que  $S$  est un polydisque. On a alors des isomorphismes canoniques de restriction  $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_S, \mathbb{Z})$  ; on peut considérer  $\varphi$

comme un isomorphisme de  $H^2(X, \mathbb{Z})$  sur  $H^2(X', \mathbb{Z})$ , induisant pour tout  $s \in S$ , via les isomorphismes de restriction, une isométrie  $\varphi_s: H^2(X_s, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X'_s, \mathbb{Z})$ .

L'existence de  $\varphi$  tel que  $u_t^* = \varphi_t$  signifie simplement que  $u_t^*$  est constant avec les identifications précédentes.

Démontrons la proposition. Notons  $\Gamma_t$  le graphe de  $u_t$  dans  $X_t \times X'_t$ . La première étape consiste à montrer qu'une sous-suite de  $(\Gamma_t)_{t \in T}$  converge (au sens des courants) vers un cycle analytique  $\Gamma_0$  de  $X_0 \times X'_0$ . D'après un critère de Bishop [2], il suffit pour qu'il en soit ainsi qu'il existe une métrique hermitienne sur  $X \times X'$  pour laquelle le volume des sous-variétés  $\Gamma_t$  soit borné.

Un théorème de Kodaira-Spencer (cf. par exemple [4], Ch.4, §4) entraîne qu'on peut construire sur  $X$  (resp.  $X'$ ) une métrique hermitienne qui induit sur chaque fibre  $X_s$  (resp.  $X'_s$ ) une métrique kähliérienne, de forme fondamentale  $\kappa_s$  (resp.  $\kappa'_s$ ). Munissons  $X \times X'$  de la métrique produit. On a

$$\text{vol}(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} (\text{pr}_1^* \kappa_t + \text{pr}_2^* \kappa'_t)^2$$

d'où, puisque  $\Gamma_t$  est l'image de  $X'_t$  par le plongement  $(u_t, 1)$ ,

$$\text{vol}(\Gamma_t) = \int_{X'_t} (u_t^* \kappa_t + \kappa'_t)^2 = \int_{X'_t} \kappa_t^2 + \int_{X'_t} \kappa_t'^2 + 2 \int_{X'_t} \kappa_t' \wedge u_t^* \kappa_t.$$

Les deux premiers termes sont bornés puisqu'ils sont obtenus par restriction à  $T$  de fonctions continues sur  $S$ . Il s'agit de borner le troisième, dans lequel intervient  $u_t$  qu'on ne contrôle pas a priori. Mais puisque les formes de Kähler  $\kappa_t$  et  $\kappa'_t$  sont fermées, l'intégrale en question se calcule en cohomologie :

$$\int_{X'_t} \kappa_t' \wedge u_t^* \kappa_t = [\kappa_t'] \cdot [u_t^* \kappa_t] = [\kappa_t'] \cdot \varphi_t([\kappa_t]);$$

cette intégrale, qui est égale à la restriction d'une fonction continue sur  $S$ , est bornée.

Ainsi  $\text{vol}(\Gamma_t)$  est borné, et d'après le critère déjà cité de Bishop, il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $T$ , tendant vers 0, telle que la suite des graphes  $\Gamma_{t_n}$  converge vers un cycle analytique (effectif)  $\Gamma_0 \subset X_0 \times X'_0$ . En particulier la classe de cohomologie de  $\Gamma_{t_n}$  dans  $H^4(X_0 \times X'_0)$  converge vers celle de  $\Gamma_0$ .

Disons qu'une surface  $Z \subset X_t \times X'_t$  est de degré  $(p, q)$  si elle est de degré  $p$  sur  $X_t$  et  $q$  sur  $X'_t$ ; autrement dit si on a

$$(\text{pr}_1)_* [Z] = p \text{ dans } H^0(X_t, \mathbb{Z}) ; (\text{pr}_2)_* [Z] = q \text{ dans } H^0(X'_t, \mathbb{Z}).$$

Les surfaces de degré (0,0) sont de la forme  $C \times C'$ , où  $C$  est une courbe de  $X_t$  et  $C'$  une courbe de  $X'_t$ .

Les graphes  $\Gamma_t$  sont de degré (1,1) ; par passage à la limite, il en est de même de  $\Gamma_o$ . Ceci entraîne pour  $\Gamma_o$  l'une des deux possibilités suivantes :

(i)  $\Gamma_o = \Delta + \sum_{i \in I} C_i \times C'_i$ , où  $\Delta$  est de degré (1,1) et où les  $C_i$  (resp.  $C'_i$ ) sont des courbes sur  $X_o$  (resp.  $X'_o$ ) ;

(ii)  $\Gamma_o = \Delta_1 + \Delta_2 + \sum_{i \in I} C_i \times C'_i$ , où  $\Delta_1$  est de degré (1,0) et  $\Delta_2$  de degré (0,1).

Nous allons montrer que la seconde possibilité ne se produit pas. Etant donné une classe  $c \in H^4(X_t \times X'_t, \mathbb{Q})$ , notons  $c_*$  l'homomorphisme de  $H^2(X_t, \mathbb{Q})$  dans  $H^2(X'_t, \mathbb{Q})$  défini par  $c_*(x) = (pr_2)_*(c \cdot pr_1^* x)$  ; il est compatible aux structures de Hodge. Si  $Z$  est une surface contenue dans  $X_t \times X'_t$ , et si  $p$  et  $p'$  désignent les projections de  $Z$  sur  $X_t$  et  $X'_t$ , on a

$$[Z]_* (x) = p'_* p^* (x) .$$

On obtient en particulier  $[\Gamma_t]_* = u_t^* = \varphi_t$ , et par conséquent  $[\Gamma_o]_* = \varphi_o$ .

D'autre part si  $p(Z)$  (resp.  $p'(Z)$ ) est contenu dans une courbe  $C$  de  $X_t$  (resp.  $C'$  de  $X'_t$ ), on voit que  $[Z]_*$  se factorise à travers  $H^2(C, \mathbb{Q})$  (resp.  $H^2(C', \mathbb{Q})$ ), et par conséquent s'annule sur  $H^{2,0}(X_t)$ . Appliquant ceci à  $\Gamma_o$ , on trouve dans le cas (ii) que  $\varphi_o$  s'annule sur  $H^{2,0}(X_o)$ , ce qui exclut cette possibilité.

On a donc

$$\Gamma_o = \Delta + \sum_{i \in I} C_i \times C'_i ,$$

où  $\Delta$  est le graphe d'une application biméromorphe  $u_o$  de  $X'_o$  sur  $X_o$ . Comme les surfaces  $X_o$  et  $X'_o$  sont minimales non réglées, une telle application est nécessairement un isomorphisme, ce qui prouve a).

Supposons maintenant  $\varphi_o$  effectif. Notons  $c_i$ ,  $c'_i$  les classes de cohomologie de  $C_i$ ,  $C'_i$  ; on a, pour  $x \in H^2(X_o, \mathbb{R})$ ,

$$\varphi_o(x) = [\Gamma_o]_*(x) = u_o^*(x) + \sum_{i \in I} (x \cdot c_i) c'_i .$$

Prenons  $x \in K_X$  ; on a alors  $(x \cdot c_i) = r_i > 0$ , et

$$\varphi_o(x) - u_o^*(x) = \sum_{i \in I} r_i c_i',$$

$$\text{d'où } 0 = (\varphi_o(x))^2 - (u_o^*(x))^2 = (\varphi_o(x) + u_o^*(x)) \cdot \sum_{i \in I} r_i c_i'.$$

Comme  $\varphi_o(x)$  et  $u_o^*(x)$  sont dans  $K_X$ , ceci impose  $I = \emptyset$ , donc  $u_o^* = \varphi_o$ , ce qui prouve b).  $\square$

Remarque. La démonstration s'applique plus généralement à deux familles de surfaces kähleriennes  $X \longrightarrow S$  et  $X' \longrightarrow S$ , pourvu que l'on suppose  $X_o$  et  $X'_o$  non réglées et minimales. Remarquons d'autre part que l'hypothèse kählienne a été utilisée une seule fois dans la démonstration de a), pour borner le terme  $\int_{X'_t} \kappa'_t \wedge u_t^* \kappa_t$  (le fait que  $\kappa_t$  et  $\kappa'_t$  sont fermées permettant de calculer en cohomologie).

### 3. OUVERTURE DE L'EFFECTIVITÉ

Soit  $f : X \longrightarrow S$  une famille de surfaces K3 kähleriennes sur une variété analytique  $S$ . Les espaces  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X_s)$  s'organisent en un fibré vectoriel réel  $\mathcal{K}^{1,1}$  sur  $S$ . On peut le voir élémentairement comme suit : localement sur  $S$ , on peut choisir un marquage  $R^2 f_* (\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$ , d'où une application des périodes  $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$ . Alors  $\mathcal{K}^{1,1}$  est l'image réciproque par  $\mathcal{P}$  du sous-fibré de  $\Omega \times L_{\mathbb{R}}$  (au-dessus de  $\Omega$ ) formé des couples  $(P, x)$  tel que  $x$  soit orthogonal à  $P$ .

Lemme 2. La réunion des chambres de Kähler  $K_{X_s}$ , pour  $s \in S$ , est une partie ouverte de  $\mathcal{K}^{1,1}$ .

Nous utiliserons les notations de l'Exposé VII, n° 2. Il est clair que la réunion  $\mathcal{C}$  des  $\mathcal{C}_{X_s}$ , qui est définie par la condition  $x^2 > 0$ , est ouverte dans  $\mathcal{K}^{1,1}$ . Montrons maintenant que la réunion des murs de  $\mathcal{C}_{X_s}$  (c'est-à-dire des hyperplans  $\delta^\perp$  pour  $\delta \in \text{Pic}(X_s)$ ,  $\delta^2 = -2$ ), pour  $s$  parcourant  $S$ , est fermée dans  $\mathcal{C}$ : il suffit en effet de le vérifier sur  $S$ ; on peut donc supposer qu'il existe un marquage  $\sigma : R^2 f_* (\mathbb{Z}) \longrightarrow L_S$ , d'où une application des périodes  $\mathcal{P} : S \longrightarrow \Omega$ . Une classe  $x$  de  $\mathcal{C}_{X_s}$  appartient à un mur si et seulement si le 3-plan  $\mathcal{P}(s) + \mathbb{R} \sigma(x)$  de  $L_{\mathbb{R}}$  est orthogonal à un élément de  $\Delta$ , et cette dernière condition est fermée (Exposé VII, Proposition 3).

Soient  $s \in S$ , et  $x \in K_{X_s}$ . Choisissons une classe de Kähler  $k$  dans

$K_{X_s}$ . D'après ce qui précède il existe un voisinage  $V$  du segment  $[x, k]$  dans  $\mathcal{C}$  qui ne rencontre aucun mur de  $\mathcal{C}_{X_t}$ , quel que soit  $t \in S$ . De plus on peut supposer que  $V \cap \mathcal{C}_{X_s}$  est connexe pour tout  $s \in S$  (puisque  $\mathcal{K}^{1,1}$  est localement isomorphe à un produit  $S \times F$ , le segment compact  $[x, k]$  admet un système fondamental de voisinages de la forme  $V_1 \times V_2$ , avec  $V_2$  connexe). Enfin puisque l'ensemble des classes de Kähler est ouvert dans  $\mathcal{K}^{1,1}$ , on peut supposer, quitte à réduire  $S$ , que  $V \cap \mathcal{C}_{X_s}$  contient une classe de Kähler pour tout  $s \in S$ . On déduit alors de ce qui précède  $V \cap \mathcal{C}_{X_s} \subset K_{X_s}$  pour tout  $s \in S$ , d'où  $V \subset \bigcup_{s \in S} K_{X_s}$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Proposition 5.** Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $f' : X' \rightarrow S$  deux familles de surfaces K3 kähleriennes, et  $\varphi : R^2 f_* (\mathbb{Z}) \rightarrow R^2 f'_* (\mathbb{Z})$  un isomorphisme induisant en chaque point une isométrie de Hodge. Alors l'ensemble des points  $s$  de  $S$  tels que l'isométrie  $\varphi_s$  soit effective est ouvert dans  $S$ .

Posons  $K = \bigcup_{s \in S} K_{X_s}$ ,  $K' = \bigcup_{s \in S} H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X_s)$ , et notons  $K'$ ,  $K'$  les notions correspondantes pour  $X'$ . On déduit de  $\varphi$  un morphisme de fibrés  $\Phi : K \rightarrow K'$ . L'ensemble des  $s \in S$  tels que  $\varphi_s$  soit effective est la projection sur  $S$  de  $\Phi^{-1}(K') \cap K$  (Exposé VII, Lemme 4) ; il est donc ouvert d'après le lemme 2.  $\square$

#### 4. AUTOMORPHISMES AGISSANT TRIVIALEMENT EN COHOMOLOGIE

**Proposition 6.** Soient  $X$  une surface K3 kählienne,  $u$  un automorphisme de  $X$  induisant l'identité sur  $H^2(X, \mathbb{Z})$ . Alors  $u$  est l'identité.

Montrons d'abord que  $u$  est d'ordre fini. Fixons une métrique de Kähler-Einstein sur  $X$  (Exposé II). Puisque  $u$  préserve la classe de cohomologie de cette métrique, il préserve la métrique elle-même en vertu de son unicité. D'autre part le groupe des automorphismes de  $X$  est un groupe discret (c'est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie  $H^0(X, T_X)$  est nulle) ; le sous-groupe compact des automorphismes isométriques est donc fini, d'où notre assertion.

Notons  $\omega$  une 2-forme holomorphe non nulle sur  $X$  ; puisque  $u$  agit trivialement sur  $H^2(X, \mathbb{C})$ , on a  $u^* \omega = \omega$ . Soit  $x$  un point fixe de  $u$  ; la relation  $u^* \omega = \omega$  entraîne que l'endomorphisme  $T_x(u)$  de  $T_x(X)$  est de déterminant 1, donc a pour valeurs propres  $\lambda$  et  $\lambda^{-1}$ , avec  $|\lambda| = 1$ . Comme  $u$  est d'ordre fini, il existe un système de coordonnées locales  $(s, t)$  en  $x$  tel que  $u(s, t) = (\lambda s, \lambda^{-1} t)$ .

Supposons  $u \neq \text{Id}_X$ . On a alors  $\lambda \neq 1$ , de sorte que l'ensemble  $F$  des points fixes de  $u$  est fini. On peut alors appliquer la formule de Lefschetz holomorphe [ 1 ]

$$\sum (-1)^i \text{Tr}(u^* | H^i(X, \mathcal{O}_X)) = \sum_{x \in F} \det(1 - T_x(u))^{-1}.$$

Le premier membre est égal à 2. Soit  $x \in F$ ; notons  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  les valeurs propres de  $T_x(u)$ . Alors

$$\det(1 - T_x(u)) = (1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta}) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 4,$$

d'où l'on déduit  $\text{Card}(F) \leq 8$ . Mais la formule de Lefschetz topologique donne

$$\text{Card}(F) = \sum (-1)^i \text{Tr}(u^* | H^i(X, \mathbb{Z})) = \chi_{\text{top}}(X) = 24,$$

d'où une contradiction.  $\square$

Remarque. On évite facilement de recourir au théorème de S.T. Yau : on déduit sans difficultés de l'hypothèse sur  $u$  que  $u$  s'étend aux fibres voisines dans une déformation locale universelle de  $X$ . On se ramène alors au cas où  $X$  est projective, auquel cas  $u$  doit appartenir au groupe des automorphismes projectifs de  $X$ , qui est algébrique donc fini.

## 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TORELLI

Soient  $X, X'$  deux surfaces K3, et  $\psi_0 : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$  une isométrie de Hodge effective. Considérons des déformations locales universelles  $f : \mathcal{X} \rightarrow S$  et  $f' : \mathcal{X}' \rightarrow S'$  de  $X$  et  $X'$  (Exposé V), de sorte que  $X = \mathcal{X}_0 (0 \in S)$  et  $X' = \mathcal{X}'_0 (0' \in S')$ . Quitte à réduire  $S$  et  $S'$ , on peut choisir des marquages  $\sigma : R^2 f_* (\mathbb{Z}) \rightarrow L_S$  et  $\sigma' : R^2 f'_* (\mathbb{Z}) \rightarrow L_{S'}$ ; de plus, en modifiant convenablement  $\sigma'$ , on peut supposer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, \mathbb{Z}) & & \\ \downarrow \psi_0 & \searrow \sigma_0 & \\ H^2(X', \mathbb{Z}) & \nearrow \sigma'_0 & L \end{array}$$

est commutatif. Soient  $\wp : S \rightarrow \Omega$  et  $\wp' : S' \rightarrow \Omega$  les applications des périodes correspondantes; la condition précédente signifie qu'on a  $\wp(o) = \wp'(o')$ . D'après

le théorème de Torelli local (Exp.V), on peut réduire  $S$  et  $S'$  de façon que  $\nu'$  et  $\rho'$  induisent des isomorphismes sur un même ouvert de  $\Omega$ . On peut donc identifier  $(S', o')$  à  $(S, o)$  de façon que les deux familles marquées  $(\mathcal{X} \rightarrow S, \sigma)$  et  $(\mathcal{X}' \rightarrow S, \sigma')$  aient même application des périodes. Ceci revient à dire que l'isomorphisme  $\varphi = \sigma'^{-1} \circ \sigma$  de  $R^2 f_{*}(\mathbb{Z})$  dans  $R^2 f'_{*}(\mathbb{Z})$  induit en chaque point une isométrie de Hodge. D'après le cor. à la prop.3 (n°1), il existe une partie dense  $T$  de  $S$  telle que  $\mathcal{X}_t$  soit une surface de Kummer pour  $t \in T$ . Puisque l'isométrie de Hodge  $\varphi_o$  est effective, il en est de même de  $\varphi_t$  pour  $t$  assez voisin de  $o$  (Prop.5). On déduit alors du théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer (Exposé VIII) des isomorphismes  $u_t : \mathcal{X}'_t \rightarrow \mathcal{X}_t$  tels que  $u_t^* = \varphi_t$ . La Proposition 4 permet alors de conclure qu'il existe un isomorphisme  $u : X' \rightarrow X$  tel que  $u^* = \varphi_o$ . L'unicité de  $u$  est assurée par la Proposition 6.  $\square$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] M. Atiyah, R. Bott : A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, II : applications, Ann. of Math. 88 (1968), 451-491.
- [ 2 ] E. Bishop : Conditions for the analyticity of certain sets, Mich. Math.J. 11 (1964), 289-304.
- [ 3 ] H. Inose, T. Shioda : On singular K3 surfaces, Complex analysis and algebraic geometry (dedicated to K. Kodaira), Iwanami, Tokyo et CUP, Cambridge (1977), 119-136.
- [ 4 ] K. Kodaira, J. Morrow : Complex manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New-York (1971).
- [ 5 ] E. Looijenga, C. Peters : Torelli theorems for Kähler K3 surfaces, Compositio Math. 42 (1981), 145-186.

Bâtiment de Mathématiques 425  
 Université de Paris-Sud  
 ERA du CNRS n° 653  
 91405 ORSAY CEDEX (France)