Astérisque

JEAN-CLAUDE THOMAS

Algèbre de Lie de dérivations et fibration.

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 303-311
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__303_0>

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ALGÈBRE DE LIE DE DÉRIVATIONS ET FIBRATION

par

Jean-Claude THOMAS

Dans un papier récent [F.H.T.], en collaboration avec Y. Félix et S. Halperin, nous montrons que tout espace 0-connexe S vérifiant la condition, $\dim H^i(S,\mathbb{Q}) < +\infty$, admet un modèle dans la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées 0-réduites au sens de Quillen [Q]. Baues et Lemaire avaient établi ce résultat lorsque S est 1-connexe [B.L], à l'aide des foncteurs adjoints L_* et C_* introduits par Quillen dans l'appendice B de [Q].

Nous procédons de manière différente, en construisant une certaine algèbre de Lie de dérivations ∇ sur une algèbre différentielle graduée acyclique.

Le but de cet article est de montrer comment la composition de deux fibrations fait apparaître une algèbre de Lie de dérivations semblable à ∇ qui est reliée à la notion de classifiant algébrique au sens de Sullivan [Su]. Le cas particulier de la fibration $\Omega B \longrightarrow B^I \longrightarrow B \times B$, des chemins libres sur B, nous redonne ∇.

I - NOTATIONS ET RAPPELS

Dans ce texte un espace S est un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe et vérifiant : $\dim H^i(S;\mathbb{Q}) < \infty$ pour tout $i \geq 0$.

Les espaces vectoriels, algèbres, algèbres de Lie, ... sont sur le corps $\mathbb{k}$, supposé de caractéristique zéro. Soit $A = \bigoplus_{i\geq 0} A^i$ une algèbre commutative graduée (a.c.g). Si $a \in A^i$, on note $|a| = i$ et alors $ab = (-1)^{|a||b|} b.a$.

Un homomorphisme $\varepsilon_A : A \longrightarrow \mathbb{k}$ tel que $\varepsilon(1_A) = 1_{\mathbb{k}}$ est appelé une augmentation de A. Une dérivation de degré p sur A est une application linéaire vérifiant $\theta(A^i) \subset A^{i+p}$ et $\theta(ab) = \theta(a)\, b + (-1)^{|a|} a\, \theta(b)$. Une différentielle sur A, notée

d_A est une dérivation de degré $+1$ telle que $d_A d_A = 0$. Nous désignons par (A, d_A) une algèbre différentielle graduée commutative et augmentée, en abrégé (a.d.g.c).

<u>Modèles et Fibrations</u> :

Soit A, le foncteur contravariant des formes P-L à coefficients polynômiaux [Su], de source la catégorie des espaces et à valeurs dans la catégorie des a.d.g.c. ($S \rightsquigarrow (A(S), d_S)$ tel que $H(A(S), d_S) \cong H^*(S, \mathbb{k})$, ce dernier isomorphisme est naturel).

A chaque suite de fonctions continues pointées

$$(*) \qquad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B \quad , \quad H^0(B, \mathbb{Q}) \cong H^0(E, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{k}$$

(en particulier à chaque fibration), on associe un diagramme commutatif [Su], [Ha], unique à isomorphisme près dans la catégorie des a.d.g.c

$$\text{(I-I)} \qquad \begin{tikzcd} (A(B), d_B) \arrow[r, "A(p)"] & (A(E), d_E) \arrow[r, "A(j)"] & (A(F), d_F) \\ (A, d_A) \arrow[u, "m"'] \arrow[r, "\iota"] & (A \otimes \Lambda X, d) \arrow[u, "\psi"'] \arrow[r, "\rho"] & (\Lambda X, \bar{d}) \arrow[u, "\bar{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

où

i) (A, d_A) est une a.d.g.c telle que $m^* : H(A, d_A) \to H(A(B), d_B) \cong H^*(B, \mathbb{k})$ soit un isomorphisme.

ii) ΛX désigne l'a.c.g. libre engendrée par $X = \bigoplus_{i=0} X^i$.

iii) $\iota(a) = a \otimes 1$, $\rho = \varepsilon_A \otimes id_{\Lambda X}$.

iv) $\psi^* : H(A \otimes \Lambda X, d) \to H(A(E), d_E) \cong H^*(E, \mathbb{k})$ est un isomorphisme.

v) Il existe une base homogène $(x_\alpha)_{\alpha \in K}$ de X indexée par un ensemble bien ordonné K telle que

$$dx_\alpha \in A \otimes \Lambda X_{<\alpha}$$

lorsque $X_{<\alpha}$ désigne l'espace vectoriel gradué engendré par les x_β avec $\beta < \alpha$.

La suite $E : (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (A \otimes \Lambda X, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda X, \bar{d})$ est appelée une K.S-extension de base (A, d_A) et de fibre $(\Lambda X, \bar{d})$. Le couple (E, ψ) est un K.S-modèle de $(*)$. La famille $(x_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une K.S-base.

S'il existe une K.S-base vérifiant la condition :

$$(i < j,\ x_\alpha \in X^i,\ x_\beta \in X^j) \Longrightarrow (\alpha < \beta)$$

pour tout $\alpha, \beta \in K$ et tout degré i, j alors E est dite K.S-minimale.

Lorsque dans (I-1), $\bar{\psi}^*$ est un isomorphisme, la suite (*) est appelée une fibration rationnelle.

Lorsque B est un point, alors (A, d_A) peut être choisie égale à $(\mathbb{k},0)$ et $(\mathbb{k} \otimes \Lambda X, d) \cong (\Lambda X, d)$ est un K.S-modèle (minimal) de $E = F$. En particulier, lorsque (*) est une fibration rationnelle alors $(\Lambda X, \bar{d})$ est un K.S-modèle (minimal) de F.

<u>Dérivations et fibrations</u> :

Soit (A, d_A) une a.d.g.c (augmentée) on note, si $p > 0$ $\mathrm{Der}_p(A, d_A)$ l'espace vectoriel des dérivations de degré $-p$ et $\mathrm{Der}_o(A, d_A)$ l'espace vectoriel des dérivations θ de degré 0 telles que $d_A\, \theta + \theta\, d_A = 0$. Posons

$$\mathrm{Der}(A, d_A) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{Der}_p(A, d_A)$$
$$[\theta, \theta'] = \theta\theta' - (-1)^{pq}\, \theta'\, \theta, \quad \partial\theta = d_A\, \theta + (-1)^p\, \theta\, d_A = [d_A, \theta]$$

avec $\theta \in \mathrm{Der}_p(A, d_A)$ et $\theta' \in \mathrm{Der}_q(A, d_A)$.

$\mathrm{Der}(A, d_A)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée (a.ℓ.d.g).

Considérons une K.S-extension $E : (A, d_A) \xhookrightarrow{\iota} (A \otimes \Lambda X, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda X, \bar{d})$ de base une a.d.g.c connexe $(A^o = \mathbb{k})$. Notons $(a_\nu)_\nu$, une base de $A^+ = \bigoplus_{i>0} A^i$. La différentielle d définit alors les éléments $\theta^\nu \in \mathrm{Der}(\Lambda X, \bar{d})$, lorsque l'on pose :

$$\text{(I-2)} \qquad d\Phi = 1 \otimes \bar{d}\Phi + \sum_\nu a_\nu \otimes \theta^\nu(\Phi) , \qquad \Phi \in \Lambda X .$$

De la relation $d^2 = 0$, on tire :

$$\text{(I-3)} \qquad 0 = \sum_\nu d_A\, a_\nu + \sum_\nu (-1)^{|a_\nu|} a_\nu \otimes \partial\theta^\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} (-1)^{|a_\mu|} a_\mu \otimes a_\nu \otimes [\theta_\nu, \theta_\mu] .$$

<u>Classifiant des fibrations algébriques de fibre donné</u> :

Soit $L = \bigoplus_{i \geq 0} L_i$ une algèbre de Lie graduée. Si $a \in L^i$ on note $|a| = i$. Une différentielle sur L est une application linéaire de degré -1 telle que $\partial[a,b] = [\partial a, b] + (-1)^{|a|}\, [a, \partial b]$ et $\partial\partial = 0$.

(L,∂) note une algèbre de Lie différentielle graduée, en abrégé (a.ℓ.d.g.).

A chaque a.ℓ.d.g. (L,∂) , la construction de Koszul associe fonctoriellement une a.d.g.c., notée $C^*(L,\partial)$, en posant :

$$\mathrm{Hom}(L_i; \mathbb{k}) = \mathrm{Hom}^i(L, \mathbb{k}),\ \mathrm{Hom}(L, \mathbb{k}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Hom}^i(L, \mathbb{k})$$
$$(sL)_i = L_{i-1} ,\ C^r(L, \partial) = \bigoplus_{p+q} C^{p,q}(L,\partial)$$

où $C^{p,q}(L,\partial) \subset \mathrm{Hom}^{p+q}(\overset{p}{\otimes}\, sL;\ \mathbb{k})$ désigne le sous-espace des fonctions symétriques graduées. La différentielle $\delta = \delta_1 + \delta_2$ de $C^*(L,\partial)$ est donnée par les formules suivantes :

$$
\text{(I-4)} \qquad
\begin{aligned}
(\delta_1 f)(s\theta_1, \dots, s\theta_p) &= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{\sigma_i} f(s\theta_1, \dots, s\partial\theta_i, \dots, s\theta_p) \\
(\delta_2 f)(s\theta_o, \dots, s\theta_p) &= \sum_{i<j} (-1)^{\tau_{ij}} f(s[\theta_i, \theta_j], s\theta_o, \dots, \widehat{s\theta_i}, \dots, \widehat{s\theta_j}, \dots, s\theta_p)
\end{aligned}
$$

avec $\theta_i \in L$, $f \in C^{p,q}(L,\partial)$ (cf. [F.H.T.] pour plus de précision sur les signes). D'après [Su], l'application classifiante de la K.S-extension $E : (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (A \otimes \Lambda X, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda X, \bar{d})$, notée λ_E , est un homomorphisme d'a.d.g.c de $C^*(\mathrm{Der}(\Lambda X, \bar{d}))$ dans (A, d_A) définie, avec les notations de (I-2), par la formule :

$$
\text{(I-5)} \qquad
\begin{cases}
\lambda_E(f) = \displaystyle\sum_{\nu_1, \dots, \nu_p} a_{\nu_1} \dots a_{\nu_p} f(s\theta^{\nu_1}, \dots, s\theta^{\nu_p}) \\[2ex]
f \in C^{p,q}(\mathrm{Der}(\Lambda X, \bar{d}))\ , \quad \theta^{\mu_i} \in \mathrm{Der}(\Lambda X, \bar{d})\ , \quad a_\nu \in A\ .
\end{cases}
$$

II - COMPOSITION DE FIBRATIONS ET ALGÈBRE DE LIE DE DÉRIVATIONS

Considérons deux fibrations rationnelles

$$
(*) \quad F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B \qquad \text{et} \qquad (*') \quad F' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{p'} B' \ .
$$

Nous obtenons alors par image réciproque et composition le diagramme suivant commutatif .

$$
\text{(II-1)} \qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "j"'] & E'' \arrow[l, "p''"'] \arrow[r, dash, "j''"] \arrow[d, "\bar{j}"] & F' \arrow[d, equal] & (*'') \\
E \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, equal] & F' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "j''"] & (*') \\
B & E' \arrow[l, "\bar{p}"] & E'' \arrow[l, "\bar{j}"] & (\bar{*})
\end{tikzcd}
$$

Si on note E : $(A, d_A) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (A \otimes \Lambda X, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda X, \bar{d})$ (resp. $E'(A \otimes \Lambda X, d) \overset{\iota'}{\hookrightarrow} (A \otimes \Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}', d') \xrightarrow{\rho'} (\Lambda X', \bar{d}'))$ le K.S-modèle minimal de $(*)$ (resp. $(*')$) le diagramme (II-1) définit le diagramme commutatif

(II-2)

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, \bar{d}) \arrow[r, hook, "\iota''"] & (\Lambda X \otimes \Lambda X', D) \arrow[r, "\rho''"] & (\Lambda X', \bar{d}') & (E'') \\
(A \otimes \Lambda X, d) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, hook, "\iota'"] & (A \otimes \Lambda X \otimes \Lambda X', d') \arrow[u, "\bar{\rho}"] \arrow[r, "\rho'"] & (\Lambda X', \bar{d}') \arrow[u, equal] & (E') \\
(A, d_A) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, hook, "\bar{\iota}"] & (A \otimes \Lambda X \otimes \Lambda X', d') \arrow[u, equal] \arrow[r, "\bar{\rho}"] & (\Lambda X \otimes \Lambda X', D) \arrow[u, "\rho''"] & (\bar{E})
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)$, le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Der}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)$, constitué des dérivations ΛX-linéaires. $\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)$ est un sous a.ℓ.d.g de $\mathrm{Der}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)$. Notons i l'inclusion canonique.

<u>THÉORÈME</u> 1.- <u>Si</u> $\dim X^p < \infty$ <u>et</u> $\dim X'^p < \infty$ <u>pour tout</u> p , <u>alors les deux propositions suivantes sont équivalentes</u>.

i) <u>L'application classifiante</u> $\bar{\lambda} : C^*(\mathrm{Der}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)) \longrightarrow (A, d_A)$, <u>de la</u> K.S-<u>extension</u> $\bar{E}$, <u>se factorise à travers</u> $C^*(i)$.

ii) <u>La</u> K.S-<u>extension</u> E <u>est homotopiquement triviale</u> (<u>Il existe un isomorphisme d'a.d.g.c</u> ψ <u>de</u> $(A \otimes \Lambda X, d)$ <u>dans l'a.d.g.c. produit</u> $(A, d_A) \otimes (\Lambda X, \bar{d})$ <u>tel que</u> $\psi\iota = \iota$ <u>et</u> $\rho\psi = \rho$ [T]).

<u>Preuve</u> : a) Supposons que E est homotopiquement triviale. Quitte à composer avec ψ , on peut supposer que $dX \subset \Lambda X$. La formule (I.2) s'écrit alors,

$$d'\Phi = 1 \otimes D\Phi + \sum_{\mu} a_\nu \otimes \theta^\nu(\Phi) \ , \quad \Phi \in \Lambda X \otimes \Lambda X' \ , \ a_\nu \in A$$

avec , $\theta^\nu \in \mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda X')$. Posons

$$\lambda(f) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_p} a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_p} \ f(s\theta^{\nu_1}, \ldots, s\theta^{\nu_p})$$

La relation $d' \circ d' = 0$ (I.3) entraîne que λ est un homomorphisme d'a.d.g.c. De plus $\lambda\, C^*(i)(f) = \lambda(f \circ i) = \lambda(f)$ d'après (I.5).

b) Soit $\bar{E}_o : A \xhookrightarrow{\bar{\iota}} (A \otimes \Lambda X \otimes \Lambda X', \delta) \xrightarrow{\bar{\rho}} (\Lambda X', d')$ la K.S-extension image directe par $\bar{\lambda}$ de la fibration universelle de fibre $(\Lambda X', \bar{d})$

(II-3) $$\delta(\Phi) = \sum_{f,\nu} \bar{\lambda}(f)\ f(\theta^\nu) \otimes \theta^\nu(\Phi) \ , \quad \Phi \in \Lambda X \otimes \Lambda X'$$

et f parcourt une base homogène de $C^{1,*}(\mathrm{Der}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D))$, θ^ν parcourt une base homogène des dérivations de $\Lambda X \otimes \Lambda X'$ nulles sur $(\Lambda X \otimes \Lambda X')^{>|\Phi|}$ (cf. [Ta]).

Comme E et $\bar{E}_o$ ont la même application classifiante $\bar{\lambda}$, il existe un isomorphisme $\psi : (A \otimes \Lambda X \otimes \Lambda X', d') \longrightarrow (A \otimes \Lambda X \otimes \Lambda X', \delta)$ tel que $\psi\bar{\imath} = \bar{\imath}$ et $\bar{\rho}\psi = \bar{\rho}$. D'autre part, d'après (i), les θ^{ν} intervenant effectivement dans la formule (II-3), sont des éléments de $\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda X')$ ce qui entraîne que $\delta(\Lambda X) \subset \Lambda X$. La restriction de ψ à $A \otimes \Lambda X$ est un isomorphisme de $(A \otimes \Lambda X, d')$ sur $(A \otimes \Lambda X, \delta/_{A \otimes \Lambda X})$, d'où on déduit que E est homotopiquement triviale. ■

Remarque : Si on note ε, l'augmentation de ΛX , l'homomorphisme d'a.d.g.c. $\rho'' = \varepsilon \otimes 1 : (\Lambda X \otimes \Lambda X', D) \longrightarrow (\Lambda X', \bar{d}')$ induit une application linéaire $r : \mathrm{Der}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D) \longrightarrow \mathrm{Der}(\Lambda X', \bar{d}')$ dont la restriction à $\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)$ est un homomorphisme d'a.$\mathcal{L}$.d.g. L'homomorphisme λ du théorème 1 , rend commutatif le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, \bar{d}) & & C^*(\mathrm{Der}(\Lambda X', d')) \arrow[ll, "\lambda''"'] \arrow[d, "C^*(r)"] \arrow[dll, dashed, "\lambda'"'] \\
(A \otimes \Lambda X, d) \arrow[u, "\rho"] & & C^*(\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)) \arrow[dll, dashed, "\lambda"'] \\
(A, d_A) \arrow[u, "\imath"] & & C^*(\mathrm{Der}(\Lambda X \otimes \Lambda X', D)) \arrow[ll, "\bar{\lambda}"] \arrow[u, "C^*(i)"']
\end{tikzcd}$$

lorsque λ' (resp. λ'' , $\bar{\lambda}$) désigne l'application classifiante de E' (resp. E'' , $\bar{E}$).

III - LE CAS PARTICULIER DE LA FIBRATION DES CHEMINS LIBRES

Notons B^I , l'ensemble des chemins continus de B , muni de la topologie compacte-ouverte, ΩB le sous-espace fermé de B^I des lacets basés au point $b_o \in B$. Désignons par p, l'application continue de B^I dans $B \times B$ définie par

$$p(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)) \ , \quad \gamma \in B^I$$

alors $p^{-1}(b_o) = \Omega(B)$ et on a la fibration des chemins libres,

$$\Omega(B) \xhookrightarrow{j} B^I \xrightarrow{p} B \times B \ .$$

Calculons un K.S-modèle minimal de cette fibration.

Soit $(\Lambda X, d) \xrightarrow{m} (A(B), d_B)$ un K.S-modèle minimal de B et notons ([Ha]) $(\Lambda X, d)^I$ l'a.d.g.c. définie de la manière suivante :

$$(\Lambda X, d)^I = (\Lambda X \otimes \Lambda\bar{X} \otimes \Lambda\delta\bar{X},\ \delta)$$

est le produit de l'a.d.g.c. $(\Lambda X,\ d)$ et de l'a.d.g.c acyclique $(\Lambda\bar{X} \otimes \Lambda\delta\bar{X},\ \delta)$ avec $\bar{X}^p = X^{p+1}$, $\delta : \bar{X} \overset{\sim}{=} \delta\bar{X}$.

Une dérivation i de degré -1, est définie sur $\Lambda X \otimes \Lambda\bar{X} \otimes \Lambda\delta\bar{X}$ en posant $i(x) = \bar{x}$, $i(\bar{x}) = 0 = i(\delta\bar{x})$ pour $x \in X$. Alors $\theta = [\delta, i] = \delta i + i\delta$ est une dérivation de degré 0 sur $\Lambda X \otimes \Lambda\bar{X} \otimes \Lambda\delta\bar{X}$, localement nilpotente relativement à une K.S-base de $(\Lambda X, d)$ (cf. [Ha]). Par suite, $e^\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$ est un automorphisme unipotent de $\Lambda X \otimes \Lambda\bar{X} \otimes \Lambda\delta\bar{X}$.

Notons $\lambda_o : \Lambda X \longrightarrow (\Lambda X)^I$, l'inclusion naturelle et $\lambda_1 = e^\theta \lambda_o$

$\bar{\rho} : (\Lambda X)^I \longrightarrow \Lambda\bar{X}$ est défini par $\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}(\delta\bar{x}) = 0$, $\bar{\rho}(\bar{x}) = \bar{x}$.

On obtient alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X \otimes \Lambda X,\ d \otimes d) \arrow[r, "\lambda_o \otimes \lambda_1"] \arrow[d, "m \otimes m"] & (\Lambda X,\ d)^I \arrow[r, "\bar{\rho}"] \arrow[d, "\psi", "\sim"'] & (\Lambda\bar{X},\ 0) \arrow[d, "\bar{\psi}", "\sim"'] \\
(A(B \times B),\ d_{B\times B}) \arrow[r, "A(p)"'] & (A(B^I),\ d_{B^I}) \arrow[r, "A(j)"'] & (A(\Omega B),\ d_{\Omega B})
\end{tikzcd}$$

où ψ et $\bar{\psi}$ induisent des isomorphismes en cohomologie

$d \otimes d$ note abusivement la différentielle produit.

D'autre part, on définit un isomorphisme d'a.g.c.

$$\Psi : \Lambda X \otimes \Lambda X \otimes \Lambda\bar{X} \longrightarrow (\Lambda X,\ d)^I$$

en posant,

$$\Psi(\alpha \otimes \beta \otimes \bar{x}) = \lambda_o(\alpha)\, \lambda_1(\beta)\, (1 \otimes \bar{x} \otimes 1), \quad \alpha \in \Lambda X,\ \beta \in \Lambda X,\ \bar{x} \in \bar{X}$$

Notons $d' = \Psi^{-1}\delta\Psi$, d'où le diagramme commutatif dans la catégorie des a.d.g.c,

$$\begin{tikzcd}
 & (\Lambda X,\ d)^I \arrow[dr, "\bar{\rho}"] & \\
(\Lambda X \otimes \Lambda X,\ d \otimes d) \arrow[ur, "\lambda_o \otimes \lambda_1"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & (\Lambda\bar{X},\ 0) \\
 & \Lambda X \otimes \Lambda X \otimes \Lambda\bar{X} \arrow[uu, "\Psi"', "\cong"] \arrow[ur, "\rho'"'] &
\end{tikzcd}$$

Il résulte des définitions que la K.S-extension minimale

$E' : (\Lambda X \otimes \Lambda X,\ d \otimes d) \xhookrightarrow{\iota'} (\Lambda X \otimes \Lambda X \otimes \Lambda\bar{X},\ d) \xrightarrow{\rho'} (\Lambda\bar{X},\ 0)$ est un K.S-modèle minimal de la fibration des chemins libres et que cette fibration est rationnelle.

Le théorème 1, entraîne alors l'existence d'un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\lambda : C^*(\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D)) \longrightarrow (\Lambda X, d)$$

obtenu en factorisant l'application classifiante de $\bar{E}:(\Lambda X, d) \hookrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, d') \xrightarrow{\rho} (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D)$.

Dans [F.H.T.], en collaboration avec Y. Félix et S. Halperin nous montrons :

THÉORÈME 2.- Si $\dim X^i < \infty$ pour tout $i > 0$, alors λ induit un isomorphisme en cohomologie.

Supposons que $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.

Remarquons, que d'après [Su], $C^*(H_*(\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D))$ est un modèle minimal de B et que, si B est 1-connexe, $H_*(\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D)) \cong \pi(\Omega B) \otimes \mathbb{Q}$, en tant qu'algèbre de Lie graduée.

D'autre part, l'a.d.g.c. $(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1, D)$ est acyclique, par suite l'a.d.g.c. produit $(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1, D) \underset{\Lambda X}{\otimes} (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_2, D) \cong (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1 \otimes \Lambda \bar{X}_2, \hat{D})$ est un modèle de la fibre homotopique de ι : la projection $\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1 \otimes \Lambda \bar{X}_2 \longrightarrow \Lambda \bar{X}_2$ induit un isomorphisme en cohomologie.

L'inclusion naturelle $\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1, D) \hookrightarrow \mathrm{Der}_{\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_2}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1 \otimes \Lambda \bar{X}_2, \hat{D})$ définit une action de l'algèbre de Lie $H_*(\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1, D))$ sur $H(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1 \otimes \Lambda \bar{X}_2, \hat{D}) \cong \Lambda \bar{X}$. Supposons B 1-connexe, comme $\Lambda \bar{X} = H^*(\Omega B) = \mathrm{Hom}(H_*(\Omega B), \mathbb{Q})$ et que $H_*(\Omega B, \mathbb{Q}) \cong U(\pi(\Omega B) \otimes \mathbb{Q})$, il est alors naturel de conjecturer :

L'opération de $\mathrm{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, D)$ sur $(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}_1 \otimes \Lambda \bar{X}_2, \hat{D})$ décrite ci-dessus induit l'opération canonique de $\pi(\Omega B) \otimes \mathbb{Q}$ sur $H^*(\Omega B ; \mathbb{Q})$.

RÉFÉRENCES.

[B-L] BAUES H.-LEMAIRE J.M. - Minimal models in homotopy theory. Math. An 225, 219-242 (1977).

[F.H.T.] FELIX Y.- HALPERIN S.- THOMAS J.C.- Sur certaines algèbres de Lie de dérivations. Ann. Inst. Fourier 32 n° 4, 143-150 (1982).

[Ha] HALPERIN S. - Lectures on minimal models, Pub. Interne Lille n° 111 (1977).

[Qu] QUILLEN D.- Rational homotopy theory, Ann. of Math (2) 90, 205-295 (1969).

[Su] SULLIVAN D.- Infinitesimal computions in topology, Publ. I.H.E.S. 47, 269-331 (1977).

[Ta] TANRÉ D.- Fibration et classifiant. ibid.

[Th] THOMAS J.C.- Homotopie rationnelle des fibrés de Serre, Ann. de l'Institut Fourier 31 (3), 71-90 (1981).