Astérisque

A. LEGRAND

π_1 et d_2

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 234-237
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__234_0>

π_1 et d_2

A. LEGRAND

1) INTRODUCTION.

Nous avons comme but d'expliciter certaines actions du groupe fondamental de la base d'un fibré $X \to E \to V$ sur l'homologie ou l'homotopie de la fibre. Il s'agit d'actions intervenant dans les différentielles de suites spectrales, comme par exemple la suite spectrale de Serre [Se]

$$E^2_{p,q} = H_p(V, H_q(X)) \Longrightarrow H_*(E)$$

ou, pour E fibré en groupes, la suite spectrale de Shih généralisée, [Sh], [L].

$$E_2^{p,q} = H^p(V, \pi_{-q}(X)) \Longrightarrow \pi_*(\Gamma E)(p+q \leqslant 1)$$

Γ désignant le foncteur sections.

Dans ces formules, et dans la suite, lorsque le groupe fondamental de la base n'est pas nul, les groupes d'homologie et de cohomologie considérés sont à coefficients locaux.

2) Ext_π et Ext.

Considérons π un groupe discret et deux π-modules A et B. Alors $\mathrm{Hom}(A,B)$ et $\mathrm{Ext}(A,B)$ sont naturellement des π-modules.

Un argument de suite spectrale donne la relation suivante entre Ext^*_π et Ext^* (π en indice signifie que l'anneau de base est l'algèbre $\mathbb{Z}(\pi)$).

PROPOSITION 1. (Cartan). On a une longue suite exacte

$$(1) \ldots \to H^n(\pi, \mathrm{Hom}(A,B)) \to \mathrm{Ext}^n_\pi(A,B) \to H^{n-1}(\pi, \mathrm{Ext}(A,B)) \to H^{n+1}(\pi, \mathrm{Hom}(A,B) \to \ldots$$

Soient V topologique tel que $\pi_1(V) = \pi$ et L^* une résolution π-libre de A. Les morphismes naturels

$$(C_*(V) \otimes_\pi L_*) \otimes \mathrm{Hom}_\pi(L_*,B) \to C_*(V) \otimes_\pi B$$

$$\mathrm{Hom}_\pi(C_*(V),L_*) \otimes \mathrm{Hom}_\pi(L_*,B) \to \mathrm{Hom}_\pi(C_*(V),B)$$

induisent les opérations de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. Soit V topologique tel que $\pi_1(V) = \pi$. On a des opérations

$$* : H_p(V,A) \otimes \mathrm{Ext}^q_\pi(A,B) \to H_{p-q}(V,B)$$

$$* : H^p(V,A) \otimes \mathrm{Ext}^q_\pi(A,B) \to H^{p+q}(V,B).$$

3) CLASSES D'UN π-MODULE DIFFÉRENTIEL GRADUÉ.

Considérons un π-module différentiel gradué (C_*,d) d étant de degré -1. Soient B_* , Z_* , H_* les groupes bord, cycle et homologie de (C_*,d). On a deux suites exactes de π-modules.

(2) $$0 \to H_{q+1} \to C_{q+1}/B_{q+1} \xrightarrow{d} B_q \to 0$$

(3) $$0 \to B_q \to Z_q \longrightarrow H_q \to 0 .$$

DÉFINITION 1.- On appelle q^e classe secondaire du π-module (C_*,d) la classe $\xi^2_q \in \mathrm{Ext}^2_\pi(H_q,H_{q+1})$ définie par les suites exactes (2) et (3).

Donnons immédiatement une autre définition qu'on utilisera plus loin.

DÉFINITION 2. L'image $\xi^1_q \in H^1(\pi,\mathrm{Hom}(H_q,H_{q+1}))$ de la classe secondaire ξ^2_q par le morphisme donné par (1) est appelée q^e-classe primaire de (C_*,d).

REMARQUE 1. Si on utilise des notations cohomologiques (d de degré $+1$) la q^e-classe secondaire ξ^q_2 est dans $\mathrm{Ext}^2_\pi(H^q,H^{q-1})$ et la q^e-classe primaire est dans $H^1(\pi,\mathrm{Ext}(H^q,H^{q-1}))$.

4) APPLICATIONS.

a) Suite spectrale de Serre.

Soient π un groupe discret, X un π-espace et $X \to E \to V$ un fibré de groupe structural π. La classe de ce fibré est défini par $\theta_0 \in H^1(V,\pi) = H^1(\pi_1(V),\pi)$. Comme $C_*(X)$ est un π-module on a des classes secondaires $\xi^2_q \in \mathrm{Ext}^2_\pi(H_q(X),H_{q+1}(X))$.

En utilisant le théorème de E.H. Brown, [B], [M], on montre :

THOÉRÈME 1. La différentielle $d_2 : H_p(V,H_q(X)) \to H_{p-2}(V,H_{q+1}(X))$ de la suite spectrale de Serre de $X \to E \to V$ est donnée par

$$d_2(c) = C * \theta_0^* \xi_q^2$$

$[\theta_0^* \xi_q^2 \in \mathrm{Ext}^2_{\pi_1(V)}(H_q(X),H_{q+1}(X))]$.

INTERPRÉTATION. Par construction l'opération $*$ du théorème 1 est la composée des homomorphismes bords

$$H_p(V,H_q(X)) \xrightarrow{\partial_3} H_{p-1}(V,B_q(X)) \xrightarrow{\partial_2} H_{p-2}(V,H_{q+1}(X)).$$

∂_3 étant défini par (3) et ∂_2 par (2). Le théorème 1 signifie donc que dans le cas d'un groupe structural discret l'action du groupe fondamental de la base sur l'homologie de la fibre se "lit" sur les bords. Signalons également

COROLLAIRE. Si $\pi_1(V)$ est libre on a des opérations

$o : H_p(V,H_q(X)) \otimes H^1(\pi_1(V),\mathrm{Ext}(H_q(X),H_{q+1}(X))) \longrightarrow H_{p-2}(V,H_{q+1}(X))$

et la classe $\theta_0^* \xi_q^2$ est dans $H^1(\pi_1(V),\mathrm{Ext}(H_q(X),H_{q+1}(X)))$. On a alors

$$d_2(c) = c \circ \theta_0^* \xi^2$$

ce qui signifie que seule la "torsion" de $H_*(X)$ permet au groupe fondamental de la base de contribuer à la différentielle d_2.

b) Suite spectrale de Shih d'un fibré en groupes.

Si X est un groupe topologique, on sait [M] que son homotopie est l'homologie du complexe différentiel $S_*(X)$ où $S_q(X)$ et le groupe des q-simplexes singuliers de X (la structure de groupe est celle induite par celle de X). Si π est un groupe discret opérant additivement sur X (i.e. chaque élément de π définit un automorphisme de X), on a des classes secondaires $\eta_q^2 \in \mathrm{Ext}^2_\pi(\pi_q(X), \pi_{q+1}(X))$ et on peut montrer

THEOREME 1'. La différentielle $d_2 : H^p(V,\pi_q(X)) \to H^{p+2}(V,\pi_{q+1}(X))$ de la suite spectrale de Shih généralisée d'un fibré en groupes abéliens $X \to E \to V$ de groupe structural π discret (opérant additivement sur X) est donnée par

$$d_2(c) = c * \theta_0^* \eta_q^2$$

5) GROUPE STRUCTURAL QUELCONQUE.

Soit X topologique. Le complexe des chaînes singulières $C_*(X)$ étant libre, on a la suite exacte des coefficients universels.

$$(4) \quad 0 \to \mathrm{Ext}(H_q(X),H_{q+1}(X)) \to H^{q+1}(X,H_{q+1}(X)) \to \mathrm{Hom}(H_{q+1}(X),H_{q+1}(X)) \to 0$$

qui est une suite de π-module si X est un π-espace. Notons

$$\partial : H^0(\pi,\mathrm{Hom}(H_{q+1}(X),H_{q+1}(X))) \to H^1(\pi,\mathrm{Ext}(H_q(X),H_{q+1}(X)))$$

l'opérateur bord associé.

PROPOSITION 3. $\partial(1_{H_{q+1}(X)}) = \xi_q^1$

ξ_q^1 étant la q^e-classe primaire du π-espace X (cf. définition 2).

Si X est un G-espace (G groupe topologique quelconque) la suite (4) est une suite de $\pi_0(G)$-modules. On peut donc poser :

DÉFINITION 2'. On appelle q^e-classe primaire du G-espace X la classe

$$\xi_q^1 = \partial(1_{H_{q+1}}) \in H^1(\pi_0(G),\mathrm{Ext}(H_q(X),H_{q+1}(X))).$$

On obtient ainsi pour l'homologie des G-espaces des classes analogues aux invariants primaires d'Eilenberg introduit dans [L] dans le cadre de la cohomologie (par des méthodes essentiellement homotopiques). On a donc pour la suite spectrale de Serre en homologie, dans le cas non simplement connexe, un calcul de la différentielle similaire à celui donné dans [L].

RÉFÉRENCES

[B] : E.H. BROWN J.R. "Twisted tensor products" Ann. of Math., 69, (1959) 223-246.

[L] : A. LEGRAND. "Homotopie des espaces de sections" Lecture note 941, Springer (à paraître).

[M] J.P. MAY. "Simplicial objects in algebraic topology". Van Nostrand Math. studies (1967).

[Se] J.P. SERRE. "Homologie singulière des espaces fibrés". Ann. of Math. 54 (1951), 425-505.

[Sh] W. SHIH. Séminaire Cartan 1962-63. Exposé n° 6.