

Astérisque

A. HAEFLIGER

QUACH NGOC DU

**Appendice : Une présentation du groupe
fondamental d'une Orbifold**

Astérisque, tome 116 (1984), p. 98-107

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__98_0>

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPENDICE : UNE PRÉSENTATION DU GROUPE FONDAMENTAL D'UNE ORBIFOLD

par A. Haefliger et Quach Ngoc Du

Le but de cet appendice est de donner une présentation du groupe fondamental $\pi_1(Q)$ (noté aussi $\pi_1(BQ)$ dans 4.2.1.) d'une orbifold Q par générateurs et relations en terme du groupe fondamental de la partie régulière $Q_{(o)}$ de Q et d'informations provenant des strates de codimension un et deux. On suppose l'espace topologique sous-jacent à Q connexe et à base dénombrable.

A.1.1. Le groupe fondamental. Choisissons un point base x_o dans la partie régulière $Q_{(o)}$ de Q . Par définition les éléments de $\pi_1(Q, x_o)$ sont les classes d'homotopie (avec point base fixé en x_o) des Γ_Q -structures sur le cercle S^1 , où Γ_Q est un groupoïde associé à Q comme dans 4.1.

Chaque élément de $\pi_1(Q, x_o)$ est représenté par une "application continue" de l'intervalle $[0,1]$ dans Q , appliquant les extrémités sur x_o , c'est-à-dire un élément c de $H^1([0,1], \Gamma_Q)$ dont la restriction aux extrémités est l'élément représenté par l'application constante sur x_o . Concrètement, c est déterminé par un partage $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, des applications continues c_r de chaque intervalle $[t_r, t_{r+1}]$ dans des voisinages uniformisants \tilde{U}_r et, pour chaque entier r entre 0 et k , par un élément $\gamma_r \in \Gamma_Q$ de source $c_{r-1}(t_r)$ et but $c_r(t_r)$ de sorte que les germes en t_r de c_r et de $\gamma_r c_{r-1}$ soient égaux; on suppose aussi que $c_0(0) = x_o = c_{k-1}(1)$. Il ne faut pas oublier que les éléments γ_r font partie de la donnée de c . On laisse au lecteur le soin d'expliquer comment décrire concrètement une homotopie entre deux lacets c et c' en terme d'un partage du produit $[0,1] \times [0,1]$ en petits rectangles.

En fait par position générale, on peut toujours choisir un représentant c qui ne coupe que les strates de codimension un et transversalement; on peut de même se restreindre aux homotopies qui ne coupent que les strates de codimension un et deux transversalement.

Rappelons le fait fondamental que si l'orbifold Q est le quotient d'une variété simplement connexe \tilde{Q} par un groupe Γ opérant de manière proprement discontinue sur \tilde{Q} , alors $\pi_1(Q, x_0)$ est isomorphe à Γ . Tout lacet en x_0 se relève en un chemin au sens ordinaire dans \tilde{Q} .

A.1.2. Les strates de codimension un et deux.

Toute strate de codimension un de Q est localement l'image par une projection uniformisante $\pi : \tilde{U} = \mathbb{R}^n \rightarrow U = \tilde{U}/\Gamma$ de la sous-variété des points fixes du groupe Γ engendré par la symétrie $s : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$.

Nous distinguerons deux espèces de strates de codimension deux. Celles de première espèce sont localement l'image par $\pi : \tilde{U} \rightarrow U = \tilde{U}/\Gamma$ de la sous-variété $x_1 = x_2 = 0$ des points fixes du groupe Γ engendré par une rotation d'ordre k de \mathbb{R}^n laissant fixe le sous-espace $x_1 = x_2 = 0$.

Celles de deuxième espèce sont localement l'image de la sous-variété $x_1 = x_2 = 0$ des points fixes du groupe diédral Γ engendré par cette rotation d'ordre k et la symétrie s . Dans ces deux cas, l'entier k sera appelé l'ordre de la strate considérée.

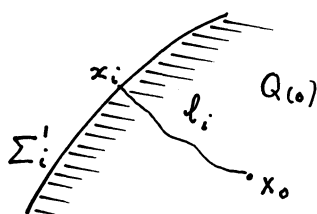
L'espace topologique sous-jacent à la réunion des strates de codimension 0 et 1 est naturellement une variété différentiable à bord dont l'intérieur est formé de la partie régulière de Q et dont le bord est la réunion des strates de codimension un. Si l'on ajoute à cet espace topologique les strates de codimension deux de deuxième espèce, on obtient une variété différentiable $\hat{Q}_{(1)}$ avec un bord présentant une arête le long des strates de codimension deux (corner reflector). L'inclusion de $Q_{(0)}$ dans $\hat{Q}_{(1)}$ induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux (au sens ordinaire) de sorte que les éléments de $\pi_1(Q_{(0)}, x_0)$ pourront aussi être représentés par des lacets dans $\hat{Q}_{(1)}$.

A.1.3. Les générateurs associés aux strates de codimension un.

Pour chaque strate Σ_i^1 de codimension un, on peut choisir un voisinage U_i qui est isomorphe au quotient de $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$ par la symétrie

$(x, t) \mapsto (x, -t)$. On peut aussi s'arranger pour que U_i contienne x_0 qui aura alors les coordonnées $(x_i, \pm t_i)$ dans $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$. Alors σ_i sera représenté par le chemin linéaire c_i qui relie $(x_i, -t_i)$ à $(x_i, +t_i)$ (ou vice-versa). L'élément σ_i est d'ordre 2 et non trivial.

Désignons par ℓ_i le chemin dans l'espace topologique $\hat{Q}_{(1)}$ (cf. A.1.2) issu de x_0 et aboutissant au point x_i de Σ_i^1 , image du segment $\{x_i\} \times [-t_i, 0]$ par la projection de $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$ dans $\hat{Q}_{(1)}$. Ainsi la projection de c_i dans $Q_{(1)}$ est le chemin $\ell_i^{-1} \ell_i$.



A.1.4. Enoncé du théorème de présentation.

Le groupe fondamental $\pi_1(Q, x_0)$ de l'orbifold connexe Q est engendré par les éléments du groupe fondamental $\pi_1(Q_{(0)}, x_0)$ de la partie régulière $Q_{(0)}$ de Q et par les éléments σ_i attachés à chaque strate de Σ_i^1 de codimension un (cf. A.1.3.).

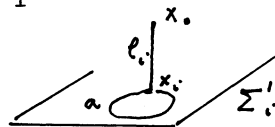
Les relations sont celles de $\pi_1(Q_{(0)}, x_0)$ et les suivantes correspondant aux types des strates :

I) Pour chaque strate Σ_i^1 de codimension un

$$\sigma_i^2 = 1$$

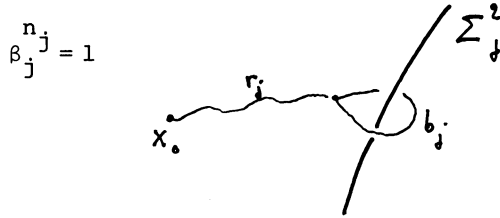
et pour tout élément α de $\pi_1(Q_{(0)}, x_0)$ représenté par un lacet de la forme $\ell_i^{-1} \alpha \ell_i$, où α est un lacet dans Σ_i^1 en x_i , on a

$$\alpha \sigma_i = \sigma_i \alpha$$

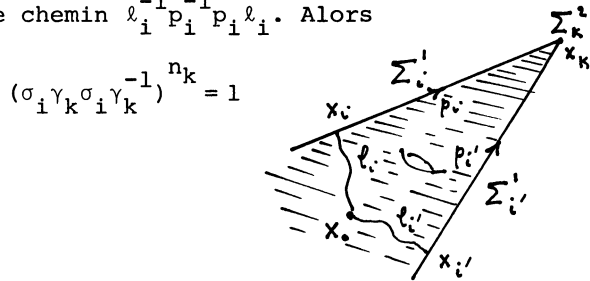


II₁) Pour toute strate Σ_j^2 de première espèce de codimension 2 et d'ordre n_j , choisissons un élément β_j de $\pi_1(Q_{(0)}, x_0)$ représenté

par un lacet de la forme $r_j^{-1}b_j r_j$, où r_j est un chemin d'origine x_0 et d'extrémité le point base d'un lacet b_j qui fait une fois le tour d'une fibre d'un voisinage tubulaire de Σ_j^2 . Alors



II₂) Pour toute strate Σ_k^2 de codimension 2 de deuxième espèce d'ordre n_k , choisissons un point $x_k \in \Sigma_k^2$ et dans les deux strates Σ_i^1 et Σ_i^1 , de codimension 1 adjacentes à Σ_k^2 (elles peuvent être égales), choisissons des chemins p_i et p_i' , reliant x_i et x_i' à x_k (et arrivant en x_k de deux côtés différents). Soit γ_k l'élément de $\pi_1(Q(o), x_o)$ représenté par le chemin $\ell_i^{-1} p_i^{-1} p_i' \ell_i$. Alors



Ce théorème sera démontré au § 3. Dans le § 2, nous décrivons la structure du voisinage d'une strate en toute généralité, bien que nous ayons besoin de considérer seulement les strates de codimension un et deux.

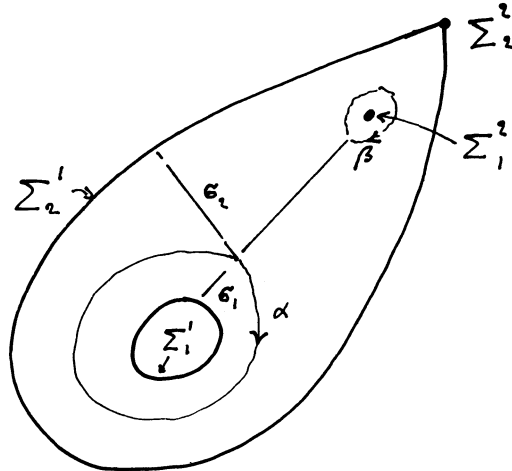
A.1.5. Exemple. Soit Q l'orbifold de dimension deux dont l'espace topologique sous-jacent est représenté dans la figure ci-dessous. On a deux strates Σ_1^1 et Σ_2^1 de codimension un, une strate Σ_2^1 de codimension deux de première espèce d'ordre n et une strate Σ_2^2 de codimension deux de deuxième espèce d'ordre m . La partie régulière est un disque percé de deux trous; son groupe fondamental est le groupe libre engendré par les éléments α et β comme dans la figure.

On a les relations suivantes

$$I : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1 \quad , \quad \alpha\sigma_1 = \sigma_1\alpha$$

$$II_1 : \beta^n = 1$$

$$II_2 : (\sigma_2\gamma\sigma_2\gamma^{-1})^m = 1 \quad \text{ou} \quad \gamma = \beta^{-1}\alpha^{-1}$$



Si $m > 1$ ou $n > 1$, on peut mettre sur Q une infinité de structures hyperboliques (paramétrées par 3 nombres réels, cf. Thurston [18], 13,27). Alors Q est le quotient du plan hyperbolique par des sous-groupes d'isométries isomorphes à $\pi_1(Q)$.

A.2. Voisinage d'une strate de type Γ .

A.2.1. Soit Γ un groupe fini d'isométries de la boule unité D^q dans \mathbb{R}^q (avec la métrique euclidienne) tel que 0 soit le seul point fixe commun à tous les éléments de Γ . Le quotient D^q/Γ est naturellement une orbifold et l'image de l'origine est une strate de dimension 0 de type Γ . On peut soit considérer le disque ouvert ou le disque fermé D^q ; dans le deuxième cas, D^q/Γ peut être considéré comme une orbifold à bord, le bord étant l'orbifold sphérique S^{q-1}/Γ .

Les isométries de D^q qui appliquent les orbites de Γ dans les orbites de Γ forment un groupe $N(\Gamma)$ qui est le normalisateur de Γ dans le groupe des isométries $O(q)$ de D^q . C'est un sous-groupe fermé de $O(q)$ dont la composante connexe de l'identité est formée d'éléments

qui commutent avec tout élément de Γ . Par passage aux quotients, on obtient un isomorphisme de $N(\Gamma)/\Gamma$ sur le groupe des isométries $\text{Iso}(D^q/\Gamma)$ de l'orbifold D^q/Γ (ou de S^{q-1}/Γ). Par définition, une isométrie de D^q/Γ est un homéomorphisme qui se relève localement suivant une isométrie de D^q et il est facile de voir qu'un tel homéomorphisme se relève globalement suivant une isométrie de D^q .

Par exemple, si Γ est engendré par une rotation de \mathbb{R}^2 d'ordre n , alors $N(\Gamma)/\Gamma$ est isomorphe à $O(2)$; on peut se représenter D^2/Γ comme un cône circulaire dans \mathbb{R}^3 . Si Γ est le groupe diédral d'ordre $2n$, alors $N(\Gamma)/\Gamma$ est cyclique d'ordre 2; dans ce cas D^2/Γ est un secteur d'angle au sommet π/n et la seule isométrie non triviale est une symétrie autour de la bissectrice.

On dira qu'une strate de dimension n est de type Γ si le groupe d'isotropie qui lui est attaché est conjugué à une suspension de Γ , c'est-à-dire est conjugué au sous-groupe de $O(n+q)$ qui opère par l'identité sur le premier facteur de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ et comme Γ sur le deuxième facteur.

A.2.2. Proposition. Toute strate Σ de type Γ admet un voisinage tubulaire T muni d'une projection $p: T \rightarrow \Sigma$ qui en fait un fibré localement trivial de base Σ , de fibre F isomorphe à l'orbifold D^q/Γ et groupe structural $N(\Gamma)/\Gamma = \text{Iso}(D^q/\Gamma)$.

Cela signifie qu'il existe un recouvrement de Σ par des ouverts V_i et des isomorphismes d'orbifolds φ_i de $p^{-1}(V_i)$ sur $V_i \times D^q/\Gamma$ se projetant sur l'identité de V_i ; de plus les changements de cartes $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ sont des automorphismes de $(V_i \cap V_j) \times D^q/\Gamma$ de la forme $(v, z) \mapsto (v, g_{ji}(v)z)$, où $g_{ji}(v)$ est un élément de $N(\Gamma)/\Gamma$ dépendant différentiablement de v .

A.2.3. Démonstration. Soit Σ une strate de type Γ d'une orbifold Q . Chaque point de Q possède un voisinage U qui est isomorphe au quotient de $W \times \mathbb{R}^q$ par Γ opérant trivialement sur l'ouvert W de Σ et par isométrie euclidienne sur \mathbb{R}^q , la projection $\pi: W \times \mathbb{R}^q \rightarrow W \times \mathbb{R}^q/\Gamma = U$ appliquant $(w, 0)$ sur w .

On peut toujours construire sur Q une métrique riemannienne (c'est-à-dire une métrique riemannienne sur $\tilde{Q} = \sqcup \tilde{U}_i$ invariante par Γ_Q , cf. § 4.1). Une telle métrique induit sur $W \times \mathbb{R}^q$ une métrique riemannienne g invariante par Γ . La projection p d'un voisinage T assez petit de Σ appliquera un point de T sur le point de Σ le plus proche.

Pour tout point de W on peut trouver un voisinage relativement compact $V \in W$, et pour tout $v \in V$ une base orthonormale de l'espace normal N_v à $W \times \{0\}$ au point $(v, 0)$ dépendant différenciablement de v de sorte que l'application linéaire ℓ_v de \mathbb{R}^q dans N_v déterminée par cette base soit une isométrie Γ -équivariante. Soit alors h l'application de $V \times D_\varepsilon^q$, où D_ε^q est le disque de rayon ε , dans $W \times \mathbb{R}^q$ qui applique (v, z) sur l'extrémité de la géodésique de vecteur initial $\ell_v(z)$. Cette application est Γ -équivariante et le composé de h avec la projection π est une application uniformisante π_v sur un ouvert V^ε de Q ; sur cet ouvert la projection p sera définie par $p(\pi_v(v, z)) = \pi_v(v, 0) = v$.

La construction analogue pour un ouvert V' de Σ donnerait une application uniformisante $\pi_{V'}$ de $V' \times D_\varepsilon^q$ sur un ouvert $V'^{\varepsilon'}$. Pour $v \in V \cap V'$, il existe une isométrie $g_{VV'}(v)$ de \mathbb{R}^q telle que $\pi_{V'}(v, z) = \pi_v(v, g_{VV'}(v)z)$. Comme cette isométrie respecte les orbites de Γ , elle appartient à $N(\Gamma)$ et sa classe modulo Γ est bien définie.

Pour obtenir T , on choisit un recouvrement localement fini V_i de Σ et des applications uniformisantes $\pi_{V_i} : V_i \times D_\varepsilon^q \rightarrow V_i^{\varepsilon_i}$ construites comme ci-dessus. Soit f une fonction de classe C^∞ strictement positive sur Σ telle que $f(v) < \varepsilon_i$ si $v \in V_i$. Soit $\tilde{\pi}_{V_i}$ l'application de $V_i \times D^q$ dans Q définie par $\tilde{\pi}_{V_i}(v, z) = \pi_{V_i}(v, f(v)z)$. Alors T sera la réunion des images des $\tilde{\pi}_{V_i}$. On aura encore $\tilde{\pi}_{V_j}(v, z) = \tilde{\pi}_{V_i}(v, g_{V_i V_j}(v)z)$, où $g_{V_i V_j}(v) \in N(\Gamma)$.

A.2.4. Remarque. D'après ce qui précède, il est facile de voir qu'il y a une correspondance bijective entre classes d'isomorphisme de germes de voisinage d'une strate Σ de type Γ et classes d'isomorphisme de fibrés principaux de base Σ et groupe structural $N(\Gamma)/\Gamma$.

A.2.5. Remarque. Pour calculer le groupe fondamental de T , on peut appliquer la suite exacte d'homotopie du fibré $p : T \rightarrow \Sigma$

$$\pi_2(\Sigma) \rightarrow \pi_1(D^q/\Gamma) \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(\Gamma) \rightarrow 1$$

qui peut s'établir soit directement, soit en remarquant que le classifiant BT (au sens de 4.2.2) est un fibré localement trivial de base Σ et fibre $B(D^q/\Gamma) \approx B\Gamma$.

Si le fibré principal associé à T est classé par une application $f : \Sigma \rightarrow B(N(\Gamma)/\Gamma)$, l'homomorphisme $\pi_2(\Sigma) \rightarrow \pi_1(D^q/\Gamma) = \Gamma$ est le composé des homomorphismes

$$\pi_2(\Sigma) \xrightarrow{f_*} \pi_2(B(N(\Gamma)/\Gamma)) = \pi_1(N(\Gamma)/\Gamma) \rightarrow \Gamma$$

où le deuxième homomorphisme classe le revêtement $N(\Gamma) \rightarrow N(\Gamma)/\Gamma$.

Le revêtement universel de l'orbifold T sera une orbifold partout régulière si et seulement si l'homomorphisme $\pi_2(\Sigma) \rightarrow \pi_1(D^q/\Gamma)$ est trivial.

A.3. Démonstration du théorème.

L'inclusion de la réunion $Q_{(2)}$ des strates de codimension 0,1 ou 2 dans Q induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux comme on le voit immédiatement par position générale. On peut donc supposer qu'il n'y a pas de strate de codimension supérieure à deux.

Suivant une suggestion de Nathan Habegger, nous allons démontrer le théorème par récurrence sur le nombre de strates en utilisant le théorème de Van Kampen: si Q est la réunion de deux ouverts connexes Q^1 et Q^2 dont l'intersection est connexe, et si x_0 est un point base dans $Q^1 \cap Q^2$, alors $\pi_1(Q, x_0)$ est le produit libre de $\pi_1(Q^1, x_0)$ et de $\pi_1(Q^2, x_0)$ amalgamé par les homomorphismes de $\pi_1(Q^1 \cap Q^2, x_0)$ dans les $\pi_1(Q^i, x_0)$ induits par les inclusions dans Q^1 et Q^2 . La démonstration est la même que dans le cas classique. D'ailleurs en suivant la construction de 4.2.2, on a $BQ = BQ^1 \cup BQ^2$ et $B(Q^1 \cap Q^2) = BQ^1 \cap BQ^2$ de sorte que l'on peut appliquer directement le théorème de Van Kampen usuel.

Supposons d'abord que Q soit réunion de $Q_{(o)}$ et de strates de codimension un. Soit Σ_i^1 une strate de codimension un et supposons par récurrence le théorème vrai pour $Q - \Sigma_i^1$. Soit T un voisinage tubulaire ouvert de Σ_i^1 contenant x_o comme dans A.1.3. On a $T \cap (Q - \Sigma_i^1) = \Sigma_i^1 \times]0, \infty[$. Comme T est le quotient de $\Sigma_i^1 \times \mathbb{R}$ par la symétrie $(x, t) \rightarrow (x, -t)$, alors $\pi_1(T) = \pi_1(\Sigma_i^1) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est égal à σ_i (cf. A.1.3) et il commute avec tout élément de $\pi_1(\Sigma_i^1)$. D'autre part l'inclusion de $T - \Sigma_i^1$ dans T induit une inclusion de $\pi_1(T - \Sigma_i^1)$ sur le facteur $\pi_1(\Sigma_i^1)$ de $\pi_1(T)$. En appliquant Van Kampen, il en résulte bien que $\pi_1(Q)$ est engendré par $\pi_1(Q - \Sigma_i^1, x_o)$ et σ_i avec les relations de type I.

Supposons maintenant que Q soit réunion de strates de codimension 0, 1 et 2 et soit Σ_j^2 une strate de codimension 2 de première espèce d'ordre n_j ; elle est donc de type Γ , où Γ est le groupe engendré par une rotation de \mathbb{R}^2 d'ordre n_j . Soit T un voisinage tubulaire de Σ_j^2 comme dans le paragraphe 2; on peut supposer que T contient le point base x_o . Soit β_j l'élément de $\pi_1(Q - \Sigma_j^2, x_o)$ représenté par un lacet b_j faisant une fois le tour d'une fibre de T (il sera égal à un conjugué de l'élément β_j considéré dans A.1.4 sous II_1). On veut montrer que $\pi_1(Q, x_o)$ est le quotient de $\pi_1(Q - \Sigma_j^2, x_o)$ par le sous-groupe normal engendré par $\beta_j^{n_j}$ (relation II_1). En appliquant le théorème de Van Kampen, il suffit de vérifier que l'application de $\pi_1(T - \Sigma_j^2, x_o)$ dans $\pi_1(T, x_o)$ induite par l'injection de $T - \Sigma_j^2$ dans T est surjective et que son noyau est engendré par $\beta_j^{n_j}$ (où β_j désigne l'élément de $\pi_1(T - \Sigma_j^2)$ représenté par b_j). Cela résulte de la commutativité du diagramme ci-dessous, où les suites horizontales sont des suites exactes d'homotopie de fibrés (cf. A.2.5) :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(\Sigma_j^2) & \rightarrow & \pi_1(D^2 - \{o\}/\Gamma) & \rightarrow & \pi_2(T - \Sigma_j^2) & \rightarrow & \pi_1(\Sigma_j^2) \rightarrow 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_2(\Sigma_j^2) & \rightarrow & \pi_1(D^2/\Gamma) & \longrightarrow & \pi_1(T) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_j^2) \rightarrow 1 \end{array}$$

car la deuxième flèche verticale est isomorphe à la projection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$.

Supposons enfin que Σ_k^2 soit une strate de codimension deux de deuxième espèce d'ordre n_k . Dans ce cas Γ est le groupe diédral d'ordre $2n_k$. On considère un voisinage tubulaire T ouvert de la

strate comme dans le § 2 et on peut supposer que le point base x_0 se trouve dans la fibre au-dessus du point x_k choisi dans Σ_k^2 (cf. A.1.4, relation II₂). On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_2(\Sigma_k^2, x_k) & \rightarrow & \pi_1(D^2 - \{0\}/\Gamma, x_0) & \rightarrow & \pi_1(T - \Sigma_k^2, x_0) & \rightarrow & \pi_1(\Sigma_k^2, x_k) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_2(\Sigma_k^2, x_k) & \rightarrow & \pi_1(D^2/\Gamma, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(T, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_k^2, x_k) \rightarrow 1
 \end{array}$$

Le groupe $\pi_1(D^2/\Gamma)$ est isomorphe à Γ , alors que $\pi_1(D^2 - \{0\}/\Gamma)$ est le groupe diédral infini engendré par deux générateurs $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_i^{-1}$, d'ordre 2 représentés par des lacets $\tilde{\gamma}_i^{-1}\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\gamma}_i^{-1}\tilde{\gamma}_i$, dans l'orbifold $D^2 - \{0\}/\Gamma$ allant du point base x_0 aux strates Σ_i^1 et Σ_i^1 , de codimension un adjacentes à Σ_k^2 , et retournant à x_0 (cf. A.1.3 et 1.4). Le groupe $\Gamma = \pi_1(D^2/\Gamma)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(D^2 - \{0\}/\Gamma)$ par le sous-groupe engendré par $(\tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_i^{-1})^{n_k}$. L'inclusion de la fibre $D^2 - \{0\}/\Gamma$ dans $Q - \Sigma_k^2$ fait correspondre à $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_i^{-1}$, des conjugués $\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1}$ et $\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1}$, des éléments σ_i et σ_i^{-1} , choisis dans 1.4. D'après Van Kampen, $\pi_1(Q, x_0)$ est le quotient de $\pi_1(Q - \Sigma_k^2, x_0)$ par le sous-groupe normal engendré par $(\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1}\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1})^{n_k} = 1$, relation équivalente à $(\sigma_i\gamma_i\sigma_i\gamma_i^{-1})^{n_k} = 1$, où $\gamma = \gamma_i^{-1}\gamma_i$, est l'élément décrit en A.1.4, II₂.