Astérisque

JEAN FRESNEL

Une base normale pour l'algèbre de Banach de Reich

Astérisque, tome 119-120 (1984), p. 140-150

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__119-120__140_0>

Appendice

UNE BASE NORMALE POUR L'ALGÈBRE DE BANACH DE REICH

par

Jean FRESNEL

-:-:-:-

Le but de cet appendice est de trouver une base normale pour l'algèbre de Banach de Reich $F_{\varepsilon,\Delta,g}$ définie au §2 de l'article précédent "The Reich trace formula" de M. Boyarsky, base qui essentiellement ne dépend pas de ε et de Δ.

Au § 2 (A. 2) on montre que cette algèbre d'éléments analytiques est une algèbre affinoïde et pour cette dernière on construit au §1 (A.1) une base normale en utilisant des propriétés classiques des algèbres affinoïdes et en particulier la division de Weierstrass.

Les calculs qui suivent n'ont rien d'original, ils sont bien connus des "géomètres rigides" ; nous les avons écrits pour aider le lecteur peu habitué au maniement des algèbres affinoïdes.

A.0. - Quelques rappels sur les algèbres affinoïdes

DÉFINITION 1 (et propriétés). - Soient **K** un corps valué complet pour une valeur absolue non archimédienne, $K<T_1, T_2, \dots, T_n>$ la sous-algèbre des séries formelles $\Sigma\, a_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n} T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2} \dots T_n^{\nu_n}$ telles que $\lim |a_\nu| = 0$. Cette algèbre est de Banach pour la norme $\|\ .\ \|$ définie par $\|\Sigma\, a_\nu T^\nu\| = \max_\nu |a_\nu|$, cette norme est multiplicative. L'algèbre $K<T_1, T_2, \dots, T_n>$ est souvent appelée l'agèbre de Tate, c'est un anneau nœthérien ([1], II. 3.1), factoriel ([1], II. 3.2) dans lequel tout idéal est fermé ([1], II. 3.3).

DÉFINITION 2 (algèbre résiduelle). - Si K est un corps valué, on note K° son anneau de valuation, $K^{\circ\circ}$ son idéal de valuation, $\overline{K} = K^\circ/K^{\circ\circ}$ son corps résiduel. Si $(A, \|.\|)$ est une algèbre normée on note $A^\circ = \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$, $A^{\circ\circ} = \{a \in A \mid \|a\| < 1\}$ et $\overline{A} = A^\circ/A^{\circ\circ}$ s'appelle l'algèbre résiduelle de A et et on note $a \mapsto \overline{a}$ la surjection canonique de A° sur $\overline{A}$. En particulier on a $(K<T_1, T_2, \dots, T_n>)^\circ = K^\circ<T_1, T_2, \dots, T_n> = \{\Sigma a_\nu T^\nu \mid |a_\nu| \leq 1, a_\nu \to 0\}$ et $\overline{K<T_1, T_2, \dots, T_n>} = \overline{K}[T_1, T_2, \dots, T_n]$.

DÉFINITION 3. - Un élément $f \in K<T_1, T_2, \dots, T_n>$ avec $\|f\| = 1$ est dit régulier en T_n de degré d si $\overline{f}$ est de la forme $\overline{f} = c_o + c_1 T_n + \dots + c_{d-1} T_n^{d-1} + \lambda T_n^d$ où $c_i \in \overline{K}[T_1, \dots, T_{n-1}]$, $\lambda \in \overline{K} - \{0\}$.

THÉORÈME DE DIVISION DE WEIERSTRASS ([1], II. 2). - Soient K un corps valué complet, $f \in K<T_1, T_2, \dots, T_n>$ régulier en T_n de degré d, $g \in K<T_1, T_2, \dots, T_n>$. Alors il existe $q \in K<T_1, T_2, \dots, T_n>$, $r \in K<T_1, \dots, T_{n-1}>[T_n]$ uniques tels que $g = qf + r$ et $\deg_{T_n} r < d$. En plus on a $\|g\| = \max(\|q\|, \|r\|)$.

A. 1. - Une base normale pour une algèbre affinoïde

PROPOSITION 1. - Soient K un corps valué complet, $\pi, R \in K$ avec $0 < |\pi| \leq 1 \leq |R|$, $g \in K[T_1, T_2, \dots, T_n]$, régulier en T_n de degé d (considéré comme élément de $K<T_1, T_2, \dots, T_n>$) et avec $d = \deg_{total}(g)$. Soient $A(g, \pi, R) = \dfrac{K<T_1/R, \dots, T_n/R, S>}{(gS - \pi)}$ muni de la norme $\|.\|_{\pi, R}$ induite par la norme $\|.\|_R$ de $K<T_1/R, \dots, T_n/R, S>$ et $\varphi : K<\frac{T}{R}, S> \twoheadrightarrow A(g, \pi, R)$ la surjection canonique. Alors $A(g, \pi, R)$ est une algèbre intègre et

$$\mathcal{B}(g, \pi, R) = \left\{ \varphi\left(\left(\frac{T_1}{R}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i\right), \varphi\left(\left(\frac{T_1}{R}\right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R}\right)^{\mu_n} S^j\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d,\ 0 \leq \mu_n < d \\ i \geq 0,\ j > 0 \end{array} \right\}$$

est une base normale de $A(g, \pi, R)$ pour la norme $\|.\|_{\pi, R}$.

Remarque. - Les éléments de $K<\frac{T_1}{R},\dots,\frac{T_n}{R},S>$ sont les séries de la forme $\Sigma\, a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_{n+1}}(\frac{T_1}{R})^{\nu_1}\dots(\frac{T_n}{R})^{\nu_n}S^{\nu_{n+1}}$ avec $\lim a_\nu = 0$ et $\|\Sigma\, a_\nu(\frac{T_1}{R})^{\nu_1}\dots(\frac{T_n}{R})^{\nu_n}S^{\nu_{n+1}}\|_R = \max_\nu |a_\nu|$.

Démonstration. - Puisque $K<\frac{T_1}{R},\dots,\frac{T_n}{R},S>$ (noté brièvement $K<\frac{T}{R},S>$) est factoriel (A.0) on a donc $A(g,\pi,R)$ intègre si et seulement si $Sg-\pi$ est un élément irréductible de $K<\frac{T}{R},S>$.

On a $1 = \|\frac{g}{R^d}\|_R$; considérons une factorisation de $\frac{g}{R^d}S - \frac{\pi}{R^d}$.

$$\frac{g}{R^d}S - \frac{\pi}{R^d} = (a_o(T)+a_1(T)S+\dots)(b_o(T)+b_1(T)S+\dots). \tag{1}$$

Comme $\|\frac{g}{R^d}S - \frac{\pi}{R^d}\|_R = 1$ et que $\|\,.\,\|_R$ est multiplicative on peut supposer que $1 = \max \|a_i\|_R = \max \|b_i\|_R$.

On regarde (1) dans l'algèbre résiduelle $\overline{K<\frac{T}{R},S>} = \overline{K}[\frac{T}{R},S]$, on a

$$\overline{(\frac{g}{R^d})}S - \overline{(\frac{\pi}{R^d})} = (\overline{a}_o+\overline{a}_1S+\dots)(\overline{b}_o+\overline{b}_1S+\dots) .$$

On a (par exemple) $1 = \deg_S(\overline{a}_o+\overline{a}_1S+\dots)$, $0 = \deg_S(\overline{b}_o+\overline{b}_1S+\dots)$ puisque $\overline{(\frac{g}{R^d})} \neq 0$; ceci implique $\overline{b}_o \neq 0$, $0 = \overline{b}_1 = \overline{b}_2 = \dots$.

Ainsi $\|b_o\|_R = 1$ et $\max_{i>0} \|b_i\|_R < 1$. De (1) on déduit $-\frac{\pi}{R^d} = a_ob_o$, donc b_o est un inversible de $K<\frac{T}{R},S>$ et comme $\|b_i\|_R < 1 = \|b_o\|_R$ il suit que $b_o+b_1S+b_2S^2+\dots$ est un élément inversible de $K<\frac{T}{R},S>$. Ainsi $gS-\pi$ est irréductible et par suite $A(g,\pi,R) = \frac{K<T/R,S>}{(gS-\pi)}$ est un anneau intègre.

Soit $g_R = \frac{g(T)}{R^d}$, alors g_R est un élément de $K<\frac{T}{R}>$ régulier en $\frac{T_n}{R}$ de degré d . On a donc dans $K<\frac{T}{R}>$ une division de Weierstrass par g_R ; si $a \in K<\frac{T}{R}>$ il existe $q, r \in K<\frac{T}{R}>$ uniques tels que

(2) $\quad a = g_Rq+r$ où $\|a\|_R = \max(\|r\|_R , \|q\|_R)$ et

$$r \in E \overset{\text{déf}}{=} K<\frac{T_1}{R},\dots,\frac{T_{n-1}}{R}> \oplus K<\frac{T_1}{R},\dots,\frac{T_{n-1}}{R}>\frac{T_n}{R} \oplus \dots \oplus K<\frac{T_1}{R},\dots,\frac{T_{n-1}}{R}>(\frac{T_n}{R})^{d-1} .$$

En utilisant (2) successivement, il existe $r_o, r_1, \ldots, r_n \in E$, $q_n \in K<\frac{T}{R}>$ tels que

(3) $a = r_o + r_1 g_R + \ldots + r_n g_R^n + q_n g_R^{n+1}$ avec $\|a\|_R = \max(\|r_o\|_R, \ldots, \|r_n\|_R, \|q_n\|_R)$.

Il suit de (3) et de la relation $g_R S = (g_R S - \frac{\pi}{R^d}) + \frac{\pi}{R^d}$ que $a\, S^n$ s'écrit

(4) $a\, S^n = \sum_{i\geq 0} u_i\, g_R^i + \sum_{j=1}^{n} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R^d})\, \ell(T,S)$, où $u_i,\ v_j \in E$,

$\|a\|_R = \max(\|u_i\|_R,\ \|v_j\|_R,\ \|\ell\|_R)$ et $0 = \lim_{i\to\infty} \|u_i\|_R$.

Soit $f \in K<\frac{T}{R}, S>$, il suit de (4) qu'il existe $u_i, v_j \in E$, $\ell \in K<\frac{T}{R}, S>$ tels que

(5) $f = \sum_{i\geq 0} u_i\, g_R^i + \sum_{j>0} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R^d})\ell$, avec $\|f\|_R = \max_{i,j} (\|u_i\|_R, \|v_j\|_R, \|\ell\|_R)$

et $0 = \lim \|u_i\|_R = \lim \|v_j\|_R$.

Dans la décomposition (5) u_i, v_j et ℓ sont uniques. En effet, si
$0 = \sum_{i\geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j>0} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R^d})\,\ell$, on peut supposer que
$1 = \max(\|u_i\|_R,\ \|v_j\|_R,\ \|\ell\|_R)$. Ainsi résiduellement on a

$$0 = \sum_{i\geq 0} \overline{u}_i\, \overline{g}_R^i + \sum_{j>0} \overline{v}_j S^j + (\overline{g}_R S - \overline{(\tfrac{\pi}{R^d})})\,\overline{\ell}\ .$$

Si $k = \deg_S \overline{\ell}$, on a $0 = \overline{v}_{k+1} + \overline{g}_R\, \overline{\ell}_k$ où $\ell = \ell_o + \ell_1 S + \ldots + \ell_k S^k$, $\ell_i \in \overline{K}[\frac{T}{R}]$.
Or $\deg_{(T_n)/R} v_{k+1} < d$ implique $v_{k+1} = 0$, ce qui est impossible. Ainsi donc
$0 = u_i = v_j$ pour tout $i \geq 0$ et pour tout $j > 0$.

Soient toujours $\varphi : K<\frac{T}{R}, S> \longrightarrow A(g,\pi,R)$ la surjection canonique de
$K<\frac{T}{R}, S>$ sur $A(g,\pi,R) = \frac{K<(T/R), S>}{(g S - \pi)}$. Soient $f, f' \in K<\frac{T}{R}, S>$ et

(6) $f = \sum_{i\geq 0} u_i\, g_R^i + \sum_{j>0} v_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R^d})\ell$, $f' = \sum_{i\geq 0} u'_i\, g_R^i + \sum_{j>0} v'_j S^j + (g_R S - \frac{\pi}{R^d})\ell'$

leur décomposition selon (5). Alors on a $\varphi(f) = \varphi(f')$ si et seulement si
$u_i = u'_i$, $v_j = v'_j$ pour tout i, j ; c'est essentiellement l'unicité de (5).

Il suit alors de (5) et (6) que

$$\|\varphi(f)\|'_{\pi,R} = \|\sum_{i\geq 0} u_i g_R^i + \sum_{j>0} v_j S^j\|_R = \max_{i,j}(\|u_i\|_R, \|v_j\|_R) .$$

Ceci montre bien que

$$\mathcal{B}(g,\pi,R) = \left\{ \varphi\left(\left(\frac{T_1}{R}\right)^{\nu_1}\left(\frac{T_2}{R}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{T_n}{R}\right)^{\nu_n}\left(\frac{g}{R^d}\right)^i\right), \varphi\left(\left(\frac{T_1}{R}\right)^{\mu_1}\left(\frac{T_2}{R}\right)^{\mu_2}\cdots\left(\frac{T_n}{R}\right)^{\mu_n} S^j\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1,\dots,\mu_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1} \\ i\geq 0\ ,\ j>0 \\ 0\leq\nu_n<d\ ,\ 0\leq\mu_n<d \end{array} \right\}$$

est une base normale de $A(g,\pi,R)$ pour $\|\cdot\|'_{\pi,R}$.

Remarque. - On peut montrer que toute algèbre affinoïde réduite sur un corps K algébriquement clos admet une base normale pour la norme spectrale ([3]) (voir définition 4 ci-après). Mais on ne peut dire que ce résultat permette d'exhiber "explicitement" des bases normales.

A. 2. - Une base normale pour une algèbre d'éléments analytiques

DÉFINITION 4. - Soient K un corps algébriquement clos, valué complet, $A(g,\pi,R)$ l'algèbre définie par la proposition 1. On appelle spectre maximal de $A(g,\pi,R)$, et on le note $\mathrm{Spm}\,A(g,\pi,R)$, l'ensemble des idéaux maximaux de $A(g,\pi,R)$. Si $\mathfrak{M}\in\mathrm{Spm}(A(g,\pi,R))$ on a $A(g,\pi,R)/\mathfrak{M} = K$ ([1], II.3.5 en tenant compte de K algébriquement clos) ; ainsi il existe un élément unique $f(\mathfrak{M})\in K$ tel que $f-f(\mathfrak{M})\in\mathfrak{M}$. On appelle semi-norme spectrale de $A(g,\pi,R)$ la semi-norme définie par $\|f\|_{sp} = \sup_{\mathfrak{M}\in\mathrm{Spm}(A(g,\pi,R))} |f(\mathfrak{M})|$.

LEMME 1. - La semi-norme spectrale de l'algèbre $A(g,\pi,R)$ définie par la proposition 1 est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\pi,R}$.

Démonstration. - En effet $A(g,\pi,R)$ est une algèbre (affinoïde) intègre (proposition 1), donc réduite et on sait alors que la semi-norme spectrale est une norme et que toute norme de Banach sur $A(g,\pi,R)$ est équivalente à la norme spectrale ([1], II. 6. 1 ou [2]).

LEMME 2. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, $\varphi : K\langle \frac{T}{R}, S\rangle \twoheadrightarrow A(g,\pi,R)$ définis par la proposition 1, $X(g,\pi,R) \overset{\text{déf}}{=} \{(x,s) = (x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in K^{n+1} \mid |x_i| \leq |R|,\ 1 \leq i \leq n,\ |s| \leq 1\}$.

Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n, s) \longrightarrow \mathfrak{M}_{x,s} = \varphi((T_1 - x_1) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle + \dots + (T_n - x_n) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle + (S-s) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle)$ est une bijection de $X(g,\pi,R)$ sur $\operatorname{Spm} A(g,\pi,R)$. Pour tout $f(T,S) \in K\langle \frac{T}{R}, S\rangle$ on a $\varphi(f)(\mathfrak{M}_{x,s}) = f(x,s)$. Ainsi $\|\varphi(f)\|_{sp} = \sup\limits_{(x,s) \in X(g,\pi,R)} |f(x,s)|$.

Démonstration. - Soient $(x,s) \in X(g,\pi,R)$, $\mathfrak{M}'_{x,s} = (T_1 - x_1) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle + \dots + (T_n - x_n) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle + (S-s) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle$ alors la surjection canonique $\tau : K\langle \frac{T}{R}, S\rangle \twoheadrightarrow K\langle \frac{T}{R}, S\rangle / \mathfrak{M}'_{x,s}$ est définie par $\tau(f(T,S)) = f(x,s)$. Comme $g(x)s - \pi = 0$, on a $gS - \pi \in \mathfrak{M}'_{x,s}$, ainsi $\varphi(\mathfrak{M}'_{x,s}) = \mathfrak{M}_{x,s}$ est un idéal maximal de $A(g,\pi,R)$ puisque $\mathfrak{M}'_{x,s} \supset \ker \varphi$.

Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $A(g,\pi,R)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K\langle \frac{T}{R}, S\rangle \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & A(g,\pi,R) \arrow[d, "\theta"] \\ \dfrac{K\langle \frac{T}{R}, S\rangle}{\varphi^{-1}(\mathfrak{M})} \arrow[r, "\sim"] & \dfrac{A(g,\pi,R)}{\mathfrak{M}} = K \end{tikzcd}$$

où τ, θ sont les surjections canoniques.

Comme $\varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ est un idéal maximal de $K\langle \frac{T}{R}, S\rangle$ il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n, s) \in K^{n+1}$ avec $|x_i| \leq |R|$, $|s| \leq 1$ tels que $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}) = (T_1 - x_1) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle + \dots + (T_n - x_n) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle + (S-s) K\langle \frac{T}{R}, S\rangle$ ([1], II.4.4). De plus τ est défini par $\tau(f(T,S)) = f(x,s)$, comme $gS - \pi \in \varphi^{-1}(0) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{M})$, on a $0 = \theta \circ \varphi(gS - \pi) = \tau(gS - \pi) = g(x)s - \pi$. Ainsi l'application $(x,s) \longmapsto \mathfrak{M}_{x,s}$ est surjective. Elle est clairement injective. De plus on a $|\varphi(f)(\mathfrak{M}_{x,s})| = |f(x,s)|$ et donc $\|\varphi(f)\|_{sp} = \sup\limits_{(x,s) \in X(g,\pi,R)} |f(x,s)|$.

DÉFINITION 5. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, g, π, R définis par la proposition 1, $D(g, \pi, R) \overset{\text{déf}}{=} \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n \mid |x_i| \leq |k|,\ 1 \leq i \leq n,\ |g(x)| \geq |\pi| \}$, $\mathcal{K}(D)$ les fonctions rationnelles définies sur $D(g, \pi, R)$, c'est-à-dire les éléments $\frac{P}{Q} \in K(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ tels que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(g, \pi, R)$. L'algèbre $\mathcal{K}(D)$ est normée par $\|\frac{P}{Q}\|_D \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x \in D} |\frac{P(x)}{Q(x)}|$ (norme de la convergence uniforme sur $D(g, \pi, R)$). L'algèbre des _éléments analytiques_ sur $D(g, \pi, R)$ est le complété de $\mathcal{K}(D)$ pour la norme $\|\cdot\|_D$ et on la note $\mathcal{H}(D)$.

PROPOSITION 2. - _Soient_ K _un corps algébriquement clos, valué, complet,_ $g, \pi, R, A(g, \pi, R), \varphi$ _définis par la proposition 1._

1°) _L'application_ $(x, s) \mapsto x$ _de_ $X(g, \pi, R)$ _dans_ $D(g, \pi, R)$ _est une bijection_ (définition 5 et lemme 2).

2°) _Soit_ $Q \in K[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ _tel que_ $Q(x) \neq 0$ _pour tout_ $x \in D(g, \pi, R)$, _alors_ $\varphi(Q)$ _est un élément inversible de_ $A(g, \pi, R)$; _ainsi l'application_ $P \mapsto \varphi(P)$ _de_ $K[T]$ _dans_ $A(g, \pi, R)$ _se prolonge en une application_ $\psi : \mathcal{K}(D) \longrightarrow A(g, \pi, R)$ _et_ ψ _est une isométrie de_ $(\mathcal{K}(D), \|\cdot\|_D)$ _dans_ $(A(g, \pi, R), \|\cdot\|_{sp})$.

3°) _L'application_ ψ _se prolonge par continuité en un isomorphisme de_ $\mathcal{H}(D)$ _sur_ $A(g, \pi, R)$.

Démonstration

1°) Si $(x, s) \in X(g, \pi, R)$ on a $|x_i| \leq |R|$, $|s| \leq 1$ et $g(x)s = \pi$, ainsi $|g(x)| \geq |\pi|$, ce qui montre $x \in D(g, \pi, R)$. Il est immédiat que $(x, s) \mapsto x$ est bijectif.

2°) Tout idéal maximal de $A(g, \pi, R)$ est un $\mathfrak{M}_{x,s}$ où $(x, s) \in X(g, \pi, R)$ et on a $\varphi(Q)(\mathfrak{M}_{x,s}) = Q(x)$ (lemme 2) ; or d'après 1°) $x \in D(g, \pi, R)$ ainsi $Q(x) \neq 0$, ce qui veut dire que $\varphi(Q) \notin \mathfrak{M}_{x,s}$ (lemme 2). Puisque $\varphi(Q)$ n'appartient à aucun idéal maximal de $A(g, \pi, R)$, il est inversible.

L'application $P \mapsto \varphi(P)$ de $K[T]$ dans $A(g, \pi, R)$ se prolonge en une application $\psi : \mathcal{K}(D(g, \pi, R)) \longrightarrow A(g, \pi, R)$ définie par $\psi(\frac{P}{Q}) = \psi(P)(\psi(Q))^{-1}$. Ainsi on a $\psi(\frac{P}{Q})(\mathfrak{M}_{x,s}) = \varphi(P)(\mathfrak{M}_{x,s}) \times (\varphi(Q)(\mathfrak{M}_{x,s}))^{-1} = P(x)\,(Q(x))^{-1}$ (lemme 2). Il suit de 1°) et du lemme 2 que $\|\frac{P}{Q}\|_{sp} = \|\frac{P}{Q}\|_D$.

3°) D'après le lemme 1, l'algèbre $A(g,\pi,R)$ est complète pour la norme spectrale, ainsi ψ se prolonge par continuité en une isométrie $\tilde{\psi}$ de $\mathcal{K}(D)$ dans $A(g,\pi,R)$. Il reste à montrer que $\tilde{\psi}$ est surjective, c'est-à-dire que $\psi(\mathcal{K}(D))$ est dense dans $A(g,\pi,R)$.

Or $\varphi(K[T,S])$ est dense dans $A(g,\pi,R)$ pour la norme $\|\cdot\|'_{\pi,R}$ donc pour la norme spectrale (lemme 1), de plus $\psi(K[T,\frac{\pi}{g}]) = \varphi(K[T,S])$ et $K[T,\frac{\pi}{g}] \subset \mathcal{K}(D)$.

Remarque. - On peut montrer que toute algèbre affinoïde réduite A peut être considérée comme une algèbre d'éléments analytiques sur Spm A (considéré comme sous-ensemble d'un polydisque unité).

D'autre part l'algèbre des éléments analytiques sur un ensemble D de la forme $D = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in K^{\circ n} \mid |f_i(x)| \geq 1 , |g_j(x)| \leq 1 \quad {1 \leq i \leq s \atop 1 \leq j \leq t} \}$ est une algèbre affinoïde réduite.

COROLLAIRE 1. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, g, π, R définis par la proposition 1, $D(g,\pi,R)$ défini par la définition 5. Alors

$$\mathcal{B}'(g,\pi,R) = \left\{ \left(\frac{T_1}{R}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i , \left(\frac{T_1}{R}\right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{T_n}{R}\right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g}\right)^j \;\middle|\; \begin{array}{l} (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d \; , \quad i \geq 0 \\ 0 \leq \mu_n < d \; , \quad j \geq 0 \end{array} \right\}$$

est une base normale de l'algèbre $\mathcal{K}(D)$ des éléments analytiques sur $D(g,\pi,R)$ pour une norme équivalente à $\|\cdot\|_D$.

Démonstration. - C'est une application immédiate des propositions 1 et 2.

COROLLAIRE 2. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet pour une valuation de rang 1 notée ord , K° son anneau valuation. Soit $g(T_1, T_2, \dots, T_n) = \Sigma\, a_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2} \dots T_n^{\nu_n} \in K[T_1, \dots, T_n]$ un polynôme de degré total d avec $0 = \inf_{\nu} \operatorname{ord}(a_\nu) = \inf_{\substack{\nu \text{ tels que} \\ \nu_1 + \dots + \nu_n = d}} \operatorname{ord} a_\nu$. Soient $\varepsilon \geq 0$, $\Delta \geq 0$,

$\pi(\varepsilon) = \pi$, $R(\Delta) = R \in K$ avec $\varepsilon = \operatorname{ord} \pi(\varepsilon)$, $-\Delta = \operatorname{ord} R(\Delta)$ et $1 = \pi(0) = R(0)$, $D(\varepsilon, \Delta, g) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \operatorname{ord} g(x) \leq \varepsilon$, $\operatorname{ord} x_i \geq -\Delta$ pour $i = 1, \dots, n\}$ et $F(\varepsilon, \Delta, g)$ l'algèbre des éléments analytiques sur $D(\varepsilon, \Delta, g)$. Alors il existe n formes linéaires $L_i(T) = \Sigma\, a_{ij} T_j$, $1 \leq i \leq n$ avec $(a_{ij}) \in Gl_n(K^\circ)$ et telles que

$$\mathcal{B}(\varepsilon, \Delta, g) = \left\{ \left(\frac{L_1}{R}\right)^{\nu_1} \times \dots \times \left(\frac{L_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i ,\ \left(\frac{L_1}{R}\right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R}\right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g}\right)^j \;\middle|\; \begin{array}{l} (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d \ , \ i \geq 0 \\ 0 \leq \mu_n < d \ , \ j > 0 \end{array} \right\}$$

soit une base normale pour une norme équivalente à la norme de la convergence uniforme sur $D(\varepsilon, \Delta, g)$.

Soit $\Sigma = \Sigma_1 \coprod \Sigma_2$ où $\Sigma_1 = \mathbb{N}^{n-1} \times \{0, 1, \dots, d-1\} \times \mathbb{N}$, $\Sigma_2 = \mathbb{N}^{n-1} \times \{0, 1, \dots, d-1\} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ on pose

$$\eta_{s, \varepsilon, \Delta} = \left(\frac{L_1}{R}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i \quad \text{si} \quad s \in \Sigma_1 ,$$
$$\eta_{s, \varepsilon, \Delta} = \left(\frac{L_1}{R}\right)^{\mu_1} \dots \left(\frac{L_n}{R}\right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g}\right)^j \quad \text{si} \quad s \in \Sigma_2 .$$

Alors on a les propriétés suivantes

1) $\eta_{s, \varepsilon, \Delta} = b_{s, \varepsilon, \Delta}\, \eta_{s, 0, 0}$ où $b_{s, \varepsilon, \Delta} = R^{-(i + \sum_i \nu_i)}$ si $s = (\nu, i) \in \Sigma_1$, $b_{s, \varepsilon, \Delta} = R^{-(j + \sum_j \mu_j)}$ si $s = (\mu, j) \in \Sigma_2$

2) on a $\eta_{s, \varepsilon, \Delta} \in K[T]$ si $s \in \Sigma_1$, $g^j\, \eta_{s, \varepsilon, \Delta} \in K[T]$ si $s = (\mu, j) \in \Sigma_2$,

3) si $\varepsilon' < \varepsilon$, $\Delta' < \Delta$ on a $\lim_{s \to \infty} b_{s, \varepsilon, \Delta} / b_{s, \varepsilon', \Delta'} = 0$ où $s \to \infty$ signifie limite selon le filtre des complémentaires des parties finies de Σ .

4) Soient $N \geq 0$, $E_N \subset K[T]$ le sous-espace des polynômes de degré total au plus N . Alors $\mathcal{B}(\varepsilon, \Delta, g) \cap E_N$ est une base de E_N .

<u>Démonstration</u>. - On a $g = g_o + g_1 + \ldots + g_d$ où g_i est la composante homogène de g de degré i. Soit $\overline{g}_i$ l'image de g_i par la surjection canonique de $K^\circ[T]$ sur $\overline{K}[T]$, $\overline{g}_i$ est un polynôme de degré i ou est nul, g_d est un polynôme homogène de degré d. Comme $\overline{K}$ est infini il existe $(\beta_{ij}) \in Gl_n(\overline{K})$ tel que $g_d(\Sigma\, \beta_{1j} Z_j\, ,\ \Sigma\, \beta_{2j} Z_j\, , \ldots ,\ \Sigma\, \beta_{nj} Z_j)$ soit homogène de la forme $u_o(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) + u_1(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) Z_n + \ldots + u_{d-1}(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) Z_n^{d-1} + Z_n^d$. Soit $(b_{ij}) \in Gl_n(K^\circ)$ un relèvement de (β_{ij}), il est alors clair que $g(\Sigma\, b_{1j} Z_j\, ,\ \Sigma\, b_{2j} Z_j\, , \ldots ,\ \Sigma\, b_{nj} Z_j) = h(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est de degré total d et régulier en Z_n de degré d. Ainsi

$$\mathcal{B}(h,\pi,R) = \left\{ \left(\frac{Z_1}{R}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{Z_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i ,\ \left(\frac{Z_1}{R}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{Z_n}{R}\right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g}\right)^j \ \middle|\ \begin{array}{l} (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d\ ,\quad 0 \leq \mu_n < d \\ i \geq 0 \qquad ,\quad j > 0 \end{array} \right\}$$

est une base normale de $\mathcal{H}(D(h,\pi,R))$ pour une norme équivalente à $\|\cdot\|_{D(h,\pi,R)}$ (corollaire 1).

Soit $(a_{ij}) \in Gl_n(K^\circ)$ la matrice inverse de (b_{ij}) alors $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \longmapsto (\Sigma\, a_{1j} z_j\, , \Sigma\, a_{2j} z_j\, , \ldots ,\ \Sigma\, a_{nj} z_j)$ définit une bijection de $D(h,\pi,R)$ sur $D(g,\pi,R)$ et donc un isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}(D(h,\pi,R))$ sur $\mathcal{H}(D(g,\pi,R))$. Ce qui montre que

$$\mathcal{B}(\varepsilon,\Delta,g) = \left\{ \left(\frac{L_1}{R}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{L_n}{R}\right)^{\nu_n} \left(\frac{g}{R^d}\right)^i ,\ \left(\frac{L_1}{R}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{L_n}{R}\right)^{\mu_n} \left(\frac{\pi}{g}\right)^j \ \middle|\ \begin{array}{l} (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \\ 0 \leq \nu_n < d\ ,\quad 0 \leq \mu_n < d \\ i \geq 0 \qquad ,\quad j > 0 \end{array} \right\}$$

est une base normale de $\mathcal{H}(D(g,\pi,R)) = F_{\varepsilon,\Delta,g}$ pour une norme équivalente à la norme de la convergence uniforme sur $D(\varepsilon,\Delta,g) = D(g,\pi,R)$.

Le reste du corollaire est immédiat.

Remarque. - La condition $\deg_{total} g = \deg_{total} \bar{g}$ du corollaire 2 n'est pas restrictive. Si $g \in K[T_1, T_2, \dots, T_n]$ avec $\| g \| = 1$ il existe $g' \in K[T]$ tel que $\| g - g' \| < 1$ et $\deg_{total} g' = \deg_{total} \overline{g'}$. On montre facilement que pour ε, Δ assez proches de 0 on a $D(\varepsilon, \Delta, g) = D(\varepsilon, \Delta, g')$ puisque $\|g-g'\| < 1$; ainsi $\mathcal{K}(D(\varepsilon, \Delta, g)) = \mathcal{K}(D(\varepsilon, \Delta, g'))$ et ainsi le corollaire 2 est applicable.

Bibliographie

[1] FRESNEL Jean et van der PUT Marius, Géométrie analytique rigide et applications, Birkhäuser P. M. vol. 18, 1981.

[2] GERRITZEN Lothar, Die Norm der gleichmässigen Konvergenz auf reduzierten k-affinoiden Algebren, Journal f. d. r.u.a. math. Bd 231 (1968), p. 114-120.

[3] BOSCH Siegfried, Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Manuscripta math. 1 (1969), p. 35-57.

Jean FRESNEL
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
L.A. au C.N.R.S. n° 226
351, cours de la Libération
F 33405 TALENCE CEDEX