Astérisque

YVES CARRIÈRE

Flots riemanniens

Astérisque, tome 116 (1984), p. 31-52
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__31_0>

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FLOTS RIEMANNIENS

Yves CARRIÈRE

Le but de cet article est de faire le point sur ce que nous connaissons de la topologie des flots riemanniens (i.e. des feuilletages riemanniens de dimension 1 orientés) sur les variétés compactes. Pour ne pas alourdir notre texte, nous supposerons que les variétés et feuilletages considérés sont de classe C^2, les variétés orientées et les feuilletages transversalement orientés.

L'étude des flots riemanniens a été motivée par deux raisons essentielles. Tout d'abord, il était a priori intéressant de mieux connaître, parmi les feuilletages riemanniens, le cas le plus "simple" des flots riemanniens. A notre connaissance, personne jusque là n'avait abordé ce sujet de manière systématique. D'autre part, comme il est remarqué par exemple dans [JW], [CG], [Cl] ou [Gh], le flot orthogonal d'un feuilletage totalement géodésique de codimension 1, est riemannien. Précisément, dans les travaux cités, c'est l'utilisation de cette propriété du flot orthogonal qui a permis d'obtenir des résultats topologiques sur les feuilletages totalement géodésiques de codimension 1. En particulier, dans [Gh], Etienne Ghys a achevé ainsi la classification (à conjugaison différentiable près) de ces feuilletages sur les variétés riemanniennes complètes.

L'idée directrice de notre travail a été que les flots riemanniens constituent une généralisation naturelle des flots isométriques. Nous avons donc cherché quelles étaient les propriétés topologiques communes à ces deux types de flots. Par exemple, il est bien connu que l'adhérence d'une orbite d'un flot isométrique ϕ_t sur une variété compacte est un tore, et que dans ce tore, ϕ_t est différentiablement conjugué (avec paramètre) à un flot linéaire. La même propriété reste vraie pour un flot riemannien sur une variété compacte, à ceci près que la conjugaison est main-

tenant sans paramètre (i.e. conjugaison de feuilletages). Ceci constitue notre résultat principal (Théorème II.C.2). Dans [Gr], Gromov introduit la notion de volume minimal et de volume simplicial d'une variété et prouve que si une variété compacte M supporte un flot isométrique, alors ces deux nombres sont nuls. La même propriété subsiste lorsque M supporte un flot riemannien. Elle a pour conséquence, grâce à [IY], la non-existence d'un flot riemannien sur une variété compacte admettant une métrique à courbure sectionnelle < 0.

Notre résultat principal nous a permis d'obtenir la classification (à conjugaison différentiable près) des flots riemanniens sur les 3-variétés compactes (Théorème III.B.1). Nous complétons ainsi les éléments de classification déjà donnés dans [Co], [Me], [Mo 1-2], [T] et [CG]. L'un des flots intervenant dans la classification (exemple I.D.6. que l'on trouve déjà dans [Me] et [T]) est un contre-exemple à la dualité de Poincaré de la cohomologie basique des feuilletages riemanniens énoncée dans [R2]. Ce flot est aussi un exemple de flot non-isométrique. Dès la dimension 3, nous pouvons donc affirmer que la classe des flots riemanniens bien que proche par ses propriétés de celle des flots isométriques, est toutefois distincte.

Dans la première partie, nous rappelons les résultats et définitions nécessaires pour la suite et donnons les exemples principaux de flots riemanniens. En particulier, nous décrivons tous les exemples intervenant dans le théorème de classification en dimension 3. Au début de la seconde partie, nous exposons brièvement les résultats de P. Molino sur la structure des feuilletages riemanniens [Mo 1-2]. Grâce à ces résultats et à [CC], nous pouvons alors démontrer notre théorème principal (Théorème II.C.2). Pour terminer cette partie, nous indiquons comment on peut en déduire le résultat dont il a été question plus haut portant sur la nullité du volume minimum (Proposition II.C.4). La troisième partie contient la classification des flots riemanniens sur les 3-variétés compactes et le calcul de la cohomologie basique du contre-exemple dont nous avons parlé.

Ce texte rend compte de la partie essentielle des résultats concernant les flots riemanniens contenus dans ma thèse de 3ème cycle [Cl], avec cependant quelques remarques et précisions que j'y ai ajoutées depuis. Je remercie l'Equipe des Feuilletages de Lille pour le soutien qu'elle m'a apporté durant ce travail, et tout particulièrement, Etienne Ghys dont les remarques et conseils m'ont aidé à bien des moments.

I - STRUCTURES RIEMANNIENNES TRANSVERSES, EXEMPLES

Avant de donner les premiers exemples de flots riemanniens, il est nécessaire de préciser la langage que nous utiliserons dans la suite.

A - PRÉLIMINAIRES

Définition 1. Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est la donnée d'un cocyle feuilleté noté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$, où :

a) $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M.

b) f_i est une submersion de U_i dans une variété T appelée variété transverse.

c) γ_{ij} est un difféomorphisme local de la variété T, tel que pour tout $x \in U_i \cap U_j$, on a : $f_i(x) = \gamma_{ij} \circ f_j(x)$.

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini sur chaque ouvert U_i par la submersion f_i. On dit que le couple (U_i, f_i) est une carte de $\mathcal{F}$. Les difféomorphismes locaux γ_{ij} sont appelés changements de cartes ou de coordonnées transverses. Il est clair que les γ_{ij} vérifient la condition de cocycle :

$$\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}(x) \quad , \quad \forall x \in f_k(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Par ailleurs, les γ_{ij} engendrent un pseudo-groupe Γ de difféomorphismes locaux de la variété T. De manière générale, se donner une structure transverse pour le feuilletage $\mathcal{F}$ revient à imposer certaines conditions à ce pseudo-groupe :

Exemples - Définitions 2.

1. S'il existe une métrique riemannienne g sur T, invariante par Γ, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien. Ce premier exemple de structure transverse a été introduit par Reinhart dans [R1].

2. Supposons maintenant que T est connexe, et soit G un groupe d'isométries de la variété riemannienne (T,g). On peut imposer à Γ la condition supplémentaire d'être un sous-pseudo-groupe du groupe G. Autrement dit, que les changements de coordonnées transverses γ_{ij} soient des restrictions d'isométries de (T,g) appartenant à G. Ces changements de coordonnées transverses, qui habituellement sont définis localement, ont dans ce cas un caractère global. Comme nous le verrons plus loin (cf. I.C), ceci permet de construire une représentation d'holonomie globale. Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que $\mathcal{F}$ admet une (G,T)-structure riemannienne transverse.

3. Si on suppose de plus, dans l'exemple précédent, que G agit transitivement sur T, alors G a la structure d'un groupe de Lie et T s'identifie à un espace homogène de G. On dit dans ce cas que $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien transversale-

ment homogène. Ces feuilletages ont été initialement introduits et étudiés dans [B].

4. Lorsqu'on suppose aussi que G agit librement sur T, on dit alors que $\mathcal{F}$ est transversalement de Lie ou encore que $\mathcal{F}$ est un G-feuilletage de Lie. Dans ce cas la variété transverse T s'identifie au groupe de Lie G. Ce type de structure transverse a été étudié pour la première fois par Fédida [F].

Dans tout ce qui suit, nous serons amenés principalement à étudier des feuilletages de dimension 1 orientés sur des variétés compactes. Un tel feuilletage Φ est constitué par les courbes intégrales d'un champ de vecteurs. Pour cette raison, nous appellerons flot (sans paramètre) le feuilletage Φ. Lorsqu'on considérera un paramétrage de Φ, c'est-à-dire un flot (avec paramètre) dont les orbites sont les feuilles de Φ, on le notera toujours ϕ_t en indiquant explicitement le paramètre. Nous utiliserons cette convention d'écriture, toutes les fois où il n'y aura aucune confusion possible entre les deux notions.

Définition 3. On dira que deux flots sont conjugués, s'ils sont conjugués en tant que feuilletages.

N.B. Cette définition est en contradiction avec les conventions habituelles utilisées dans la théorie des systèmes dynamiques. Nous l'avons néanmoins adoptée, dans la mesure où le terme "flot" signifie pour nous "feuilletage orienté de dimension 1".

B - FLOTS RIEMANNIENS

Rappelons la notion de métrique quasi-fibrée (bundle-like) introduite par Reinhart dans [R1]. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété M défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ de variété transverse T (cf. définition I.A.1). La variété T est munie d'une métrique riemannienne pour laquelle les γ_{ij} sont des isométries locales (cf. I.A.2.1). Soit g_o une métrique riemannienne quelconque sur M et $\mathcal{P}$ un champ de plans supplémentaire du fibré tangent à $\mathcal{F}$ (on peut prendre par exemple pour $\mathcal{P}$ le champ de plans orthogonal à $\mathcal{F}$ relativement à g_o). Il est facile de vérifier alors qu'il existe une unique métrique riemannienne g_1 sur M, telle que :

1) Les métriques induites par g_1 et g_o sur l'espace tangent à $\mathcal{F}$ coïncident.
2) Le champ de plans $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{F}$ pour la métrique g_1.
3) La métrique induite par g_1 sur $\mathcal{P}$ est localement l'image réciproque par f_i de la métrique de T.

Une métrique vérifiant 2) et 3) est dite quasi-fibrée relativement à $\mathcal{F}$. L'existence d'une métrique quasi-fibrée caractérise les feuilletages riemanniens [R1].

Etant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété riemannienne (M,g), on peut se demander à quelle condition la métrique g est quasi-fibrée relativement à $\mathcal{F}$. Notons $<,>$ le produit scalaire associé à g. Le lemme suivant qui est une conséquence directe de la proposition 2.1 de [R1] fournit la réponse à cette question :

Lemme 1. La métrique g est quasi-fibrée relativement à $\mathcal{F}$ si et seulement si, pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$ et tout champ de vecteurs Y orthogonal à $\mathcal{F}$ et unitaire (Y est défini sur un ouvert de M), on a :

$$<Y, [X,Y]> = 0 .$$

Considérons sur (M,g) un flot isométrique ϕ_t sans singularité. Le champ $X = \frac{\partial \phi_t}{\partial t}$ est par définition un champ de Killing, c'est-à-dire qu'il satisfait $<Y,[X,Y]> = 0$ pour tout champ de vecteurs unitaire Y (défini sur un ouvert de M). En particulier, d'après le lemme, le flot Φ (sans paramètre) dont les orbites sont les courbes intégrales de X est un flot riemannien. Nous pouvons donc énoncer la :

Définition - Proposition 2. Un flot Φ (sans paramètre) sur une variété M est dit isométrique s'il existe un paramétrage de Φ et une métrique riemannienne sur M pour laquelle le flot avec paramètre correspondant ϕ_t est isométrique. Un flot isométrique est riemannien.

Les flots isométriques constituent une large classe de flots riemanniens dont nous allons décrire deux exemples essentiels. Nous verrons cependant à la partie III que certains flots riemanniens ne sont pas isométriques.

Exemple 3. Soit M une variété et Φ un flot donné par une action localement libre de S^1 sur M. Le flot Φ est isométrique et par conséquent il est riemannien. En effet, une action de S^1 sur M est isométrique pour une métrique obtenue de la manière suivante : partant d'une métrique quelconque sur M, on prend la moyenne des transformées de cette métrique par les éléments de S^1, relativement à la mesure de Haar de S^1.

Remarque. Un flot dont toutes les orbites sont fermées sur une variété M compacte de dimension 3 est toujours donné par une action localement libre de S^1 [E]. Un tel flot est donc riemannien, il définit sur M une fibration de Seifert.

Exemple 4.

1) On considère la sphère S^3 donnée dans $\mathbb{C}^2$ par :

$$S^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 , \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

et le flot $\phi_t : (z_1,z_2) \to (e^{i\lambda t} z_1, e^{i\mu t} z_2)$, où λ et μ sont deux constantes réelles. Pour la métrique standard de S^3, le flot ϕ_t agit par isométries. Si λ et μ sont en rapport rationnel, ϕ_t peut être défini par une action localement libre de S^1 et on retrouve donc un exemple du type précédent.

Si λ et μ sont en rapport irrationnel, ϕ_t possède exactement deux orbites fermées données respectivement par les équations $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$. Les autres orbites ont pour adhérences les tores d'équations $|z_1| = k$, où k est une constante appartenant à $]0,1[$.

2) L'espace lenticulaire $L_{p,q}$ est obtenu comme quotient de S^3 par le groupe engendré par l'isométrie : $(z_1,z_2) \to (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i/q} z_2)$, où p et q sont des entiers. Le flot isométrique que nous venons de construire sur S^3 passe clairement au quotient sur $L_{p,q}$. Il fournit par conséquent un exemple de flot isométrique sur $L_{p,q}$.

C - FLOTS ADMETTANT UNE (G,T)-STRUCTURE RIEMANNIENNE TRANSVERSE

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M admettant une (G,T)-structure riemannienne transverse (cf. I.A.2.2). Un tel feuilletage est défini par un cocycle feuilleté $\{U_i,f_i,\gamma_{ij}\}$ où les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des éléments d'un groupe d'isométries G de la variété riemannienne T supposée connexe. Le groupe G opère analytiquement sur T en ce sens que deux isométries de G qui coïncident sur un ouvert non vide de T, coïncident partout. A partir de cette remarque, il est possible de construire une représentation $h : \pi_1(M) \to G$: étant donné un lacet c, on le recouvre par une suite d'ouverts U_i, $i = 1,\dots,n$ avec $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et l'on forme le composé $\gamma_{12} \circ \gamma_{23} \circ \dots \circ \gamma_{n-1n}$. L'élément $h(c)$ de G ainsi obtenu ne dépend que de la classe de c dans $\pi_1(M)$. On pourra trouver les détails de cette construction ainsi que la démonstration des résultats qui suivent dans [T] par exemple. La représentation h est la représentation d'holonomie de la (G,T)-structure transverse de $\mathcal{F}$. Son image dans G est le groupe d'holonomie. Appelons $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et $\tilde{\mathcal{F}}$ le relevé de $\mathcal{F}$ dans $\tilde{M}$:

Proposition 1. Il existe une submersion D de $\tilde{M}$ sur un ouvert de T, telle que :
i) Les composantes connexes des fibres de D sont les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$.
ii) D est équivariante par rapport à h, c'est-à-dire que pour tout $c \in \pi_1(M)$ et tout $x \in \tilde{M}$, on a :

$$D(c.x) = h(c) \circ D(x).$$

L'application D porte le nom d'application développante. Si D est une fibration, on dit que la (G,T)-structure transverse est complète. Un cas important où il en est ainsi est celui où M est compacte :

Théorème 2. Si M est compacte, alors la variété riemannienne T est complète et l'application développante D est une fibration localement triviale de $\tilde{M}$ sur T.

Il semble que la proposition 1 et le théorème 2 soient dûs à Ehresmann.

Remarque 3. La proposition 1 admet la réciproque suivante : supposons que l'on se donne une représentation $h : \pi_1(M) \to G$ et D une submersion de $\tilde{M}$ sur T, équivariante par rapport à h. Alors le feuilletage défini par D sur $\tilde{M}$ passe au quotient en un feuilletage sur M admettant une (G,T)-structure transverse.

Donnons des exemples de flots admettant une (G,T)-structure riemannienne transverse :

Exemple 4. Soit Φ un flot sur une variété compacte M, défini par une fibration en cercles : $M \to T$. On choisit sur T une métrique riemannienne. Ce flot Φ admet alors une (G,T)-structure riemannienne transverse où G est trivial.

Exemple 5. Un flot Φ obtenu par suspension d'une isométrie γ d'une variété riemannienne compacte T admet une (G,T)-structure riemannienne transverse. Dans ce cas, le groupe G est engendré par l'isométrie γ.

Exemple 6. Si Φ est un flot riemannien sur une variété compacte M et que Φ est transverse à un feuilletage de codimension 1 alors Φ admet une (G,T)-structure riemannienne transverse ([CG], Proposition II.5).

Remarque 7. Le flot de l'exemple I.B.4 est riemannien et même isométrique. Pourtant, dans le cas où λ et μ sont en rapport irrationnel, il n'admet pas de (G,T)-structure riemannienne transverse. En effet, s'il en admettait une, d'après le théorème 2, il devrait avoir toutes ses orbites fermées du fait que S^3 est simplement connexe. Or ce flot ne possède que deux orbites fermées.

D - FLOTS DE LIE

Les G-feuilletages de Lie sont des exemples particuliers de feuilletages admettant une (G,T)-structure riemannienne transverse (cf. I.A.2.4). Dans ce cas, la variété riemannienne T peut s'identifier au groupe de Lie G muni d'une métrique invariante à gauche, l'action de G sur T est donnée par l'action de G sur lui-même par translation à gauche. Si F est un G-feuilletage de Lie sur une variété M, on peut donc construire la représentation d'holonomie $h : \pi_1(M) \to G$, le groupe d'holonomie Γ est alors un sous-groupe de G opérant sur G par transla-

tion à gauche. En appliquant la proposition I.C.1 on obtient que le feuilletage $\tilde{F}$ relevé de F dans le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est défini par l'application développante $D : \tilde{M} \to G$ qui est une submersion équivariante par rapport à h. Si M est compacte, on peut appliquer aussi le théorème I.C.2. qui affirme que l'application développante D est une fibration localement triviale, on en déduit alors le théorème suivant dû à Fédida [F] :

Théorème 1. Si F désigne un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte M, on a alors :

i) Les adhérences des feuilles de F sont les fibres d'une fibration $\bar{D} : M \to K\backslash G$ où K désigne l'adhérence du groupe d'holonomie Γ dans G.
ii) Dans chaque fibre de la fibration $\bar{D}$, le feuilletage induit par F est transversalement de Lie K_e, où K_e désigne la composante connexe de l'élément neutre dans K. Les feuilles de ce feuilletage sont denses.

La fibration $\bar{D}$ s'appelle la fibration basique de F et la variété $W = K\backslash G$ est la variété basique de F. On remarque en particulier que les feuilles de F sont denses, si et seulement si, le groupe d'holonomie Γ est dense dans G et qu'elles sont compactes, si et seulement si, Γ est un sous-groupe discret uniforme de G.

Les exemples suivants sont des cas particuliers des exemples I.C.4 et I.C.5 :

Exemples 2. Si Φ est un flot défini pour une fibration en cercles $M \to G$ où G est un groupe de Lie compact, Φ est transversalement de Lie G. Le groupe d'holonomie est trivial.

Exemples 3. Soit G un groupe de Lie compact et γ un élément de G. La suspension de la translation à gauche associée à γ donne un flot Φ sur $M\times S^1$ qui est un G-flot de Lie. Son groupe d'holonomie est engendré par γ. Dans le cas particulier où $G = T^n$ (le tore) on obtient les flots linéaires sur T^{n+1}.

Il est facile de prouver que si G est compact, un G-flot de Lie sur une variété compacte est conjugué à un de ces exemples (2 ou 3). Il en va de même lorsque $G = \mathbb{R}^n$ ([CC]).

Définition 4. Soit H un groupe de Lie, Γ un sous-groupe discret uniforme de H et X un sous-groupe à un paramètre de H. L'opération naturelle à droite de X sur la variété compacte $M = \Gamma\backslash H$ est un flot appelé flot de type homogène.

Si X est un sous-groupe distingué de H, il est facile de voir en utilisant la remarque I.C.3 que le flot obtenu sur M est transversalement de Lie $G = H/X$. Le groupe d'holonomie est l'image de Γ dans H/X par la surjection $H \to H/X$.

On a donc obtenu une nouvelle classe de flots de Lie, ce sont <u>les flots de Lie de type homogène</u>.

<u>Remarque</u> 5. Nous ne connaissons pas d'autres exemples de flots de Lie que ceux que nous venons de décrire dans les exemples précédents. Il faut remarquer aussi que les exemples 3 sont de type homogène.

Nous allons décrire un exemple de flot de Lie de type homogène qui a été remarqué pour la première fois par J. Meyer [Me]. Cet exemple apparaît aussi dans [T]. La présentation que nous en donnons ici nous permettra de calculer sans difficulté sa cohomologie basique (cf. III.B). Grâce à ce calcul, nous pourrons affirmer que nous avons là un exemple de flot riemannien non-isométrique et un contre-exemple à la dualité de la cohomologie basique des flots riemanniens.

<u>Exemple</u> 6. Soit A une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à deux l'automorphisme A a deux valeurs propres réelles positives et distinctes, λ et $1/\lambda$; on note V_1 et V_2 des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ et $1/\lambda$.

On désigne par T_A^3 le fibré en tores T^2 sur le cercle, obtenu en quotientant $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qui identifie (m,t) à $(A(m),t+1)$; la direction propre Δ_2 engendrée par V_2 induit sur $T^2 \times \mathbb{R}$ un flot $\bar{\Phi}_2$ (ce flot est irrationnel dans chaque tore) ; le flot $\bar{\Phi}_2$ définit sur T_A^3 un flot Φ_2.

<u>Proposition</u> 7. <u>Le flot</u> Φ_2 <u>sur</u> T_A^3 <u>est transversalement de Lie le groupe affine</u> GA <u>et il est de type homogène</u>.

<u>Démonstration</u> : Puisque la matrice A a deux valeurs réelles strictement positives, on peut définir A^t pour tout réel t ; munissons $\mathbb{R}^3$ de la loi de groupe : $(t,x,y)\,(t',x',y') = (t + t',\ A^t(x',y') + (x,y))$, on obtient ainsi un groupe de Lie résoluble de dimension 3.

Il est facile de voir (cf. [K]) que la structure de ce groupe de Lie ne dépend pas de la matrice A de trace > 2 choisie. Nous noterons donc H ce groupe. Le sous-groupe Γ_A défini par : $\Gamma_A = \{(t,x,y) \in H\ ;\ t,x,y \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe discret uniforme de H et l'espace homogène compact $\Gamma_A \backslash H$ est le tore hyperbolique T_A^3.

Identifions le groupe affine GA au groupe de Lie obtenu en considérant sur $\mathbb{R}^2$ la loi de groupe : $(t,s)\,(t',s') = (t + t',\ \lambda^t s' + s)$ et notons $\eta_1(x,y)$ la composante sur le vecteur V_1 du vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$. L'application σ définie par : $\sigma(t,x,y) = (t,\ \eta_1(x,y))$ est un homomorphisme de groupes de Lie. L'homomorphisme σ est surjectif et son noyau X est le sous-groupe à un paramètre de H défini par : $X = \{(0,\ k\,V_2) \in H\ ;\ k \in \mathbb{R}\}$. Le sous-groupe à un paramètre X dé-

définit sur $\Gamma_A \backslash H$ le flot Φ_2, ce qui démontre le résultat.□

Remarque. On peut définir de la même manière un GA-flot de type homogène Φ_1 sur Γ_A^3, associé à la valeur propre λ. Les flots Φ_1 et Φ_2 correspondent aux champs Y et Z de l'exemple 1 de [CG].

II - TOPOLOGIE DES FLOTS RIEMANNIENS EN DIMENSION QUELCONQUE

Dans les deux premiers paragraphes nous allons décrire les résultats de P. Molino sur la structure des feuilletages transversalement parallélisables et des feuilletages riemanniens [Mo 1-2]. Au troisième paragraphe nous démontrerons notre résultat principal.

A - FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT PARALLÉLISABLES

Rappelons qu'un parallélisme sur une variété T de dimension q est la donnée d'un système $X_1,..,X_q$ de champs de vecteurs sur T, formant en chaque point une base de l'espace tangent à T.

Définition 1. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q sur une variété M. Supposons qu'il existe un cocycle feuilleté $\{U_i,f_i,\gamma_{ij}\}$ définissant $\mathcal{F}$, de variété transverse T (cf. I.A.1), tel que :

a) il existe sur T un parallélisme $X_1,\ldots,X_q$.
b) ce parallélisme est invariant par les changements de coordonnées transverses γ_{ij}.

On dit alors que $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable.

Remarquons qu'un tel feuilletage $\mathcal{F}$ est un cas particulier de feuilletage riemannien. En effet, considérons sur T la métrique riemannienne g pour laquelle $X_1,\ldots,X_q$ est un repère orthonormé. Les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des isométries locales de (T,g) et donc (cf. I.A.2), $\mathcal{F}$ est riemannien.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie. Ce feuilletage admet un parallélisme transverse donné par une base de l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. Les feuilletages de Lie sont donc des cas particuliers de feuilletages transversalement parallélisables. Le théorème suivant, dû à Molino [Mo 1] précise la relation qu'il y a entre les feuilletages transversalement parallélisables et les feuilletages de Lie :

Théorème 2. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte M. Alors :

i) Toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont difféomorphes.
ii) Il existe une variété W et une fibration localement triviale $\pi : M \to W$, dont les fibres sont les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$.

iii) Il existe un groupe de Lie simplement connexe G tel que $\mathcal{F}$ induit sur chaque fibre de π un G-feuilletage de Lie.

On appelle π la fibration basique de $\mathcal{F}$, la variété W est la variété basique de $\mathcal{F}$. Le groupe de Lie G est un invariant du feuilletage $\mathcal{F}$; pour cette raison, on dit que G est le groupe structural de $\mathcal{F}$.

Remarque. Molino montre que ce théorème reste vrai si au lieu de supposer M compacte, on impose au parallélisme donné sur T d'être constitué de champs de vecteurs complets.

B - DÉSINGULARISATION DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS

Nous allons rappeler comment on peut, d'après Molino [Mo 1] "désingulariser" un feuilletage riemannien donné $\mathcal{F}$ en un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de même dimension que $\mathcal{F}$ et transversalement parallélisable. C'est de cette façon que l'on ramène, dans une certaine mesure, l'étude des feuilletages riemanniens à celle des feuilletages transversalement parallélisables et par conséquent, via le théorème II.A.2, à celle des feuilletages de Lie.

Donnons-nous un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ (supposé transversalement orienté) sur une variété M, défini par le cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ où les γ_{ij} sont des isométries locales de la variété riemannienne T, les γ_{ij} préservent l'orientation de T. Soit $E \xrightarrow{p} T$, le fibré des repères orthonormés directs de T. Ce fibré est un fibré principal de groupe structural SO_q si T est supposée de dimension q (codimension de $\mathcal{F}$).

Dans ce qui suit, le terme "repère" signifiera toujours "repère orthonormé direct".

a - Construction de $(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$

Le fibré Q normal à $\mathcal{F}$ est défini par le cocycle $\{U_i, d\gamma_{ij}\}$ qui est à valeurs dans SO_q. Ceci permet d'associer à Q un fibré principal de groupe structural SO_q au-dessus de M (cf. [KN]). Notons $\hat{M} \xrightarrow{\hat{p}} M$ ce fibré principal appelé (cf. [Mo 1-2]) fibré des repères transverses à $\mathcal{F}$. La variété $\hat{M}$ est la variété des repères transverses à $\mathcal{F}$. Nous allons maintenant définir le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ induit par $\mathcal{F}$ sur $\hat{M}$. Appelons V_i l'image réciproque de U_i par $\hat{p}$. Les différentielles des submersions f_i permettent d'associer à un repère transverse au-dessus de U_i, un repère au-dessus de T. Ces différentielles induisent donc des submersions F_i de V_i dans E, telles que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "F_i"] \arrow[d, "\hat{p}|V_i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[r, "f_i"'] & T \end{tikzcd}$$

les différentielles des isométries locales γ_{ij} induisent des difféomorphismes locaux Γ_{ij} de E, tels que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Gamma_{ij}"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[r, dashed, "\gamma_{ij}"'] & T \end{tikzcd}$$

Il est clair que, étant donné la construction naturelle des F_i et des γ_{ij}, on a la commutativité des diagrammes :

$$\begin{tikzcd} & V_i \cap V_j \arrow[dl, "F_i"'] \arrow[dr, "F_j"] & \\ E \arrow[rr, "\Gamma_{ij}"] & & E \end{tikzcd}$$

d'où un cocycle feuilleté $\{V_i, F_i, \gamma_{ij}\}$. C'est ce cocycle qui définit $\hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{M}$. Les propriétés suivantes résultent immédiatement de la commutativité des diagrammes (*) et (**).

<u>Proposition</u> 1. <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un feuilletage riemannien sur une variété</u> M. <u>Alors le feuilletage</u> $\hat{\mathcal{F}}$ <u>induit par</u> $\mathcal{F}$ <u>sur la variété des repères transverses</u> $\hat{M}$ <u>vérifie</u> :

α) <u>Les feuilletages</u> $\mathcal{F}$ <u>et</u> $\hat{\mathcal{F}}$ <u>ont même dimension</u>.

β) <u>L'action de</u> SO_q <u>sur</u> $\hat{M}$ <u>laisse</u> $\hat{\mathcal{F}}$ <u>invariant</u>.

γ) <u>Une feuille de</u> $\hat{\mathcal{F}}$ <u>se projette par</u> $\hat{p}$ <u>sur une feuille de</u> $\mathcal{F}$.

b - <u>Parallélisme transverse de</u> $\hat{\mathcal{F}}$.

Sur la variété E des repères (orthonormés directs) de T, il existe un parallélisme canonique (cf. [KN]) construit à l'aide de la connection de Levi-Civita de T. Ce parallélisme est invariant par les difféomorphismes locaux de E induits par

les isométries locales de T. En particulier, ce parallélisme est invariant par les difféomorphismes locaux Γ_{ij}. On a donc obtenu (cf. Définition II.A.1) la

Proposition 2. Soit F un feuilletage riemannien sur une variété M. Alors, le feuilletage $\hat{F}$ induit par F sur $\hat{M}$ est transversalement parallélisable.

Lorsque M est compacte, la variété des repères transverses $\hat{M}$ est aussi compacte (c'est un SO_q-fibré principal au-dessus de M) on peut donc appliquer à F le théorème II.A.2 : les adhérences des feuilles de $\hat{F}$ forment une fibration $\hat{\pi} : \hat{M} \to \hat{W}$ et dans chaque fibre de cette fibration $\hat{F}$ induit un $\hat{G}$-feuilletage de Lie, où $\hat{G}$ est le groupe structural de $\hat{F}$.

c - Structure des feuilletages riemanniens

Etant donné un feuilletage riemannien F sur une variété compacte, on connait donc précisément la structure du "désingularisé" $\hat{F}$ dans l'adhérence de ses feuilles. Pour obtenir des renseignements analogues sur le feuilletage F lui-même, Molino utilise essentiellement les propriétés de la proposition II.B.1 et montre ainsi le théorème de structure des feuilletages riemanniens [Mo 2] :

Théorème 3. Soit F un feuilletage riemannien sur une variété compacte M. Alors :

i) Il existe un champ de plans en involution, de dimension variable, dont les variétés intégrales maximales sont les adhérences des feuilles de F.

ii) Sur l'ouvert où ce champ de plans a une dimension maximale, les adhérences de F constituent un feuilletage riemannien.

iii) Le feuilletage induit par F sur l'adhérence d'une feuille est un feuilletage riemannien transversalement homogène T, où T est un espace homogène riemannien simplement connexe de $\hat{G}$ le groupe structural de $\hat{F}$.

Le cas qui va nous intéresser est celui où $\hat{G} = \mathbb{R}^n$, l'espace homogène T est alors $\mathbb{R}^k$ muni de la métrique euclidienne.

Dire qu'un feuilletage est transversalement homogène $\mathbb{R}^k$, c'est dire qu'il admet une $(Is(\mathbb{R}^k),\mathbb{R}^k)$-structure transverse, $Is(\mathbb{R}^k)$ désignant le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^k$. On dit alors que ce feuilletage est transversalement euclidien (cf. [B] ou [CG]).

Nous pouvons aborder maintenant l'étude de la structure des flots riemanniens.

C - STRUCTURE DES FLOTS RIEMANNIENS

Dans un précédent travail, en collaboration avec P. Caron [CC], nous avions montré le théorème suivant (cf. [C1] pour une démonstration détaillée) :

Théorème 1. Soit Φ un G-flot de Lie sur une variété fermée M^{n+1}. Supposons que les orbites de Φ sont denses et que G est simplement connexe. Alors :

i) $G = \mathbb{R}^n$.

ii) La variété M^{n+1} est difféomorphe au tore T^{n+1}.

iii) Le flot Φ est différentiablement conjugué à un flot linéaire sur T^{n+1}.

A l'aide de ce théorème et des résultats de P. Molino décrits brièvement dans les deux paragraphes précédents, nous allons montrer la généralisation suivante :

Théorème 2. Soit Φ un flot riemannien à orbites denses sur une variété fermée M^{n+1}. Alors :

i) La variété M^{n+1} est difféomorphe au tore T^{n+1}.

ii) Le flot Φ est différentiablement conjugué à un flot linéaire sur T^{n+1}. En particulier, Φ est un $\mathbb{R}^n$-flot de Lie.

Démonstration : Notons comme à la partie II.B, $\hat{M} \xrightarrow{\hat{p}} M$ le fibré des repères transverses à Φ et $\hat{\Phi}$ le feuilletage induit par Φ sur $\hat{M}$. D'après la proposition II.B.1, $\hat{\Phi}$ est aussi un flot et l'adhérence d'une orbite de $\hat{\Phi}$ se projette sur l'adhérence d'une orbite de Φ, c'est-à-dire sur M. Soit L l'adhérence d'une orbite de $\hat{\Phi}$. Comme $\hat{\Phi}$ est transversalement parallélisable (Proposition II.B.2), d'après le théorème II.A.2, le flot $\hat{\Phi}$ induit sur L un $\hat{G}$-flot de Lie à orbites denses. On peut donc affirmer, grâce au théorème 1 de ce paragraphe, que $\hat{G} = \mathbb{R}^k$ et que L est difféomorphe au tore T^{k+1}. La restriction de $\hat{p}$ à L fait de L un fibré principal au-dessus de M [Mo 2]. On obtient ainsi que $\pi_1(M)$ est abélien. D'après la partie iii) du théorème II.B.3 et le commentaire qui suivait, nous savons que Φ est transversalement euclidien $\mathbb{R}^n$. Pour finir la démonstration, il nous reste à montrer le lemme suivant :

Lemme 3. Soit Φ un flot transversalement euclidien sur une variété M^{n+1} à groupe fondamental abélien. Alors Φ est transversalement de Lie $\mathbb{R}^n$.

Démonstration du lemme : Le flot Φ admet une $(Is(\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n)$-structure transverse, où $Is(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. L'application développante $D : \tilde{M} \to \mathbb{R}^n$ est une fibration localement triviale qui définit le relevé $\tilde{\Phi}$ de Φ dans $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et D est équivariante par rapport à la représentation d'holonomie $h : \pi_1(M) \to Is(\mathbb{R}^n)$ (cf. Proposition I.C.1, Théorème I.C.2). Comme $\pi_1(M)$ est abélien, le groupe d'holonomie $\Gamma = h(\pi_1(M))$ est un sous-groupe abélien de $Is(\mathbb{R}^n)$. Pour montrer le lemme, il nous suffit de montrer que Γ est un groupe de translations.

Moyennant un changement de base (affine euclidien) de l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut, pour un sous-groupe abélien donné Γ de $Is(\mathbb{R}^n)$, écrire $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ (somme orthogonale), de façon à ce que tout élément γ de Γ

s'écrive sous la forme : $\gamma(x,y) = (Ax,y+b)$ où A est une matrice d'isométrie de $\mathbb{R}^p$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^q$. Etant donné cette décomposition, on remarque que si $p \neq 0$, la fonction $f(x,y) = \|x\|$, où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^p$, est une fonction continue invariante par Γ et ne possédant pas de maximum local. Cette fonction permet donc de construire sur M (argument de [T] repris dans [CG]) une fonction continue sans maximum local. Comme M est compacte, il y a contradiction et donc $p = 0$, ce qui veut dire exactement que Γ est constitué de translations. Ceci termine la démonstration du lemme et, via le théorème 1 de ce paragraphe, la démonstration de notre théorème 2. □

Le théorème 2 joint au théorème II.B.3 permet d'affirmer que les adhérences d'un flot riemannien Φ sur une variété compacte sont des tores et que, restreint à chaque tore, le flot Φ est conjugué à un flot linéaire. La proposition suivante précise la structure de Φ sur un voisinage de l'adhérence d'une orbite. Appelons D^p la boule euclidienne unité centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^p$. Soit Φ un flot riemannien sur une variété compacte M^{n+1} et L l'adhérence d'une orbite de Φ. La variété L est difféomorphe à T^{k+1}.

<u>Proposition</u> 3. <u>Il existe un voisinage</u> V <u>de</u> L <u>saturé par</u> Φ <u>tel que</u> :

i) V <u>est difféomorphe à</u> $S^1 \times T^k \times D^{n-k}$ <u>par un difféomorphisme qui envoie</u> L <u>sur</u> $S^1 \times T^k \times \{0\}$.

ii) <u>Le flot</u> Φ <u>restreint à</u> V <u>est conjugué au flot obtenu par la suspension d'un difféomorphisme</u> γ <u>de</u> $T^k \times D^{n-k}$ <u>de la forme</u> $\gamma(x,y) = (R(x),A(y))$, <u>où</u> R <u>est une translation irrationnelle de</u> T^k <u>et</u> A <u>une rotation de</u> $\mathbb{R}^{n-k}$.

<u>Démonstration</u> : On choisit une section K du flot Φ restreint à L. Cette section est difféomorphe à T^k. Il est clair qu'il est possible de plonger K dans une sous-variété Σ transverse au flot Φ dans un voisinage U de L. La sous-variété Σ est munie de la métrique transverse invariante du flot Φ. On considère alors pour cette métrique un ε-voisinage Σ' de K dans Σ. La sous-variété transverse obtenue Σ' est difféomorphe à $T^k \times D^{n-k}$, elle réalise une section de Φ sur le voisinage V de L obtenu en prenant le saturé de Σ' pour Φ. On montre sans difficulté que le difféomorphisme de premier retour sur la section Σ' est conjugué au difféomorphisme de la proposition. □

A partir de cette proposition, il serait possible de montrer que M est une F-variété au sens de Gromov [Gr], c'est-à-dire que l'on peut recouvrir M par des ouverts munis d'actions localement libres de S^1 commutant entre elles là ou deux sont définies. Une F-variété a un volume minimum nul [Gr], on en déduit que M a un volume minimum nul. Nous donnons dans [C2], une preuve directe et complète de ce

résultat énoncé dans la

Proposition 4. Soit M une variété compacte. Si M supporte un flot riemannien, alors le volume minimal de M au sens de Gromov [Gr] est nul.

D'après l'inégalité principale de [Gr], une variété compacte de volume minimal nul a un volume simplicial nul. Une telle variété ne peut admettre une métrique à courbure sectionnelle < 0 ([IY]). De la proposition 4, on tire donc le

Corollaire 5. Il n'existe pas de flot riemannien sur une variété compacte admettant une métrique à courbure sectionnelle < 0.

Remarquons que dans [Cl] nous obtenions ce corollaire dans le cas particulier des flots possédant une (G,T)-structure riemannienne transverse.

III - FLOTS RIEMANNIENS EN DIMENSION 3

Le théorème II.C.2. va nous permettre de compléter les résultats de [Co], [Me] [Mo 1-2], [T] et [CG] en donnant la classification à conjugaison différentiable près des flots riemanniens sur les 3-variétés compactes. Dans [CG], nous avions une telle classification mais pour les flots admettant une (G,T)-structure riemannienne transverse, ce qui est moins général.

A - CLASSIFICATION

Les exemples de flots riemanniens sur les 3-variétés compactes que nous avons donnés à la partie I sont les seuls possibles. Autrement dit, tout flot riemannien sur une 3-variété compacte est conjugué à l'un de ces exemples. Enonçons notre théorème de classification :

Théorème 1. Soit Φ un flot riemannien sur une 3-variété fermée M (orientée) on a les possibilités suivantes :

1) Les orbites de Φ sont denses : la variété M est difféomorphe à T^3 et Φ est conjugué à un flot linéaire sur T^3.

2) Les orbites de Φ ne sont ni fermées, ni denses, alors deux cas sont possibles :

a) la variété M est difféomorphe à T^3 et Φ est conjugué à un flot linéaire sur T^3.

b) la variété M est difféomorphe au fibré hyperbolique T^3_A ($\mathrm{tr}A > 2$) et Φ est conjugué à l'un des flots de l'exemple I.D.6.

3) Le flot Φ possède deux orbites fermées, alors deux cas sont possibles :

a) la variété M est difféomorphe à un espace lenticulaire $L_{p,q}$ et Φ est conjugué à un flot de l'exemple I.B.4.

b) la variété M est difféomorphe à $S^2 \times S^1$ et le flot Φ est conjugué au flot donné par la suspension d'une rotation irrationnelle de S^2.

4) Le flot Φ a toutes ses orbites fermées : la variété M est un fibré de Seifert dont les fibres sont les orbites de Φ.

Démonstration : Appliquons les théorèmes II.B.3. et II.C.2 à chacun des cas qui se présentent :

α) Le flot Φ possède une orbite dense : on a alors immédiatement 1).

β) Les orbites de Φ ne sont ni fermées, ni denses : les adhérences des orbites de Φ forment une fibration $\bar{D} : M \to S^1$ de fibre T^2. Cette fibration se relève en une fibration $\bar{D}_1 : M_1 \to R$, toujours de fibre T^2, on note Φ_1 le flot relevé dans M_1.

La fibration $\bar{D}_1$ est triviale puisque $\mathbb{R}$ est contractile. Soit $M \cong T^2 \times \mathbb{R}$ une trivialisation ; pour chaque s, le flot Φ_1 induit sur $T^2 \times \{s\}$ un flot conjugué à un flot linéaire à orbites denses. En fait, on peut démontrer sans difficulté qu'il existe une trivialisation $M_1 \cong T^2 \times \mathbb{R}$ dans laquelle le flot Φ_1 induit sur chaque $T^2 \times \{s\}$ le même flot linéaire irrationnel noté Φ_1^o.

Considérons alors le difféomorphisme de recollement f du fibré $\bar{D}$ relatif à une telle trivialisation. Ce difféomorphisme préserve le flot linéaire irrationnel Φ_1^o. On peut alors affirmer d'après le lemme I.B.5. de [GS] que f est isotope à travers des difféomorphismes qui préservent Φ_1^o à un difféomorphisme linéaire préservant Φ_1^o.

Soit A la matrice définissant ce difféomorphisme linéaire, comme le nombre de rotation de Φ_1^o est irrationnel, la matrice A préserve une direction propre irrationnelle. Le polynôme caractéristique de A a donc un discriminant $\Delta = (\mathrm{tr}\, A)^2 - 4 \det A \geq 0$. Comme le feuilletage $\mathcal{F}$ est par définition orientable, $\det A = 1$ et on a donc $\mathrm{tr} A \geq 2$.

Si $\mathrm{tr}\, A = 2$, alors $A = I$, la variété M est difféomorphe à T^3 et Φ est conjugué à un flot linéaire sur T^3 (cas 2) a) du théorème).

Si $\mathrm{tr}\, A > 2$, la variété M est difféomorphe à T^3_A et Φ est conjugué à l'un des flots de l'exemple I.D.6. (cas b) du théorème).

γ) Le flot Φ possède une orbite fermée et une orbite non fermée : l'ouvert U où la dimension de l'adhérence d'une orbite est maximale est exactement constitué par les adhérences des orbites non fermées de Φ. Le complémentaire de U dans M est réunion d'un nombre fini d'orbites fermées, donc U est connexe.

Les adhérences des orbites non fermées de Φ constituent une fibration $\bar{D} : U \to V$ de fibre T^2. La variété V est de dimension 1, connexe et nécessairement non compacte car U est non compact. On peut donc identifier V à l'intervalle $]0,1[$.

La fibration $\bar{D}$ est triviale puisque sa base est contractile ; par les mêmes arguments que ceux utilisés en β), il est possible de trouver une trivialisation $U = T^2\times]0,1[$, telle que le flot Φ induise sur chaque $T^2\times\{s\}$ le même flot linéaire à orbites denses Φ^o.

Considérons maintenant une orbite fermée γ du flot Φ, l'holonomie de cette orbite est conjuguée à une rotation irrationnelle R. Il existe donc un voisinage tubulaire $V(\gamma)$ de γ invariant par Φ, tel que $V(\gamma) \cong D^2\times S^1$ où D^2 désigne le disque unité de dimension deux. Le flot Φ dans $D^2\times S^1$ est obtenu par suspension de la rotation irrationnelle R agissant sur D^2 (cf. Proposition II.C.3).

Le bord de $V(\gamma)$ est exactement égal à une fibre de $\bar{D}$. Il est alors clair que Φ possède exactement deux orbites fermées et que, moyennant une conjugaison, on peut construire la variété M et le flot Φ de la manière suivante :
$M = D_o^2\times S^1 \underset{h}{\sqcup} D_1^2\times S^1$, où l'on a :

i) les tores pleins $D_i^2\times S^1$, $i = 0,1$, sont les voisinages tubulaires des deux orbites fermées γ_o et γ_1 de Φ.

ii) le flot Φ dans $D_i^2\times S^1$ est obtenu par suspension d'une rotation irrationnelle sur D_i^2.

iii) le difféomorphisme h identifie le bord de $D_o^2\times S^1$ avec le bord de $D_1^2\times S^1$ en envoyant le flot induit par Φ sur $\partial D_o^2\times S^1$ sur le flot induit par Φ sur $\partial D_1^2\times S^1$.

La variété M est donc obtenue en recollant deux tores pleins par leurs bords. Par conséquent, M est difféomorphe soit à un espace lenticulaire $L_{p,q}$, soit à $S^2\times S^1$. Dans le premier cas, il est évident que le flot Φ est conjugué à un flot de l'exemple I.B.4 sur $L_{p,q}$ (cas 3) a) de théorème). Dans le second cas, il est clair que Φ est conjugué au flot sur $S^2\times S^1$ obtenu par suspension d'une rotation irrationnelle de S^2 (cas 3) b) du théorème).

δ) Φ <u>a toutes ses orbites fermées</u> : l'holonomie d'une orbite quelconque est conjuguée à une rotation rationnelle ce qui montre immédiatement que les orbites de Φ constituent une fibration de Seifert, on est donc dans le cas 4) du théorème.

Tous les cas possibles ayant été examinés, le théorème est démontré. □

B - CONTRE-EXEMPLE A UN THÉORÈME DE DUALITÉ DE REINHART

Etant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q sur une variété M, on peut considérer le complexe des formes basiques sur M relativement à $\mathcal{F}$. La cohomologie de ce complexe est la cohomologie basique de $\mathcal{F}$:

$$H_b^*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{p=0}^{q} H_b^p(\mathcal{F}).$$

Nous renvoyons à [R2], [Mo 2], [Sc] ou [KT] pour des définitions précises. Si $\mathcal{F}$ est donné par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ de variété transverse T, il n'est pas difficile de voir que $H_b^*(\mathcal{F})$ s'identifie à la cohomologie des formes différentielles sur T, invariantes par les $\gamma_{\cdot j}$. C'est cette remarque qui permet en général de calculer les groupes de cohomologie basique d'un feuilletage. Dans [Sc], G.W. Schwarz a montré que ces groupes peuvent être de dimension infinie même lorsque la variété M est supposée compacte. Antérieurement, B. Reinhart a énoncé dans [R2] le résultat suivant : si $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte, alors :

a) La dimension des groupes $H_b^p(\mathcal{F})$ est finie.
b) $\dim H_b^p(\mathcal{F}) = \dim H_b^{q-p}(\mathcal{F})$.

Nous allons montrer que l'exemple I.D.6 est un contre-exemple à l'assertion b). Récemment, Kamber et Tondeur [KT] ont prouvé que les assertions a) et b) sont vraies si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{F}$ est minimal (i.e. "taut" dans la terminologie de [Su], [Gl], [KT]). Si $\mathcal{F}$ est un flot, cela revient encore à dire que $\mathcal{F}$ est géodésible.

Avant de passer au calcul de la cohomologie basique de l'exemple I.D.6., démontrons la

<u>Proposition</u> 1. <u>Soit</u> Φ <u>un flot riemannien sur une variété</u> M. <u>Les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) Φ <u>est isométrique</u>.
ii) Φ <u>est géodésible</u>.

<u>Démonstration</u> : Il est facile de voir (cf. [Su] ou [Gl]) qu'un flot Φ est géodésible, si et seulement si, il existe un champ de plans $\mathcal{P}$ transverse à Φ et un paramétrage de Φ pour lequel le flot avec paramètre ϕ_t associé laisse $\mathcal{P}$ invariant. Pour montrer i) => ii), il suffit de considérer un flot isométrique avec paramètre ϕ_t dont les orbites sont celles de Φ (cf. I.B.2). Le flot ϕ_t laisse invariant le champ de plans orthogonal à Φ. Montrons maintenant ii) => i) : soit ϕ_t un flot avec paramètre dont les orbites sont celles de Φ et laissant invariant un champ de plans $\mathcal{P}$ transverse à Φ.

On construit alors une métrique g sur M quasi-fibrée relativement à Φ comme en I.B et telle que le vecteur $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}$ soit de longueur 1. Pour cette métrique ϕ_t est un flot isométrique. □

Soit Φ l'un des flots de l'exemple I.D.6. Ce flot est transversalement de Lie le groupe affine GA. Appelons Γ son groupe d'holonomie, d'après la remarque que nous avons faite, la cohomologie basique de Φ est celle des formes invariantes

par Γ. Mais, comme une forme invariante par Γ l'est aussi par l'adhérence $K = \bar{\Gamma}$, c'est aussi la cohomologie des formes sur GA invariantes par K. Si on identifie, comme en I.D.6, le groupe affine GA au groupe de Lie obtenu en considérant sur $\mathbb{R}^2$ la loi de groupe : $(t,s)(t',s') = (t+t',\lambda^t s'+s)$, le groupe K est alors le sous-groupe :

$$K = \{(n,s),\ n \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2. Le groupe $H_b^2(\Phi)$ est nul.

Démonstration : L'opération de K et de GA sur GA est l'opération à gauche. Les 1-formes $\alpha = dt$ et $\beta = \frac{ds}{\lambda^t}$ sont invariantes à gauche. Une fonction f est K-invariante si elle ne dépend pas de s et vérifie : $f(t) = f(t+1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Une 1-forme ω, K-invariante, s'écrit donc : $\omega = f(t)\alpha + g(t)\beta$, où f et g sont K-invariantes. Une 2-forme Ω, K-invariante, s'écrit : $\Omega = h(t)\ \alpha \wedge \beta$, où h(t) est K-invariante. Pour montrer le résultat, il suffit de prouver qu'une telle 2-forme Ω est toujours la différentielle d'une 1-forme K-invariante. C'est-à-dire que $\forall h$ fonction K-invariante, il existe des fonctions f et g, K-invariantes, telles que : $d(f(t)\alpha + g(t)\beta) = h(t)\ \alpha \wedge \beta$ ou encore : $(g'(t)+g(t)\ \mathrm{Log}\lambda)\ \alpha \wedge \beta = h(t)\ \alpha \wedge \beta$, c'est-à-dire :

$$g'(t) + g(t)\ \mathrm{Log}\ \lambda = h(t).$$

Posons $g(t) = \lambda^{-t}\ g_1(t)$ (variation des constantes). On doit donc trouver $g_1(t)$ telle que $g_1'(t)\ \lambda^{-t} = h(t)$, ce qui donne par intégration :

$$g(t) = \lambda^{-t}(k + \int_0^t \lambda^x\ h(x)\ dx)$$

où k est une constante. Puisque $h(x) = h(x+1)\ \forall x$, pour avoir $g(t+1) = g(t)\ \forall t$, il suffit de choisir $k = \frac{1}{\lambda-1}\int_0^1 \lambda^x h(x)dx$. Ce qui est toujours possible puisque $\lambda \neq 1$, d'où $H_b^2(\Phi) = 0$. □

Remarque 3. Par un calcul analogue on montrerait que $H_b^1(\Phi) = \mathbb{R}$. Il est facile de voir que pour un feuilletage F quelconque on a toujours $\dim H_b^0(F) = 1$. La proposition précédente montre donc que le flot Φ est un contre-exemple à l'assertion b) du résultat de Reinhart. Par ailleurs dans [KT], Kamber et Tondeur remarquent que $H_b^2(\Phi) = 0$ implique que Φ n'est pas géodésible. De cette remarque et de la proposition 1, on tire le

Corollaire 4. Φ n'est pas isométrique.

Pour terminer, faisons quelques observations : d'après la classification donnée par le théorème III.B.1, les flots de l'exemple I.D.6 constituent exactement la

classe de flots riemanniens non-isométriques (i.e. non-géodésibles d'après la proposition 1) sur les 3-variétés compactes. Par contre, il est aisé de voir que les flots de Lie de type homogène (cf. Définition I.D.4) sont "tense" au sens de [KT]. Tel est donc le cas des flots de l'exemple I.D.6. A partir de cette remarque, on en déduit que tout feuilletage riemannien sur une variété compacte de dimension $\leqslant 3$ est "tense" (les feuilletages riemanniens de codimension 1 sont "taut" donc "tense"). Il se pose maintenant la question de savoir s'il peut exister un feuilletage riemannien "non-tense" sur une variété compacte de dimension $\geqslant 4$.

BIBLIOGRAPHIE

[B] R. BLUMENTHAL. Transversaly homogeneous foliations.
Ann. Inst. Fourier 29, 4 (1979), 143-158.

[CC] P. CARON et Y. CARRIÈRE. Flots transversalement de Lie R^n, flots transversalement de Lie minimaux.
C.R.A.S. 280 (1980), 477-478.

[C1] Y. CARRIÈRE. Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension un.
Thèse de 3ème cycle, Université de Lille (1981).

[C2] Y. CARRIÈRE. Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates. En préparation.

[CG] Y. CARRIÈRE et E. GHYS. Feuilletages totalement géodésiques.
An. Acad. Brasil. Ciênc. 53, 3 (1981), 427-432.

[Co] L. CONLON. Transversally parallelizable foliations of codimension 2.
Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974) 79-102.

[E] D.B.A. EPSTEIN. Periodic flows on 3-manifolds.
Ann. Math. 95 (1972), 68-82.

[F] E. FÉDIDA. Sur les feuilletages de Lie.
C.R.A.S. 272 (1971), 999-1002.

[Gh] E. GHYS. Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension 1.
Preprint, Université de Lille (1982).

[GS] E. GHYS et V. SERGIESCU. Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages.
Topology 19 (1980), 179-197.

[Gl] H. GLUCK. Dynamical behavior of geodesic fields.
In Lecture Notes n° 819.

[Gr] M. GROMOV. Volume and bounded cohomology.
Preprint I.H.E.S., second version (1981)

[IY] H. INOUE and K. YANO. The Gromov invariant of negatively curved manifolds.
Topology 21 (1981), 83-89.

[JW] D.L. JOHNSON and L.B. WHITT. Totally geodesic foliations.
J. of Diff. Geom. 15 (1980), 225-235.

[KT] F. KAMBER and P. TONDEUR. Duality for riemannian foliations.
Preprint, présenté dans ce congrès.

[K] A. KIRILLOV. Eléments de la théorie des représentations.
Editions M.I.R.

[KN] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU. Fundation of differential geometry.

[Me] J. MEYER. e-foliations of codimension two.
J. of Diff. Geometry 12 (1977), 583-594.

[Mo1] P. MOLINO. Feuilletages transversalement complets et applications.
Ann. Ec. Norm. Sup. 10 (1977), 289-307.

[Mo2] P. MOLINO. Géométrie globale des feuilletages riemanniens.
Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser. A, 1, 85 (1982), 45-76.

[R1] B. REINHART. Foliated manifolds with bundle-like metrics.
Ann. of Math 69 (1959), 119-132.

[R2] B. REINHART. Harmonics integrals on foliated manifolds.
Am. J. Of. Math (1959), 529-536.

[Sc] G.W. SCHWARZ. On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation.
Topology 13 (1974), 185-187.

[Su] D. SULLIVAN. A homological characterisation of foliations consisting of minimal surfaces.
Com. Helv. 54 (1979), 218-223.

[T] W. THURSTON. The geometry and topology of 3-manifolds.
Chapitre IV, Princeton University.

Université des Sciences et Techniques
de Lille I -
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex
FRANCE