

Astérisque

MOHAMMED SBAÏ

Cocatégorie rationnelle d'un espace topologique

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 288-291

http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__288_0

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COCATÉGORIE RATIONNELLE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

SBAÏ Mohammed

Dans toute la suite S sera un espace topologique, pointé, 1-connexe, à cohomologie rationnelle de type fini $(\mathbb{L}(U), \partial)$ le modèle minimal de Quillen de S . $(\Lambda Z, D)$ le modèle filtré de S .

I - DÉFINITIONS.

En dualisant (au sens Eckmann-Hilton) les deux définitions de $\text{Cat}_0(S)$ données par $[F-H]$ et $[L-S]$, nous obtenons deux définitions équivalentes de $\text{Cocat}_0(S)$.

1ère définition : $\text{Cocat}_0(S) \leq n \iff$ La projection canonique

$\pi : \mathbb{L}(U) \rightarrow \mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U)$ admet une rétraction homotopique

(i.e.) α étant un modèle de π , il existe β homomorphisme d'a.l.d.g. tel que :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{L}(U), \partial) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{L}(U) / \mathbb{L}^{>n}(U), \bar{\partial}) \\ & \searrow \alpha & \uparrow \approx \\ & & (\mathbb{L}(W), \partial') \end{array} \xrightarrow{\beta} (\mathbb{L}(U), \partial) .$$

$\beta \circ \alpha = \text{Id}_{\mathbb{L}(U)}$

2ème définition : $\text{Cocat}_0(S) \leq n \iff$ Il existe r homomorphisme d'a.d.g.c. tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda Z, D) & \xrightarrow{r} & (\Lambda Z_{<n}, D) \\ & \searrow \parallel & \downarrow i \\ & & (\Lambda Z, D) \end{array} \quad i_0 r = \text{Id}_{\Lambda Z} .$$

Exemples :

(1) $\text{Cocat}_0(S) = 1 \iff H^*(S, \mathbb{Q})$ est une a.g.c. libre.

(2) $\text{Cocat}_0(\mathbb{CP}^n) = \text{Cocat}_0(S^{2n}) = 2$ et plus généralement si S est formel :

$$\begin{aligned} \text{Cocat}_0(S) = 2 &\iff H^*(S, \mathbb{Q}) \text{ est une intersection complète} \\ &\iff \dim Z_2 = 0. \end{aligned}$$

(3) Dans l'exemple précédent l'hypothèse de formalité est nécessaire, en effet, l'espace coformal qui admet pour algèbre de Lie d'homotopie $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{L}^{(\alpha, \beta)} / \mathbb{L}^{\geq 3(\alpha, \beta)}$ avec $|\alpha| = |\beta| = 2$, n'est pas formel il est de $\text{Cocat}_0 = 2$ bien que $\dim Z_2 \neq 0$.

II - $\text{Cocat}_0(S)$ ET LES AUTRES INVARIANTS.

Comme dans le cas de $\text{Cat}_0(S)$, on peut approcher $\text{Cocat}_0(S)$ par des invariants en dualisant les invariants classiques : $e_0(S)$; "product length", dimension formelle de la cohomologie.

Définitions :

a) Soit une a.l.g. L et

$$L = L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots \supset L^{(p)} \supset \dots$$

sa suite centrale descendante, on définit :

$$\text{nil}(L) = \inf\{p/L^{(p+1)} = 0\}.$$

b) N = dimension formelle de $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ si $\pi_N(S) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ et $\pi_i(S) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour $i > N$.

c) La filtration en longueur des crochets, sur le modèle de Quillen $(\mathbb{L}(U), \partial)$ engendre une suite spectrale de deuxième quadrant convergente, elle est de terme $E_2 = \pi_*(\Omega S_f) \otimes \mathbb{Q} \iff \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$.

S_f désigne l'espace formel associé à S .

Posons alors $\varepsilon_0(S) = \sup\{p ; E^{-p,*} \neq 0\}$.

Remarquons que l'algèbre enveloppante de cette suite spectrale est la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de l'espace S

$$E_2 = \text{Tor}_{H_*(S)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \implies H_*(\Omega S, \mathbb{Q}).$$

PROPOSITION :

$\text{nil } \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} \leq \varepsilon_0(S) \leq \text{Cocat}_0(S) \leq \text{dimension formelle de } \pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}.$

si en outre S est formel ou coformel, on a :

$$\text{nil } \pi_*(\Omega S) \otimes Q = \varepsilon_0(S) = \text{Cocat}_0(S).$$

III - LIMITE DE LA DUALITÉ.

Le "mapping theorem" de FÉLIX-HALPERIN :

"Etant donné $f : S \rightarrow S'$ application continue telle que

$f_* : \pi_*(S) \otimes Q \rightarrow \pi_*(S') \otimes Q$ soit injectif, alors

$$\text{cat}_0(S) \leq \text{cat}_0(S'). "$$

n'admet aucun énoncé dual.

En effet, f^* étant l'homomorphisme induit en cohomologie rationnelle

$$f^* : H^*(S', Q) \rightarrow H^*(S, Q).$$

Nous avons les quatre situations suivantes :

f^* injectif	$\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}$	$\text{Cocat}_0(S) \leq \text{Cocat}_0(S')$	$P_1 : \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ $\text{Cocat}_0 = 2 \quad \text{Cocat}_0 = 1$ $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^6 \vee \mathbb{S}^6$ $\text{Cocat}_0 = 1 \quad \text{Cocat}_0 = \infty$ $\begin{array}{ccc} \wedge(x,y,z) & \xleftarrow{f^*} & [1,a,b] \\ x.y & \xleftarrow{\quad} & a \\ y.z & \xleftarrow{\quad} & b \end{array}$
		$\text{Cocat}_0(S) \geq \text{Cocat}_0(S')$	
f^* surjectif	$\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}$	$\text{Cocat}_0(S) \leq \text{Cocat}_0(S')$	$\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ $\text{Cocat}_0 = \quad \text{Cocat}_0 = 1$ $\mathbb{S}^5 \xrightarrow{f} (\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3) \times \mathbb{S}_x^5$ $\text{Cocat}_0 = 1 \quad \text{Cocat}_0 = \infty$ $\text{avec } [f] = [\alpha, \beta] + x.$
		$\text{Cocat}_0(S) \geq \text{Cocat}_0(S')$	

IV - PROBLÈMES OUVERTS.

1) montrer que $\text{Cocat}_0(S) = \text{Cocat}(S_Q) \leq \text{Cocat}(S)$ où S_Q et le Q -localisé de S et Cocat définie par Ganéa $[G]$.

2) Etudier le rapport entre $\text{Cocat}_0(S)$ et le nombre d'étages dans la décomposition de Postnikov de S_Q (c.f. $[I-S]$).

RÉFÉRENCES

- [F-H] Y. FÉLIX, S. HALPERIN - Rational L.S. categorie and its applications,
(A paraître, Trans. of A.M.S.).
- [G] T. GANÉA - Some problems on numerical homotopy invariants,
Springer Lecture Notes N° 249.
- [L-S] J.M. LEMAIRE et F. SIGRIST - Sur les invariants d'homotopie liés à la
L.S. catégorie, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 103-122.