

# *Astérisque*

PIERRE-PAUL GRIVEL

**Fibres algébriques de fibre donnée**

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 192-197

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1984\\_\\_113-114\\_\\_192\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__192_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FIBRES ALGÈBRIQUES DE FIBRE DONNÉE

par Pierre-Paul GRIVEL

(Sauf avis contraire, tous les objets gradués sont supposés 0-réduits et de type fini.)

1. Fibré associé à une action

Soit A une DGA telle que la DGL 0-réduite L(A) des dérivations de A qui abaissent le degré soit de type fini.

Définition : une action d'une DGL L sur A consiste en la donnée d'un morphisme de DGL  $\omega : L \rightarrow L(A)$ . Dans l'ensemble des actions des DGL sur A on considère la relation d'équivalence engendrée par la relation suivante : si  $\omega : L \rightarrow L(A)$  et  $\omega' : L' \rightarrow L(A)$  sont deux actions, il existe un quasi-isomorphisme  $\varphi : L \rightarrow L'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L & & \\
 \downarrow \varphi & \searrow \omega & \\
 & & L(A) \\
 & \nearrow \omega' & \\
 L' & & 
 \end{array}$$

commute à homotopie près dans la catégorie DGL. (L'homotopie est définie à l'aide de l'objet-chemin  $L(A) \otimes \Lambda(t; dt)$ .)

D'un autre côté soit  $B \underset{\tau}{\otimes} A$  un  $F^2$ -fibré algébrique de fibre A et de base B. Il est facile de vérifier le résultat suivant.

Proposition : le fibré  $B \underset{\tau}{\otimes} A$  est complètement caractérisé par la donnée d'une application linéaire  $\tau_0 : L(A)^* \rightarrow B$  de degré +1 telle que  $d\tau_0 - \tau_0 d + \frac{1}{2} m (\tau_0 \otimes \tau_0) [ ]^* = 0$  où m est la multiplication de B et  $[ ]^*$  est le dual du crochet de Lie de L(A).

Soit L une DGL et  $\omega : L \rightarrow L(A)$  une action de L sur A. Notons  $C^*(L)$  la DGA duale de la DGC C(L) de Quillen (voir [Q]), et considérons

l'application linéaire de degré +1

$$\tau_0 : L(A)^* \xrightarrow{\omega^*} L^* \xrightarrow{\bar{s}} sL^* \xrightarrow{\iota} C^*(L)$$

où  $\iota$  est l'inclusion de  $sL^*$  dans  $C^*(L)$  et  $\bar{s}$  est l'isomorphisme défini par  $\bar{s}(x) = (-1)^{|x|+1} s(x)$ ,  $s$  étant la suspension. Cette application satisfait la condition de la proposition car  $\omega$  est un morphisme de DGL. On en déduit le résultat suivant.

Théorème I (voir [G<sub>1</sub>] et [G<sub>2</sub>]) : à la donnée d'une action  $\omega$  de  $L$  sur  $A$  est associé d'une façon fonctorielle un fibré  $C^*(L) \otimes_{\tau} A$ .

Si  $\omega'$  est une action de  $L'$  sur  $A$  équivalente à  $\omega$ , alors les fibrés  $C^*(L') \otimes_{\tau'} A$  et  $C^*(L) \otimes_{\tau} A$  sont  $c$ -équivalents.

## 2. L-fibré principal universel

Soit  $L$  une DGL et notons  $U^*(L)$  l'algèbre de Hopf différentielle graduée libre commutative, duale de l'algèbre enveloppante  $U(L)$  de  $L$ . Sa comultiplication  $\nabla$  est le dual de la multiplication de  $U(L)$ .

Définition : un  $L$ -fibré principal de base  $B$  est un  $F^2$ -fibré  $B \otimes_{\tau} U^*(L)$  tel que l'espace total  $B \otimes_{\tau} U^*(L)$  est un  $U^*(L)$ -comodule à droite, le morphisme de structure

$$1_B \otimes \nabla : B \otimes_{\tau} U^*(L) \rightarrow B \otimes_{\tau} U^*(L) \otimes U^*(L)$$

étant un morphisme de DGA.

Cette dernière condition équivaut à dire que

$$(\tau \otimes 1_{U^*(L)}) \circ \nabla = (1_B \otimes \nabla) \circ \tau.$$

Proposition (voir [G<sub>1</sub>]) : il existe une application injective de l'ensemble des applications linéaires  $\tau_0 : L^* \rightarrow B$  de degré +1 telles que  $d\tau_0 - \tau_0 d + \frac{1}{2} m(\tau_0 \otimes \tau_0) [ ]^* = 0$  dans l'ensemble des

L-fibrés principaux  $B \otimes_{\tau} U^*(L)$ . Cette application est bijective si  $L$  est de dimension finie.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant.

Lemme : l'action naturelle  $\omega$  de  $L$  sur  $U^*(L)$  définie par  $\nabla$  induit un isomorphisme entre  $L$  et la sous-DGL

$$M = \{ \theta \in L(U^*(L)) \mid (\theta \otimes 1_{U^*(L)}) \circ \nabla = \nabla \circ \theta \} .$$

Cela étant, on peut appliquer la construction générale du no 1 au cas où,  $L$  étant une DGL donnée,  $A = U^*(L)$  et  $\omega$  est l'action naturelle déterminée par  $\nabla$ . On obtient ainsi un L-fibré principal  $C^*(L) \otimes_{\tau_L} U^*(L)$  dont l'espace total est acyclique.

Théorème II (voir [G<sub>1</sub>]) : supposons que  $L$  est de dimension finie.

- a) Pour tout L-fibré principal  $B \otimes_{\tau} U^*(L)$  il existe un morphisme de DGA  $w : C^*(L) \rightarrow B$  tel que le fibré  $B \otimes_{\tau} U^*(L)$  est isomorphe au fibré induit du fibré  $C^*(L) \otimes_{\tau_L} U^*(L)$  par le morphisme de changement de base  $w$ .
- b) Si les L-fibrés principaux  $B \otimes_{\tau} U^*(L)$  et  $B' \otimes_{\tau'} U^*(L)$  sont isomorphes au-dessus de  $B$ , alors les applications classifiantes  $w$  et  $w'$  sont homotopes.

L'application classifiante  $w$  est construite à partir de l'application linéaire  $\tau_0$  associée à  $\tau$ , en utilisant la propriété universelle de  $C^*(L)$ .

### 3. Fibré universel de fibre donnée

Appliquons maintenant la construction générale du no 1 au cas où,  $A$  étant une DGA donnée telle que  $L(A)$  soit de type fini, on prend  $L = L(A)$  et  $\omega = 1_{L(A)}$ . On obtient ainsi un fibré  $C^*(L(A)) \otimes_{\tau_A} A$  qui est universel pour les fibrés de fibre  $A$ . Pour tout fibré  $B \otimes_{\tau} A$ , l'application classifiante  $w : C^*(L(A)) \rightarrow B$  se construit,

comme précédemment, à partir de l'application linéaire  $\tau_0 : L(A)^* \rightarrow B$  qui est associée à  $\tau$  en vertu de la proposition du no 1.

Remarquons que, d'après la proposition du no 2, cette application  $\tau_0$  donne naissance à un  $L(A)$ -fibré principal  $B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A))$ . Remarquons de plus que l'action naturelle de  $L(A)$  sur  $A$  induit sur  $A$  une structure de  $U^*(L(A))$ -comodule à gauche. On a alors un isomorphisme naturel  $B \otimes_{\tau} A = B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A)) \square_{U^*(L(A))} A$ .

Définition : le fibré  $B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A))$  s'appelle le  $L(A)$ -fibré principal associé au fibré  $B \otimes_{\tau} A$ .

Soit  $B \otimes_{\tau} A$  et  $B \otimes_{\tau'} A$  deux fibrés. Si  $f : B \otimes_{\tau_A} U^*(L(A)) \rightarrow B \otimes_{\tau'_A} U^*(L(A))$  est un morphisme de  $L(A)$ -fibré principal au-dessus de  $B$ , alors le morphisme  $f \square 1_A$  induit un morphisme de fibrés  $\bar{f} : B \otimes_{\tau} A \rightarrow B \otimes_{\tau'} A$  au-dessus de  $B$ .

Théorème III (voir [G<sub>1</sub>]) : si  $A$  est une DGA minimale dont l'espace des indécomposables est de dimension finie, la correspondance  $f \rightarrow \bar{f}$  est fonctorielle et établit une bijection entre l'ensemble des morphismes de  $L(A)$ -fibrés principaux au-dessus de  $B$  et l'ensemble des morphismes de fibrés au-dessus de  $B$  qui induisent un isomorphisme sur la fibre.

Soit  $B \otimes_{\tau} A$  et  $B \otimes_{\tau'} A$  deux fibrés; on a vu que l'application classifiante  $w$  (resp.  $w'$ ) est essentiellement caractérisée par  $\tau_0$  (resp.  $\tau'_0$ ) et que par construction  $(\tau_A)_0 = \tau_0$  (resp.  $(\tau'_A)_0 = \tau'_0$ ). Alors, si on remarque de plus qu'un morphisme de  $L(A)$ -fibré principal au-dessus de  $B$  est automatiquement un isomorphisme, les théorèmes II et III impliquent le théorème suivant.

Théorème IV : soit  $A$  une DGA minimale dont l'espace des indécomposables est de dimension finie. S'il existe un morphisme de fibrés  $f : B \otimes_{\tau} A \rightarrow B \otimes_{\tau'} A$  au-dessus de  $B$  qui induit un isomorphisme

sur la fibre, alors les applications classifiantes  $w$  et  $w'$  sont homotopes.

#### 4. Actions et fibrés

Soit  $A$  une DGA.

Notons  $\text{Act}(A)$  l'ensemble des classes d'équivalence des actions de DGL sur  $A$ . Notons  $\text{Fib}(A)$  l'ensemble des classes de  $c$ -équivalence des  $F^2$ -fibrés de fibre  $A$  dont la base est une DGA  $l$ -réduite de type fini.

Théorème V (voir  $[G_2]$ ) : si  $A$  est une DGA minimale dont l'espace des indécomposables est de dimension finie, il y a équivalence entre les ensembles  $\text{Act}(A)$  et  $\text{Fib}(A)$ .

L'application de  $\text{Act}(A)$  dans  $\text{Fib}(A)$  est donnée par le théorème I. L'application réciproque est définie de la façon suivante.

Soit  $B \otimes_{\tau} A$  un fibré donné et soit  $w : C^*(L(A)) \rightarrow B$  l'application classifiante construite au no 3. Notons  $L^*(B)$  la DGL  $L(B^*)$  de Quillen (voir  $[Q]$ ). On définit une action  $\lambda$  de  $L^*(B)$  sur  $A$  en posant

$$\lambda : L^*(B) \xrightarrow{L^*(w)} L^*C^*(L(A)) \xrightarrow{\alpha_{L(A)}} L(A)$$

où  $\alpha_{L(A)}$  est la flèche d'adjonction et on vérifie que si  $w$  et  $w'$  sont des morphismes de DGA homotopes, alors les morphismes de DGL  $L^*(w)$  et  $L^*(w')$  sont homotopes.

#### 5. Comparaison avec la topologie

Les théorèmes précédents sont à mettre en parallèles avec des résultats sur les H-espaces associatifs qui proviennent des travaux de Dold-Lashof (voir  $[D-L]$ ) et de Stasheff (voir  $[S]$ ).

Bibliographie

- [D-L] A. Dold and R. Lashof  
Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence  
of bundles  
Illinois Journal of Mathematics Vol. 3 no 2 (1959)  
(285-305)
- [G<sub>1</sub>] P.P. Grivel  
Sur les fibrés principaux associés aux fibrés algébriques  
Preprint 1981 (à paraître)
- [G<sub>2</sub>] P.P. Grivel  
Fibrés algébriques et actions d'algèbre de Lie
- [Q] D. Quillen  
Rational homotopy theory  
Annals of Mathematics 90 (1969) (205-295)
- [S] J.D. Stasheff  
Parallel transport in fibre spaces  
Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol 11 no 2  
(1966) (68-84)