

# *Astérisque*

G. H. JOFFRE

**Calcul par une méthode de Ritz de la forme  
de ménisques électrisés**

*Astérisque*, tome 118 (1984), p. 181-187

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_118\\_\\_181\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__118__181_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CALCUL PAR UNE METHODE DE RITZ DE LA FORME DE MÉNISQUES ELECTRISÉS

par G.H. JOFFRE (Laboratoire d'Aérodynamique du C.N.R.S.)

### 1. INTRODUCTION.

Lorsqu'un ménisque liquide est soumis à l'effet d'un champ électrique, il se déforme de manière à ce que les pressions électrostatique et capillaire s'équilibrent en chaque point de la surface. Pour un potentiel suffisamment élevé, la pression électrostatique devient assez grande pour que le ménisque devienne instable et qu'il y ait émission de gouttelettes chargées. Suivant les conditions expérimentales, un tel système peut produire des gouttes [1] ou des aérosols fins [7, 3]. Dans de dernier cas, le ménisque présente la forme d'un cône dont le sommet est prolongé par un mince filet; la rupture de ce filet donne naissance aux gouttelettes.

Pour comprendre le mécanisme de formation des gouttes ou des aérosols, il est nécessaire de savoir déjà calculer la forme des ménisques lorsqu'ils n'émettent aucune charge. Ceci oblige en principe à résoudre simultanément l'équation d'équilibre des pressions à la surface et l'équation de Laplace relative au potentiel électrique. Pour simplifier ce problème complexe, plusieurs auteurs ont supposé connue, soit la forme du ménisque [6], soit la distribution des charges électriques [1]. Ces hypothèses permettent d'obtenir des résultats intéressants mais valables seulement dans des conditions particulières.

La méthode des différences finies développée par Joffre et al. [4] a permis de calculer le profil des ménisques stables et de forme arrondie en résolvant sans hypothèse simplificatrice l'équation de Laplace et l'équation d'équilibre. Les

résultats théoriques obtenus sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux, mais les temps de calcul nécessaires sont relativement longs. Par ailleurs, l'adaptation de cette méthode à l'étude des formes coniques n'est pas sans présenter quelques difficultés.

Pour ces raisons, il est intéressant de développer une autre méthode et d'évaluer les avantages qu'elle peut présenter par rapport à la précédente.

## 2. MISE EN ÉQUATION.

Nous nous proposons de traiter, par une méthode de Ritz le problème des ménisques stables formés à l'extrémité d'un tube capillaire de rayon  $R$  porté à un potentiel électrique  $U_0$  par rapport à une plaque horizontale située à une distance  $D$  de l'extrémité du capillaire (fig. 1). La surface  $(S)$  du ménisque

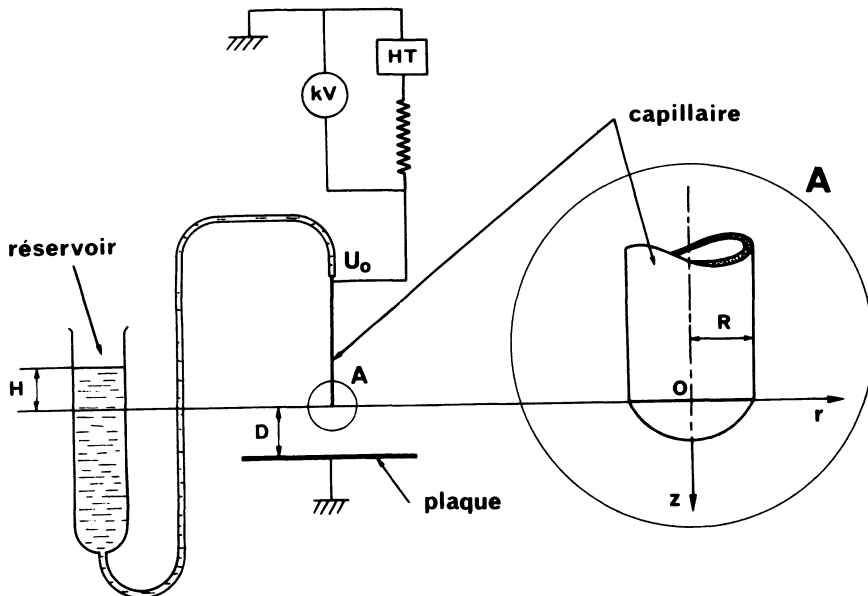


Figure 1

est supposée être une surface de révolution d'axe Oz ; elle est représentée dans le plan de symétrie par la fonction  $z(r)$ . Le ménisque est constitué d'un liquide de masse volumique  $\rho$  et de tension superficielle  $\sigma$ .

A l'orifice du tube, la pression  $p$  égale à  $\rho gH$  (où  $g$  est l'accélération de la pesanteur) est supposée créée par une colonne du même liquide que le ménisque, et de hauteur  $H$ .  $H$  est comptée positivement vers le haut, alors que  $z(r)$  est comptée positivement vers le bas.

Pour obtenir l'équilibre du ménisque, la méthode consiste à minimiser l'énergie  $J$  qui s'écrit comme une intégrale de surface :

$$(1) \quad J = \frac{2\pi\sigma}{R^2} \int_0^R \left\{ \rho g \frac{R^2}{\sigma} r \frac{(z+H)^2}{2} - R^2 \left( 1 - \frac{\sigma_e U_0}{2\sigma} \right) \sqrt{1 + z_r^2} r \right\} dr$$

où  $\sigma_e$  est la densité de charge superficielle et  $z_r$  la dérivée de  $z(r)$  par rapport à  $r$ .

Les conditions limites imposées à  $z(r)$  sont

$$\begin{cases} z(R) = 0 \\ z_r(0) = 0 \end{cases}$$

et  $z(r)$  est exprimée par :

$$(2) \quad z(r) = (r^2 - R^2) \sum_{i=0}^n C_i \cos\left(\frac{i\pi r}{2R}\right)$$

De plus, la densité de charge superficielle  $\sigma_e$  est reliée au champ de surface  $E_s$  par :

$$\sigma_e = \epsilon_0 E_s$$

où  $\epsilon_0$  est la constante diélectrique du milieu ambiant.

Le champ électrique est donné en tout point de l'espace par l'équation de Laplace relative au potentiel  $U$  :

$$\Delta U = 0$$

avec

$$\begin{cases} U = U_0 & \text{sur } z(r) \text{ et sur le capillaire} \\ U = 0 & \text{sur la plaque.} \end{cases}$$

Pour minimiser (1) il est nécessaire de déterminer les constantes  $C_i$  de manière à annuler la première variation de  $J$  :

$$(3) \quad \delta J = 0$$

compte-tenu de  $\sigma_e$  et des paramètres  $\rho$ ,  $R$ ,  $U_0$ ,  $H$  et  $\sigma$ .

Cas du potentiel nul. Lorsque  $U_0$  est nul et lorsque la méthode de Ritz est développée au premier ordre, la résolution analytique de l'équation (3) conduit à un polynôme du 5ème degré en  $C_0$ . Les racines de ce polynôme permettent de retrouver non seulement les équilibres stables et métastables observés et calculés par Kovitz [5], mais aussi, avec une légère imprécision sur la pression limite, ceux fournis précédemment par une méthode de Newton [4]. Si la méthode de Ritz est développée au second ordre, une intégration numérique est nécessaire; la pression limite est alors très proche de celle obtenue par la méthode de Newton.

Cas d'un potentiel non nul. La méthode de Picard [2] permet de trouver des solutions de l'équation de Laplace sous forme de développements en séries, dans lesquels apparaissent des constantes. Celles-ci sont fixées en appliquant les conditions aux limites qui dépendent notamment de la forme du ménisque.

### 3. RÉSULTATS ET DISCUSSION.

La grandeur caractéristique retenue pour comparer plus aisément la méthode variationnelle présentée ci-dessus à la méthode des différences finies [4], est la hauteur  $z_M$ .

La figure 2 donne les variations de la hauteur  $z_M$  d'un ménisque pendant en fonction du potentiel  $U_0$ , pour différentes valeurs de la pression hydrostatique; celle-ci est exprimée à l'aide du paramètre  $H$ . Les calculs ont été faits dans le cas d'un capillaire de rayon  $R$  égal à 0,745 mm, d'une distance capillaire-plaque

D de 10 mm, d'un ménisque constitué d'huile silicone ( $\sigma = 0,0201 \text{ N/m}$ ) et pour H égal à 1, 2, 4 et 5 mm.

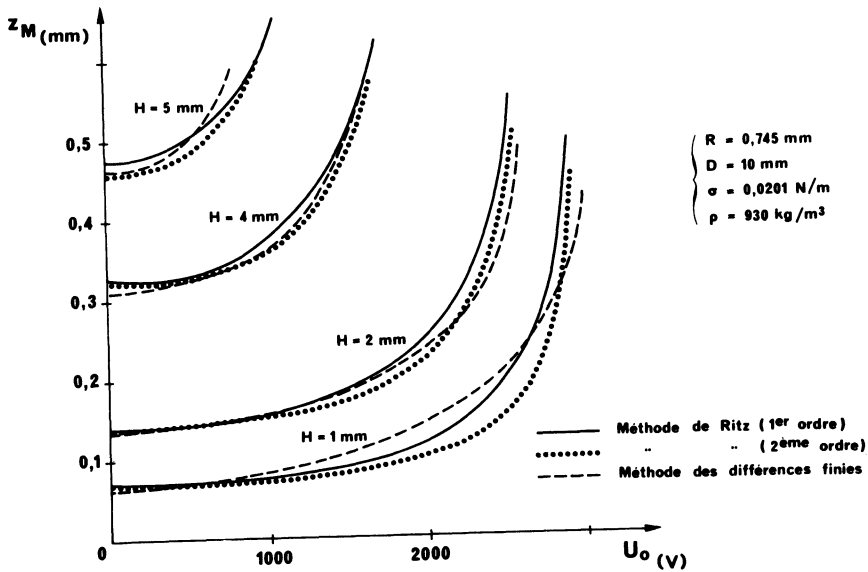


Figure 2

Pour chaque valeur de  $H$ , apparaissent non seulement les courbes fournies par la méthode précédemment décrite développée au premier ordre (en trait plein) et au second ordre (en pointillé), mais aussi la courbe obtenue en utilisant la méthode des différences finies (en tirets).

L'observation des variations de  $z_M$  sur la figure 2 montre que les résultats fournis par les deux méthodes coïncident assez bien entre eux. Toutefois, l'équilibre limite obtenu par la méthode de Ritz développée au premier ordre, correspond à une valeur de  $z_M$  supérieure d'environ 10% à celle fournie par les différences finies.

La figure 2 montre que ces écarts sont très sensiblement réduits lorsque la

méthode de Ritz est développée au second ordre: les valeurs limites de  $z_M$  sont alors très voisines de celles obtenues par différences finies.

Il faut noter toutefois que la méthode variationnelle ne donne pas de solutions satisfaisantes dans la zone correspondant à la fois à des pressions hydrostatiques proches de zéro et à des champs électriques élevés (de l'ordre de  $10^6$  V/m au voisinage du ménisque).

Ceci provient de l'approximation faite sur l'expression des potentiels qui est d'autant moins bonne que les champs sont élevés. Or, lorsque le ménisque est plat, le champ électrique est très élevé près du bord du capillaire.

Le temps de calcul nécessaire à la résolution des équations par la méthode de Ritz développée au premier ordre est environ 4 fois plus court que celui nécessaire à la résolution par les différences finies. Enfin, lorsque la méthode de Ritz est développée au second ordre, le temps de calcul devient comparable à celui de la méthode des différences finies.

#### 4. CONCLUSION.

La méthode des différences finies développée par Joffre et al. [4] pour résoudre, sans hypothèse simplificatrice, le problème de la déformation des ménisques électrisés tant que ceux-ci restent stables et ne donnent lieu ni à un départ de charges, ni à une émission de gouttelettes chargées, fournissait des résultats confirmant les expériences menées par ces auteurs.

La comparaison de cette méthode avec celle exposée dans le présent article montre qu'il peut être intéressant d'employer une méthode de Ritz développée au premier ordre si l'on ne désire pas obtenir une grande précision sur la hauteur limite des ménisques.

La même méthode développée au second ordre conduit à des résultats voisins de ceux obtenus par les différences finies avec des temps de calcul analogues.

En ce qui concerne l'étape ultérieure qui consistera à justifier théoriquement

l'existence des formes coniques stables observées lors de la pulvérisation fine, il est difficile de dire quelle méthode sera la mieux adaptée car il s'agit d'un problème un peu plus complexe.

En effet, on constate expérimentalement que ces formes ne peuvent exister de façon stable que s'il y a émission de charges électriques (soit par effet couronne, soit par pulvérisation de gouttelettes chargées). Il est alors nécessaire de tenir compte de l'équation de conservation du courant.

Des difficultés apparaissent lors de la représentation des pointes coniques avec le maillage utilisé dans la méthode des différences finies; la méthode variationnelle pourrait être appliquée aux formes coniques en choisissant une fonction  $z(r)$  adaptée.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] E. BORZABADI et A.G. BAILEY, The profiles of axially symmetric electrified pendant drops, J. Electrostatics, T. 5 (1978), 369.
- [2] E. DURAND, Electrostatique, T. 1, Masson et Cie, Paris, 1964.
- [3] C.D. HENDRICKS, R.S. CARSON, J.J. HOGAN et J.M. SCHNEIDER, Photomicrography of electrically sprayed heavy particles, AIAA J., T. 2 (1964), 733.
- [4] G. JOFFRE, B. PRUNET-FOCH, S. BERTHOMME' et M. CLOUPEAU, Deformation of liquid menisci under the action of an electric field, J. Electrostatics, T. 13 (1982), 151.
- [5] A.A. KOVITZ, The pendant drops: theory and experiment. Proc. of the first Int. Colloquium on drops and bubbles, (28-30 août 1974), 304.
- [6] G.I. TAYLOR, Disintegration of water drops in an electric field, Proc. Royal Soc. London, A, T. 280 (1964), 383.
- [7] J. ZELENY, Instability of electrified liquid surfaces, Phys. Rev., T. 10 (1917), 1.

Gilles H. JOFFRE  
Laboratoire d'Aérodynamique  
du C.N.R.S.  
4 ter, route des Gardes  
F-92190 Meudon France