Astérisque

Y. Félix

# Catégorie L.S. et invariant e

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 179-182

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__179_0>

## Catégorie L.S. et invariant e.

par Y. Félix(*)

La catégorie L.S. (Lusternik - Schnirelmann) d'un espace S, cat(S), est le plus petit entier n tel que S puisse être recouvert par (n+1) ouverts contractibles dans S. Si S est un espace nilpotent rationnel, alors cat(S) se calcule à partir du modèle minimal de Sullivan $(\wedge Z,d)$ de S comme suit : cat(S) est le plus petit entier p tel que le morphisme canonique d'écrassement $(\wedge Z,d) \to (\wedge Z/_{\wedge^{>p}Z},\bar{d})$ admette une rétraction du niveau modèles minimaux [2].

Toomer [6] a montré que cat(S) peut être approximé par un invariant e(S) lié à la suite spectrale de Milnor - Moore $E^r_{p,q}$.

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^{H_*(\Omega S;Q)}_{p,q}(Q,Q) \Rightarrow H_*(S;Q)$$

$e(S) = \inf\{p \mid E^\infty_{s,q} = 0 \text{ pour } s > p\}$.

Théorème [6] $e(S) \leqslant cat(S)$.

L'inégalité précédente peut être stricte. Considérons en effet l'espace $W = (CP^2 \vee S^2) \cup_{[\alpha,S^2]} e^7$ où $\alpha \in \pi_5\ (CP^2)$.

J.M. Lemaire et F. Sigrist [5] ont en effet montré que cat(W) = 3 et que e(W) = 2. Par après, Y. Félix et S. Halperin [2] ont montré que $cat(W^n) = 3n$ et que $e(W^n) = 2n$, prouvant ainsi que la différence cat - e peut être arbitrairement grande.

Une question subsistait néanmoins : cat/e est-il borné ? La réponse est négative : une démonstration se trouve dans [3]. Le but de ce texte est de fournir un exemple explicite de c.w. complexe S infini, de type fini et vérifiant la propriété suivante : il existe une suite de squelettes $S_k$ de S avec $cat(S_k) > k$ et $e(S_k) = 2$.

L'espace S se construit par récurrence comme suit : notons $S^{(n)}$ son n-squelette

---

* chercheur qualifié FNRS.

$S^{(2)} = S^2 \vee S^2 \vee S^2$

$S^{(4)} = S^{(2)} \underset{f}{\cup} C(\overset{6}{\underset{i=1}{\vee}} S_i^3)$ où les 6 4-cellules de $S^{(4)}$ sont introduites pour tuer l'espace vectoriel $[\pi(S^{(2)}) \otimes \mathbb{Q}, \pi(S^{(2)}) \otimes \mathbb{Q}]$. $S^{(4)}$ est le 4-squelette de $P^2(\mathbb{C}) \times P^2(\mathbb{C}) \times P^2(\mathbb{C})$. $\pi_5(S^{(4)}) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension 10 et est engendré par des crochets de Whitehead d'ordre 3.

De façon générale, $S^{(n+1)} = S^{(n)} \underset{f}{\cup} C(VS^n)$ où les cellules de dimension n+1 sont introduites pour tuer une base de l'espace vectoriel

$$[\pi(S^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}, \pi(S^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}] \wedge \pi_n(S^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}.$$

L'espace S est donc construit par récurrence de telle sorte que son algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ soit abélienne.

Théorème : Soit $\ell \geqslant 11$, $i = 1 +$ la partie entière de $\log_2 (\frac{\ell}{11})$ et $n = (2.(11.3^{i+1}) +1)\ell+1$, alors

$$\mathrm{cat}(S^{(n)}) \geqslant \ell-1$$
$$e(S^{(n)}) = 2.$$

Démonstration : Comme toutes les applications d'attachements sont de simples crochets de Whitehead, il résulte de [1] que e=2. Comme d'autre part, l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de S est abélienne, il résulte de [3] que S admet un modèle minimal $(\wedge X,d)$ vérifiant $dX \subset \wedge^3 X$ [$\wedge^p X$ = mots de longueur p en X] et $X \wedge \ker d = X^2$.

La wedge graduation munit alors la cohomologie d'une seconde graduation $H^p(\wedge X,d) = \underset{q}{\oplus} H^{p,q}(\wedge X,d)$ vérifiant $H^{p,\geqslant 3} = 0$ [3, prop. 1]. Toutes ces équations fournissent les deux formules suivantes valables pour $p \geqslant 3$.

(1) $$\sum_{i=o}^{\infty} (-1)^i \dim (\wedge^{1+2i}X)^{p+i} = 0$$

(2) $$\dim H^p(\wedge X,d) = \sum_{i=o}^{\infty} (-1)^i \dim (\wedge^{2+2i}X)^{p+i}.$$

Notons P(S,t) la série de Poincaré de la cohomologie non sphérique de S : $P(S;t) = \sum_{p\geqslant 4} \dim H^p(S;\mathbb{Q})t^p$. Les formules (1) et (2) peuvent alors se résumer sous la forme d'une égalité entre séries formelles à coefficients complexes

$$\frac{\prod_{n\geqslant 1} (1+it^{2n+\frac{1}{2}})^{\alpha_{2n+1}}}{\prod_{n\geqslant 1} (1-it^{2n-\frac{1}{2}})^{\alpha_{2n}}} = 1+3it^{3/2} - P(S;t)$$

où $\alpha_i = \dim \pi_i(S) \otimes Q$.

En développant formellement cette égalité, on obtient $\alpha_2 = 3$, $\alpha_5 = 10$, $\alpha_8 = 39$, $\alpha_{11} = 255$, ...

Désignons par $(\wedge X_{\geqslant n}, d)$ l'algèbre différentielle quotient de $(\wedge X, d)$ par l'idéal différentiel engendré par $X_{<n}$. Il résulte alors de [3, prop. 1, cond $C_n^*$] que

$$H^{p\geqslant 3}(\wedge X_{\geqslant n}, d) = 0 \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Dans $(\wedge X_{\geqslant n}, d)$, $X_n$ est entièrement formé de cocycles et d y est cubique, il faut donc que

$$\alpha_{3n-1} = \dim X_{3n-1} \geqslant C^3_{\alpha_n} \text{ (si n est impair) ou } \geqslant C^3_{\alpha_n+2}$$

(si n est pair), mais de toutes façons il faut que

$$\alpha_{3n-1} \geqslant C^3_{\alpha_n}.$$

On en déduit que si $n \geqslant 11$ et $\alpha_n \geqslant n$, alors $\alpha_{3n-1} \geqslant 3n$. Il en résulte l'existence d'une suite $\alpha_{n_i}$ avec

$$n_o = 11$$
$$11.2^i \leqslant n_i = 3n_{i-1} - 1 \leqslant 11.3^i$$
$$\alpha_{n_i} \geqslant n_i.$$

La suite des $n_i$ étant formée alternativement d'éléments pairs et impairs, soit i le plus petit entier tel que $\ell \leqslant 11.2^i$. Il existe alors un entier impair de la forme n, situé entre $11.2^i$ et $11.3^{i+1}$ avec $\alpha_n \geqslant \ell$. Il résulte alors de [4, Th. 2.5] que

$$\ell-1 \leqslant \text{cat } X^{(2n+1)\ell+1} \leqslant \text{cat } X^{(2s+1)\ell+1}$$

avec $s = 11.3^{i+1}$ et $i = 1 +$ la partie entière de $\log_2 \frac{\ell}{11}$.

Remarques et question.

1. L'équation $dX \subset \Lambda^3 X$ montre que l'espace vectoriel d'homotopie rationnelle $\pi_*(S) \otimes Q$ est concentré en degrés égaux à 2 modulo 3.
$\pi_{3n}(S) \otimes Q = \pi_{3n+1}(S) \otimes Q = 0$.

2. La même formule montre que l'homologie rationnelle en dimension plus grande que 3 est concentrée en degrés égaux à 1 modulo 3
$H_{3n}(S;Q) = H_{3n+2}(S;Q) = 0 \qquad n > 1$.

3. La catégorie semble monter beaucoup plus vite que ne le donne le théorème précédent, à savoir :
Espoir : cat $X^{(3n+1)} \geqslant n+1$ pour $n > 1$.

Bibliographie.

[1] P. Andrews, M. Arkowitz. Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products. Can. J. Math. 30, n° 5 (1978), 961-982.

[2] Y. Félix, S. Halperin. Rational L.S. category and its applications. Trans. Am. Math. Soc. 273 (1982), 1-38.

[3] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas. L.S. catégorie et suite spectrale de Milnor - Moore. Bull. Soc. Math. France 111 (1983).

[4] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas. The homotopy Lie algebra for finite complexes. Publ. math. I.H.E.S. n° 56 (1983), 179-202.

[5] J.M. Lemaire, F. Sigrist. Sur les invariants d'homotopie rationnelle liées à la L.S. catégorie. Comment. Math. Helv. 56 (1981), 103-122.

[6] G.H. Toomer. Lusternik - Schnirelmann category and the Moore spectral sequence. Math. Z. 138 (1974) 123-143.