

Astérisque

MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

**Sur la croissance des nombres de Betti de l'espace
des lacets libres sur un espace donné**

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 344-348

http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__344_0

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CROISSANCE DES NOMBRES DE BETTI
DE L'ESPACE DES LACETS LIBRES SUR UN ESPACE DONNÉ

par

Micheline VIGUÉ-POIRRIER

Tous les espaces topologiques considérés sont l -connexes et tels que, pour tout $n \geq 0$, l'espace vectoriel $\dim H^n(., Q)$ soit de dimension finie, ceci implique que $\Pi_n(.) \otimes Q$ est aussi de dimension finie pour tout n .

Si X est un tel espace, on notera ΩX l'espace des lacets d'origine fixée et X^{S^1} l'espace des lacets libres muni de la topologie compacte ouverte. On note $b_i(X^{S^1}) = \dim H^i(X^{S^1}, Q)$ le i ème nombre de Betti de X^{S^1} .

Rappelons que l'application $p : X^{S^1} \rightarrow X$ qui, à un lacet, associe son origine, est une fibration de fibre ΩX .

Beaucoup de problèmes de géométrie différentielle ont une formulation équivalente en utilisant le langage de l'homotopie rationnelle ; ce qui rend d'autant plus intéressant l'étude des nombres de Betti de X^{S^1} , à l'aide de l'homotopie rationnelle.

Un des problèmes les plus étudiés en géométrie est le suivant : "Est-ce que sur une variété riemannienne fermée l -connexe V , il existe une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes ?".

En 1969, Gromoll et Meyer [G-M] démontrent que si les nombres de Betti de V^{S^1} ne sont pas bornés, alors il existe sur V une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes.

Plusieurs années plus tard, utilisant la théorie du modèle minimal de Sullivan, [Su], Sullivan et Vigué démontrèrent le théorème suivant :

THÉOREME [S-V] : Soit X un espace l -connexe, tel que $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) les nombres de Betti de X^{S^1} ne sont pas bornés.
- (2) $\dim \sum_{i \geq 1} \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \geq 2$
- (3) l'algèbre $H^*(X, \mathbb{Q})$ ne peut pas être engendrée par un générateur et $H^*(X, \mathbb{Q}) \neq \mathbb{Q}$.

Un second problème intéressant en géométrie est de connaître le nombre de géodésiques fermées géométriquement distinctes de longueur $< n$ (n entier fixé) sur une variété V donnée.

Dans [Gr], Gromov dit que le nombre de telles géodésiques de longueur $< n$ est minoré par $C/n \sum_{i=1}^n b_i(V^{S^1})$ où C est une constante ; (si V est munie d'une métrique "bumpy") ; ceci nous amène à étudier la série de Poincaré $S_{X^{S^1}}(T) = \sum_p \dim H^p(X^{S^1}) T^p$ et à la comparer à $S_X(T) = \sum_p \dim H^p(X, \mathbb{Q}) T^p$, $S_{\Omega X} = \sum_p \dim H^p(\Omega X, \mathbb{Q}) T^p$, $S_{\Pi X} = \sum_p \dim \Pi_p(X) \otimes \mathbb{Q} T^p$, pour un espace X quelconque.

Le théorème suivant montre qu'en général, l'étude de la fibration $\Omega X \xrightarrow{j} X^{S^1} \xrightarrow{p} X$ ne nous donne pas de renseignements sur $S_{X^{S^1}}$.

THÉOREME [V-1] : Pour le fibré $\Omega X \xrightarrow{j} X^{S^1} \xrightarrow{p} X$, on a les équivalences :

- (1) $H^*(X, \mathbb{Q})$ est une algèbre graduée commutative libre
- (2) $j^* : H^*(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \rightarrow H(\Omega X, \mathbb{Q})$ est surjective
- (3) la suite spectrale de Serre du fibré vérifie $d_i = 0, \forall i \geq 2$
- (4) $S_{X^{S^1}}(T) = S_X(T) \cdot S_{\Omega X}(T)$.

Ceci montre que pour une variété compacte V de dimension n , telle que $H^*(V, \mathbb{R})$ ne soit pas une algèbre commutative libre, les nombres de Betti $b_i(V^{S^1})$ sont inférieurs (et non tous égaux) aux coefficients de la série formelle $P(T) \cdot S_{\Omega V}(T)$ où $P(T) = \sum_{p=0}^n \dim H^p(V) T^p$ est un polynôme (réciproque) de degré n .

Les travaux de Félix et Halperin [F-H] montrent que les espaces X l -connexes tels que $\dim H^*(X) < \infty$ se divisent en deux familles disjointes :

I) Espaces tels que $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, appelés elliptiques ; alors
 $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \geq q = \sum_j \dim \Pi_{2j}(X) \otimes \mathbb{Q}$, $S_{\Omega X}$ est une fraction rationnelle, et dans le développement en série formelle de $[1/(1-T)] \cdot S_{\Omega X}$ le coefficient de T^n croît comme n^p .

II) Espaces tels que $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \infty$, appelés hyperboliques ; alors les séries
 $S_{\Omega X}$ et $S_{\Pi X} = \sum_p \dim \Pi_p(X) \otimes \mathbb{Q} T^p$ croissent exponentiellement, i.e. il existe

$C_1 \geq C_2 > 1$ et un entier N tels que $\forall n \geq N$ le coefficient de T^n dans $[1/(1-T)] \cdot S_{\Omega X}$ est minoré par C_2^n et majoré par C_1^n .

Nous formulons alors la conjecture suivante pour étudier le problème énoncé dans [Gr].

CONJECTURE : Les nombres de Betti de X^{S^1} croissent comme ceux de ΩX .

Voici les résultats déjà obtenus sur cette conjecture.

I) Espace elliptique :

Remarque : Le théorème de [S-V] cité plus haut démontre la conjecture pour tout espace tel que $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \leq 2$.

THÉORÈME I.1 : Soit X un espace tel que $\dim H^*(X) < \infty$, pur, elliptique et soit $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$, alors il existe une constante A et un entier N tels que $\forall n \geq N$

$$\sum_{i=0}^n \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \geq An^p.$$

Définition : Un espace est dit pur s'il possède un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda Z, d)$ ayant les propriétés suivantes : $d|_{Z^{\text{pair}}} = 0$, $d(Z^{\text{impair}}) \subset \Lambda Z^{\text{pair}}$.

Exemples : S^k , $k \geq 2$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, G/H où G est un groupe de Lie compact et H un sous-groupe fermé, ... ainsi que les produits d'espaces purs sont des espaces purs.

COROLLAIRE I.2 : Soit X un espace tel que $\dim H^*(X) < \infty$, $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, $\chi_{\Pi} = \sum_i (-1)^i \dim \Pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$, alors il existe une constante A et un entier N tels que $\forall n \geq N$, $\sum_{i=0}^n \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \geq An^p$ si $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Le corollaire découle du théorème I.1 et d'un théorème de Halperin [H] qui dit qu'un tel espace est pur.

Le théorème I.1 résulte du théorème suivant :

THÉORÈME I.3 : Soit X un espace tel que $\dim H^*(X) < \infty$, $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, supposons que X possède un modèle minimal $(\Lambda Z, d)$ tel que $dZ \subset Z^{\text{pair}} \cdot \Lambda Z$, alors $\exists A > 0$ et un entier N tels que $\forall n \geq N$ $\sum_{i=0}^n \dim H^i(X^{S^1}, \mathbb{Q}) \geq An^p$, où $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

La démonstration de ce théorème utilise des méthodes voisines de celles utilisées pour démontrer le théorème de [S-V].

Le contre-exemple suivant montre que les hypothèses du théorème I.3 ne peuvent être affaiblies.

CONTRE-EXEMPLE I.4 : Soit $(\Lambda Z, d) = \Lambda(x, y, z, d)$, $\deg x=5$, $\deg y=3$, $\deg z=3$, $dy=dz=0$, $dx=yz$, modèle minimal d'un espace X . On montre que $b_n(X^{S^1})$ est un polynôme de degré 1 en n .

II) Espaces hyperboliques formels (i.e. ayant même modèle minimal que leur algèbre de cohomologie).

Les résultats obtenus utilisent le théorème préliminaire :

THÉORÈME II.0 : Soit X un espace 1-connexe formel tel que $H = \dim H^*(X, \mathbb{Q}) < \infty$. Soient $(d_1, \dots, d_p)$ les degrés d'une base de l'espace vectoriel H^+/H^{+2} et $(e_2, \dots, e_q)$ les degrés d'une base de l'espace vectoriel gradué H^{+2} , on a pour tout $n \geq 1$,

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^n(X^{S^1}) \geq \sum_{i=1}^p \dim \Pi_{n-d_i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} - \sum_{i=1}^q \dim \Pi_{n-e_i+2}(X) \otimes \mathbb{Q} - \dim \Pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

La démonstration de ce théorème utilise le calcul du modèle minimal de X^{S^1} fait dans [S-V] et la théorie du modèle minimal bigradué de $[H-S]$.

THEOREME II.1 : Soit $X = \bigvee_{i=1}^p S^{k+1}$ le bouquet de p sphères ($p \geq 2$) de même dimension $k+1 \geq 2$. Alors la série $S_{X^{S^1}}$ est à croissance exponentielle.

Ce théorème se démontre uniquement à l'aide du théorème II.0, de la formule de Hilton-Steer $[S_{\Omega X}(T)]^{-1} = 1 - pT^k$ et du fait que

$$[S_{\Omega X}(T)]^{-1} = \prod_n (1 - (-1)^n T^n)^{(-1)^n \rho_{n+1}}$$

où $\rho_n = \dim \Pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$.

THÉORÈME II.2 : Soit X une intersection complète de r hypersurfaces dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r+n}$ ($n \geq 2$, $r \geq 1$), telle que $|X-n-1| \geq 2$ où χ est la caractéristique d'Euler alors la série $S_{X^{S^1}}$ est à croissance exponentielle.

La démonstration utilise le théorème II.0, les calculs de Babenko dans [Ba 1] et [Ba 2] qui donnent une expression de $\dim \Pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ en fonction des fonctions symétriques du polynôme $z^{2n-1} - (-1)^n (\chi - n - 1) z^{n-1} (1+z) + 1$.

THÉORÈME II.3 : Soit $X = (S^n \times S^n) \# (S^n \times S^n) \# \dots \# (S^n \times S^n)$ somme connexe de g copies de $S^n \times S^n$ où $g \geq 2$ et n un entier impair, $n \geq 3$. Alors la série de Poincaré $S_{X^{S^1}}$ est à croissance exponentielle. Plus précisément $\forall p \geq 2$, il existe $\phi_p \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $\dim H^{p(n-1)+n}(X^{S^1}) \geq \phi_p(g)$ et le terme de plus haut degré de ϕ_p est $(2x)^{p+1}/p(p+1)$.

Preuve : Elle résulte du théorème II.O, des calculs de Babenko [Ba 1] et de l'étude de la cohomologie de X faite dans [F-H].

Ces résultats sont détaillés dans [V 2].

B I B L I O G R A P H I E

- [Ba 1] Babenko I.K. On analytic properties of the Poincare Serie of loop spaces. Math. Zametki 27, 751-765.
- [Ba 2] Babenko I.K. On real homotopy properties of complete intersections ; Math USSR. Izvestijr Vol. 15 (1980).
- [F-H] Félix Y., Halperin S. Rational L.S. category and its applications. à paraître aux Trans. am. math. soc.
- [G-M] Gromoll D., Meyer W. Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds. J. diff. geom. 3 (1969) 493-510.
- [Gr] Gromov M. Homotopical effects of dialation. J. diff. geom. 13 (1978) 303-310.
- [H] Halperin S. Finiteness in minimal models. Trans. am. math. soc. 230 (1977) 173-199.
- [H-S] Halperin S., Stasheff J. Obstructions to homotopy equivalences. Advances in Math. 32 (1979) 233-279.
- [Su] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology. I.H.E.S. Publ. Math. 47 (1978) 269-331.
- [S-V] Sullivan D., Vigué-Poirrier M. The homology theory of the closed geodesic problem. J. diff. geom. 11 (1976) 633-644.
- [V-1] Vigué-Poirrier M. Le fibré de l'espace des lacets libres n'est pas en général T.N.C.Z. à paraître aux Math. Zeitschrift.
- [V-2] Vigué-Poirrier M. Homotopie rationnelle et croissance du nombre de géodésiques fermées. Preprint Université de Lille (1982).