YVES FÉLIX
CLAS LÖFWALL

Sur le rayon de convergence de la série de Poincaré des anneaux locaux gradués

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 183-186
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__183_0>

SUR LE RAYON DE CONVERGENCE DE LA SÉRIE DE POINCARÉ DES ANNEAUX LOCAUX GRADUÉS

par

Yves FÉLIX et Clas LÖFWALL

1. INTRODUCTION.

Soit A un anneau local d'idéal maximal m et de corps résiduel k. Notons $H_A(t)$ la série de Hilbert $\sum_{i\geq 0} \dim_k(m^i/m^{i+1})t^i$ et $0 < R_A$ le rayon de convergence de sa série de Poincaré $P_A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k \mathrm{Tor}_i^A(k,k)t^i$.

Depuis certaines études sur la croissance exponentielle de $P_A(t)$ ([3], [4]), on sait que $R_A \geq 1$ si et seulement si l'anneau A est d'intersection complète. Dans les autres cas $R_A < 1$. Dans [1] et [2] Avramov démontre que si $R_A < 1$, alors $R_A \leq \sqrt{2}/2$ dans deux cas suivants :

a) lorsque $\mathrm{edim}(A) - \mathrm{depth}(A) \leq 3$

b) lorsque A est un anneau de Gorenstein vérifiant $\mathrm{edim}(A)-\mathrm{depth}(A) \leq 4$.

Ce texte fournit de nouvelles bornes pour R_A.

THÉORÈME 1 : Soit A un anneau local gradué, $A = \bigoplus_{n\geq 0} A^n$, avec l'idéal maximal $m = \bigoplus_{n\geq 1} A^n$ et m engendré par A^1. Supposons que $\dim(A^1) \geq p+1$ et $A^{p+1} = 0$. Alors $R_A \leq 2^{-1/p}$.

2. LIEN ENTRE R_A ET $H_A(t)$ SI A EST UN ANNEAU LOCAL GRADUÉ.

Soit A un anneau gradué comme dans le théorème 1. Alors $\mathrm{Tor}_p^A(k,k)$ est muni d'une seconde graduation $\mathrm{Tor}^A = \bigoplus_{q\geq 0} \mathrm{Tor}^{A,q}$ telle que la différentielle canonique d sur $A \otimes \mathrm{Tor}^A(k,k)$ satisfasse

$$d[A \otimes \mathrm{Tor}^A(k,k)]_p^q \subset A \otimes \mathrm{Tor}^A(k,k)_{p-1}^{q+1} .$$

On en déduit alors que

$$\Big(\sum_{p\geq 0} (\dim A^n)t^n\Big)\Big(\sum_{p,q} (-1)^p(\dim \mathrm{Tor}_p^{A,q})t^{p+q}\Big) = 1 .$$

Notons $[H_A(t)]^{-1} = [\Sigma(\dim A^n)t^n]^{-1}$.

Clairement $|\alpha_n| = |\sum_{p+q=n} (-1)^p \dim \mathrm{Tor}_p^{A,q}(k,k)| \leq \sum_{p\leq n} \dim \mathrm{Tor}_p^A(k,k)$,

et donc $\Sigma|\alpha_n|t^n \leq P_A(t)/(1-t)$.

Supposons $m^p = 0$ pour un certain p . Il en resulte que $R_A \leq \rho$ où $\rho = \inf\{|z| , z$ parcourant les racines de $H_A(t)\}$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

On a $H_A(t) = 1 + a_1t + \ldots + a_pt^p$ où $a_1 \geq p+1$. Notons les racines de $H_A(t)=0$ $z_1, z_2, \ldots , z_p$ avec $|z_1| \leq z_i$, $i = 2,\ldots,p$. Si $a_p \geq 2$ alors

$$2 \leq \frac{1}{|z_1|} \cdot \frac{1}{|z_2|} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{1}{|z_p|} \leq \Big(\frac{1}{|z_1|}\Big)^p$$

de telle sorte que $|z_1| \leq 2^{-1/p}$. Si $a_p = 1$ le corollaire ci-dessous donne le résultat.

Lemme. Supposons que $b_1,\ldots,b_p$ soient des nombres réels positifs, tels que $b_1\cdot\ldots\cdot b_p = 1$ et $b_i \leq 2^{1/p}$ pour $i = 1,\ldots,p$. Alors $b_1+\ldots+b_p < p+1$.

Demonstration. Utilisant les multiplicateurs de Lagrange on démontre que si $b_1+\ldots+b_p$ atteint sa valeur maximale pour des b_i satisfaisant à $b_i < 2^{1/p}$ pour tout i , alors tous les b_i sont égaux. Dans ce cas on

a donc $b_i = 1$ pour tout i et $b_1+\ldots+b_p = p < p+1$.
Si $b_1 = \ldots = b_a = 2^{1/p}$ et si les autres b_i sont strictement plus petits que $2^{1/p}$, le même raisonnement montre que pour une valeur maximale de $b_1+\ldots+b_p$ on a nécessairement $b_i = 2^{-a/p(p-a)}$, $i = a+1,\ldots,p$. Il s'ensuit que

$$b_1+\ldots+b_p = a\cdot 2^{1/p} + (p-a)\cdot 2^{-a/p(p-a)} < a\cdot 2^{1/p} + (p-a) = a(2^{1/p} - 1) + p .$$

Ici a est un nombre entier entre 1 et $p-1$. Donc
$b_1+\ldots+b_p < (p-1)(2^{1/p}-1) + p = p + 1 + (p-1)2^{1/p} - p < p+1$, où la dernière inégalité résulte du fait que $2^{-1/p} > e^{-1/p} > 1 - 1/p = (p-1)/p$.

<u>Corollaire</u>. Une équation $1 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_{p-1}z^{p-1} + z^p = 0$ à coefficients complexes avec $|a_1| \geq p+1$ admet toujours une racine α satisfaisant à $|\alpha| < 2^{-1/p}$.

<u>Demonstration</u>. Soient $z_1,\ldots, z_p$ les racines de l'équation. Posons $b_i = 1/|z_i|$. Alors $b_1\cdot\ldots\cdot b_p = 1$ et comme $-a_1 = 1/z_1 + \ldots + 1/z_p$ il s'ensuit que $b_1+\ldots+b_p \geq p+1$. Donc, en vertu du lemme, il existe un i tel que $b_i>2^{1/p}$, i.e. $|z_i| < 2^{-1/p}$.

4. <u>APPLICATIONS</u>.

<u>Théorème 2</u>. Soit (A,m) un anneau local avec $R_A < 1$.

1) Si $m^3 = 0$, alors $R_A \leq \sqrt{2}/2$.
2) Si $m^4 = 0$ et si A est un anneau gradué, alors $R_A \leq 2^{-1/3}$.
3) Si $m^5 = 0$ et si A est un anneau de Gorenstein gradué alors $R_A \leq 2^{-1/4}$.

<u>Démonstration</u>. 1). On peut supposer que A est gradué, car $P_A = P_{gr(A)}$ ($gr(A) = \bigoplus_{i\geq 0} m^i/m^{i+1}$) (ceci est un résultat de Levin, cf. [5]). Le théorème 1 montre qu'il suffit de considérer le cas où $\mathrm{edim}(A) \leq 2$. Alors nous savons par Scheja [6] que soit A est d'intersection complète, soit A est de Golod, et dans ce cas $P_A(t) \geq 1/(1-2t^2)$ ce qui conduit au résultat.
2), 3). Ceci résulte du Théorème 1 et des résultats a) et b) d'Avramov.

Remarque. Si A est un anneau local gradué, l'algèbre $\mathrm{Ext}_A(k,k)$ est en plus bigraduée. La sous-algèbre d'éléments de degré total zéro est alors la sous-algèbre notée $\mathrm{Ext}_A^{(1)}(k,k)$ et étudiée dans [5] . Les espaces $\mathrm{Ext}_A^{i}(k,k)$ où i est le degré total sont alors des $\mathrm{Ext}_A^{(1)}(k,k)$ modules.

Bibliographie

[1] L. Avramov. On the convergence radius of Poincaré series of local rings, Mat.Inst., Stockholm Univ.,Preprint nr 4, 1979.

[2] L. Avramov. Sur la croissance des nombres de Betti d'un anneau local, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289, p. Série A - 369, 1979.

[3] L. Avramov. Differential graded model for local rings. Proceeding of Tokyo - to appear.

[4] Y. Felix et J.C.Thomas. The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces, à paraître dans Inventiones Math.

[5] C. Löfwall. On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra, Mat. Inst., Stockholm Univ, Preprint nr 5, 1976.

[6] G. Scheja. Über die Bettizahlen lokaler Ringe, Math. Ann., 155, 1964, p. 155 - 172.