Astérisque

JOSIANE LEHMANN-LEJEUNE

Cohomologies sur le fibré transverse à un feuilletage

Astérisque, tome 116 (1984), p. 149-179
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__116__149_0>

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COHOMOLOGIES SUR LE FIBRÉ TRANSVERSE À UN FEUILLETAGE

Josiane LEHMANN-LEJEUNE

INTRODUCTION

On sait l'intérêt porté actuellement à la suite des travaux de Gelfand-Fuks à la cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie. Soit L une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie ; les k-cochaînes C sur L sont les applications k-linéaires alternées de L^k dans L, les 0-cochaînes s'identifiant aux éléments de L ; on définit l'opérateur cobord ∂ en posant :

$$\partial C(X_o,\dots,X_k) = \sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i \left[X_i,\ C(X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)\right]$$

$$+ \sum_{0\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j}\ C([X_i,X_j],X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$$

où $X_i \in L$, $0 \leq i \leq k$ et $\hat{}$ désigne l'omission. On définit les espaces de cohomologie correspondants $H^k(L)$; les 1-cocycles sont les dérivations de L, i.e. les applications D de L dans L telles que, quels que soient X et $Y \in L$:

$$D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)] \ ;$$

les 1-cocycles exacts sont les dérivations intérieures i.e. les applications de L dans L : $X \to [Y,X]$ où $Y \in L$.

Dans [7], A. LICHNEROWICZ a considéré l'algèbre de Lie L_F des automorphismes infinitésimaux d'un feuilletage F sur une variété W, i.e. l'algèbre de Lie des champs de vecteurs X sur W tels que, pour tout champ de vecteurs Y tangent aux feuilles, $[X,Y]$ est encore tangent aux feuilles et a montré en particulier que,

quel que soit le feuilletage, $H^1(L_F) = 0$.

Dans cet article, on définit sur le fibré transverse V à un feuilletage de codimension p sur une variété W, une structure 0-déformable (cf. [4]) J de rang p telle que $J^2 = 0$ et, quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur V, $[JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] + J^2[X,Y] = 0$. Pour tout ouvert Ω de V, on considère $L_J(\Omega)$, algèbre de Lie des champs de vecteurs X sur Ω tels que la dérivée de Lie de J par rapport à X soit nulle. i.e., pour tout champ de vecteurs Y sur Ω, $[X,JY] = J[X,Y]$; dans $L_J(\Omega)$, on retrouve les relevés canoniques dans V des automorphismes infinitésimaux du feuilletage sur W.

Pour tout $x \in V$, il existe un ouvert $U \ni x$ tel que $\dim H^1(L_J(U)) = 1$ (théorème 4). Lorsque le feuilletage est une fibration, $\dim H^1(L_J(V)) = 1$ (théorème 7). Lorsque W est le tore T^2 feuilleté par des droites à pente irrationnelle α, $\dim H^1(L_J(V)) = 4$, (théorème 8). Les démonstrations des théorèmes font apparaître que la dimension de $H^1(L_J(V))$ est d'autant plus grande qu'il y a, sur W, peu d'automorphismes infinitésimaux du feuilletage, définis globalement sur W, transverses aux feuilles.

Dans la dernière partie, on rappelle l'existence, comme pour toute structure 0-déformable, d'un opérateur de cohomologie d_J sur les formes différentielles sur V à valeurs scalaires.

I - ALGÈBRES DE LIE SUR LE FIBRÉ TRANSVERSE À UN FEUILLETAGE

Soit W une variété, connexe, paracompacte, de dimension m et de classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞.

On suppose W munie d'un feuilletage F de codimension p ; on note V le fibré transverse à F, $T(V)$ (resp. $T(W)$) le fibré tangent à V (resp. W), π l'application canonique de V sur W , π' l'application linéaire tangente, π_1 la projection canonique de $T(W)$ sur V.

Soient $x \in V$ et $y = \pi(x)$; la fibre de V au-dessus de y est un espace vectoriel V_y dont l'espace tangent en x, T_xV_y , est isomorphe à V_y par un isomorphisme canonique $j_x : V_y \to T_x(V_y)$.

On définit un champ de vecteurs Z sur V et une 1-forme J sur V à valeurs dans $T(V)$ en posant, pour tout $x \in V$ et pour tout champ de vecteurs X sur V :

$$(1) \qquad Z_x = j_x(x) \ , \qquad (JX)_x = j_x(\pi_{1y}(\pi'_x(X_x))) \ .$$

On vérifie immédiatement que $J^2 = 0$ et que J est partout de rang p.

Considérons, sur W, un ouvert $\hat{U}$ (resp. $\hat{U}'$) de coordonnées locales $(u_1,\dots,u_m)$ (resp. $(u'_1,\dots,u'_m)$) adaptées au feuilletage ; on suppose $\hat{U}$ et $\hat{U}'$ difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^m$ et $\hat{U}\cap\hat{U}'\neq\emptyset$. Alors on a, dans $\hat{U}\cap\hat{U}'$:

$u'_i = f_i(u_1,\dots,u_p)$ où $1\leq i\leq p$, $u'_{p+j} = f_{p+j}(u_1,\dots,u_m)$ où $1\leq j\leq m-p$,

$\partial_i = \sum_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k \partial'_k + \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_i f_{p+h}\partial'_{p+h}$ où $1\leq i\leq p$,

$\partial_{p+j} = \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_{p+j} f_{p+h}\partial'_{p+h}$ où $1\leq j\leq m-p$,(on a posé $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$) .

A $\hat{U}$ (resp. $\hat{U}'$) correspond sur $T(W)$ un ouvert $\hat{\hat{U}}$ (resp. $\hat{\hat{U}}'$) de coordonnées locales $(u_1,\dots,u_{2m})$ (resp. $(u'_1,\dots,u'_{2m})$) difféomorphe à $\hat{U}\times\mathbb{R}^m$ (resp. $\hat{U}'\times\mathbb{R}^m$) : si X est un champ de vecteurs sur W définie dans $\hat{U}\cap\hat{U}'$, on a :

$$X = \sum_{1\leq\alpha\leq m} u_{m+\alpha}\,\partial_\alpha = \sum_{1\leq\beta\leq m} u'_{m+\beta}\,\partial'_\beta$$

où $u'_{m+k} = \sum_{1\leq i\leq p} u_{m+i}\,\partial_i f_k$ pour $1\leq k\leq p$,

$u'_{m+p+h} = \sum_{1\leq\alpha\leq m} u_{m+\alpha}\,\partial_\alpha f_{p+h}$ pour $1\leq h\leq m-p$.

Ensuite à $\hat{U}$ (resp. $\hat{U}'$), on associe sur V un ouvert $U=\pi^{-1}(\hat{U})=\pi_1(\hat{\hat{U}})$, (resp. $U'=\pi^{-1}(\hat{U}')=\pi_1(\hat{\hat{U}}')$) de coordonnées locales $(u_1,\dots,u_{m+p})$ (resp. $(u'_1,\dots,u'_{m+p})$) , difféomorphe à $\hat{U}\times\mathbb{R}^p$ (resp. $\hat{U}'\times\mathbb{R}^p$) ; dans $U\cap U'$, on a :

$$(2)\begin{cases} u'_i = f_i(u_1,\dots,u_p) \text{ où } 1\leq i\leq p, \quad u'_{p+j} = f_{p+j}(u_1,\dots,u_m) \text{ où } 1\leq j\leq m-p , \\ u'_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\,\partial_k f_i \text{ où } 1\leq i\leq p , \\ \partial_i = \sum_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k\partial'_k + \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_i f_{p+h}\partial'_{p+h} + \sum_{1\leq k,t\leq p} u_{m+k}\,\partial_i\partial_k f_t\partial'_{m+t} \text{ où } 1\leq i\leq p, \\ \partial_{p+j} = \sum_{1\leq h\leq m-p} \partial_{p+j} f_{p+h}\partial'_{p+h} \text{ où } 1\leq j\leq m-p , \\ \partial_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k\partial'_{m+k} \text{ où } 1\leq i\leq p . \end{cases}$$

Dans U (resp. U'), on a :

$$(3)\begin{cases} J\partial_i = \partial_{m+i} \text{ pour } 1\leq i\leq p, \quad J\partial_{p+f} = 0 \text{ pour } 1\leq f\leq m , \\ (\text{resp. } J\partial'_k = \partial'_{m+k} \text{ pour } 1\leq k\leq p, \quad J\partial'_{p+s} = 0 \text{ pour } 1\leq s\leq m) , \\ Z_{|U} = \sum_{1\leq i\leq p} u_{m+i}\partial_{m+i} \quad (\text{resp. } Z_{|U'} = \sum_{1\leq k\leq p} u'_{m+k}\partial'_{m+k}) . \end{cases}$$

Désormais, on ne considérera sur V que des ouverts de coordonnées locales de ce type $U = \pi^{-1}(\hat{U})$, "ouverts de coordonnées locales adaptées" ; U est le fibré transverse au feuilletage restreint à $\hat{U}$; les coordonnées $u_1,\dots,u_p$ correspondent à des intégrales premières du feuilletage.

On vérifie immédiatement que, quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur V, on a :

$$[JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] + J^2[X,Y] = 0 \quad . \tag{4}$$

Soit Ω un ouvert de V ; on désigne par $L_J(\Omega)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs X définis dans Ω tels que la dérivée de Lie $L(X)J$ soit nulle (i.e. des automorphismes infinitésimaux de la structure), soit, pour tout champ de vecteurs Y sur Ω :

$$[X,JY] = J[X,Y] \quad . \tag{5}$$

Soient U un ouvert de coordonnées locales adaptées $(u_1,\dots,u_{m+p})$ et $X \in L_J(U)$; posons $X = \sum_{1\leq i\leq p} X_i\partial_i + \sum_{1\leq j\leq m-p} X_{p+j}\partial_{p+j} + \sum_{1\leq k\leq p} X_{m+k}\partial_{m+k}$; de (3) et (5), on déduit, en considérant $Y = \partial_k$, $1 \leq k \leq p$, puis $Y = \partial_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m-p$, que :

$$\partial_{m+k}X_i = \partial_{m+k}X_{p+j} = 0 \ , \ \partial_k X_i = \partial_{m+k}X_{m+i} \ , \ \partial_{p+\ell}X_i = 0 \tag{6}$$

où $1 \leq i,k \leq p$, $1 \leq j,\ell \leq m-p$.

On en déduit immédiatement que, pour tout ouvert Ω de V :

LEMME 1.- X <u>appartient à</u> $L_J(\Omega)$ <u>si et seulement si, pour tout ouvert</u> U <u>de coordonnées locales adaptées</u> $(u_1,\dots,u_{m+p})$ <u>tel que</u> $\Omega \cap U \neq \emptyset$, $X_{|\Omega \cap U}$ <u>est somme (finie) de champs de vecteurs sur</u> $\Omega \cap U$ <u>d'un des 3 types suivants</u> :

$$(7)\begin{cases} 1) \ X_i(u_1,\dots,u_p)\partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_i\partial_{m+i} \ \ \underline{\text{où}} \ \ 1 \leq i \leq p \ , \\ 2) \ X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j} \ \ \underline{\text{où}} \ \ 1 \leq j \leq m-p \ , \\ 3) \ X_{m+i}(u_1,\dots,u_m)\partial_{m+i} \ \ \underline{\text{où}} \ \ 1 \leq i \leq p \ . \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Les champs de vecteurs des types 1) et 2) sont les relevés dans le fibré transverse V des champs de vecteurs sur $\hat{U} \subset W$ qui sont des automorphismes infinitésimaux du feuilletage, i.e. des champs $\hat{X}$ sur $\hat{U}$ tels que, pour tout champ $\hat{Y}$ sur $\hat{U}$, tangent aux feuilles, $[\hat{X},\hat{Y}]$ est encore tangent aux feuilles ; les champs du type 2) correspondent aux automorphismes du feuilletage qui sont tangents aux feuilles.

Notons pour tout ouvert Ω de V :

$L(\Omega) = L_J(\Omega) \cap \operatorname{Ker} J_{|\Omega}$,

$L_2(\Omega)$ (resp. $L_3(\Omega)$) l'ensemble des champs de vecteurs $X \in L_J(\Omega)$ tels que, pour tout ouvert U de coordonnées locales adaptées vérifiant $\Omega \cap U \neq 0$, $X_{|\Omega \cap U}$ est du type 2 (resp. 3).

On vérifie immédiatement que, pour tout ouvert Ω de V :

LEMME 2.- $L_3(\Omega) = L_J(\Omega) \cap \operatorname{Im} J_{|\Omega}$,

$L(\Omega)$ <u>est un idéal de</u> $L_J(\Omega)$,

$L_3(\Omega)$ <u>est un idéal de</u> $L_J(\Omega)$ <u>et de</u> $L(\Omega)$,

$L_2(\Omega)$ <u>est une sous-algèbre de Lie de</u> $L(\Omega)$,

$[L_3(\Omega), L_3(\Omega)] = 0$,

$L(\Omega)$ <u>est somme directe de</u> $L_2(\Omega)$ <u>et</u> $L_3(\Omega)$,

<u>tout</u> $X \in L(\Omega)$ <u>se prolonge à l'ouvert</u> $\pi^{-1}(\pi(\Omega))$.

LEMME 3.- <u>Soient</u> Ω <u>un ouvert de</u> V <u>et</u> $X \in L_2(\Omega)$ (<u>resp.</u> $L_3(\Omega)$). <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>le germe en</u> x <u>de</u> X <u>est le germe en</u> x <u>d'un</u> $X' \in L_2(V)$ (<u>resp.</u> $L_3(V)$).

Soient $x \in \Omega$, $\hat{U}$ un ouvert de W difféormorphe à un pavé de $\mathbb{R}^m$ tel que $y = \pi(x) \in \hat{U}$ et $\hat{U} \subset \pi(\Omega)$, et $\hat{H}$ une fonction sur W à support compact contenu dans $\hat{U}$, égale à 1 dans un voisinage de y ; à $\hat{H}$ correspond, sur V, une fonction $H = \hat{H} \circ \pi$ à support (non compact) contenu dans l'ouvert de coordonnées locales adaptées $U = \pi^{-1}(\hat{U})$, égale à 1 au voisinage de x.

Soit $X \in L_2(\Omega)$ (resp. $L_3(\Omega)$) ; X s'étend à $\pi^{-1}(\pi(\Omega)) \supset U$; dans U , X s'écrit :

$$X = \sum_{1 \leq j \leq m-p} X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j} \quad (\text{resp. } X = \sum_{1 \leq i \leq p} X_{m+i}(u_1,\dots,u_m)\partial_{m+i}) \ ;$$

$$X' = H(\sum_{1 \leq j \leq m-p} X_{p+j}\partial_{p+j}) \ , \quad (\text{resp. } = H(\sum_{1 \leq i \leq p} X_{m+i}\partial_{m+i})$$

appartient à $L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$) et coïncide avec X au voisinage de x.

<u>Remarque</u> : Cette propriété n'est en général pas vraie pour $X \in L_J(U)$ de type 1, où U est un ouvert de coordonnées locales adaptées.

Soit $X \in L(V)$; son support ϕ est de la forme $\pi^{-1}(\hat{\phi})$ où $\hat{\phi}$ est un fermé de W ; on note $L^c(V)$ (resp. $L_2^c(V)$, $L_3^c(V)$) l'ensemble des $X \in L(V)$

(resp. $L_2(V)$, $L_3(V)$) dont le support $\phi = \pi^{-1}(\hat{\phi})$ est tel que $\hat{\phi}$ est compact.

THÉORÈME 1.- $L_2(V) = [L_2(V), L_2(V)]$, $L_2^c(V) = [L_2^c(V), L_2^c(V)]$

$L_3(V) = [L_2(V), L_3(V)]$, $L_3^c(V) = [L_2^c(V), L_3^c(V)]$

$L(V) = [L(V), L(V)]$, $L^c(V) = [L^c(V), L^c(V)]$

(ceci contient le théorème de A. Lichnerowicz [7], p. 64).

Soit $(\hat{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement de W par des ouverts de coordonnées locales à adhérence compacte et difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^m$, qu'on peut supposer centrés à l'origine ; d'après [3], théorème I p. 17, il existe un recouvrement ouvert de W, localement fini, plus fin, $(\hat{U}_\nu)_{\nu\in I}$ et une partition de I en une collection finie de sous-ensembles I_μ $(\mu = 1,\dots,r)$ tels que, pour tout μ, les ouverts $\hat{U}_\nu$ où $\nu \in I_\mu$ sont deux à deux disjoints.

Soient $(\hat{\theta}_\nu)_{\nu\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\hat{U}_\nu)$ et $(\theta_\nu = \hat{\theta}_\nu \circ \pi)$ la partition de l'unité associée sur V.

Soit $X \in L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$) ; posons, pour tout $\nu \in I$, $X_\nu = \theta_\nu X$; d'après (7) $X_\nu \in L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$). Le support de X_ν est de la forme $\pi^{-1}(\hat{\phi}_\nu)$ où $\hat{\phi}_\nu$ est un compact de W inclus dans $\hat{U}_\nu$; il existe un ouvert $\hat{U}'_\nu$ de W, à adhérence compacte, tel que $\hat{\phi}_\nu \subset \hat{U}'_\nu \subset \bar{\hat{U}}'_\nu \subset \hat{U}_\nu$ et des fonctions C^∞ sur W, $\hat{\beta}_\nu$ et $\hat{\gamma}_\nu$ telles que $\hat{\beta}_\nu|\hat{\phi}_\nu = 1$, supp $\hat{\beta}_\nu \subset \hat{U}'_\nu$, $\hat{\gamma}_\nu|\bar{\hat{U}}'_\nu = 1$, supp $\hat{\gamma}_\nu \subset \hat{U}_\nu$; on pose $\beta_\nu = \hat{\beta}_\nu \circ \pi$, $\gamma_\nu = \hat{\gamma}_\nu \circ \pi$; comme $\hat{U}_\nu$ est contenu dans un $\hat{U}_\alpha$, $U_\nu = \pi^{-1}(\hat{U}_\nu)$ est contenu dans l'ouvert de coordonnées locales adaptées $U_\alpha = \pi^{-1}(\hat{U}_\alpha)$; on peut alors poser :

$$X_\nu = \sum_{1\leq j\leq m-p} X_{\nu,p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j} \quad , \quad (\text{resp. } X_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} X_{\nu,m+i}(u_1,\dots,u_m)\partial_{m+i}).$$

Posons, pour $1 \leq j \leq m-p$:

$$T_{\nu,p+j} = \beta_\nu\partial_{p+j} \ , \ Y_{\nu,p+j} = \beta_\nu\Big(\int_0^{u_{p+j}} X_{\nu,p+j}(u_1,\dots,u_{p+j-1},t,u_{p+j+1},\dots,u_m)dt\Big)\partial_{p+j} \ ,$$

$$(\text{resp. pour } 1 \leq i \leq p, \ Y_{\nu,m+i} = \gamma_\nu\Big(\int_0^{u_{p+1}} X_{\nu,m+i}(u_1,\dots,u_p,t,u_{p+2},\dots,u_m)dt\Big)\partial_{m+i})$$

Les $2(m-p)$ (resp. p) champs de vecteurs sur V, à supports contenus dans U_ν, T_{p+j} , Y_{p+j} où $1 \leq j \leq m-p$, (resp. Y_{m+i} , où $1 \leq i \leq p$) appartiennent à $L_2^c(V)$, (resp. $L_3^c(V)$). On a :

$$\sum_{1\leq j\leq m-p} [T_{\nu,p+j}, Y_{\nu,p+j}] = \sum_{1\leq j\leq m-p} X_{\nu,p+j}\partial_{p+j} = X_\nu \ ,$$

(resp. $\sum_{1\leq i\leq p} [T_{\nu,p+1}, Y_{\nu,m+i}] = \sum_{1\leq i\leq p} X_{\nu,m+i}\partial_{m+i} = X_\nu$) .

Puisque, si ν et $\nu' \in I_\mu$, $U_\nu \cap U_{\nu'} = \emptyset$, on peut poser :

$$X_\mu = \sum_{\nu\in I_\mu} X_\nu \text{ ; pour } 1 \leq j \leq m-p \text{ , } T_{\mu,p+j} = \sum_{\nu\in I_\mu} T_{\nu,p+j} \text{ ,}$$

$$Y_{\mu,p+j} = \sum_{\nu\in I_\mu} Y_{\nu,p+j} \text{ , (resp. pour } 1 \leq i \leq p, \; Y_{\mu,m+i} = \sum_{\nu\in I_\mu} Y_{\nu,m+i})$$

et on a :

$$X_\mu = \sum_{1\leq j\leq m-p} [T_{\mu,p+j}, Y_{\mu,p+j}] \quad (\text{resp. } X_\mu = \sum_{1\leq i\leq p} [T_{\mu,p+1}, Y_{\mu,m+i}])$$

où les $T_{\mu,p+j}$, $Y_{\mu,p+j}$, $1 \leq j \leq m-p$, (resp. $Y_{\mu,m+i}$, $1 \leq i \leq p$) appartiennent à $L_2(V)$ (resp. $L_3(V)$) ; d'où le résultat, puisque $X = \sum_{1\leq\mu\leq r} X_\mu$.

Lorsque $X \in L_2^c(V)$, (resp. $L_3^c(V)$), il suffit de remarquer que le support de X ne rencontre qu'un nombre fini de U_ν ; notons B la partie finie de I telle que si $\nu \in I-B$, supp $X \cap U_\nu = \emptyset$; alors :

$$X = \sum_{\substack{1\leq j\leq m-p \\ \nu\in B}} [T_{\nu,p+j}, Y_{\nu,p+j}], \quad (\text{resp. } = \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ \nu\in B}} [T_{\nu,p+1}, Y_{\nu,m+i}]) \quad .$$

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> $X \in L_2(V)$ (<u>resp.</u> $L_3(V)$) <u>tel que le support de</u> X <u>soit contenu dans un ouvert</u> Ω <u>vérifiant</u> $\Omega = \pi^{-1}(\pi(\Omega))$. <u>Alors</u> $X = \sum_i [T_i, Y_i]$ <u>où</u> $\sum_i$ <u>est une somme finie et les</u> T_i , $Y_i \in L_2(V)$ <u>et sont à support inclus dans</u> Ω , (<u>resp.</u> $X = \sum_i [T_i, Y_i]$ <u>où</u> $\sum_i$ <u>est une somme finie, les</u> $T_i \in L_2(V)$, $Y_i \in L_3(V)$, supp $T_i \subset \Omega$, supp $Y_i \subset \Omega$).

Les notations sont les mêmes que dans le théorème 1 ; alors $\hat{\phi}_\nu \subset \hat{U}_\nu \cap \hat{\Omega}$ où $\hat{\Omega} = \pi(\Omega)$; on peut donc imposer que $\bar{\hat{U}}'_\nu \subset \hat{U}_\nu \cap \hat{\Omega}$; alors, pour $1 \leq j \leq m-p$, les $T_{\nu,p+j}$ et $Y_{\nu,p+j}$ sont à support dans $U_\nu \cap \Omega$, (resp. pour $1 \leq i \leq p$, les $Y_{\nu,m+i}$ sont à support dans $U_\nu \cap \Omega$) ; puisque le recouvrement (U_ν) est localement fini, pour $1 \leq j \leq m-p$, supp $T_{\mu,p+j} = \bigcup_{\nu\in I_\mu}$ supp $T_{\nu,p+j} \subset \Omega$, supp $Y_{\mu,p+j}$ $= \bigcup_{\nu\in I_\mu}$ supp $Y_{\nu,p+j} \subset \Omega$, (resp. pour $1 \leq i \leq p$, supp $Y_{\mu,m+i} = \bigcup_{\nu\in I_\mu}$ supp $Y_{\nu,m+i} \subset \Omega$), d'où le résultat.

LEMME 4.- Soit $x \in U$, ouvert de coordonnées locales adaptées $(u_1,\dots,u_{m+p})$. Pour tout $X \in L_J(U)$ (resp. $L(U)$) tel que $j^3(X)(x) = 0$, (i.e. le 3-jet en x de chaque composante de X sur les ∂_i, $1 \leq i \leq m+p$, est nul), il existe $Y_1,\dots,Y_q$, $T_1,\dots,T_q \in L_J(U)$ (resp. $L(U)$) tels que :

$$X = \sum_{1\leq i\leq q} [Y_i,T_i] \quad \text{et} \quad j^1(Y_i)(x) = j^1(T_i)(x) = 0 \qquad (\text{cf. } [8]) .$$

Il suffit, d'après le lemme 1, de démontrer le résultat pour X du type 1,2,3. On peut toujours supposer $u_s(x) = 0$, $1 \leq s \leq m+p$.

1) Considérons $X = X_i\partial_i + X_{m+i}\partial_{m+i}$, $Y = Y_i\partial_i + Y_{m+i}\partial_{m+i}$, $T = T_i\partial_i + T_{m+i}\partial_{m+i}$, où $1 \leq i \leq p$, $X_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_i$, $Y_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k Y_i$, $T_{m+i} = \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k T_i$.

Il suffit de prendre :

si $X_i = u_i^4\tilde{X}(u_1,\dots,u_p)$, $Y_i = u_i^2$, $T_i = u_i^2 \int_0^{u_i} \tilde{X}(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_p)dt$,

si $X_i = u_i^3u_k\tilde{X}$ où $k \neq i$, $1 \leq k \leq p$, $Y_i = u_iu_k$, $T_i = u_i \int_0^{u_i} t\,\tilde{X}(\dots,t,\dots)dt$,

si $X_i = u_i^2u_ku_s\tilde{X}$ où $1 \leq k,s \leq p$, $k \neq i$, $s \neq i$, $Y_i = u_iu_k$,

$$T_i = u_iu_s \int_0^{u_i} \tilde{X}(\dots,t,\dots)dt ,$$

si $X_i = u_iu_ku_su_f\tilde{X}$ où $1 \leq k,s,f \leq p$, $k \neq i$, $s \neq i$, $f \neq i$, $Y_i = u_ku_s$,

$$T_i = u_f \int_0^{u_i} t\,\tilde{X}(\dots,t,\dots)dt ,$$

si $X_i = u_ku_su_fu_h\tilde{X}$ où $1 \leq k,s,f,h \leq p$, $k \neq i$, $s \neq i$, $f \neq i$, $h \neq i$, $Y_i = u_ku_s$,

$$T_i = u_fu_h \int_0^{u_i} \tilde{X}(\dots,t,\dots)dt .$$

2) Considérons $X = A\partial_{p+j}$, $Y = B\partial_{p+j}$, $T = C\partial_{p+j}$ où $1 \leq j \leq m-p$, il suffit de prendre :

si $A = u_{p+j}^4\tilde{X}(u_1,\dots,u_m)$, $B = u_{p+j}^2$, $C = u_{p+j}^2 \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(u_1,\dots,u_{p+j-1},t,u_{p+j+1},\dots)dt$,

si $A = u_{p+j}^3u_k\tilde{X}$, où $1 \leq k \leq m$, $k \neq p+j$, $B = u_{p+j}u_k$,

$$C = u_{p+j} \int_0^{u_{p+j}} t\,\tilde{X}(\dots,t,\dots)dt ,$$

si $A = u_{p+j}^2 u_k u_s \tilde{X}$, où $1 \leq k, s \leq m$, $k \neq p+j$, $s \neq p+j$, $B = u_{p+j} u_k$,

$$C = u_{p+j} u_s \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt ,$$

si $A = u_{p+j} u_k u_s u_f \tilde{X}$, où $1 \leq k,s,f \leq m$, $k \neq p+j$, $s \neq p+j$, $f \neq p+j$, $B = u_k u_s$,

$$C = u_f \int_0^{u_{p+j}} t\, \tilde{X}(\ldots,t\ldots)dt ,$$

si $A = u_k u_s u_f u_h \tilde{X}$, où $1 \leq k,s,f,h \leq m$, $k \neq p+j$, $s \neq p+j$, $f \neq p+j$, $h \neq p+j$,

$$B = u_k u_s , \quad C = u_f u_h \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt .$$

3) Considérons $X = A\partial_{m+i}$, $T = C\partial_{m+i}$ où $1 \leq i \leq p$, $Y = B\partial_{p+j}$ où $1 \leq j \leq m-p$. Il suffit de prendre :

si $A = u_{p+j}^4 \tilde{X}(u_1,\ldots,u_m)$, $B = u_{p+j}^2$, $C = \int_0^{u_{p+j}} t^2\, \tilde{X}(u_1,\ldots,u_{p+j-1},t,u_{p+j+1},\ldots,u_m)dt$,

si $A = u_{p+j}^3 u_f \tilde{X}$, où $1 \leq f \leq m$, $f \neq p+j$, $B = u_{p+j}^2$, $C = u_f \int_0^{u_{p+j}} t\, \tilde{X}(\ldots,t,\ldots,)dt$,

si $A = u_f u_g u_h u_k \tilde{X}$, où $1 \leq f,g,h,k \leq m$, $h \neq p+j$, $k \neq p+j$, $B = u_f u_g$,

$$C = u_h u_k \int_0^{u_{p+j}} \tilde{X}(\ldots,t,\ldots)dt .$$

II - ÉTUDE GÉNÉRALE DES DÉRIVATIONS

PROPOSITION 1.- Soit D une dérivation de $L_J(V)$. Alors $D(L(V)) \subset L(V)$ et $D_{|L(V)}$ est une dérivation de $L(V)$.

D'après le théorème 1, pour tout $X \in L(V)$, on peut écrire $X = \sum_i [T_i,Y_i]$ où $\sum_i$ est une somme finie et les $T_i,Y_i \in L(V)$; puisque $L(V)$ est un idéal de $L_J(V)$, on en déduit que $D(X) = \sum_i ([D(T_i),Y_i] + [T_i,D(Y_i)])$ appartient à $L(V)$.

PROPOSITION 2.- Pour toute dérivation D de $L(V)$, et pour tout $X \in L(V)$, $\operatorname{supp} D(X) \subset \operatorname{supp} X$; toute dérivation D de $L(V)$ est locale.

Soient $X \in L(V)$ et ω un ouvert de V tel que $X_{|\omega} = 0$; posons $\Omega = \pi^{-1}(\pi(\omega))$; on a aussi $X_{|\Omega} = 0$. Pour tout $x \in \Omega$, il existe des ouverts Ω_1 et Ω_2 de V tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i = \pi^{-1}(\pi(\Omega_i))$, $i = 1,2$, $\operatorname{supp} X \subset \Omega_1$, $x \in \Omega_2$; d'après le théorème 2, on peut écrire $X = \sum_i [T_i,Y_i]$ où les T_i, $Y_i \in L(V)$ et sont à support dans Ω_1 ; puisque $DX = \sum_i ([D(T_i),Y_i] + [T_i, D(Y_i)])$ on en

déduit que $D(X)_{|\Omega_2} = 0$, puis $D(X)_{|\Omega} = 0$.

LEMME 5.- Soient U un ouvert de coordonnées locales adaptées, D une dérivation de $L_J(U)$ (resp. $L(U)$) et $x \in U$ tel que $j^3(X)(x) = 0$. Alors $D(X)(x) = 0$. (cf. [8]).

Ceci résulte immédiatement du lemme 4.

Dans toute la fin de cette partie, U désigne un ouvert de coordonnées locales adaptées.

On désigne par Δ l'application de $L(U)$ dans $L(U)$ définie par :

$$\Delta\Big(\sum_{1\leq j\leq m-p} X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j}\Big) = \Big(\sum_{1\leq j\leq m-p} \partial_{p+j}X_{p+j}\Big)\Big(\sum_{1\leq t\leq p} A_{m+t}\partial_{m+t}\Big) ,$$

$$\Delta\Big(\sum_{1\leq i\leq p} X_{m+i}\partial_{m+i}\Big) = 0 ,$$

où les A_{m+t} , $1 \leq t \leq p$, sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $u_1,\dots,u_p$. On vérifie immédiatement que :

LEMME 6.- Δ est une dérivation de $L(U)$, qui n'est pas intérieure.

Posons dans U, $T = \sum_{1\leq t\leq p} \Big(\sum_{1\leq i\leq p} B_t^i\, u_{m+i}\Big)\partial_{m+t}$ où les B_t^i sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $u_1,\dots,u_p$; $T \notin L_J(U)$; on vérifie immédiatement que :

LEMME 7.- L'application de $L(U)$ dans $L(U)$: $X \to [T,X]$ est une dérivation de $L(U)$ qui n'est pas intérieure.

THEOREME 3.- Soit D une dérivation de $L(U)$; il existe Z_1, Z_2, $Z_3 \in L_J(U)$, de type 1,2,3 respectivement, Δ et T tels que, pour tout $X \in L(U)$:

$$D(X) = [Z_1,X] + [Z_2,X] + [Z_3,X] + \Delta(X) + [T,X] .$$

En particulier $\dim H^1(L(U)) = +\infty$. Z_1, Z_2, Δ, T sont déterminés de manière unique ; Z_3 n'est déterminé qu'à l'addition près de $\sum_{1\leq t\leq p} E_{m+t}\partial_{m+t}$ où les E_{m+t} sont fonctions de $u_1,\dots,u_p$ seulement.

1) Etudions d'abord l'unicité.

Supposons que, pour tout $X \in L(U)$, on ait aussi :

$$D(X) = [Z_1',X] + [Z_2',X] + [Z_3',X] + \Delta'(X) + [T',X]$$

où Z_1', Z_2', $Z_3' \in L_J(U)$ et sont de type 1,2,3 respectivement,

$$\Delta'\Big(\sum_{1\leq j\leq m-p} X_{p+j}(u_1,\dots,u_m)\partial_{p+j}\Big) = \Big(\sum_{1\leq j\leq m-p} \partial_{p+j}X_{p+j}\Big)\Big(\sum_{1\leq t\leq p} A'_{m+t}\partial_{m+t}\Big) ,$$

$$\Delta'(\sum_{1\leq i\leq p} X_{m+i}\partial_{m+i}) = 0 ,$$

$$T' = \sum_{1\leq t\leq p} (\sum_{1\leq i\leq p} B'^{i}_{t} u_{m+i}) \partial_{m+t} ,$$

où les A'_{m+t} , B'^{i}_{t} , $1 \leq i, t \leq p$, sont des applications C^{∞} de U dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $u_1,\ldots,u_p$.

Posons :

$$Z_1 - Z'_1 = \sum_{1\leq i\leq p} (a_i(u_1,\ldots u_p)\partial_i + (\sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k a_i)\partial_{m+i}),$$

$$Z_2 - Z'_2 = \sum_{1\leq s\leq m-p} b_s(u_1,\ldots,u_m)\partial_{p+s} ,$$

$$Z_3 - Z'_3 = \sum_{1\leq i\leq p} c_i(u_1,\ldots,u_m)\partial_{m+i} ,$$

$$A''_{m+t} = A_{m+t} - A'_{m+t} , \quad B''^{i}_{t} = B^{i}_{t} - B'^{i}_{t} , \ 1 \leq i , t \leq p .$$

Pour tout $X \in L(U)$, on a :

$$[Z_1 - Z'_1, X] + [Z_2 - Z'_2, X] + [Z_3 - Z'_3, X] + (\Delta-\Delta')(X) + [T - T',X] = 0 ;$$

on en déduit :

i) pour $X = \partial_{p+j}$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$- \sum_{1\leq s\leq m-p} \partial_{p+j}b_s\partial_{p+s} - \sum_{1\leq i\leq p} \partial_{p+j}c_i\partial_{m+i} = 0 ,$$

donc :

$$\partial_{p+j}b_s = 0 = \partial_{p+j}c_i \quad \text{où } 1 \leq s \leq m-p , \ 1 \leq i \leq p ,$$

ii) pour $X = u_{p+j}\partial_{p+j}$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$b_{p+j}\partial_{p+j} + \sum_{1\leq t\leq p} A''_{m+t}\partial_{m+t} = 0 ,$$

donc $b_{p+j} = 0 = A''_{m+t}$, où $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq t \leq p$,

iii) pour $X = u_i\partial_{p+j}$ où $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$a_i\partial_{p+j} = 0 ,$$

donc $a_i = 0$, $1 \leq i \leq p$.

iv) pour $X = \partial_{m+i}$, $1 \leq i \leq p$:

$$- \sum_{1\leq t\leq p} B''^{i}_{t}\partial_{m+t} = 0 ,$$

donc $B''^{i}_{t} = 0$, où $1 \leq i$, $t \leq p$.

2) La démonstration de l'existence de Z_1, Z_2, Z_3, Δ, T se fait en plusieurs étapes.

LEMME 8.- Il existe $\hat{Z}_2$ et $Z_3 \in L(U)$ de type 2 et 3 respectivement tels que l'application de $L(U)$ dans $L(U)$: $X \to D_1(X) = D(X) - [\hat{Z}_2, X] - [Z_3, X]$ soit une dérivation de $L(U)$ vérifiant $D_1(\partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$.

Posons, pour $1 \leq j \leq m-p$: $D(\partial_{p+j}) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{p+j} \partial_{p+\ell}$.

On a, pour $1 \leq j, k \leq m-p$:

$$D([\partial_{p+j}, \partial_{p+k}]) = D(0) = 0 = [\sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{p+j} \partial_{p+\ell}, \partial_{p+k}] + [\partial_{p+j}, \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{p+k} \partial_{p+\ell}],$$

soit : $\partial_{p+k} D^{p+\ell}_{p+j} = \partial_{p+j} D^{p+\ell}_{p+k}$; donc il existe, dans U, des fonctions C^∞ de $u_1, \ldots, u_m$, $D_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m$, telles que $\partial_{p+j} D_{p+\ell} = D^{p+\ell}_{p+j}$. Il suffit de poser :

$$\hat{Z}_2 = - \sum_{1 \leq \ell \leq m-p} D_{p+\ell} \partial_{p+\ell}, \quad Z_3 = - \sum_{1 \leq i \leq p} D_{m+i} \partial_{m+i}.$$

LEMME 9.- Il existe $Z_1 \in L_J(U)$ de type 1, $\tilde{Z}_2 \in L(U)$ de type 2, une dérivation Δ de $L(U)$ (cf. lemme 6) tels que l'application de $L(U)$ dans $L(U)$:

$$X \to D_2(X) = D_1(X) - [Z_1, X] - [\tilde{Z}_2, X] - \Delta(X) = D(X) - [Z_1, X] - [Z_2, X] - [Z_3, X] - \Delta(X),$$

où on a posé $Z_2 = \hat{Z}_2 + \tilde{Z}_2$, soit une dérivation de $L(U)$ vérifiant : $D_2(\partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$, $D_2(u_k \partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq k \leq m$.

Posons, pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$:

$$D_1(u_i \partial_{p+j}) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,p+j} \partial_{p+\ell}.$$

On a, pour $1 \leq s \leq m-p$:

$$D_1([\partial_{p+s}, u_i \partial_{p+j}]) = 0 = [\partial_{p+s}, \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,p+j} \partial_{p+\ell}] ;$$

on en déduit que les $D^{p+\ell}_{i,p+j}$ ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$.
Pour $1 \leq i, k \leq m$, $1 \leq j, s \leq m-p$, on a :

$$D_1([u_i \partial_{p+j}, u_k \partial_{p+s}]) = \delta^k_{p+j} D_1(u_i \partial_{p+s}) - \delta^i_{p+s} D_1(u_k \partial_{p+j})$$

$$= [\sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,p+j} \partial_{p+\ell}, u_k \partial_{p+s}] + [u_i \partial_{p+j}, \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{k,p+s} \partial_{p+\ell}].$$

i) Supposons $1 \leq k \leq p$.

Pour $i = p+j = p+s$, on a :

$$- \sum_{1\leq \ell\leq m} D^{p+\ell}_{k,p+j}\partial_{p+\ell} = - D^{p+j}_{k,p+j}\partial_{p+j} \quad ;$$

On en déduit que, pour $1 \leq \ell \leq m$, $\ell \neq j$, $D^{p+\ell}_{k,p+j} = 0$.

Pour $i = p+s$, on a :

$$- D^{p+j}_{k,p+j}\partial_{p+j} = - D^{p+s}_{k,p+s}\partial_{p+j} \quad ;$$

On en déduit que, $D^{p+j}_{k,p+j} = D^{p+s}_{k,p+s}$.

ii) Supposons $p+1 \leq k \leq m$.

Pour $k \neq p+j = i = p+s$, on a :

$$- \sum_{1\leq \ell\leq m} D^{p+\ell}_{k,p+j}\partial_{p+\ell} = D^{k}_{p+j,p+j}\partial_{p+j} - D^{p+j}_{k,p+j}\partial_{p+j} \quad ;$$

on en déduit que, pour $1 \leq \ell \leq m$, $\ell \neq j$, $D^{p+\ell}_{k,p+j} = 0$, puis $D^{k}_{p+j,p+j} = 0$.

Pour $k = p+j \neq i = p+s$, on a :

$$D^{p+s}_{p+s,p+s}\partial_{p+s} + \sum_{1\leq t\leq p} D^{m+t}_{p+s,p+s}\partial_{m+t} - D^{p+j}_{p+j,p+j}\partial_{p+j} - \sum_{1\leq t\leq p} D^{m+t}_{p+j,p+j}\partial_{m+t}$$

$$= D^{p+j}_{p+s,p+j}\partial_{p+s} - D^{p+s}_{p+j,p+s}\partial_{p+j} \quad .$$

On en déduit : $D^{p+s}_{p+s,p+s} = D^{p+j}_{p+s,p+j}$, $D^{m+t}_{p+s,p+s} = D^{m+t}_{p+j,p+j}$ pour $1 \leq t \leq p$.

Il suffit de poser : $Z_1 = \sum_{1\leq k\leq p} (D_k\partial_k + \sum_{1\leq i\leq p} u_{m+i}\partial_i D_k\partial_{m+k})$, $\tilde{Z}_2 = \sum_{p+1\leq k\leq m} D_k\partial_k$ où D_k désigne la valeur commune des $D^{p+j}_{k,p+j}$, $1 \leq k \leq m$, et $A_{m+t} = D^{m+t}_{p+j,p+j}$ pour $1 \leq t \leq p$, ce qui détermine Δ.

LEMME 10.- <u>Il existe un champ de vecteurs</u> T <u>sur</u> U <u>tel que l'application de</u> $L(U)$ <u>dans</u> $L(U)$: $X \to D_3(X) = D_2(X) - [T,X]$ <u>soit une dérivation de</u> $L(U)$ <u>vérifiant</u> : $D_3(\partial_{p+\ell}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq \ell \leq m$, $D_3(u_k\partial_{p+j}) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$.

Posons $D_2(\partial_{m+i}) = \sum_{1\leq \ell\leq m} D^{p+\ell}_{m+i}\partial_{p+\ell}$ où $1 \leq i \leq p$.

De $D_2([\partial_{p+j},\partial_{m+i}]) = 0$, où $1 \leq j \leq m-p$, on déduit que les $D^{p+\ell}_{m+i}$ ne dépendent que de $u_1,\ldots,u_p$.

On a :

$$D_2([\partial_{m+i}, \sum_{1\leq j\leq m-p} u_{p+j}\partial_{p+j}]) = 0 = [\sum_{1\leq \ell\leq m} D^{p+\ell}_{m+i}\partial_{p+\ell} , \sum_{1\leq j\leq m-p} u_{p+j}\partial_{p+j}] \quad ;$$

on en déduit que $D^{p+\ell}_{m+i} = 0$ pour $1 \leq \ell \leq m-p$. Il suffit de poser :

$$T = - \sum_{1\leq t\leq p} (\sum_{1\leq i\leq p} D^{m+t}_{m+i}u_{m+i})\partial_{m+t} \quad \text{(cf. lemme 7).}$$

LEMME 11.- Pour tout $X \in L(U)$, dont les composantes sur les $\partial_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m$, sont des polynômes en les u_i, $1 \leq i \leq m$, de degré ≤ 3, $D_3(X) = 0$.

1) Posons ; pour $1 \leq i$, $k \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$.

$$D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,k,p+j} \partial_{p+\ell}.$$

Puisque $D_3([\partial_{p+s}, u_i u_k \partial_{p+j}]) = 0$, où $1 \leq s \leq m-p$, les $D^{p+\ell}_{i,k,p+j}$, $1 \leq \ell \leq m$, ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_p$.

i) Supposons $p+1 \leq i$, $k \leq m$.

Puisque $\left[\sum_{1 \leq s \leq m-p} u_{p+s} \partial_{p+s}, u_i u_k \partial_{p+j}\right] = u_i u_k \partial_{p+j}$,

on a : $$-\sum_{1 \leq \ell \leq m-p} D^{p+\ell}_{i,k,p+j} \partial_{p+\ell} = \sum_{1 \leq \ell \leq m} D^{p+\ell}_{i,k,p+j} \partial_{p+\ell},$$

on en déduit : $2 D^{p+\ell}_{i,k,p+j} = 0$ pour $1 \leq \ell \leq m-p$, $D^{m+t}_{i,k,p+j} = 0$ pour $1 \leq t \leq p$,

soit $D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = 0$.

ii) Supposons $1 \leq i \leq p < k \leq m$.

De $[u_i \partial_k, u_k^2 \partial_{p+j}] = 2 u_i u_k \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = 0$.

iii) Supposons $1 \leq i, k \leq p$.

De $[u_i \partial_{p+j}, u_k u_{p+j} \partial_{p+j}] = u_i u_k \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k \partial_{p+j}) = 0$.

2) Soient $1 \leq i,k,h \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$.

De $D_3([\partial_{p+\ell}, u_i u_k u_h \partial_{p+j}]) = 0$, où $1 \leq \ell \leq m-p$, on déduit que $[\partial_{p+\ell}, D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j})] = 0$.

i) Supposons $p+1 \leq i, k, h \leq m$.

De $\left[\sum_{1 \leq \ell \leq m-p} u_{p+\ell} \partial_{p+\ell}, u_i u_k u_h \partial_{p+j}\right] = 2 u_i u_k u_h \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

ii) Supposons $1 \leq i \leq p < k$, $h \leq m$.

De $\left[\sum_{1 \leq \ell \leq m-p} u_{p+\ell} \partial_{p+\ell}, u_i u_k u_h \partial_{p+j}\right] = u_i u_k u_h \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

iii) Supposons $1 \leq i, k \leq p < h \leq m$.

De $[u_i u_k \partial_h, u_h^2 \partial_{p+j}] = 2 u_i u_k u_h \partial_{p+j}$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

iv) Supposons $1 \leq i, k, h \leq p$.

De $[u_i u_k \partial_{p+\ell}, u_h u_{p+\ell} \partial_{p+j}] = u_i u_k u_h \partial_{p+j}$ où $1 \leq \ell \leq m-p$, on déduit que $D_3(u_i u_k u_h \partial_{p+j}) = 0$.

3) i) Soient $1 \leq i \leq m$, $1 \leq t \leq p$.

De $D_3([\partial_{p+\ell}, u_i\partial_{m+t}]) = 0$ où $1 \leq \ell \leq m-p$, on déduit que $[\partial_{p+\ell}, D_3(u_i\partial_{m+t})] = 0$.
Puis de $[u_i\partial_{p+\ell}, u_{p+\ell}\partial_{m+t}] = u_i\partial_{m+t}$ où $1 \leq \ell \leq m-p$, on déduit que $D_3(u_i\partial_{m+t}) = 0$.

ii) Soient $1 \leq i, k, h \leq m$, $1 \leq t \leq p$, $1 \leq \ell \leq m-p$.
De $[u_iu_k\partial_{p+\ell}, u_{p+\ell}\partial_{m+t}] = u_iu_k\partial_{m+t}$, on déduit que $D_3(u_iu_k\partial_{m+t}) = 0$.

De $[u_iu_ku_h\partial_{p+\ell}, u_{p+\ell}\partial_{m+t}] = u_iu_ku_h\partial_{m+t}$, on déduit que $D_3(u_iu_ku_h\partial_{m+t}) = 0$.

Pour terminer la démonstration du théorème, considérons maintenant X quelconque $\in L(U)$; pour tout $x \in U$, il existe $\hat{X} \in L(U)$, dont les composantes sur les ∂_i , $1 \leq i \leq m+p$, sont des polynômes de degré ≤ 3 , tel que $j^3(X-\hat{X})(x) = 0$; d'après le lemme 5, $D_3(X-\hat{X})(x) = 0$, donc, puisque $D_3(\hat{X}) = 0$, $D_3(X)(x) = 0$.

En utilisant (3) et (7), on vérifie immédiatement que :

LEMME 12.- <u>L'application de</u> $L_J(U)$ <u>dans</u> $L_J(U)$ (<u>resp. de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V)$) : $X \to [Z_{|U}, X]$ (<u>resp</u>. $X \to [Z,X]$) <u>est une dérivation de</u> $L_J(U)$ (<u>resp.</u> $L_J(V)$) <u>qui n'est pas intérieure</u> ; <u>ainsi</u> $\dim H^1(L_J(U)) \geq 1$, $\dim H^1(L_J(V)) \geq 1$.

THÉORÈME 4.- <u>Soit</u> D <u>une dérivation de</u> $L_J(U)$. <u>Il existe une constante réelle</u> K <u>et un élément</u> $Y \in L_J(U)$ <u>tels que, pour tout</u> $X \in L_J(U)$, $D(X) = [KZ_{|U} + Y, X]$; K <u>et</u> Y <u>sont déterminés d'une manière unique</u> ; $\dim H^1(L_J(U)) = 1$.

Les notations sont celles du théorème 3.

D'après la proposition 1, puisque $U = \pi^{-1}(\hat{U})$ est le fibré transverse au feuilletage restreint à $\hat{U}$, $D_{|L(U)}$ est une dérivation de $L(U)$. D'après les lemmes 2 et 8, D_1 est une dérivation de $L_J(U)$. L'application de $L_J(U)$ dans $L_J(U)$: $X \to D_2'(X) = D_1(X) - [Z_1,X] - [\tilde{Z}_2,X] = D(X) - [Z_1,X] - [Z_2,X] - [Z_3,X]$ (cf. lemme 9) est une dérivation de $L_J(U)$ telle que $D_2'(\partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$, $D_2'(u_k\partial_{p+j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq k \leq m$, $k \neq p+j$, $D_2'(u_{p+j}\partial_{p+j})$ $= \sum_{1\leq t\leq p} A_{m+t}\partial_{m+t}$, où les A_{m+t} ne dépendent que de $u_1,\ldots,u_p$.

Pour $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq m-p$, on a :

$$D_2'([\partial_i, \partial_{p+j}]) = 0 = [D_2'(\partial_i), \partial_{p+j}]$$

$$D_2'([\partial_i, u_k\partial_{p+j}]) = 0 = [D_2'(\partial_i), u_k\partial_{p+j}] \quad \text{si} \quad k \neq p+j$$

$$= [D_2'(\partial_i), u_{p+j}\partial_{p+j}] + [\partial_i, \sum_{1\leq t\leq p} A_{m+t}\partial_{m+t}], \quad \text{si} \quad k = p+j \ ;$$

On en déduit d'après (7) que les composantes de $D_2'(\partial_i)$ sur les ∂_k , $1 \leq k \leq m$, sont nulles, sur les ∂_{m+t} , $1 \leq t \leq p$, ne dépendent que de $u_1,\ldots,u_p$, et que les A_{m+t} , $1 \leq t \leq p$, sont des constantes.

Pour $1 \leq i, k \leq p$, $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq \ell \leq m$, on a :

$$D_2'([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \partial_{p+j}]) = 0 = [D_2'(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), \partial_{p+j}] ,$$

$$D_2'([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, u_\ell\partial_{p+j}]) = 0 = [D_2'(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), u_\ell\partial_{p+j}] \quad \text{si } \ell \neq p+j ,$$

$$= [D_2'(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), u_{p+j}\partial_{p+j}] + [u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i} , \sum_{1\leq t\leq p} A_{m+t}\partial_{m+t}] \quad \text{si } \ell = p+j ;$$

on en déduit d'après (7) que les composantes de $D_2'(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i})$ sur les ∂_ℓ, $1 \leq \ell \leq m$, sont nulles, sur les ∂_{m+t}, $1 \leq t \leq p$, ne dépendent que de $u_1,\ldots u_p$; et que $A_{m+t} = 0$ pour $1 \leq t \leq p$. Ainsi (cf. lemme 9), $D_2 = D_2'$.
D'après ce qui précède et (7), pour $1 \leq i, k, t \leq p$, on a :

$$[D_2(\partial_i), \partial_{m+t}] = 0 = [D_2(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}), \partial_{m+t}] ,$$

donc (cf. lemme 10) : $D_2([\partial_i, \partial_{m+t}]) = 0 = [\partial_i, \sum_{1\leq s\leq p} D_{m+t}^{m+s}\partial_{m+s}]$,
d'où on déduit que les D_{m+t}^{m+s}, $1 \leq s, t \leq p$, sont des constantes ;

$$D_2([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \partial_{m+k}]) = [u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \sum_{1\leq s\leq p} D_{m+k}^{m+s}\partial_{m+s}] ,$$

soit : $$- D_2(\partial_{m+i}) = - D_{m+k}^{m+k}\partial_{m+i} ,$$

d'où on déduit : $D_{m+i}^{m+s} = 0$ si $s \neq i$, $D_{m+i}^{m+i} = D_{m+k}^{m+k}$.

On désigne par $-K$ la valeur commune des D_{m+i}^{m+i}, $1 \leq i \leq p$. Le champ de vecteurs T du lemme 10 se réduit, d'après (3), à $KZ_{|U}$.
De ce qui précède et des lemmes 10, 11, 12, on déduit immédiatement que :

LEMME 13.- <u>L'application de</u> $L_J(U)$ <u>dans</u> $L_J(U)$: $X \to D_3(X) = D_2(X) - K[Z_{|U}, X]$ $= D(X) - [Z_1,X] - [Z_2,X] - [Z_3,X] - K[Z_{|U},X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(U)$ <u>telle que, pour</u> $1 \leq i, k \leq p$, $D_3(\partial_i) = \sum_{1\leq t\leq p} D_i^{m+t}\partial_{m+t}$, $D_3(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}) = \sum_{1\leq t\leq p} D_{ki}^{m+t}\partial_{m+t}$ <u>où les</u> D_i^{m+t}, D_{ki}^{m+t} <u>ne dépendent que de</u> $u_1,\ldots,u_p$, et $D_3(X) = 0$ <u>pour tout</u> $X \in L(U)$ <u>dont les composantes sur les</u> $\partial_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m$, <u>sont des polynômes en les</u> u_i, $1 \leq i \leq m$, <u>de degré</u> ≤ 3.

Pour $1 \leq i, k \leq p$, on a :

$D_3([\partial_i, \partial_k]) = 0 = [D_3(\partial_i), \partial_k] + [\partial_i, D_3(\partial_k)]$ soit $\partial_i D_k^{m+t} - \partial_k D_i^{m+t} = 0$ pour $1 \leq t \leq p$; il existe donc, dans U, des fonctions C^∞ de $u_1,\ldots,u_p$, D_{m+t}, $1 \leq t \leq p$, telles que $\partial_i D_{m+t} = D_i^{m+t}$. Posons $Z_3' = - \sum_{1\leq t\leq p} D_{m+t}\partial_{m+t}$; Z_3' est un élément de $L_J(U)$ de type 3, et l'application de $L_J(U)$ dans $L_J(U)$: $X \to D_4(X) = D_3(X) - [Z_3', X]$ est une dérivation de $L_J(U)$ telle que $D_4(\partial_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq m+p$.

On peut encore poser $D_4(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}) = \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}$ pour $1 \leq i, k \leq p$, où les $\hat{D}^{m+t}_{ki}$ ne dépendent que de $u_1,\dots,u_p$; puisque, pour $1 \leq h \leq p$, $D_4([\partial_h, u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}]) = 0 = [\partial_h, \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}]$, les $\hat{D}^{m+t}_{ki}$, $1 \leq t \leq p$, sont des constantes.

Pour $1 \leq i, k, h \leq p$, on a :

$$D_4([u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, u_h\partial_k + u_{m+h}\partial_{m+k}]) = \delta^h_i(\sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{kk}\partial_{m+t}) - \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{hi}\partial_{m+t}$$

$$= [\sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{ki}\partial_{m+t}, u_h\partial_k + u_{m+h}\partial_{m+k}] + [u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}, \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{hk}\partial_{m+t}] ;$$

on en déduit :

pour $h \neq i = k$, $- \sum_{1\leq t\leq p} \hat{D}^{m+t}_{hi}\partial_{m+t} = \hat{D}^{m+h}_{ii}\partial_{m+i} - \hat{D}^{m+i}_{hi}\partial_{m+i}$

donc : $\hat{D}^{m+t}_{hi} = 0$ pour $t \neq i$,

puis $\hat{D}^{m+h}_{ii} = 0$,

pour $h \neq i$, $- \hat{D}^{m+i}_{hi}\partial_{m+i} = - \hat{D}^{m+k}_{hk}\partial_{m+i}$

donc $\hat{D}^{m+i}_{hi} = \hat{D}^{m+k}_{hk}$.

Désignons par $\hat{D}_h$ la valeur commune des constantes $\hat{D}^{m+i}_{hi}$ et posons $Z''_3 = \sum_{1\leq h\leq p} \hat{D}_h\partial_{m+h}$; $Z''_3 \in L_J(U)$ et est de type 3. Puisque, pour tout $X \in L(U)$, $[Z'_3 + Z''_3, X] = 0$, la dérivation de $L_J(U)$: $X \to D_5(X) = D_4(X) - [Z''_3, X] = D_3(X) - [Z'_3 + Z''_3, X]$ est telle que : $D_5(\partial_\ell) = 0$ pour $1 \leq \ell \leq p$, $D_5(u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}) = 0$ où $1 \leq i, k \leq p$, $D_5(X) = 0$ pour tout $X \in L(U)$ dont les composantes sur les $\partial_{p+\ell}$, $1 \leq \ell \leq m$, sont des polynômes en les u_i, $1 \leq i \leq m$, de degré ≤ 3.
Soient $1 \leq k, h, \ell, i \leq p$. Pour $1 \leq s \leq m$, on a :

$$D_5([\partial_s, u_k u_h\partial_i + (u_h u_{m+k} + u_{m+h}u_k)\partial_{m+i}]) = 0 = [\partial_s, D_5(u_k u_h\partial_i + (u_h u_{m+k} + u_{m+h}u_k)\partial_{m+i})],$$

donc les composantes de $D_5(u_k u_h\partial_i + (u_h u_{m+k} + u_{m+h}u_k)\partial_{m+i})$ sur les ∂_j, $1 \leq j \leq m+p$ sont constantes, d'après (7).

De $[\sum_{1\leq t\leq p} (u_t\partial_t + u_{m+t}\partial_{m+t}), u_k u_h\partial_i + (u_h u_{m+k} + u_k u_{m+h})\partial_{m+i}] = u_k u_h\partial_i + (u_h u_{m+k} + u_k u_{m+h})\partial_{m+i}$, on déduit que $D_5(u_k u_h\partial_i + (u_h u_{m+k} + u_k u_{m+h})\partial_{m+i}) = 0$. On en déduit que, pour $1 \leq s \leq m$:

$$D_5([\partial_s, u_k u_h u_\ell\partial_i + (u_{m+k}u_h u_\ell + u_k u_\ell u_{m+h} + u_k u_h u_{m+\ell})\partial_{m+i}] = 0$$

$$= [\partial_s, D_5(u_k u_h u_\ell\partial_i + (u_{m+k}u_h u_\ell + u_k u_\ell u_{m+h} + u_k u_h u_{m+\ell})\partial_{m+i})],$$

donc les composantes de $D_5(u_k u_h u_\ell\partial_i + (u_{m+k}u_h u_\ell + u_k u_\ell u_{m+h} + u_k u_h u_{m+\ell})\partial_{m+i})$ sur les ∂_j, $1 \leq j \leq m+p$, sont constantes, d'après (7).

De $\left[\sum_{1\leq t\leq p}(u_t\partial_t+u_{m+t}\partial_{m+t}),u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_\ell u_{m+h}+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i}\right]$

$= 2(u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_{m+h}u_\ell+u_ku_hu_{m+\ell})\partial_{m+i})$, on déduit que

$D_5(u_ku_hu_\ell\partial_i+(u_{m+k}u_hu_\ell+u_ku_{m+h}u_\ell+u_ku_hu_{m+\ell})\ \partial_{m+i}) = 0$.

Ainsi $D_5(X) = 0$ pour tout $X \in L_J(U)$ dont les composantes sur les ∂_j , $1 \leq j \leq p+m$, sont des polynômes en les u_i , de degré ≤ 3.

On en déduit comme à la fin de la démonstration du théorème 3, que, pour tout $X \in L_J(U)$, pour tout $x \in U$, $D_5(X)(x) = 0$.

On a ainsi montré que, si on pose $Y = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_3' + Z_3''$, pour tout $X \in L_J(U)$, $D(X) = [K\, Z_{|U} + Y, X]$.

LEMME 14.- K <u>et</u> Y <u>sont uniques</u>.

Supposons que, pour tout $X \in L_J(U)$, $D(X) = [K\, Z_{|U} + Y,X] = [K'Z_{|U} + Y',X]$ où K et K' sont des constantes, Y et $Y' \in L_J(U)$; alors, pour tout $X \in L_J(U)$, où on a :

$$[(K-K')Z_{|U} + (Y-Y'),X] = 0 ;$$

On en déduit, pour $1 \leq \ell \leq m$, puisque, d'après (3), $[Z_{|U},\partial_\ell] = 0$, que $[Y-Y',\partial_\ell] = 0$, et donc d'après (7) que les composantes de $Y-Y'$ sur les ∂_h , $1 \leq h \leq m+p$, sont des constantes.

Pour $1 \leq i, k \leq p$, $1 \leq j \leq m-p$, $1 \leq \ell \leq m$, on a, d'après (3) :

$$[Z_{|U},u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}] = [Z_{|U},u_\ell\partial_{p+j}] = 0 ,$$

donc $[Y-Y',u_k\partial_i + u_{m+k}\partial_{m+i}] = 0 = [Y-Y', u_\ell\partial_{p+j}]$; on en déduit que $Y - Y' = 0$.

Ensuite, pour $1 \leq t \leq p$, on a , d'après (3) : $[(K-K')Z_{|U}, \partial_{m+t}]$ $= -(K-K')\partial_{m+t} = 0$, donc $K = K'$.

III - <u>CAS OÙ LE FEUILLETAGE EST UNE FIBRATION</u>

On suppose dans cette partie que W est fibrée sur une variété de base M de dimension p ; on note π_2 la projection canonique de W sur M , F la fibre-type, variété de dimension m-p . On considère un recouvrement $(\check{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M par des ouverts de coordonnées locales $(u_1,\ldots,u_p)$, difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^p$, qui sont en même temps des ouverts de trivialisation du fibré W ; pour tout $\alpha \in A$, $\hat{U}_\alpha = \pi_2^{-1}(\check{U}_\alpha)$ est difféomorphe à $\check{U}_\alpha \times F$; on considère ensuite un recouvrement $(O_\beta)_{\beta\in B}$ de F par des ouverts de coordonnées locales $(u_{p+1},\ldots,u_m)$

difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^{m-p}$; on en déduit un recouvrement $(\hat{U}_{\alpha\beta})_{\beta\in B}$ de $\hat{U}_\alpha$ (resp. $(\hat{U}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ de W) par des ouverts de coordonnées locales difféomorphes à $\check{U}_\alpha \times O_\beta$ et à des pavés de $\mathbb{R}^m$, puis un recouvrement $(U_{\alpha\beta} = \pi^{-1}(\hat{U}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B})$ de V ; $U_{\alpha\beta}$ est difféomorphe à $\hat{U}_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^p$ et à $\check{U}_\alpha \times O_\beta \times \mathbb{R}^p$; c'est un "ouvert de coordonnées locales $u_1,\dots,u_{m+p}$ adaptées", qui, de plus, est adapté à la fibration ; on ne considérera sur V que des ouverts de coordonnées locales de ce type ; si $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'} \neq 0$, on a dans $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'}$ (cf. (2)) :

$$(8)\begin{cases} u'_i = f_i(u_1,\dots,u_p) \text{ où } 1 \leq i \leq p,\ u'_{p+j} = f_{p+j}(u_{p+1},\dots,u_m) \text{ où } 1 \leq j \leq m-p, \\ u'_{m+i} = \sum\limits_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k f_i \text{ où } 1 \leq i \leq p, \\ \partial_i = \sum\limits_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k \partial'_k + \sum\limits_{1\leq k,t\leq p} u_{m+k}\partial_i\partial_k f_t \partial'_{m+t} \text{ où } 1 \leq i \leq p, \\ \partial_{p+j} = \sum\limits_{1\leq h\leq m-p} \partial_{p+j} f_{p+h}\partial'_{p+h} \text{ où } 1 \leq j \leq m-p, \\ \partial_{m+i} = \sum\limits_{1\leq k\leq p} \partial_i f_k \partial'_{m+k} \text{ où } 1 \leq i \leq p. \end{cases}$$

De (7) et (8), on déduit qu'on peut définir, pour tout ouvert Ω de V, l'ensemble $L_1(\Omega)$ des champs de vecteurs $X \in L_J(\Omega)$ tels que, pour tout ouvert $U_{\alpha\beta}$ de coordonnées locales adaptées vérifiant $U_{\alpha\beta} \cap \Omega \neq \emptyset$, $X_{|U_{\alpha\beta}\cap\Omega}$ est du type 1. On vérifie immédiatement que $L_1(\Omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $L_J(\Omega)$ et que tout $X \in L_1(\Omega)$ s'étend canoniquement à $\pi^{-1} \circ \pi(\Omega)$ et $(\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$; en particulier, si $\Omega = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$, X est le relevé canonique dans Ω d'un champ $\check{X}$ sur $\pi_2 \circ \pi(\Omega)$, ouvert de M. $L_J(\Omega) = L_1(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_3(\Omega)$.

LEMME 15.- <u>Soient</u> Ω <u>un ouvert de</u> V <u>et</u> $X \in L_1(\Omega)$. <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>le germe en</u> x <u>de</u> X <u>est le germe en</u> x <u>d'un</u> $X' \in L_1(V)$.

Soient $x \in \Omega$, $U_{\alpha\beta}$ un ouvert de coordonnées locales adaptées telles que $x \in U_{\alpha\beta}$, $\check{H}$ une fonction sur M, à support compact contenu dans l'ouvert $\pi_2 \circ \pi(\Omega \cap U_{\alpha\beta}) \subset \check{U}_\alpha = \pi_2 \circ \pi(U_{\alpha\beta})$, égale à 1 dans un voisinage de $z = \pi_2 \circ \pi(x)$; à $\check{H}$ correspond sur V une fonction $H = \check{H} \circ \pi_2 \circ \pi$ à support contenu dans $(\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)\ (U_{\alpha\beta} \cap \Omega) \subset (\pi_2 \circ \pi)^{-1}\ (\check{U}_\alpha) \cap \Omega_1$ où $\Omega_1 = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de x.

Soit $X \in L_1(\Omega)$; X s'étend à Ω_1 ; dans $\Omega_1 \cap (\pi_2 \circ \pi)^{-1}\ (\check{U}_\alpha)$, X s'écrit : $X = \sum\limits_{1\leq i\leq p} (X_i(u_1,\dots,u_p)\partial_i + \sum\limits_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_i \partial_{m+i})$;

$X' = \sum_{1\leq i\leq p} (H\, X_i \partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k (H\, X_i)\partial_{m+i})$ appartient à $L_1(V)$ et coïncide avec X au voisinage de x.

Soit $X \in L_1(V)$; son support ϕ est de la forme $(\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{\phi})$ où $\check{\phi}$ est un fermé de M ; on note $L_1^c(V)$ l'ensemble des $X \in L_1(V)$ tel que $\check{\phi}$ est compact.

THÉORÈME 5.- $L_1(V) = [L_1(V), L_1(V)]$, $L_1^c(V) = [L_1^c(V), L_1^c(V)]$.

Soit, comme précédemment, un recouvrement $(\check{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M par des ouverts de coordonnées locales, qui sont des ouverts de trivialisation du fibré W ; on peut supposer les $\check{U}_\alpha$ à adhérence compacte, difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^p$, centrés à l'origine ; d'après [3], théorème I. p. 17, il existe un recouvrement ouvert de M, localement fini, plus fin $(\check{U}_\nu)_{\nu\in I}$ et une partition de I en une collection finie de sous-ensembles I_μ $(\mu = 1,\dots,r)$ tels que, pour tout μ, les ouverts $\check{U}_\nu$ où $\nu \in I_\mu$ sont deux à deux disjoints. Soit $(\check{\theta}_\nu)_{\nu\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\check{U}_\nu)$.

Soient $X \in L_1(V)$ et $\check{X} = (\pi_2 \circ \pi)'(X)$; posons $\check{X}_\nu = \check{\theta}_\nu \check{X}$; le support de $\check{X}_\nu$ est un compact $\check{\phi}_\nu$ de M inclus dans $\check{U}_\nu$; il existe une fonction, C^∞, sur M , $\check{\beta}_\nu$, à support inclus dans $\check{U}_\nu$ et telle que $\check{\beta}_{\nu|\check{\phi}_\nu} = 1$; comme $\check{U}_\nu$ est inclus dans un $\check{U}_\alpha$, ouvert de coordonnées locales $(u_1,\dots,u_p)$, on peut poser :

$$\check{X}_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} X_{\nu,i}(u_1,\dots,u_p)\partial_i \quad , \text{ et , pour } 1 \leq i \leq p \ :$$

$$\check{T}_{\nu,i} = \beta_\nu \partial_i \quad , \quad \check{Y}_{\nu,i} = \beta_\nu \left(\int_0^{u_i} X_{\nu,i}(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_p)dt\right)\partial_i \ ;$$

le support des $\check{T}_{\nu,i}$, $\check{Y}_{\nu,i}$, $1 \leq i \leq p$, est contenu dans $\check{U}_\nu$.

On vérifie immédiatement que :

$$\check{X}_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} [\check{T}_{\nu,i} , \check{Y}_{\nu,i}]$$

(cf. la proposition 4 de A. Lichnérowicz [6], p. 366).

Définissons X_ν , $T_{\nu,i}$, $Y_{\nu,i}$, où $1 \leq i \leq p$, éléments de $L_1(V)$, à support dans $U_\nu = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_\nu)$, relevés canoniques dans V de $\check{X}_\nu$, $\check{T}_{\nu,i}$, $\check{Y}_{\nu,i}$ respectivement, par leurs expressions en coordonnées $(u_1,\dots,u_{m+p})$ dans $U_\alpha = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_\alpha)$, (les coordonnées $u_{p+1},\dots,u_m$ n'interviennent pas) :

$$X_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} (X_{\nu,i}(u_1,\dots,u_p)\partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k X_{\nu,i}\partial_{m+i}) \ ,$$

$$T_{\nu,i} = \beta_\nu \partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k \beta_\nu \partial_{m+i} \quad ,$$

$$Y_{\nu,i} = (\beta_\nu \int_0^{u_i} X_{\nu,i}(\ldots,t,\ldots)dt)\partial_i + \sum_{1\leq k\leq p} u_{m+k}\partial_k(\beta_\nu \int_0^{u_i} X_{\nu,i}(\ldots,t,\ldots)dt)\partial_{m+i} .$$

On vérifie immédiatement que :

$$X_\nu = \sum_{1\leq i\leq p} [T_{\nu,i} , Y_{\nu,i}] .$$

Puisque, si ν et $\nu' \in I_\mu$, $\check{U}_\nu \cap \check{U}_{\nu'} = \emptyset$, donc : $U_\nu \cap U_{\nu'} = \emptyset$ où $U_\nu = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_\nu)$, $U_{\nu'} = (\pi_2 \circ \pi)^{-1}(\check{U}_{\nu'})$, on peut poser :

$$X_\mu = \sum_{\nu\in I_\mu} X_\nu \text{ , et pour } 1 \leq i \leq p \text{ , } T_{\mu,i} = \sum_{\nu\in I_\mu} T_{\nu,i} \text{ , } Y_{\mu,i} = \sum_{\nu\in I_\mu} Y_{\nu,i} .$$

On a encore :

$$X_\mu = \sum_{1\leq i\leq p} [T_{\mu,i} , Y_{\mu,i}]$$, où les $T_{\mu,i}$, $Y_{\mu,i}$ $1 \leq i \leq p$, appartiennent à $L_1(V)$.

Puisque $(\pi_2 \circ \pi)'(X_\mu) = \sum_{\nu\in I_\mu} (\pi_2 \circ \pi)'(X_\nu) = \sum_{\nu\in I_\mu} \check{X}_\nu$, si on pose $\check{X}_\mu = \sum_{\nu\in I_\mu} \check{X}_\nu$, on a $\check{X} = \sum_{1\leq\mu\leq r} \check{X}_\mu$ et donc $X = \sum_{1\leq\mu\leq r} X_\mu$; ainsi $X = \sum_{1\leq\mu\leq r} (\sum_{1\leq i\leq p} [T_{\mu,i} , Y_{\mu,i}])$.

Lorsque $X \in L_1^c(V)$, il suffit de remarquer que le support de X (resp. $\check{X}$) ne rencontre qu'un nombre fini de U_ν (resp. $\check{U}_\nu$) ; notons B la partie finie de I telle que, si $\nu \in I - B$, $\operatorname{supp} X \cap U_\nu = \emptyset$, alors :

$$\check{X} = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ \nu\in B}} [\check{T}_{\nu,i} , \check{Y}_{\nu,i}] \quad , \qquad X = \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ \nu\in B}} [T_{\nu,i} , Y_{\nu,i}] .$$

THÉORÈME 6.- <u>Soit</u> $X \in L_1(V)$ <u>tel que le support de</u> X <u>soit contenu dans un ouvert</u> Ω <u>vérifiant</u> $\Omega = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega)$. <u>Alors</u> $X = \sum_k [T_k, Y_k]$ <u>où</u> $\sum_k$ <u>est une somme finie et les</u> T_k , $Y_k \in L_1(V)$ <u>et sont à support inclus dans</u> Ω.

Les notations sont les mêmes que dans le théorème 5, alors $\check{\phi}_\nu \subset \check{U}_\nu \cap \check{\Omega}$ où $\check{\Omega} = \pi_2 \circ \pi(\Omega)$; on peut imposer que le support de $\check{\beta}_\nu$ soit inclus dans $\check{\Omega} \cap \check{U}_\nu$; alors, pour $1 \leq i \leq p$, les $T_{\nu,i}$ et $Y_{\nu,i}$ sont à support dans $U_\nu \cap \Omega$; puisque le recouvrement de $(\check{U}_\nu)_{\nu\in I}$ de M est localement fini, le recouvrement $(U_\nu)_{\nu\in I}$ de V est localement fini et $\operatorname{supp} T_{\mu,i} = \bigcup_{\nu\in I_\mu} \operatorname{supp} T_{\nu,i} \subset \Omega$,

$\operatorname{supp} Y_{\mu,i} = \bigcup_{\nu\in I_\mu} \operatorname{supp} Y_{\nu,i} \subset \Omega$; d'où le résultat .

PROPOSITION 3.- Pour toute dérivation D de $L_J(V)$ et pour tout $X \in L_J(V)$, $\operatorname{supp} D(X) \subset \operatorname{supp} X$; toute dérivation de $L_J(V)$ est locale.

D'après les propositions 1 et 2, il suffit de démontrer le résultat pour $X \in L_1(V)$; soient $X \in L_1(V)$ et ω un ouvert tel que $X_{|\omega} = 0$; posons $\Omega = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\omega)$; on a aussi $X_{|\Omega} = 0$. Pour tout $x \in \Omega$, il existe des ouverts Ω_1 et Ω_2 de V tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_i = (\pi_2 \circ \pi)^{-1} \circ (\pi_2 \circ \pi)(\Omega_i)$, $i = 1,2$, $\operatorname{supp} X \subset \Omega_1$, $x \in \Omega_2$; d'après le théorème 6, on peut écrire $X = \sum_k [T_k, Y_k]$ où les T_k, $Y_k \in L_1(V)$ et sont à support dans Ω_1 ; puisque $D(X) = \sum_k ([D(T_k), Y_k] + [T_k, D(Y_k)])$, on en déduit que $D(X)_{|\Omega_2} = 0$, puis $D(X)_{|\Omega} = 0$.

THÉORÈME 7.- Lorsque le feuilletage sur W est une fibration, $\dim H^1(L_J(V)) = 1$.

Soit D une dérivation de $L_J(V)$; pour tout ouvert Ω de V, on a une dérivation induite $D_\Omega : L_J(\Omega) \to L_J(\Omega)$: pour $X \in L_J(\Omega)$, et $x \in \Omega$, on pose : $D_\Omega(X)(x) = D(X')(x)$ où $X' \in L_J(V)$ et coïncide avec X dans un voisinage ouvert de x ; (cf. lemmes 3 et 15) ; $D_\Omega(X)(x)$ ne dépend pas de X' d'après la proposition 3.

Considérons maintenant un recouvrement $(U_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ de V par des ouverts de coordonnées locales adaptées ; d'après le théorème 4, pour tout $(\alpha,\beta) \in A \times B$ il existe $Y_{\alpha\beta} \in L_J(U_{\alpha\beta})$, une constante $K_{\alpha\beta}$ tels que pour tout $X \in L_J(U_{\alpha\beta})$, $D_{U_{\alpha\beta}}(X) = [K_{\alpha\beta}Z_{|U_{\alpha\beta}} + Y_{\alpha\beta}, X]$; comme $D_{U_{\alpha\beta}}$ et $D_{U_{\alpha'\beta'}}$ restreintes à $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'}$ coïncident, $Y_{\alpha\beta}$ et $Y_{\alpha'\beta'}$, restreints à $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha'\beta'}$, sont égaux et $K_{\alpha\beta} = K_{\alpha'\beta'}$; donc il existe $Y \in L_J(V)$ et une constante réelle K tels que pour tout $(\alpha,\beta) \in A \times B$; $Y_{|U_{\alpha\beta}} = Y_{\alpha\beta}$ et $K = K_{\alpha\beta}$; comme pour tout $X \in L_J(V)$, $D(X)_{|U_{\alpha\beta}} = D_{U_{\alpha\beta}}(X_{|U_{\alpha\beta}})$, on a, pour tout $X \in L_J(V)$: $D(X) = [KZ + Y, X]$.

IV - CAS DU TORE MUNI DU FEUILLETAGE PAR DES DROITES À PENTE IRRATIONNELLE

Considérons dans $\mathbb{R}^2$, muni des coordonnées canoniques (x,y), le champ de vecteurs $S = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; les courbes intégrales de S sont les droites $y = \alpha x + K$ où K est une constante, les intégrales premières de S $F(y - \alpha x)$ où F est n'importe quelle application C^∞ de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, suivant que l'on considère des intégrales premières définies globalement dans $\mathbb{R}^2$ ou localement. Par passage au quotient par la relation d'équivalence dans

$\mathbb{R}^2$: $(x,y) \sim (x',y')$ si $x-x' \in \mathbb{Z}$ et $y-y' \in \mathbb{Z}$, on obtient sur $\mathbb{T}^2$ un champ de vecteurs noté encore S ; ses intégrales premières définies globalement doivent être des fonctions $F(y-\alpha x)$, C^∞ , périodiques en y de période 1 , périodiques en x de période 1 ; F est donc une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le groupe des périodes est engendré par 1 et $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; on en déduit que F est constante.

Sur $W = \mathbb{T}^2$, on peut prendre comme coordonnées locales (u_1,u_2) adaptées au feuilletage $u_1 = y - \alpha x$, $u_2 = x$ où $u_1 \in]a,b[$, $u_2 \in]c,d[$ avec $b-a + |\alpha|(d-c) < 1$; alors (x,y) appartient à un parallélogramme. On en déduit, sur le fibré transverse V , les coordonnées locales adaptées (u_1,u_2,u_3) dans $U =]a,b[\times]c,d[\times \mathbb{R}$; on ne considérera dans la suite que des ouverts de coordonnées locales adaptées de ce type.

Soient U et U' deux tels ouverts tels que : $U \cap U' \neq \emptyset$; on a, dans $U \cap U'$, $u_1 - u_1' = f$, $u_2 - u_2' = g$, où f et g sont localement constantes, $u_3 = u_3'$, donc $\partial_1 = \partial_1'$, $\partial_2 = \partial_2'$, $\partial_3 = \partial_3'$; on a ainsi trois champs de vecteurs globalement définis sur V qui réalisent un parallélisme. On note encore S le relevé canonique de S dans V.

On a :

$$(9) \begin{cases} \partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial y} \ , \quad \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial}{\partial y} \ (= S) \ , \quad J\partial_1 = \partial_3 \ , \quad J\partial_2 = J\partial_3 = 0 \ , \\ Z = u_3\partial_3 \ . \end{cases}$$

LEMME 16.- <u>Soit</u> H <u>une application</u> C^∞ <u>de</u> V <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u> $\partial_2 H = \partial_3 H = 0$; <u>alors</u> H <u>est constante</u>.

En effet, puisque $\partial_3 H = 0$, il existe $\hat{H}$ application C^∞ de W dans $\mathbb{R}$ telle que $H = \hat{H} \circ \pi$; de $\partial_2 H = 0$, on déduit que $S.\ \hat{H} = 0$, donc que $\hat{H}$ est une intégrale première de S définie globalement sur W , donc une constante.

Soit $X \in L_J(V)$; posons $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$; de (5) et (9) en considérant $Y = \partial_1$, puis $Y = \partial_2$, on déduit que

$$\partial_3 X_1 = \partial_3 X_2 = \partial_2 X_1 = 0 \ , \quad \partial_1 X_1 = \partial_3 X_3 \ ;$$

d'après le lemme 16 , X_1 est constante ; on en déduit

$$\partial_3 X_3 = 0 \ ; \quad \text{d'où :}$$

LEMME 17.- Soit $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$; $X \in L_J(V)$ si et seulement si X_1 est constante, et X_2 et X_3 sont des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, périodiques en x de période 1, périodiques en y de période 1 ; ainsi $L_J(V) = R\partial_1 \oplus L(V)$.

Soit U un ouvert de coordonnées locales adaptées ; il existe donc beaucoup de $X \in L_J(U)$ dont le germe en $q \in U$ n'est pas le germe en q d'un $X' \in L_J(V)$. Notons $\tilde{L}(U)$ la restriction de $L_J(V)$ à U ; $\tilde{L}(U)$ est une sous-algèbre de Lie de $L_J(U)$; d'après le lemme 17, $\tilde{L}(U)$ est la somme directe de $\mathbb{R}\ \partial_{1|U}$ et de $L(U)$. On vérifie facilement que :

$$[L_J(V), L_J(V)] \subset L(V) \ . \tag{10}$$

PROPOSITION 4.- Toute dérivation de $L_J(V)$ est locale.

Soient ω un ouvert de V et $X \in L_J(V)$ tel que $X_{|\omega} = 0$; posons $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3$; puisque, d'après le lemme 17, X_1 est une constante, on a : $X_1 = 0$, donc $X \in L(V)$ et d'après les propositions 1 et 2, $D(X)_{|\omega} = 0$.

LEMME 18.- Toute dérivation D de $L_J(V)$ induit, sur tout ouvert U de coordonnées locales adaptées, une dérivation $\tilde{D}$ de $\tilde{L}(U)$ telle que, pour tout $X \in L_J(V)$, $\tilde{D}(X_{|U}) = D(X)_{|U}$; en particulier $\tilde{D}_{|L(U)}$ est une dérivation de $L(U)$.

En effet, soient D une dérivation de $L_J(V)$ et $X \in \tilde{L}(U)$; pour tout $q \in U$, posons $\tilde{D}(X)(q) = D(X')(q)$ où $X' \in L_J(V)$ et coïncide avec X dans un voisinage de q ; si X'' est un autre élément de $L_J(V)$ qui coïncide avec X au voisinage de q, $X'' - X'$ est nul au voisinage de q et, puisque D est locale, $D(X''-X')$ est nul au voisinage de q, donc $D(X'')(q) = D(X')(q)$.

Soit $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2 + X_3\partial_3 \in L_J(V)$.

Posons :

$$\begin{cases} \Delta_1(X) = X_1\partial_3 \\ \Delta_2(X) = X_2\partial_3 \\ \Delta_3(X) = (\partial_2 X_2)\partial_3 \ . \end{cases} \tag{11}$$

LEMME 19.- Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont des dérivations de $L_J(V)$ qui ne sont pas intérieures.

On vérifie facilement que Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont des dérivations de $L_J(V)$.

S'il existait $Y = Y_1\partial_1 + Y_2\partial_2 + Y_3\partial_3 \in L_J(V)$ tel que, pour tout $X \in L_J(V)$, $\Delta_1(X) = [Y,X]$ (resp. i) $\Delta_2(X) = [Y,X]$, ii) $\Delta_3(X) = [Y,X]$) , alors on aurait pour $X = \partial_1$, puis $X = \partial_2$, puis $X = \partial_3$:

- $\partial_1 Y_3 = 1$, $\partial_2 Y_3 = \partial_3 Y_3 = 0$ ce qui est impossible d'après le lemme 16 ;

donc Δ_1 n'est pas intérieure, (resp. i) $\partial_1 Y_3 = 0 = \partial_3 Y_3$, $\partial_2 Y_3 = -1$, donc Y_3 serait indépendante de y (et de u_3) ; alors $\partial_2 Y_3 = \dfrac{dY_3}{dx}$, mais l'équation différentielle $\dfrac{dY_3}{dx} = -1$ n'a pas de solution en x périodique de période 1 ;

donc Δ_2 n'est pas intérieure.

resp. ii)
$$\partial_1 Y_2 = \partial_2 Y_2 = \partial_3 Y_2 = 0$$
$$\partial_1 Y_3 = \partial_2 Y_3 = \partial_3 Y_3 = 0$$

donc Y_2 et Y_3 seraient des constantes ; puis pour $X = \sin 2\pi x(\partial_2 + \partial_3)$ on devrait avoir $[Y,X] = 2\pi \cos 2\pi x\, \partial_3$, donc

$$\begin{cases} 2\pi\, Y_2 \cos 2\pi\, x = 0 \ , \\ 2\pi\, Y_2 \cos 2\pi\, x = 2\pi \cos 2\pi\, x \ , \end{cases}$$

équations en Y_2 qui sont incompatibles ; donc Δ_3 n'est pas intérieure).

D'après les lemmes 12 et 19, $\dim H^1(L_J(V)) \geq 4$, puisque Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 et $X \to [Z,X]$ sont des dérivations de $L_J(V)$ linéairement indépendantes.

THÉORÈME 8.- <u>Soit</u> D <u>une dérivation de</u> $L_J(V)$; <u>il existe</u> $Y \in L_J(V)$, <u>des constantes réelles</u> K_1 , K_2 , K_3 , K_4 <u>tels que, pour tout</u> $X \in L_J(V)$, <u>on ait</u> :

$$D(X) = [Y,X] + K_1\, \Delta_1(X) + K_2\, \Delta_2(X) + K_3\, \Delta_3(X) + K_4[Z,X] \ .$$

K_1, K_2, K_3, K_4 <u>sont déterminées d'une manière unique</u> ; Y <u>est déterminé à l'addition près de</u> $Y_3\partial_3$ <u>où</u> Y_3 <u>est une constante</u>. $\dim H^1(L_J(V)) = 4$.

1) Etudions d'abord l'unicité.

Si, pour tout $X \in L_J(V)$, on a aussi

$$D(X) = [Y',X] + K'_1\, \Delta_1(X) + K'_2\, \Delta_2(X) + K'_3\, \Delta_3(X) + K'_4[Z,X] \ ,$$

où $Y' \in L_J(V)$, K'_1 , K'_2 , K'_3 , K'_4 sont des constantes, on a, pour tout $X \in L_J(V)$:

$$[(Y-Y'),X] + (K_1 - K'_1)\, \Delta_1(X) + (K_2 - K'_2)\, \Delta_2(X) + (K_3 - K'_3)\, \Delta_3(X) + (K_4 - K'_4)[Z,X] = 0.$$

Posons $\quad Y-Y' = Y_1\partial_1 + Y_2\partial_2 + Y_3\partial_3$.

Pour $X = \partial_1$, on a :

$$- \partial_1 Y_2 \partial_2 - \partial_1 Y_3 \partial_3 + (K_1 - K'_1)\, \partial_3 = 0$$

donc Y_2 est indépendante de y ;

$$\partial_1 Y_3 = K_1 - K_1'$$

donc $\quad Y_3 = (K_1 - K_1')y + h_3(x)$

où h_3 est une fonction de x périodique de période 1 ; puisque Y_3 est périodique en y de période 1 , nécessairement $K_1 = K_1'$; donc Y_3 ne dépend que de x.
Pour $X = \partial_2$, on a :

$$- \partial_2 Y_2 \partial_2 - \partial_2 Y_3 \partial_3 + (K_2 - K_2')\, \partial_3 = 0$$

donc $\partial_2 Y_2 = 0$ et Y_2 est une constante .

$\partial_2 Y_3 = K_2 - K_2'$, soit puisque Y_3 ne dépend que de x , $\dfrac{dY_3}{dx} = K_2 - K_2'$;
comme Y_3 doit être périodique en x de période 1 , on a : $K_2 = K_2'$ et Y_3 est une constante.

Pour $X = \partial_3$, on a :

$$- (K_4 - K_4')\partial_3 = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad K_4 = K_4' \ .$$

Pour $X = \sin 2\pi x\, \partial_2$ on a :

$$2\pi\, Y_2 \cos 2\pi x\, \partial_2 + 2\pi \cos 2\pi x\, (K_3 - K_3')\partial_3 = 0 \, ,$$

donc $Y_2 = 0$ et $K_3 = K_3'$.

Pour $X = \sin 2\pi y\, \partial_2$, on a :

$$2\pi\, Y_1 \cos 2\pi y\, \partial_2 = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad Y_1 = 0 \ .$$

Comme , pour tout $X \in L_J(V)$, $[Y_3\partial_3, X] = 0$ la constante Y_3 est arbitraire.

2) Démontrons l'existence de $Y \in L_J(V)$, K_1, K_2, K_3, K_4 .

Soient U et U' deux ouverts de coordonnées locales adaptées (u_1,u_2,u_3) et (u_1',u_2',u_3') tels que $U \cap U' \neq \emptyset$. D'après le lemme 18, D induit sur U (resp. U') une dérivation $\tilde{D}$ (resp. $\tilde{D}'$) de $\tilde{L}(U)$ (resp. $\tilde{L}(U')$) dont la restriction à $L(U)$ (resp. $L(U')$) est une dérivation de $L(U)$ (resp. $L(U')$). D'après le théorème 3, il existe Z_1, Z_2, $Z_3 \in L_J(U)$, de type 1,2,3 respectivement, Δ et T tels que, pour tout $X \in L(V)$:

$$D(X)_{|U} = \tilde{D}(X_{|U}) = [Z_1, X_{|U}] + [Z_2, X_{|U}] + [Z_3, X_{|U}] + \Delta(X_{|U}) + [T, X_{|U}]$$

où $\Delta(X_2(u_1,u_2)\partial_{2|U}) = (\partial_2 X_2)\ A\ \partial_{3|U}$,

$\Delta(X_3(u_1,u_2)\partial_{3|U}) = 0$,

$T = B\ u_3\partial_{3|U}$,

où A et B sont des applications C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ telles que $\partial_2 A = \partial_3 A = \partial_2 B = \partial_3 B = 0$ (resp. Z'_1, Z'_2, $Z'_3 \in L_J(U')$ de type 1,2,3 respectivement, Δ' et T' tels que, pour tout $X \in L(V)$:

$$D(X)_{|U'} = \tilde{D}'(X_{|U'}) = [Z'_1, X_{|U'}] + [Z'_2, X_{|U'}] + [Z'_3, X_{|U'}] + \Delta'(X_{|U'}) + [T', X_{|U'}]$$

où $\Delta'(X'_2(u'_1,u'_2)\partial_{2|U'}) = (\partial_2 X_2)\ A'\ \partial_{3|U'}$,

$\Delta'(X'_3(u'_1,u'_2)\partial_{3|U'}) = 0$,

$T' = B'\ u_3\ \partial_{3|U'}$,

où A' et B' sont des applications C^∞ de U' dans $\mathbb{R}$ telles que $\partial_2 A' = \partial_3 A' = \partial_2 B' = \partial_3 B' = 0$).

Compte-tenu des résultats d'unicité du théorème 3, $Z_{1|U\cap U'} = Z'_{1|U\cap U'}$, $Z_{2|U\cap U'} = Z'_{2|U\cap U'}$, $A_{|U\cap U'} = A'_{|U\cap U'}$, $B_{|U\cap U'} = B'_{|U\cap U'}$; il existe donc $\hat{Z}_1$ et $\hat{Z}_2 \in L_J(V)$, $\hat{Z}_1 = h\,\partial_1$, $\hat{Z}_2 = k(x,y)\partial_2$ où h est une constante, k une application C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, périodique en x et en y de période 1, des applications C^∞ de V dans $\mathbb{R}$, K_3 et K_4 telles que : $\hat{Z}_{1|U} = Z_1$, $\hat{Z}_{2|U} = Z_2$, $K_{3|U} = A$, $K_{4|U} = B$, $\partial_2 K_3 = \partial_3 K_3 = \partial_2 K_4 = \partial_3 K_4 = 0$; d'après le lemme 16, K_3 et K_4 sont des constantes ; la dérivation Δ de $L(U)$ est la restriction à U et $L(U)$ de la dérivation de $L_J(V)$: $K_3\Delta_3$; le champ de vecteurs dans U :

$T = K_4\ u_3\partial_{3|U}$ est la restriction à U du champ $K_4 Z$. On en déduit que :

LEMME 20.- <u>L'application</u> D_1 <u>de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V)$: $X \to D_1(X) = D(X) - [\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2, X] - K_3\,\Delta_3(X) - K_4[Z,X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(V)$ <u>telle que, pour tout</u> $X \in L(V)$, <u>pour tout ouvert</u> U <u>de coordonnées locales adaptées</u> :

$$D_1(X)_{|U} = [Z_3, X_{|U}] ;$$

donc, d'après le lemme 17, on peut poser :

$$D_1(g_2(x,y)\partial_2) = E_1(x,y)\ g_2(x,y)\partial_3 ,$$

$$D_1(g_3(x,y)\partial_3) = 0 ,$$

$$D_1(\partial_1) = D_1^1\partial_1 + D_1^2\partial_2 + D_1^3\partial_3$$

où D_1^1 est une constante, g_2, g_3, E_1, D_1^2, D_1^3 sont des applications C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, périodiques en x et en y de période 1.

De $D_1([\partial_1,\partial_2]) = D_1(0) = 0 = [D_1^1\partial_1 + D_1^2\partial_2 + D_1^3\partial_3 , \partial_2] + [\partial_1 , E_1(x,y)\partial_3]$

on déduit :

$$\partial_2 D_1^2 = 0 \quad ; \quad \partial_1 E_1 = \partial_2 D_1^3 . \tag{12}$$

Puisque $\partial_3 D_1^2 = 0$, d'après le lemme 16, D_1^2 est une constante.

Dans tout ouvert U de coordonnées locales adaptées (u_1,u_2,u_3), on a, d'après la proposition 4 et le lemme 18, pour la restriction $\tilde{D}_1$ de D_1 à U :

i) $\tilde{D}_1([\partial_{1|U} , u_2\partial_{2|U}]) = \tilde{D}_1(0) = 0$

$= [D_1^1\partial_{1|U} + D_1^2\partial_{2|U} + D_1^3\partial_{3|U} , u_2\partial_{2|U}] + [\partial_{1|U} , u_2 E_{1|U}\partial_3]$,

d'où on déduit, d'après (12) : $D_1^2 = 0$;

ii) $\tilde{D}_1([\partial_{1|U} , u_1\partial_{2|U}]) = \tilde{D}_1(\partial_{2|U}) = D_1(\partial_2)_{|U} = E_{1|U}\partial_{3|U}$

$= [D_1^1\partial_{1|U} + D_1^3\partial_{3|U} , u_1\partial_{2|U}] + [\partial_{1|U} , u_1E_{1|U}\partial_{3|U}]$

d'où on déduit : $D_1^1 = 0$.

Posons $A_3(x,y) = \int_0^y D_1^3(x,t)\,dt - y\,K_1$ où $K_1 = \int_0^1 D_1^3(x,t)\,dt$; $A_3(x,y)$ est périodique en x et en y de période 1 ; donc $\hat{Z}_3 = -A_3\partial_3$ est un élément de $L_J(V)$ et :

LEMME 21.- <u>L'application</u> D_2 <u>de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V)$: $X \to D_2(X) = D_1(X) - [\hat{Z}_3 , X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(V)$ <u>telle que</u> :

$D_2(\partial_1) = K_1\partial_3$,

$D_2(g_2(x,y)\partial_2) = g_2(x,y)\,E_2(x,y)\partial_3$,

$D_2(g_3(x,y)\partial_3) = 0$

où K_1 est une application C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ indépendante de y, périodique en x de période 1 et où g_2,g_3,E_2 sont périodiques en x et en y de période 1.

De $D_2([\partial_1,\partial_2]) = 0 = [K_1\partial_3,\partial_2] + [\partial_1, E_2\partial_3]$, on déduit :

$$\partial_1 E_2 = \partial_2 K_1 . \tag{13}$$

Puisque K_1 est indépendante de y , $\partial_2 K_1 = \dfrac{dK_1}{dx}$ et (13) s'écrit :

$$\frac{\partial E_2}{\partial y} = \frac{dK_1}{dx} \quad , \quad \text{donc} \quad : \quad E_2 = y\,\frac{dK_1}{dx} + e_2(x)$$

où e_2 est fonction de x seulement, périodique de période 1 ; puisque E_2 doit être périodique en y de période 1, nécessairement : $\frac{dK_1}{dx} = 0$; donc K_1 est une constante et E_2 est une fonction de x seulement, périodique de période 1.

Posons : $B_3(x) = \int_0^x E_2(t)\,dt - x\,K_2$ où $K_2 = \int_0^1 E_2(t)\,dt$; B_3 est indépendante de y, périodique en x de période 1 ; donc $\hat{\hat{Z}}_3 = -B_3\partial_3$ est un élément de $L_J(V)$ et :

LEMME 22.- <u>L'application</u> D_3 <u>de</u> $L_J(V)$ <u>dans</u> $L_J(V)$: $X \to D_3(X) = D_2(X) - K_1\Delta_1(X) - [\hat{\hat{Z}}_3, X]$ <u>est une dérivation de</u> $L_J(V)$ <u>telle que</u> : $D_3 = K_2\Delta_2$.

Si on pose $Y = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{\hat{Z}}_3$, on a ainsi montré que, pour tout $X \in L_J(V)$:
$D(X) = [Y,X] + K_1\Delta_1(X) + K_2\Delta_2(X) + K_3\Delta_3(X) + K_4\Delta_4(X)$.

V - d_J-<u>COHOMOLOGIES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES</u>.

On revient à la situation générale où W est une variété munie d'un feuilletage de codimension p et V le fibré transverse.

Comme, dans [5] on déduit de (4) que $(X,Y) \to \{X,Y\} = [X,JY] + [JX,Y] - J[X,Y]$ définit une structure de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des champs de vecteurs sur V.

A toute k-forme ω sur V , on associe la $(k+1)$-forme sur V définie par sa valeur sur $k+1$ champs de vecteurs :

$$(d_J\omega)\,(X_o,\dots,X_k) = \sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i\, J\,X_i \,.\, \omega(X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)$$
$$+ \sum_{0\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j}\, \omega(\{X_i,X_j\},\, X_o,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$$

où $\hat{}$ signifie l'omission.

On sait d'après [5] que d_J est une dérivation de degré 1 et que $d_J^2 = 0$.

Notons pour $0 \leq k$, A^k le faisceau des germes des k-formes ω sur V , à valeurs scalaires, telles que $\omega(X_1,\dots,X_k) = 0$ dès que l'un des $X_i \in \operatorname{Ker} J$, A le faisceau des germes de fonctions f sur V telles que $d_J(f) = 0$.

Pour tout ouvert Ω de V , notons $A^k(\Omega)$ (resp. $A(\Omega)$) le module des sections de A^k (resp. A) au-dessus de Ω. De (4), on déduit immédiatement que, pour tout k, $0 \leq k \leq p-1$:

$$d_J(A^k(\Omega)) \subset A^{k+1}(\Omega) \ .$$

Soit U un ouvert de coordonnées locales adaptées $(u_1,\dots,u_{m+p})$; $\omega \in A^k(U)$ s'écrit , pour $1 \leq k \leq p$:

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_k}$$

où $\sum$ est une somme finie et $i_j \in \{1,\dots,p\}$, pour tout j , $1 \leq j \leq k$; $f \in A(U)$ est fonction des coordonnées $u_1,\dots,u_m$ seulement, c'est-à-dire qu'il existe $\hat{f}$ fonction sur $\hat{U} = \pi(U) \subset W$ telle que $f = \hat{f} \circ \pi_{|U}$.

On définit, pour $k = 0$, $H^o_J(V) = \mathrm{Ker}(A^o(V) \xrightarrow{d_J} A^1(V))$,

pour $1 \leq k \leq p$, $$H^k_J(V) = \frac{\mathrm{Ker}(A^k(V) \xrightarrow{d_J} A^{k+1}(V))}{\mathrm{Im}(A^{k-1}(V) \xrightarrow{d_J} A^k(V))}$$

On a : $H^o_J(V) = A(V) = \{\hat{f} \circ \pi$, $\hat{f}$ l'application C^∞ de W dans $\mathbb{R}\}$,

donc : $\dim_{\mathbb{R}} H^o_J(V) = +\infty$.

Si $W = \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p}$ muni des coordonnées $(u_1,\dots,u_m)$ où les feuilles sont déterminées par u_i = constante, $1 \leq i \leq p$, alors $V = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$ muni des coordonnées adaptées $(u_1,\dots,u_m,\dots,u_{m+p})$; on sait, d'après [5], que :

THÉORÈME 9.- <u>Pour</u> k , $1 \leq k \leq p$, <u>toute forme</u> $\omega \in A^k(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p)$, d_J-<u>fermée</u>, <u>est</u> d_J-<u>exacte</u> ; <u>donc</u>

$$H^k_J(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p) = 0 , \quad 1 \leq k \leq p .$$

On en déduit dans le cas général :

COROLLAIRE.- <u>Toute forme</u> $\omega \in A^k(V)$, $1 \leq k \leq p$, <u>qui est</u> d_J-<u>fermée est localement</u> d_J-<u>exacte</u>. <u>Ainsi</u> :

(14) $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} A^o \xrightarrow{d_J} A^1 \xrightarrow{d_J} \dots \xrightarrow{d_J} A^p \xrightarrow{d_J} 0 ,$$ où j est l'inclusion ,

<u>est une résolution fine du faisceau</u> A <u>et la cohomologie à valeurs dans</u> A <u>est isomorphe à la</u> d_J-<u>cohomologie</u>.

Considérons un recouvrement $(\hat{U}_\alpha)$ de W par des ouverts de coordonnées locales adaptées au feuilletage, difféomorphes à des pavés de $\mathbb{R}^m$, $(\hat{U}_\nu)_{\nu \in I}$ un recouvrement ouvert de W, localement fini, plus fin $(\hat{\theta}_\nu)_{\nu \in I}$ une partition de l'unité subordonnée, $(U_\nu)_{\nu \in I}$ le recouvrement correspondant de V , $(\theta_\nu = \hat{\theta}_\nu \circ \pi)_{\nu \in I}$ la partition de l'unité sur V. On a, pour tout $\nu \in I$, $d_J \theta_\nu = 0$.

Soit $\omega \in A^k(V)$, $1 \leq k \leq p$, d_J-fermée ; pour tout $\nu \in I$, $\omega_{|U_\nu}$ est d_J-fermée ; d'après le corollaire, il existe $\alpha_\nu \in A^{k-1}(U_\nu)$ telle que $\omega_{|U_\nu} = d_J\alpha_\nu$; donc $\theta_\nu\omega_{|U_\nu} = d_J(\theta_{\nu|U_\nu}\alpha_\nu)$; on peut étendre $\theta_{\nu|U_\nu}\alpha_\nu$ à V tout entier en prolongeant par 0 ; on obtient un élément, noté encore $\theta_\nu\alpha_\nu$, de $A^{k-1}(V)$; donc $\omega = (\sum_{\nu\in I} \theta_\nu)\omega = \sum_{\nu\in I} (\theta_\nu\omega) = \sum_\nu d_J(\theta_\nu\alpha_\nu) = d_J(\sum_\nu \theta_\nu\alpha_\nu)$ d'où :

THÉORÈME 10.- <u>Pour tout</u> k, $1 \leq k \leq p$: $H_J^k(V) = 0$.

C'est un cas particulier de la proposition 5 de [1].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. ANONA. Sur la d_L-cohomologie. C.R. Acad. Sc. Paris 290 (1980) A 649-651.

[2] I.M. GELFAND et D.B. FUCHS. Funct. Anal. 4, (1970), 10-25 et suiv.

[3] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE. Connections, curvature and cohomology, Vol. I. Academic Press.

[4] J. LEHMANN-LEJEUNE. Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16,2 (1966), 329-387.

[5] J. LEHMANN-LEJEUNE. Etude des formes différentielles liée à certaines G-structures. C.R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 1838-1841.

[6] A. LICHNEROWICZ. Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs. Comment. Math. Helvetici 39(51), 343-368.

[7] A. LICHNEROWICZ. Algèbres de Lie attachées à un feuilletage. Ann. Fac. Sc. Toulouse, vol. 1, 45-76, (1979).

[8] F. TAKENS. Derivations of vector fields. Comp. Math. 26 (1973), 95-99.

Josiane Lehmann-Lejeune

E.R.A. au C.N.R.S. n° 07-590
Université des Sciences et Techniques de Lille I
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées.
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ - CEDEX.