GILLES CHRISTOL

Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers

Astérisque, tome 119-120 (1984), p. 151-168
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__119-120__151_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 119-120 (1984) p.151-168

UN THÉORÈME DE TRANSFERT POUR LES DISQUES SINGULIERS RÉGULIERS

par

Gilles CHRISTOL

1. INTRODUCTION.

Depuis les premières études de DWORK sur les équations différentielles p-adiques [8], on connait le "principe de transfert". D'après celui-ci, une équation différentielle d'ordre μ, qui a μ solutions analytiques linéairement indépendantes dans le disque générique, a également μ solutions analytiques linéairement indépendantes dans chaque disque $D(a,1^-)$ où elle n'a pas de singularité. Dans cet article, nous donnons l'analogue de ce résultat pour le cas où l'équation différentielle a, dans le disque $D(a,1^-)$, un unique point singulier régulier.

Soit k un corps ultramétrique d'inégales caractéristiques, complet et algébriquement clos. Nous notons p sa caractéristique résiduelle. Pour tout élément a du corps k, et tout nombre réel r, nous posons :

$$D(a,r^-) = \{x \in k \ ; \ |x-a| < r\} \ , \quad D(a,r^+) = \{x \in k \ ; \ |x-a| \leq r\} \ .$$

Nous dirons qu'un élément λ du corps k est un nombre de Liouville (au sens faible) s'il existe une infinité de nombres entiers n (dans $\mathbb{Z}$) et un nombre $r < 1$ pour lesquels on a :

$$|\lambda-n| < \inf(r^{-n},r^n) \ .$$

Les nombres de Liouville ne sont pas algébriques sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Le corps E sera le complété du corps $k(x)$ pour la norme de Gauss que nous notons $|.|$.

Nous posons, pour toute matrice H dont les coefficients $H_{i,j}$ appartiennent au corps k ou au corps E :

$$\|H\| = \sup_{i,j}(|H_{i,j}|)$$

et, pour toute matrice H dont les cofficients sont analytiques bornés dans le disque $D(0,r^-)$:

$$\|H\|\,(0,r) = \sup_{i,j,|x|<r}(|H_{i,j}(x)|) .$$

Enfin, nous noterons t_r un point générique tel que $|t_r| = r$, c'est-à-dire un élément d'une extension transcendante du corps k qui est à une distance r de celui-ci. Pour toute fonction f analytique dans $D(0,r^+)$, on trouve $|f|(0,r) = |f(t_r)|$. Les disques $D(t_r,r^-)$ sont évidemment ceux d'une extension algébriquement close et complète du corps $k(t_r)$. Pour simplifier les notations nous posons $t_1 = t$.

Soit G une matrice $\mu\times\mu$ à coefficients dans l'anneau $k[[X]]$. On sait qu'il existe une matrice Y_G (non unique) dans le groupe $G\ell_\mu(k((x)))$ telle que la matrice :

$$X = Y_G\, x^{G(0)}$$

soit la solution formelle en 0 du système différentiel :

$$\partial(X) = G\,X$$

où ∂ désigne l'opérateur différentiel xd/dx. Autrement dit, il existe une matrice Y_G qui vérifie la relation :

$$\partial(Y_G) = GY_G - Y_G G(0) .$$

Nous nous intéressons au rayon de convergence des coefficients de cette matrice. Plus précisément, nous voulons calculer le plus grand nombre réel $r(Y_G)$ (positif ou nul) tel que les coefficients des matrices Y_G et Y_G^{-1} soient analytiques dans la couronne :

$$\{x \in k\ ;\ 0 < |x| < r(Y_G)\} .$$

Bien que la matrice Y_G ainsi définie ne soit pas unique, on vérifie facilement (démonstration analogue à celle du lemme 4.1 ci-dessous avec $H = I$) que le rayon de convergence $r(Y_G)$ ne dépend que de la matrice G.

Lorsque les différences des valeurs propres de la matrice G(0) ne sont pas des entiers non nuls, on constate (voir formule (1') et lemme 3.2) que la matrice Y_G appartient au groupe $G\ell_\mu(k[[x]])$. Dans ce cas, afin de simplifier les calculs, nous déterminerons complètement la matrice Y_G en posant :

$$Y_G(0) = I$$

ce qui est toujours possible.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. Soit G une matrice dont les coefficients sont analytiques dans le disque $D(0,R^-)$. Si les valeurs propres de la matrice $G(0)$ appartiennent à l'anneau $\mathbb{Z}_p$ et ont des différences qui ne sont pas des nombres de Liouville, le rayon de convergence $r(Y_G)$ est la borne supérieure de l'ensemble des nombres $r < R$ pour lesquels il existe une matrice U_r inversible, à coefficients analytiques dans le disque $D(t_t,r^-)$, solution de l'équation différentielle : $\partial(U_r) = G\,U_r$.

Remarques :

a) On peut étendre le théorème au cas d'une matrice G dont les coefficients ont éventuellement des pôles en 0, mais qui est équivalente, au sens du paragraphe 4, à une matrice qui vérifie les hypothèses du théorème 1.

b) On savait déjà, avec les hypothèses du théorème 1, que le rayon de convergence $r(Y_G)$ n'était pas nul ([3], [6]). Nous montrons ici qu'il est le plus grand "possible".

c) L'existence d'une matrice U_r qui vérifie la condition du théorème 1 peut s'exprimer d'une manière différente. Pour cela, considérons la suite de matrices G_n, à coefficients analytiques dans le disque $D(0,R^-)$, définies par la récurrence :

$$G_0 = I\,,\quad G_{n+1} = \partial(G_n) + G_n(G - nI)$$

de telle sorte que l'on ait :

$$x^n(d/dx)^n(U_r) = G_n\,U_r\,.$$

On trouve :

$$U_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t_r)\,\frac{(x-t_r)^n}{n!\,t_r^n}\,U_r(t_r)\,.$$

Comme le point t_r est générique, on a :

$$\|G_n(t_r)\| = \|G_n\|(0,r)\,.$$

Les coefficients de la matrice U_r sont donc analytiques dans le disque $D(t_r,r^-)$ si et seulement si

$$\limsup_{n\to\infty} \{(\|G_n/n!\|(0,r))^{1/n}\} \leq 1 .$$

La norme $\|G_n\|(0,r)$ étant une fonction croissante de r, l'ensemble des nombres r pour lesquels il existe une matrice U_r qui vérifie la condition du théorème 1 est donc l'intervalle $(0,r(Y_G))$. On montre que, si $r(Y_G) < R$, c'est même l'intervalle fermé (l'existence d'une matrice U_R n'a pas de sens a priori car la matrice G n'est pas définie dans le disque $D(t_R,R^-)$) .

d) Dans le cas où les valeurs propres de la matrice G(0) n'appartiennent pas à l'anneau $\mathbb{Z}_p$, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \{\|G_n(0)/n!\|^{1/n}\} > 1$$

(voir formule (2')) et, pour aucun nombre r > 0, il n'existe de matrice U_r vérifiant la condition du théorème 1.

Soit a un élément du disque $D(0,R^-)$. Les coefficients de la matrice $F = G(ax)$ sont des fonctions analytiques dans le disque $D(0,1^+)$, ce sont donc des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$. Or, d'une part la formule :

$$\partial(Y_G(ax)) = \partial(Y_G)(ax) = F\, Y_G(ax) - Y_G(ax)F(0)$$

montre que $Y_F = Y_G(ax)$, c'est-à-dire que :

$$r(Y_F) = r(Y_G)/|a| ,$$

d'autre part on vérifie par récurrence la formule :

$$F_n = G_n(ax)$$

qui donne :

$$\|F_n\|(0,1) = \|G_n\|(0,|a|) .$$

On pourra donc déduire le théorème 1 (pour la matrice G) du résultat suivant (pour la matrice F) :

THÉORÈME 2. <u>Soit</u> G <u>une matrice dont les coefficients sont des éléments analytiques dans le disque</u> $D(0,1^-)$. <u>Si les différences des valeurs propres de la matrice</u> G(0) <u>ne sont pas des nombres de Liouville</u>, <u>les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) Le rayon de convergence $r(Y_G)$ est supérieur ou égal à 1 et les valeurs propres de la matrice $G(0)$ appartiennent à l'anneau $\mathbb{Z}_p$.

ii) Il existe une matrice U inversible, à coefficients analytiques dans le disque $D(t,1^-)$, solution de l'équation différentielle : $\partial(U) = G\,U$.

Remarques :

a) Le théorème 2 s'étend à des matrices G ayant des pôles en 0 de la même manière que le théorème 1.

b) L'existence de la matrice U est équivalente à la condition :

$$\limsup_{n\to\infty} \{\|G_n/n!\|^{1/n}\} \leq 1$$

en particulier elle entraîne que :

$$\lim_{n\to\infty} (\|G_n\|) = 0 \ .$$

c) On peut préciser la croissance au bord des coefficients de la matrice Y_G et ceci, au moins dans des cas particuliers, d'une manière explicite ([2]).

d) Dans [9] (théorème 2.1) on trouve une démonstration, dans un cas particulier, de notre théorème 2.

e) Le fait que la condition i) entraîne la condition ii) est déjà connu. On en trouvera une démonstration dans [10] (théorème 8.5). Ici nous nous contenterons de démontrer que i) entraîne ii).

Notre démonstration repose sur deux résultats : l'existence d'une structure de Frobenius faible pour le module avec connexion associé à la matrice G (voir [4]) et la décomposition des matrices en facteurs singuliers (voir [2]).

Nous terminerons en donnant une application du théorème 2 à un calcul d'indice d'un opérateur différentiel. C'est Robba qui nous a expliqué comment le théorème 2 permettait de réécrire le théorème d'Adolphson [1].

Nous tenons à remercier particulièrement Bernard Dwork pour l'intérêt qu'il a montré pour le travail que nous présentons ici,

non seulement en posant le problème, mais aussi par ses suggestions lors de la rédaction de cet article.

2. LIEN ENTRE LES MATRICES G_n ET LA MATRICE Y_G.

Dans ce paragraphe, nous supposons que les différences des valeurs propres de la matrice $G(0)$ ne sont pas des entiers non nuls. Les matrices G_n étant définies comme dans l'introduction, nous posons :

$$Y_G = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m x^m , \quad Y_G^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m^{(-1)} x^m , \quad G_n = \sum_{m=0}^{\infty} G_{n,m} x^m .$$

En partant de la formule :

$$G_{n+1} Y_G = \partial(G_n) Y_G + G_n(G-n) Y_G = \partial(G_n Y_G) + G_n Y_G(G(0) - n)$$

on démontre facilement par récurrence que l'on a :

$$(0) \qquad G_n Y_G = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(G(0)+m) \ldots (G(0)+m-n+1) x^m .$$

Si nous posons

$$P_n(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$$

la formule (0) se traduit par les égalités :

$$(1) \qquad Y_m P_n(G(0)+m) = \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{n!} G_{n,s} Y_{m-s}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{n!} G_{n,m} = \sum_{s=0}^{m} Y_s P_n(G(0)+s) Y_{m-s}^{(-1)} .$$

Lorsque l'on choisit $Y_G(0) = I$, c'est-à-dire $Y_0 = Y_0^{(-1)} = I$, on trouve :

$$(2') \qquad \frac{1}{n!} G_{n,0} = P_n[G(0)] ,$$

ce qui permet de réécrire l'égalité (1) sous la forme :

$$(1') \quad Y_m P_n(G(0)+m) - P_n(G(0)) Y_m = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{n!} G_{n,m-s} Y_s .$$

3. MINORATION DE $r(Y_G)$.

Dans ce paragraphe nous reprenons les idées de Clark et Baldassarri pour démontrer que $r(Y_G)$ n'est pas nul mais en explicitant les calculs.

LEMME 3.1. *Soit* λ *un élément du corps* k *qui n'est ni un entier positif ni un nombre de Liouville. Pour tout nombre* $\rho < 1$, *il existe un nombre* c *pour lequel on a, pour tout entier* n *positif* :

$$\prod_{m=0}^{n} |\lambda-m| \geqq c\,\rho^{n}\quad p^{-n/(p-1)}.$$

Avec notre définition des nombres de Liouville (qui n'est pas la même que celle de Clark-Baldassarri mais est un peu plus faible), on constate aisément qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout entier positif n, on ait :

$$|\lambda-n| \geqq c\,\rho^{n}.$$

Soit s un entier, compris entre 0 et n, tel que $|\lambda-s|$ soit minimum. On a alors la minoration :

$$\prod_{m=0}^{n} |\lambda-m| \geqq |\lambda-s| \prod_{\substack{m=0\\ m\neq s}}^{n} |s-m|.$$

Le lemme découle alors des inégalités :

$$\prod_{\substack{m=0\\ m\neq s}}^{n} |s-m| = |s!(n-s)!| = |n!/P_n(s)| \geqq |n!| \geqq p^{-n/(p-1)}.$$

LEMME 3.2. *Si les différences des valeurs propres de la matrice* G(0) *ne sont ni des nombres de Liouville ni des entiers non nuls, on a la minoration* :

$$r(Y_G) > p^{-\mu^2(p-1)}\ \sup(1,\|G\|^{\mu^2}).$$

Notons Θ_m l'application linéaire de l'espace des matrices $\mu\times\mu$ dans lui-même qui est donnée par :

$$\Theta_m(X) = X(G(0)+m) - G(0)X \ .$$

Si nous notons $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ les valeurs propres de la matrice $G(0)$, les valeurs propres de l'application Θ_m sont les μ^2 nombres $\{\lambda_i + m - \lambda_j\}$. Par hypothèses ces nombres sont non nuls pour $m \neq 0$ et ne sont pas des nombres de Liouville. Or la formule (1'), pour $n=1$, s'écrit :

$$Y_m = \Theta_m^{-1}\left(\sum_{s=0}^{m-1} G_{1,m-s}\, Y_s\right) .$$

Comme l'inverse de l'application Θ_m est donné par :

$$\Theta_m^{-1} = (\det\Theta_m)^{-1} \operatorname{adj}\Theta_m = \prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j + m)^{-1} \operatorname{adj}\Theta_m$$

et comme les coefficients de la matrice de l'application $\operatorname{adj}\Theta_m$ sont des mineurs d'ordre μ^2-1 de la matrice de l'application Θ_m, on a :

$$\|\operatorname{adj}\Theta_m\| \leqq \sup(1, \|G(0)\|)^{\mu^2-1} \leqq \sup(1, \|G\|)^{\mu^2-1} ,$$

ce qui donne

$$\|Y_m\| \leqq \prod_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j + m|^{-1} \sup(1, \|G\|^{\mu^2-1}) \left\|\sum_{s=0}^{m-1} G_{1,m-s}\, Y_s\right\|$$

$$\leqq \prod_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j + m|^{-1} \sup(1, \|G\|^{\mu^2}) \sup_{0 \leqq s < m} \|Y_s\|$$

d'où on déduit, par récurrence :

$$\|Y_n\| \leqq \prod_{i,j} \prod_{m=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_j + m|^{-1} \quad \sup(1, \|G\|^{n\mu^2}) \ .$$

Le lemme 3.1 montre alors que, pour tout nombre $\rho < 1$, il existe une constante c' telle que l'on ait, pour tout entier n :

$$\|Y_n\| \leqq c'(\rho^{-n}\, p^{n/(p-1)})^{\mu^2} \quad \sup(1, \|G\|^{n\mu^2}) \ .$$

Cette égalité signifie que les coefficients de la matrice Y_G sont analytiques dans le disque :

$$D(0, p^{-\mu^2/(p-1)} \sup(1, \|G\|^{-\mu^2})^{-}) \ .$$

Par une méthode analogue, on obtient une majoration des matrices $Y_n^{(-1)}$, ce qui démontre la minoration annoncée.

4. MATRICES ÉQUIVALENTES.

DEFINITION. Nous notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices G qui vérifient les hypothèses du théorème 2, c'est-à-dire les conditions suivantes :

$\mathcal{R}$1) G est une matrice $\mu \times \mu$ dont les coefficients sont des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$.

$\mathcal{R}$2) Les différences des valeurs propres de la matrice G(0) ne sont pas des nombres de Liouville.

$\mathcal{R}$3) Il existe une matrice inversible U, dont les coefficients sont analytiques dans le disque générique $D(t,1^-)$, telle que :

$$\partial(U) = G\ U\ .$$

Il est clair que la condition $\mathcal{R}$3 impose aux coefficients de la matrice $(1+X)^{G(0)}$ d'être analytiques dans le disque $D(0,1^-)$, et il est "bien connu" que ceci entraîne la condition

$\mathcal{R}$4) Les valeurs propres de la matrice G(0) appartiennent à $\mathbb{Z}_p$.

DEFINITION. Nous dirons que deux matrices F et G de l'ensemble $\mathcal{R}$ sont équivalentes s'il existe une matrice inversible H qui vérifie les conditions suivantes :

1) Il existe un entier n pour lequel les coefficients des matrices x^nH et x^nH^{-1} sont des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$.

2) On a : $\partial(H) = FH - HG$.

On constate que l'on défini ainsi une relation d'équivalence.

A chaque matrice G de l'ensemble $\mathcal{R}$, nous attachons une matrice Y_G comme il a été indiqué dans l'introduction, et nous nous intéressons au rayon de convergence des coefficients de cette dernière. En fait, pour ne pas alourdir les notations, et comme tout se passe dans le disque $D(0,1^-)$, ce que nous allons noter $r(Y_G)$ à partir de maintenant c'est le nombre que nous aurions noté $\inf(r(Y_G),1)$ avec les notations de l'introduction.

LEMME 4.1. *Si deux matrices* G *et* F *de l'ensemble* $\mathcal{R}$ *sont équivalentes, les rayons de convergence* $r(Y_G)$ *et* $r(Y_F)$ *sont égaux.*

Les coefficients de la matrice :

$$S = Y_F^{-1}\ H\ Y_G$$

appartiennent au corps $k((x))$. Posons :

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n\ x^n\ .$$

On trouve :

$$\begin{aligned}\partial(S) &= -Y_F^{-1}(FY_F - Y_F F(0))Y_F^{-1}HY_G + Y_F^{-1}(FH-HG)Y_G + Y_F^{-1}H(GY_G - Y_G G(0))\\ &= F(0)\ S - S\ G(0)\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$n\ S_n + S_n\ G(0) - F(0)\ S_n = 0\ .$$

Autrement dit, si la matrice S_n est non nulle, l'entier n est valeur propre de l'application linéaire :

$$X \longrightarrow -X\ G(0)\ +\ F(0)\ X\ .$$

On en déduit que les matrices S_n sont presque toutes nulles, c'est-à-dire que les coefficients de la matrice S sont analytiques dans le disque $D(0,1^-)$ privé du point 0.

En échangeant le rôle des matrices F et G, c'est-à-dire en changeant aussi H en H^{-1}, on montre de la même manière que les coefficients de la matrice $S^{-1} = Y_G^{-1}\ H^{-1}\ Y_F$ sont aussi analytiques dans le disque $D(0,1^-)$ privé de l'origine.

On trouve alors :

$$r(Y_F) = r(HY_G S^{-1}) \geqq r(Y_G)\ ,\quad r(Y_G) = r(H^{-1}Y_F S) \geqslant r(Y_G)$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 4.2. *Soit* G *une matrice de l'ensemble* $\mathcal{R}$, *il existe une matrice* F *de l'ensemble* $\mathcal{R}$, *équivalente à la matrice* G, *qui vérifie les conditions suivantes* :

i) *Les matrices* $F(0)$ *et* $G(0)$ *ont même réduite de Jordan.*

ii) *On a* $||F|| \leqq 1$.

D'après un théorème de Jacobson-Deligne ([7], II.1.3) le système différentiel ∂-G est "équivalent" à une équation différentielle à coefficient dans le corps $\overset{\circ}{E}$ des quotients de l'anneau des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$. Si on choisit cette équation différentielle unitaire, l'hypothèse $\mathcal{R}3$ affirme qu'elle est entièrement soluble dans l'anneau des fonctions analytiques dans le disque générique. Le théorème de Frobenius-Dwork ([4], 8.1) montre alors que les coefficients de cette équation différentielle sont de norme inférieure à 1. Autrement dit, ceci montre qu'il existe une matrice G_1 à coefficients dans le corps $\overset{\circ}{E}$ et une matrice inversible H, à coefficients dans le corps $\overset{\circ}{E}$, telles que :

$$||G_1|| \leqq 1$$

$$G = \partial(H)\, H^{-1} + H\, G_1\, H^{-1} \; .$$

Maintenant, d'après le théorème de factorisation des matrices ([5] théorème 3.2 ou simplement [4] 8.2), on sait décomposer la matrice H sous la forme :

$$H = K\, L$$

avec :

$$\begin{cases} ||L|| = ||L^{-1}|| = 1 \\ \text{les coefficients des matrices } K \text{ et } K^{-1} \text{ sont des éléments} \\ \text{analytiques dans le disque } D(0,1^-). \end{cases}$$

Nous posons :

$$F = \partial(L)\, L^{-1} + L\, G_1\, L^{-1} \; .$$

Nous avons évidemment :

$$||F|| \leqq 1 \; .$$

Mais un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} \partial(K) = \partial(HL^{-1}) &= (GH - HG_1)L^{-1} - H\, L^{-1}(FL - LG_1)L^{-1} \\ &= G\, K - K\, F \; . \end{aligned}$$

Cette relation exprime que les matrices F et G sont équivalentes, et que la matrice $F = K^{-1}(GK - \partial(K))$ vérifie la condition $\mathcal{R}1$. On a aussi :

$$F(0) = K^{-1}(0)\; G(0)\; K(0)$$

relation qui exprime que les matrices F(0) et G(0) ont même réduite de Jordan. En particulier elles ont les mêmes valeurs propres, et la matrice F vérifie la condition $\mathcal{R}2$.

Pour établir que la matrice F vérifie la condition $\mathcal{R}3$, il suffit de considérer la matrice :

$$V = K^{-1} U$$

qui a des coefficients analytiques dans le disque $D(t,1^-)$ et qui vérifie :

$$\partial(V) = - K^{-1}(GK - KF) K^{-1} U + K^{-1} G U = F V .$$

Nous donnons maintenant, sous une forme adaptée à notre problème, un résultat classique de la théorie des points singuliers des équations différentielles.

LEMME 4.3. <u>Soit</u> G <u>une matrice de l'ensemble</u> $\mathcal{R}$. <u>Il existe une matrice</u> F <u>de l'ensemble</u> $\mathcal{R}$ <u>équivalente à la matrice</u> G <u>et pour laquelle les valeurs propres de la matrice</u> F(O) <u>appartiennent</u> à $p\,\mathbb{Z}_p$ <u>et ont des différences qui ne sont pas des entiers non nuls</u>.

Soient $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu\}$ les valeurs propres de la matrice G(O). Il suffit de trouver une matrice F équivalente à la matrice G telle que les valeurs propres de la matrice F(O) soient les nombres $\{\lambda_1+n_1,\ldots,\lambda_\mu+n_\mu\}$ (avec $n_i=n_j$ si $\lambda_i=\lambda_j$). On opère par transformations élémentaires : chacune d'entre elles consistant à ajouter 1 aux valeurs propres qui ont une valeur donnée λ. Pour cela, on considère la matrice :

$$H = x^{\Delta} C$$

où C est une matrice inversible à coefficients dans le corps k telle que la matrice :

$$J = C\, G(O)\, C^{-1}$$

soit sous forme réduite de Jordan et plus précisément telle que :

$$J_{ii} \begin{cases} = \lambda & \text{si } i \leqq \nu \\ \neq \lambda & \text{sinon} \end{cases} \qquad J_{ij} = 0 \text{ si } i < j \text{ ou si } i > \nu \geqq j$$

et où Δ est la matrice diagonale de terme diagonal :

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqq \nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de telle sorte que les matrices Δ et J commutent. Il est clair que la matrice :

$$F = \partial(H)\, H^{-1} + H\,G\,H^{-1} = \Delta + x^{\Delta}\, C\,G\,C^{-1}\, x^{-\Delta}$$

est équivalente à la matrice G et que ses coefficients :

$$F_{ij} = \Delta_i\, \delta_{ij} + x^{\Delta_i - \Delta_j}(C\,G\,C^{-1})_{ij}$$

sont des éléments analytiques ($\Delta_i - \Delta_j < 0$ uniquement pour $j \leqq \nu < i$). La matrice F vérifie la condition $\mathcal{R}1$.

On trouve :

$$F(0) = \Delta + J + T$$

où les coefficients T_{ij} de la matrice T ne sont non nuls que pour $j \leqq \nu < i$. Autrement dit la matrice F(O) est triangulaire et a les mêmes valeurs propres que la matrice G(O) modulo $\mathbb{Z}$. On en déduit immédiatement que la matrice F vérifie la condition $\mathcal{R}2$.

Pour montrer que la matrice F vérifie la condition $\mathcal{R}3$, il suffit, comme dans le lemme 4.2, de considérer la matrice $V = H\,U$.

COROLLAIRE. Pour toute matrice G de l'ensemble $\mathcal{R}$, on a :

$$r(Y_G) \geqslant p^{-\mu^2/(p-1)} .$$

D'après le lemme 4.1, on peut remplacer la matrice G par une matrice équivalente. D'après le lemme 4.3, on peut donc supposer que les valeurs propres de la matrice G(O) ont des différences qui ne sont ni des nombres de Liouville ni des entiers non nuls. D'après le lemme 4.2, on peut supposer en outre que $\|G\| \leqslant 1$. Le corollaire est donc une conséquence immédiate du lemme 3.2.

5. FROBENIUS.

Dans ce paragraphe, nous reprenons les idées utilisées dans [4] pour démontrer l'existence d'une structure de Frobenius faible, mais en les explicitant dans le cas d'un point singulier régulier.

Nous reprenons les notations du paragraphe 2.

LEMME 5.1. Si G est une matrice de l'ensemble $\mathcal{R}$, il existe une matrice F de l'ensemble $\mathcal{R}$ telle que les matrices G et $pF(x^p)$ soient équivalentes.

Quitte à remplacer la matrice G par une matrice équivalente, on peut supposer que les valeurs propres de la matrice G(O) appartiennent à $p\,\mathbb{Z}_p$ et ont des différences qui ne sont pas des entiers non nuls (ni des nombres de Liouville) et que $\|G\| < 1$.

Nous considérons la matrice :

$$H = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p = 1} \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{(\xi-1)^n}{n!} .$$

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, la condition $\mathcal{R}3$ implique que la suite $\|G_n\|$ tende vers O lorsque n tend vers l'infini. Comme, par ailleurs, on a :

$$|(\xi-1)^n/n!| \leqq 1$$

les coefficients de la matrice H appartiennent à l'anneau (complet) des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$.

Comme, pour $n > 1$,

$$\sum_{\xi^p = 1} (\xi-1)^n/n!$$

est un élément de $\mathbb{Z}_p$ de valeur absolue strictement inférieure à 1, on a :

$$\|H\| \leqq 1 .$$

Pour vérifier que la matrice H est inversible et que les coefficients de la matrice H^{-1} sont des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$, il suffit de démontrer que $H(0) = I$. Ceci va résulter d'un calcul plus général.

En utilisant la formule (O), on trouve en effet :

$$H\,Y_G = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Y_m\, P_n(G(0)+m)\; x^m \frac{(\xi-1)^n}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} Y_m\, x^m \sum_{\xi^p=1} \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-1)^n}{n!}\; P_n(G(0)+m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} Y_m\, x^m \sum_{\xi^p=1} \frac{1}{p}\; \xi^{m+G(0)} .$$

Mais la matrice $G(O)$ est somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N qui commutent. Les valeurs propres de la matrice D étant "divisibles" par p on a :

$$\xi^D = I .$$

Comme $\log(\xi) = \frac{1}{p}\log(\xi^p) = 0$, on a :

$$\xi^{G(O)} = \xi^{D+N} = \xi^N = e^{N\log(\xi)} = I .$$

D'où on tire :

$$H\,Y_G = \sum_{m=O}^{\infty} Y_m\, x^m \sum_{\xi^p=1} \frac{1}{p}\,\xi^m = \sum_{m=O}^{\infty} Y_{mp}\, x^{mp} = K(x^p) .$$

En particulier on a :

$$H(O) = H(O)Y_G(O) = K(O) = I .$$

Ce qui achève de démontrer que la matrice H est inversible.

Nous considérons la matrice :

$$F = (\partial(K) + \frac{1}{p}\,K\,G(O))K^{-1} .$$

Nous avons $K(x^p) = H\,Y_G$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} pF(x^p) &= [\partial(H)\,Y_G + H(GY_G - Y_G G(O)) + HY_G G(O)]\,Y_G^{-1}\,H^{)1} \\ &= \partial(H)\,H^{-1} + H\,G\,H^{-1} . \end{aligned}$$

Cette égalité montre d'une part que les matrices $pF(x^p)$ et G sont équivalentes, et d'autre part que les coefficients de la matrice $pF(x^p)$ sont des éléments analytiques dans le disque $D(0,1^-)$, ce qui montre que la matrice F elle-même vérifie la condition $\mathcal{R}1$.

On a aussi :

$$pF(O) = H(O)\,G\,H^{-1}(O) .$$

Les valeurs propres de la matrice $pF(O)$ sont celles de la matrice $G(O)$. Ceci montre que la matrice F satisfait la condition $\mathcal{R}2$ (si λ est un nombre de Liouville, il en est de même du nombre $p\lambda$).

Soit t un point générique. Considérons la matrice V, dont les coefficients sont analytiques au voisinage du point t^p, et qui vérifie :

$$\partial(V) = F\,V , \quad V(t^p) = I .$$

Comme le disque $D(t^p,1^-)$ est aussi un disque générique, pour montrer que la matrice F satisfait la condition $\mathfrak{R}3$, il suffit de prouver que les coefficients de la matrice V sont analytiques dans le disque $D(t^p,1^-)$, c'est-à-dire que les coefficients de la matrice $V(x^p)$ sont analytiques dans le disque $D(t,1^-)$. Or on a :

$$\begin{aligned}\partial(H^{-1}V(x^p)) &= -H\ \partial(H)\ H^{-1}\ V(x^p) + H^{-1}pF(x^p)V(x^p)\\ &= G\ H^{-1}\ V(x^p)\ .\end{aligned}$$

La matrice G vérifiant la condition $\mathfrak{R}3$, l'unicité des solutions d'un système différentiel montre que les coefficients de la matrice $H^{-1}V(x^p)$ sont analytiques dans le disque $D(t,1^-)$, ce qui achève la démonstration.

6. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.

Nous posons :

$$\rho = \inf_{G\in\mathfrak{R}} r(Y_G)\ .$$

D'après le corollaire du lemme 4.2, nous savons déjà que :

$$\rho > 0\ .$$

Si F est une matrice de l'ensemble $\mathfrak{R}$ nous avons :

$$\partial(Y_F(x^p)) = p\,[Y_F(x^p)F(x^p) - F(0)Y_F(x^p)]\ ,$$

c'est-à-dire

$$Y_F(x^p) = Y_{pF(x^p)}\ .$$

Pour toute matrice G de l'ensemble $\mathfrak{R}$, nous avons donc, d'après les lemmes 5.1 et 4.2 :

$$r(Y_G) = r(Y_{pF(x^p)}) = r(Y_F(x^p)) = r(Y_F)^{1/p} \geqq \rho^{1/p}\ .$$

Ce qui donne :

$$\rho \geqq \rho^{1/p}$$

c'est-à-dire : $\rho = 1$.

7. APPLICATIONS A UN THÉORÈME D'INDICE.

Dans [1], Adolphson calcule l'indice d'un opérateur différentiel en supposant connu le rayon de convergence des matrices Y_G que nous avons considérées ici. Il est clair que notre résultat s'applique pour simplifier ses hypothèses. Par exemple, le corollaire 2 de [1] permet de démontrer immédiatement le résultat suivant :

COROLLAIRE : Soit $L = P_\mu(x)(d/dx)+\ldots+P_0(x)$ un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. Soient $a_1,\ldots,a_n$ des points du disque $D(0,1^+)$ qui appartiennent à des classes résiduelles distinctes. On suppose que, dans le disque $D(a_i,1^-)$ (resp. dans l'ensemble $|x| > 1$) la seule singularité de l'opérateur L soit, éventuellement, un point singulier régulier en a_i (resp. à l'infini). On suppose aussi qu'il existe μ fonctions analytiques dans le disque $D(t,1^-)$, linéairement indépendantes, f_i telles que $L(f_i) = 0$. Alors, pour tous nombres $r_1,\ldots,r_n,r_\infty$, strictement inférieurs à 1, l'indice de l'opérateur L dans l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur l'ensemble :

$$S = D(0,1/r_\infty^-) - \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i,r_i^+)$$

est égal à : $\mu(1-n) - \nu(P_\mu)$ où $\nu(P_\mu)$ désigne le nombre de zéros (avec multiplicité) du polynôme P_μ dans l'ensemble S.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADOLPHSON A., An index theorem for p-adic differential operator. Trans. AMS 216 (1976) 279-293.

[2] ADOLPHSON A., DWORK B., SPERBER S., Growth of solutions of linear differential equations at a logarithmic singularity. **Trans** : AMS 281 (1982) 245-252.

[3] BALDASSARRI F., Differential modules and singular points of p-adic differential equations. Adv. in Math.

[4] CHRISTOL G., Systèmes différentiels linéaires p-adiques : structure de Frobenius faible. Bull. Soc. Math. Fr. 109 (1981) 83-122.

[5] CHRISTOL G., Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Application aux équations différentielles. Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique 7-8 (1979/1981) n° 5, 17 p.

[6] CLARK D., A note on the p-adic convergence of solutions of linear differential equations. Proc. Am. Math. Soc. 17 (1966) **262-269.**

[7] DELIGNE P., Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lectures notes in Math. n° 163 (1970).

[8] DWORK B,, On p-adic differential equations II. Annals of Math. (2) 98 (1973) 366-376.

[9] DWORK B., ROBBA P., On natural radii of p-adic convergence Trans. Am. Math. Soc. 256 (1979) 199-213.

[10] DWORK B., ROBBA P., Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations. Trans. A.M.S. 259 (1980) 559-577.

CHRISTOL Gilles
5 allée des Gradins
91350 - GRIGNY