

# *Astérisque*

YVES FÉLIX

## **Espaces formels et $\Pi$ -formels**

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 96-108

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_113-114\\_\\_96\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__96_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES FORMELS ET  $\Pi$ -FORMELS

Yves FÉLIX (\*)

I - DÉFINITIONS ET EXEMPLES

A chaque C.W.-complexe 1-connexe de type fini  $X$ , on peut associer canoniquement 2 modèles minimaux. Le premier  $L_X$ , dit de Quillen ( $[Q]$ ), est une a.l.d.g. (algèbre de Lie différentielle graduée)  $(\mathbb{L}(V), d)$  vérifiant  $V = s^{-1} \hat{H}_*(X; Q)$  et  $H_*(\mathbb{L}(V), d) = \pi_*(\Omega X) \otimes Q$ . La différentielle  $d$  se décompose sous la forme  $d = d_2 + d_3 + \dots$  où  $d_i(V) \subset \mathbb{L}^i(V)$ .  $[\mathbb{L}^i(V)$  : crochets de longueur  $i]$ .  $d_2$  munit l'espace vectoriel dual  $(sV)^\#$  d'une structure d'algèbre isomorphe à  $\hat{H}^*(X; Q)$ . Le second modèle,  $\mathcal{M}_X$ , construit par Sullivan ( $[Su]$ ), est une a.d.g.c. (algèbre différentielle graduée commutative)  $(\Lambda Z, d)$  vérifiant  $Z^* = |\pi_*(X) \otimes Q|^\#$  et  $H^*(\Lambda Z, d) = H^*(X; Q)$ . De nouveau, la différentielle  $d$  se décompose sous la forme  $d = d_2 + d_3 + \dots$  où  $d_i(Z) \subset \Lambda^i Z$   $[\Lambda^i Z$  : mots de longueur  $i]$ .  $d_2$  munit  $(s^{-1} Z)^\#$  d'un crochet qui en fait une algèbre de Lie graduée isomorphe à  $\pi_*(\Omega X) \otimes Q$ .

Ces deux modèles sont reliés par les foncteurs  $C$  et  $L$  de Quillen ( $[Q]$ ,  $[B-L]$ ). Si  $(A, d)$  est une algèbre différentielle graduée commutative de type fini,  $L(A, d)$  désigne les primitifs de la cobar construction sur la coalgèbre duale.  $L(A, d) = (\mathbb{L}(s^{-1} A^\#), d)$ . Si  $(L, \partial)$  est une a.l.g.d.,  $C(L, \partial)$  désigne l'algèbre des cochaînes sur  $L$ .

$$C(L, \partial) = (\Lambda(sL^\#), d)$$

---

(\*) Chercheur qualifié F.N.R.S.

PROPOSITION.- Il existe des quasi-isomorphismes

$$\begin{aligned} (\Lambda Z, d) &\xrightarrow{\sim} C(\mathbb{L}(V), d) \\ (\mathbb{L}(V), d) &\xrightarrow{\sim} L((\Lambda Z, d)) . \end{aligned}$$

Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à [Su], [Q], [H], [B-L], [M-N] ou [F2].

DÉFINITION.- Un espace  $X$  est dit formel (resp.  $\pi$ -formel) s'il existe un quasi-isomorphisme  $\eta_X \rightarrow (H^*(X; Q), 0)$  (resp.  $L_X \rightarrow (\pi_*(\Omega X) \otimes Q, 0)$ ).

PROPOSITION.- [M-N] [Su]. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $X$  est formel,
- 2)  $L_X$  a une différentielle purement quadratique,
- 3)  $L_X \xrightarrow{\sim} L(H^*(X; Q), 0)$  .

De façon duale, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1')  $X$  est  $\pi$ -formel,
- 2')  $\eta_X$  a une différentielle purement quadratique,
- 3')  $\eta_X \xrightarrow{\sim} C(\pi_*(\Omega X) \otimes Q, 0)$  .

Un espace formel est entièrement défini par sa cohomologie, un espace  $\pi$ -formel par son homotopie.

EXEMPLES D'ESPACES FORMELS.

- a) Les variétés kälheriennes compactes connexes [D].
- b) Les sphères, les espaces  $K(Z, n)$ , tout wedge et produit d'espaces formels, toute somme connexe de variétés formelles de même dimension.
- c) Tout squelette d'un C.W.-complexe formel instable ; tout retracte d'un espace formel.
- d) Tout espace dont la cohomologie est le quotient d'une algèbre symétrique libre par une suite régulière de relations (nombreux espaces homogènes [Su]).

EXEMPLES D'ESPACES  $\pi$ -FORMELS.

- 1) Les sphères, les espaces  $K(Z, n)$ , tout wedge et produit d'espaces  $\pi$ -formels.
- 2) Les étages de Postnikov d'un espace  $\pi$ -formel.
- 3) Tout espace obtenu en rajoutant une cellule à un espace  $\pi$ -formel  $X$  le long d'une application  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  telle que l'application induite  $X \xrightarrow{f} X \cup_f e^n$  soit surjective en homotopie rationnelle.
- 4) Tout espace dont l'homotopie est quotient d'une algèbre de Lie libre par une

suite "régulière" de relations [exemple :  $S_a^3 \vee S_b^3 \vee S_c^3 \cup_{\omega_1} e^8 \cup_{\omega_2} e^8$  ;  $\omega_1 = [a, [b, c]]$ ,  $\omega_2 = [c, [b, c]]$ ]. Une suite de relations  $\alpha_i$  dans une algèbre de Lie  $L$  est dite régulière, ou un ensemble fortement libre [An], si les 2 conditions suivantes sont vérifiées

- 1)  $UL \supset Q\langle \alpha_i \rangle$
- 2)  $UL \simeq Q\langle \alpha_i \rangle * U(L/(\alpha_i))$  comme espace vectoriel gradué.

Dans [An], D. Anick donne des critères explicites pour qu'une suite soit fortement libre. Ainsi par exemple la suite

$$\alpha_n = [\text{ad } y \text{ ad}^{n-1} x[x, y], [x, y]] \quad n \geq 0$$

est une suite fortement libre dans  $L(x, y)$ . L'espace  $S_x^3 \cup_y S_y^3 \cup_n (\bigcup_{\alpha_n} e_n)$  est un espace  $\pi$ -formel.

### DÉVELOPPEMENT DE L'EXEMPLE 3.

La détermination de ces applications  $f$  a fait l'objet d'une étude plus générale de J.M. Lemaire ([Le]). Le problème posé était le suivant : soit  $X$  un C.W.-complexe,  $\alpha = S^p \rightarrow X$  une application continue. Sous quelles conditions a-t-on  $\pi_*(c_\alpha) \otimes Q = \pi_*(X) \otimes Q/(\alpha)$  ? Pareille situation correspond à un "meurtre" (celui de la classe  $\alpha$ ), "parfait" (tuer la classe  $\alpha$  ne fait apparaître aucune nouvelle classe d'homotopie). Le premier exemple de meurtre parfait est dû à Labute.

PROPOSITION [La] .- Si on rattache à un wedge de sphères impaires une cellule le long d'une application non rationnellement homotope à zéro, on a toujours un crime parfait.

Dans [Le] et dans [An], le lecteur intéressé peut trouver des critères explicites pour qu'un meurtre soit parfait.

II - AUTOMORPHISMES DE GRADUATION

Soit  $H$  une a.g.c. Les automorphismes  $\psi_t$  de  $H$  définis par  $\psi_t(x) = t^{|x|}x$ ,  $x \in H$ ,  $t \in Q \setminus \{0, \pm 1\}$  s'appellent les automorphismes de graduation de  $H$ .

THÉORÈME.- ([Su], [Sh]).

Soit  $X$  un C.W.-complexe nilpotent de type fini, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $X$  est formel ,
- 2)  $\exists t \in Q \setminus (0, \pm 1)$  avec  $\psi_t$  réalisable par un automorphisme de  $X_0$  ,
- 3) Le morphisme canonique  $\text{Aut}(X_0) \rightarrow \text{Aut } H(X_0;Q)$  est surjectif.

III - LE PRINCIPAL OUTIL : LE MODÈLE BIGRADUÉ D'HALPERIN-STASHEFF ([H-S])

Le modèle bigradué d'une a.g.c.  $H$  est une résolution de  $H$  par une a.d.g.c. libre  $(\Lambda Z, d)$  dans le sens de Tate-Jozefiak [Jo].  $(\Lambda Z, d)$  est une a.d. bigraduée  $(Z = \bigoplus_{p \geq 0} Z_p)$  munie d'un quasi-isomorphisme  $p : (\Lambda Z, d) \rightarrow (H, 0)$  et vérifiant

- 1)  $H_+(\Lambda Z, d) = 0$
- 2)  $d(Z_m^p) \subset (\Lambda^{\geq 2} Z)_{n-1}^{p+1}$  .

L'étude de ce modèle permet d'établir diverses propriétés des espaces formels ([H-S]).

Propriété 1 : Tous les produits de Massey définis et d'ordre supérieur à 3 sont nuls.

Propriété 2 : L'homomorphisme de Hurewicz

$$\pi_*(X) \otimes Q \longrightarrow H_*(X;Q) \quad \text{a pour image les primitifs de}$$

$H_*(X;Q)$  pour sa structure de coalgèbre.

Propriété 3 : La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration  $\Omega X \rightarrow EX \rightarrow X$

$$E_2 = \text{Ext}_H(Q, Q) \implies H_*(\Omega X; Q) \quad \text{collapse au terme } E_2 .$$

Si maintenant  $(A, d_A)$  est une a.d.g.c. de cohomologie  $H$ , alors il existe une différentielle  $D$  sur  $\Lambda Z$  et un quasi-isomorphisme  $\psi : (\Lambda Z, D) \rightarrow (A, d_A)$  vérifiant

$$D = d + \sum_{i=2}^{\infty} d_i \quad \text{où } d_i(Z_p) \subset (\Lambda Z)_{p-i} .$$

Pareil modèle s'appelle un modèle filtré de  $(A, d_A)$ .

Les déformations  $d_i$  "représentent" les opérations cohomologiques d'ordre supérieur. Un exemple illustrerait mieux ce propos. Soit  $(\Lambda Z, d)$  le modèle bigradué de  $H(S^3 \vee S^3 \vee S^8 ; Q)$ .

$$Z_0 : a, b, u \quad |a| = |b| = 3, \quad |u| = 8$$

$$Z_1 : y, v_1, v_2, v_3 \quad dy = ab, \quad dv_1 = au, \quad dv_2 = bu, \quad dv_3 = u^2$$

$$Z_2 : z, \dots \quad dz = ya.$$

ya est un cocycle représentant le triple produit de Massey  $\langle a, b, a \rangle$ . Dans  $(\Lambda Z, d)$ , il est nul. Dans  $(\Lambda Z, D)$  où  $D = d + d_2$  avec  $d_2 z = u$ , il n'est plus nul. Il est rendu cohomologue à u.  $(\Lambda Z, D)$  est en fait le modèle filtré de l'espace  $S_a^3 \vee S_b^3 \cup_{\omega} e^8$ .

Point de vue dual : Une construction du modèle bigradué et de modèles filtrés d'une algèbre de Lie  $\pi$  a été faite par Oukili avec des résultats similaires [ou].

#### IV - OBSTRUCTIONS A LA FORMALITÉ

Soit H une a.g.c. et  $(\Lambda Z, d)$  son modèle bigradué. Soit X un espace de cohomologie rationnelle H et  $(\Lambda Z, D)$  un modèle filtré de X.

PROPOSITION [H-S]. - X est formel ssi il existe un isomorphisme  $\psi : (\Lambda Z, d) \leftarrow (\Lambda Z, D)$

de la forme  $\psi = 1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$  où  $\psi_i(Z_p) \subset (\Lambda Z)_{p-i}$ .

Ecrivons  $D = d + d_2 + d_3 + \dots$  où  $d_i(Z_p) \subset (\Lambda Z)_{p-i}$ .

$d_2$  est une dérivation de  $\Lambda Z$  commutant à d. L'existence d'un  $\psi$  vérifiant  $\psi D = d\psi$  entraîne que  $d_2 = d\psi_1 - \psi_1 d$ .

Considérons l'algèbre de Lie graduée  $\text{Der}_q^p(\Lambda Z)$ . d la munit d'une différentielle  $\tilde{d}$  par  $\tilde{d}(\theta) = d\theta - (-1)^{|\theta|} \theta d$ .  $d_2$  est un cocycle de cette algèbre de Lie. S'il existe un  $\psi$ , il doit être cohomologue à zéro.

$$d_2 = d\psi_1 - \psi_1 d \iff [d_2] = 0 \text{ dans } H_2^1(\text{Der}(\Lambda Z), \tilde{d})$$

$[d_2]$  représente la première obstruction  $O_1(X)$  à la formalité de X.

Si  $[d_2] = 0$ , alors X admet un modèle du type  $(\Lambda Z, e^{\psi_1} D e^{-\psi_1})$  avec  $e^{\psi_1} D e^{-\psi_1} = d + d_3 + \dots$ . La classe  $[d_3]$  dans  $H_3^1(\text{Der}(\Lambda Z), \tilde{d})$  fournit une seconde obstruction  $O_2(X)$ . On obtient de cette façon une suite  $O_p(X)$  d'obstructions naturelles, ne dépendant pas des choix antérieurs ( $[F1]$ ,  $[H-S]$ ).

Leur étude permet d'exhiber de nombreux critères de formalité ( $[H-S]$ ,  $[M-N]$ ,  $[S-S]$ ,  $[F1]$ ,  $[P]$ , ...). Citons en deux :

Critère 1 : ([H-S]) Si  $X$  est un C.W.-complexe  $n$ -connexe et de dimension  $\leq 3n+1$ , alors  $X$  est formel.

Critère 2 : ([M-N]) Si  $X$  est une variété  $n$ -connexe de dimension  $\leq 4n+1$ , alors  $X$  est formel.

Ces obstructions ont été construites de deux autres façons. La première est due à Lemaire et Sigrist ([L-S]) et se fait comme suit : soit  $H$  une a.g.c. Notons  $L_H = L(H,0)$  un modèle de Quillen de l'espace formel de cohomologie  $H$ .  $L_H = (L(V), d_2)$  Tout espace  $X$  de cohomologie  $H$  admet un modèle  $L_X$  de la forme  $L_X = (L(V), d_2 + d_3 + d_4 + \dots)$  où  $d_i(V) \subset \mathbb{L}^i(V)$ .  $d_3$  est une dérivation de  $\mathbb{L}(V)$  commutant à  $d_2$ . C'est donc un cycle de l'a.l.d.  $(\text{Der}_p^q(\mathbb{L}(V), [ , d_2 ])$ . Les classes  $[d_i] \in H_{i-1}^{-1}(\text{Der}(\mathbb{L}(V)), [ , d_2 ])$  fournissent une suite d'obstructions à la formalité, de la même façon que ci-dessus.

Par le même principe que [H-S], Stasheff et Schlessinger ont construit une nouvelle suite d'obstructions en travaillant sur l'algèbre  $C(L(H,0)) = (\wedge \mathbb{L}(V), d)$  ([S-S], [Ta]). Ces obstructions appartiennent à l'espace  $H_{\geq 2}^1(\text{Der } C(L(H,0)))$ .

L'existence d'un quasi-isomorphisme bigradué  $(\wedge Z, d) \rightarrow C(L(H,0))$  montre ([S-S]) que les obstructions du premier et du troisième type sont les mêmes. Quant aux obstructions du second et du troisième type, un simple calcul sur le foncteur  $C$  montre qu'elles sont les mêmes.

La meilleure façon de décrire ces obstructions consiste finalement à introduire les cohomologies de Hochschild et de Harrison de  $H$  à coefficients dans  $H$ , [Ta]  $\text{Hosch}(H,H)$  et  $\text{Harr}(H,H)$ .  $\text{Hosch}(H,H)$  désigne la cohomologie du complexe

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\otimes^p \bar{H}, H) &\xrightarrow{\partial} \text{Hom}(\otimes^{p+1} \bar{H}, H) \longrightarrow \dots \\ \partial f(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1}) &= \lambda_1 f(\lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1}) + \sum_{i=1}^p f(\bar{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\lambda}_i \lambda_{i+1} \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1}) \\ &\quad + f(\bar{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\lambda}_p) \lambda_{p+1} . \\ [\bar{H} = \text{idéal d'augmentation de } H, \bar{\lambda}_i &= (-1)^{|\lambda_i|-1} \lambda_i] . \end{aligned}$$

La cohomologie de Harrison est celle du sous-complexe

$$\text{Hom}_s(\otimes^p \bar{H}, H) \longrightarrow \text{Hom}_s(\otimes^{p+1} \bar{H}, H) \longrightarrow \dots$$

où l'indice  $s$  signifie que les applications linéaires s'annulent sur les décomposables du shuffle produit.

Munissons l'élément  $h_1 \otimes \dots \otimes h_p$  du degré  $(\sum |h_i|) - p+1$ . Le complexe de Harrison se décompose en sous complexes

$$\text{Hom}_S^q(\theta^p \bar{H}, H) \longrightarrow \text{Hom}_S^{q+1}(\theta^{p+1} \bar{H}, H) \longrightarrow \dots$$

dont la cohomologie se notera  $\text{Harr}^{p-1, q}(H, H)$ .

A partir des isomorphismes  $\text{Hom}_S^q(\theta^p \bar{H}, \bar{H}) \simeq \text{Der}_{p-1}^{-q}(L(\bar{H}))$  on montre facilement que le complexe de Harrison est isomorphe au complexe.  $(\text{Der}(L(\bar{H}), [\ , d_2 ])$ .

Les obstructions  $O_i(X)$  appartiennent donc aux espaces  $\text{Harr}^{i+1, 1}(H, H)$ .

PROPOSITION 1.- Si  $H_{\leq 2}^1(\text{Der}(\Lambda Z), \check{d}) = \text{Harr}^{\geq 2, 1}(H, H) = 0$ , alors tout espace de cohomologie  $H$  est formel, on dit alors que  $H$  est intrinsèquement formelle.

La réciproque n'est pas vraie : il se peut que  $H$  soit intrinsèquement formelle et que  $\text{Harr}^{\geq 2, 1}(H, H) \neq 0$ . Un exemple est donné dans [F1] :  $(S^5 \times S^{23}) \# (S^5 \times S^{23}) \# (S_{(2)}^{14})$  où  $S_{(2)}^{14}$  désigne le second espace produit réduit de James de  $S^{14}$ .

Sur une extension  $k$  algébriquement close de  $Q$ , les perturbations  $d_3 + d_4 + \dots$  du modèle de Quillen forment une variété algébrique  $V$  sur laquelle opère un groupe algébrique  $G = \text{Aut } H \times G_2$  où  $G_2$  est le groupe des automorphismes de  $\mathbb{L}(V)$  de la forme  $1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$  où  $\psi_i(V) \subset \mathbb{L}^{i+1}(V)$ . Le quotient  $V/G$  représente l'espace des différents types d'homotopie de cohomologie  $H$ . ([L-S], [S-S], [F1]).

PROPOSITION 2.-

a)  $\text{Harr}^{\geq 2, 1}(H, H)$  est isomorphe au quotient au point "espace formel" de l'espace tangent à Zariski à  $V$  par l'espace tangent à l'orbite de l'espace formel.

b) si  $\text{Harr}^{*, 2}(H, H) = 0$  alors la variété  $V$  est lisse et  $\text{Harr}^{*, 1}(H, H) = 0$  ssi  $H$  est intrinsèquement formelle.

c) L'espace formel est rigide ssi  $H$  est intrinsèquement formel.

Pour plus de détails sur cette variété, le lecteur est invité à se référer à [L-S], [S-S], et [F1].

La cohomologie de Harrison se plonge dans la cohomologie de Hochschild [Bar].

$$(1) \quad \text{Harr}^*(H, H) \longrightarrow \text{Hosch}^*(H, H) .$$

En utilisant cette injection, Tanré a pu démontrer que les espaces  $p^\infty/p^n$  sont intrinsèquement formels [Ta]. Ce second anneau est appelé par Gerstenhaber ([Ge]) l'anneau infinitésimal de  $H$ . Gerstenhaber montre que  $\text{Hosch}^{1, *}(H, H)$  mesure les déformations infinitésimales de la loi d'algèbre de  $H$ .



Hosch<sup>\*</sup>(H,H) mesure en fait les déformations infinitésimales de la différentielle du modèle d'Adams-Hilton de l'espace (H,O)

$$U L(H,O) .$$

L'injection (1) envoie toute déformation infinitésimale du modèle de Quillen sur la déformation correspondante de son algèbre enveloppante. En particulier Hosch<sup>1,1</sup> mesure les déformations infinitésimales quadratiques de la différentielle. On retrouve et on généralise ainsi le résultat de Gerstenhaber.

V - TYPE D'HOMOTOPIE : CONSÉQUENCE FORMELLE DE LA COHOMOLOGIE

Si X est un espace formel de cohomologie H, alors son algèbre de Lie d'homotopie rationnelle  $\pi_*(\Omega X) \otimes Q$  est isomorphe à  $H(L(H,O))$ .

$\pi_*(\Omega X) \otimes Q$  peut également se calculer comme suit :

$$\pi_*(\Omega X) \otimes Q = P(H_*(\Omega X ; Q)) = P(\text{Ext}_H(Q,Q)) .$$

Cette algèbre  $\text{Ext}_H(Q,Q)$  contient une sous-algèbre  $\text{Ext}_H^{(1)}(Q,Q)$ , algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie engendrée par les générateurs fermés du modèle de Quillen.

Cette algèbre  $\text{Ext}_H^{(1)}(Q,Q)$  se calcule comme suit [R]. Soit m l'idéal maximal  $H^+$ .

$$\text{Ext}_H^{(1)}(Q,Q) = T((m/m^2)^\#) / (I)$$

où I est l'idéal bilatère engendré par l'image de l'application

$$(m^2/m^3)^\# \longrightarrow (m/m^2)^\# \otimes (m/m^2)^\# \quad \text{duale de la multiplication .}$$

PROPOSITION.- [Lo]

Si  $m^4 = 0$ , alors il existe un espace vectoriel gradué V tel que  $T(V)$  soit une sous-algèbre de Hopf de  $\text{Ext}_H(Q,Q)$  et que

$$\text{Ext}_H(Q,Q) = \text{Ext}_H^{(1)}(Q,Q) \otimes T(V) \quad \text{comme} \quad \text{Ext}_H^{(1)}(Q,Q)$$

module à gauche et  $T(V)$  module à droite.

$\pi_n(X) \otimes Q$  est encore isomorphe à l'espace vectoriel  $(Z^n)^\#$  où  $(\Lambda Z, d)$  désigne le modèle bigradué de H. Halperin et Stasheff établissent alors la formule suivante :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (\dim H^p) t^p = \prod_{r=2}^{\infty} (1-(-1)^r t^r)^{-\sum_{p+q=r} (-1)^q \dim Z_p^q}$$

d'où l'on peut tirer une approximation du rayon de convergence  $R$  de  $H_*(\Omega X; Q)$ .

$$R \leq \inf \{ |z_i| \mid z_i \text{ parcourt les zéros de la série de Poincaré de } X \}. \quad [F-T] .$$

En particulier, si  $X$  est de  $\dim n$ , alors

$$R \leq [\dim H^n(X; Q)]^{-1/n}$$

VI - HOMOTOPIE DES ESPACES  $\pi$ -FORMELS DE CATÉGORIE FINIE

Peu de choses connues, citons seulement :

PROPOSITION.- Si  $X$  est un espace  $\pi$ -formel de catégorie finie et si  $\alpha \in \pi_{2X}(X)$  est non nul, alors  $[\alpha, \alpha]$  est aussi non nul.

VII - LES  $\epsilon_i$

Notons  $\epsilon_i = \dim Z_i$

$$\epsilon_0 = \dim Z_0 = \dim m/m^2 .$$

$$\epsilon_1 = \dim Z_1 = \dim H_1(H \otimes \Lambda \bar{Z}_0) .$$

Les résultats principaux actuellement connus sur les  $\epsilon_i$  sont les suivants :

PROPOSITION 1.- [F-H]

Si  $X$  est un espace formel et si  $\pi_*(X) \otimes Q < \infty$ , alors  $\epsilon_i = 0$  pour  $i \geq 2$ . Autrement dit,  $H^*(X; Q)$  est le quotient d'une algèbre libre par une suite régulière de relations.

PROPOSITION 2.- [Koszul]  $\epsilon_2 = 0 \implies \epsilon_i = 0 \quad i \geq 2 .$

PROPOSITION 3.- Si  $H = H^{\text{pair}}$  et si  $\epsilon_{2i+1} = 0$  pour un  $i \geq 1$ , alors  $\epsilon_{2i} = 0$ .  
En particulier  $\epsilon_3 = 0 \implies \epsilon_2 = 0$ .

PROPOSITION 4.- ([F-T]) Si  $\epsilon_2 \neq 0$ , alors il n'existe qu'un nombre fini d' $\epsilon_i$ -nuls.

Conjecture : Si un  $\epsilon_i = 0 \quad i > 2$ , alors  $\epsilon_i = 0$  pour  $i \geq 2$ .

Cette conjecture est équivalente à dire que l'application  $p : Z^{\#} \rightarrow (Z_0 \otimes Z_1)^{\#}$  est injective sur le sous-groupe des éléments de Gottlieb.

Une conjecture plus forte (Jacobson [Ja]) veut que  $p$  soit injective sur le centre.

Problème dual. Soit  $(L(V), d)$  le modèle bigradué d'une algèbre de Lie  $\pi$ .

Notons  $\varepsilon_i = \dim V_i$ . Il peut se faire que  $\varepsilon_n \neq 0$  et  $\varepsilon_i = 0$   $i > n$ ,  $n$  arbitrairement grand et dans ce cas  $\varepsilon_j \neq 0$  pour  $j \leq n$ .

Question : si  $\varepsilon_2 = 0$  est-ce que  $\varepsilon_i = 0$   $i > 2$  ?

VIII - ALGÈBRES A DUALITÉ DE POINCARÉ

L'existence de la dualité de Poincaré sur la cohomologie d'un espace augmente le caractère formel et  $\pi$ -formel de cet espace. Nous n'en donnerons pour preuve que les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. [St] (Formalité de l'application d'attachement).

a) Si X et Y sont deux espaces de dimension n vérifiant la dualité de Poincaré, si  $X^{<n}$  et  $Y^{<n}$  ont même type d'homotopie, alors il en est de même de X et de Y.

b) Soit  $(\mathbb{L}(V), d)$  le modèle de Quillen d'un espace à dualité de Poincaré, alors la différentielle du générateur de degré maximal est quadratique.

COROLLAIRE.- Si X est une variété de dimension n et si  $X^{<n}$  est formel, alors X est formel.

THÉORÈME 2. ( $\pi$ -formalité de l'application d'attachement). (\*)

Si X est un espace formel à dualité de Poincaré, si  $\dim m/m^2 > 1$  ( $m = H^+(X; Q)$ ), et si  $f : S^{n-1} \rightarrow X'$  est l'application d'attachement de la classe fondamentale ( $X' = X^{<n}$ ), alors :

$$1) \pi_*(X) = \pi_*(X') / (f)$$

$$2) \pi_*(X') = \pi_*(X) * \pi_*(S^{n-1}) \text{ comme espace vectoriel gradué.}$$

Remarques : 1) Ce théorème fournit un exemple de "meutre parfait" au sens vu au § 1.

2)  $\pi_*(X')$  contient toujours une sous-algèbre de Lie libre.

COROLLAIRE 1.- Si  $\dim m/m^2 > 1$  et si  $X'$  est formel et  $\pi$ -formel, alors X est formel et  $\pi$ -formel.

COROLLAIRE 2.- Si X et Y sont deux variétés formelles et  $\pi$ -formelles, alors il en est de même de leur somme connexe.

COROLLAIRE 3.- [M-N] Les variétés m-connexes de dimension  $\leq 3m+1$  sont  $\pi$ -formelles.

-----  
(\*) cf. aussi Avramov conf. ibid.

COROLLAIRE 4.-  $P(H_* \Omega X', t) = P(H_* \Omega X, t) \cdot [1 - t^{n-2} P(H_* \Omega X, t)]^{-1}$  .

Ce corollaire 4 permet de calculer facilement  $P(H_* \Omega X, t)$  quand  $X$  est une intersection complète de  $r$  hypersurfaces dans  $\mathbb{C}^{n+r}$  . En effet dans ce cas  $X^{<2n} \simeq \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n \bigvee p^{n-1}(\mathbb{C})$  . ([Ne] [Ba]).

Démonstration du théorème : Dans [Av], Avramov montre que si  $X$  est un espace formel, si  $\dim m/m^2 > 1$  et si  $H(X; Q) = H^{\text{pair}}(X; Q)$  vérifie la dualité de Poincaré, alors :

$$H_*(\Omega X') = H_*(\Omega X) \otimes T(s^{n-2} H_* \Omega X) \text{ .}$$

(on montre facilement que l'hypothèse  $H = H^{\text{pair}}$  peut être supprimée).

Il en résulte que la suite spectrale d'homotopie rationnelle de la cofibration  $S^{n-1} \rightarrow X' \rightarrow X$  collapse au terme  $E_2$  et donc que  $\pi_*(X') \otimes Q \rightarrow \pi_*(X) \otimes Q$  est surjectif.

Problème : L'hypothèse de formalité dans ce théorème 2 peut-elle être enlevée ?

BIBLIOGRAPHIE

- [An] ANICK D. Non commutative graded algebras and their Hilbert series. J. of algebra 78 (1982), 120-140.
- [Av] AVRANOV L. et LEVIN G. Factoring out the socle of a gorenstein ring. Preprint Stoklhom n°14 (1977)
- [Ba] BABENKO I.K. On real homotopy properties of complete intersections (Math. U.S.S.R. Izvestija - vol 15 (1980) n°2).
- [Bar] BARR M. Harrison homology, Hochschild homology and triples. J. of Algebra 8, 314-323 (1968).
- [B-L] BAUES H. et LEMAIRE J.M. Minimal models in homotopy theory. Math. Ann. 225, 219-242 (1977).
- [D] DELIGNE P, GRIFFITTS P., MORGAN J. et SULLIVAN D. Real homotopy theory of Kähler manifolds. Inventiones Math. 29, 245-274 (1975).
- [F1] FELIX Y. Dénombrément des types de  $k$ -homotopie. Théorie de la déformation. Mémoire n°3 de la Société Math. de France (1981).
- [F2] FELIX Y. Modèles bifiltrés : une plaque tournante en homotopie rationnelle. Can J of Math (1982).
- [F-H] FELIX Y et HALPERIN S. Formal spaces with finite dimensional rational homotopy. Trans. A.M.S. 270 (1982), 575-588.
- [F-T] FELIX Y et THOMAS J.C. The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces. Invent. Math. 68 (1982), 257-274.
- [Ge] GERSTENHALER M. The cohomology structure of an associative ring. Annals of Math. Vol 78, n°2 (1963) 267-288.
- [Ha] HALPERIN S. Lectures on minimal models. Publication interne - Lille n° 111 (1977).
- [H-S] HALPERIN S. et STASHEFF J. Obstructions to homotopy equivalences. Advances in Math 32 (1979), 233-279.
- [Ha] HARRISON D. Commutative algebras and cohomology. Trans. Amer. Math. Soc 104 (1962) 191-204.
- [J] JACOBSON C. On local flat homomorphisms and the Yoneda Ext-algebra of the fibre (publication interne Stockholm n°8 (1982)).
- [Jo] JOZEFIAK T. Tate resolutions for commutative graded algebras over a local ring. Fund Math 74 (1972) 209-231.
- [La] LABUTE J. Algèbres de Lie et pro- $p$ -groupes définis par une seule relation. Inventiones math. 4 - 142-158 (1967).
- [Le] LEMAIRE J.M. "Autopie d'un meurtre" dans l'homologie d'une algèbre de chaînes. Ann. scient. Ec. norm. sup. 11 (1978) 93-100.
- [L-S] LEMAIRE J.M. et SIRGRIST F. Dénombrément de types d'homotopie rationnelle. C.R. Acad. Sc. Paris 287 (1978) Série A - 109-112.

- [Lo] LÖFWALL C. on the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. Publication interne n°5 (1976) Stockholm.
- [M] MILLER T. On the formality of  $(k-1)$  connected compact manifolds of dimensional less than or equal to  $4k-2$ . Ill. J. of Math. 23 (1979) 253-258.
- [M-N] MILLER T. et NEISENDORFER J. Formal and coformal spaces . Ill. J. of Math 22 (1978) 565-580.
- [N] NEISENDORFER J. The rational homotopy groups of complete intersections. Ill. J. of Math. 23 (1979) 175-182.
- [Ou] OUTILI A. Thèse de 3ème cycle Nice (1978).
- [Pa] PAPADIMA S. A rational classification for spaces satisfying Poincaré duality. Preprint series n°73 (1981) Bucarest.
- [Pr] PRIDY S. Koszul resolutions. Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 39-60.
- [Q] QUILLEN D. Rational homotopy theory. Ann. of Math. 90 (1969) 205-295.
- [R] ROOS J.E. Relations between the Poincaré-Betti series of loop spaces and of local rings. Preprint n°8 (1978) Stockholm.
- [S-S] SCHLESSINGER M. et STASHEFF J. Deformation theory and rational homotopy type. A paraître Publ. Sci. I.H.E.S.
- [Sh] SHIGA M. Rational homotopy type and self maps. J. Math. Soc. Japan - Vol 31 n°3 (1979), 427-434.
- [St] STASHEFF J. Rational Poincaré duality spaces (preprint 1979).
- [Su] SULLIVAN D. Infinitesimal computations in topology. Publ. I.H.E.S. 47 (1977) 269-331.
- [Ta] TANRÉ D. Modèles de Chen, Quillen, Sullivan et applications aux fibrations de Serre. Thèse Lille (1982).