CHRISTOPHER ALLDAY
STEVE HALPERIN

La Théorie de Sullivan-de Rham pour la Cohomologie Rationnelle d'Alexander-Spanier

Astérisque, tome 113-114 (1984), p. 148-152
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__148_0>

La Théorie de Sullivan-de Rham pour la Cohomologie Rationnelle d'Alexander-Spanier

par Christopher Allday et Steve Halperin

La théorie de la cohomologie rationnelle équivariante de A. Borel ([5]) est très utile pour étudier les tores de transformations, et de là pour étudier les groupes de Lie compacts connexes de transformations ([5], [6], [7] et [10], par exemple). C'est fertile également d'utiliser la théorie d'homotopie rationnelle, et d'où d'utiliser la théorie des modèles minimaux de Sullivan ([1], [2], [3]). Une difficulté se présente parce que la théorie de de Rham de Sullivan est fondée sur la cohomologie singulière tandis que la théorie équivariante de Borel est fondée sur la cohomologie d'Alexander-Spanier (ou de Čech ou des faisceaux). Dans cet exposé nous indiquons comment développer une théorie de Sullivan-de Rham pour la cohomologie rationnelle d'Alexander-Spanier qui nous aide à éviter cette difficulté.

Les définitions fondamentales dans la théorie de Sullivan-de Rham-Alexander-Spanier sont simples: on se sert des limites inductives comme nous montrons ci-dessous. Un théorème important dans le développement de la théorie d'homotopie rationnelle équivariante est pourtant le théorème de Grivel-Halperin-Thomas ([8], [9], [12]) qui montre comment computer le modèle minimal d'un espace fibré des modèles minimaux de la base et de la fibre. La démonstration de ce théorème dans la théorie d'Alexander-Spanier est assez longue et technique: elle ne résulte pas immédiatement du théorème dans le cas singulier. Les détails sont donnés dans [4]. Dans une deuxième partie de [4] nous présenterons aussi des théories de Sullivan-de Rham pour les cohomologies rationnelles de Čech et des faisceaux.

1. Définitions

Soient X un espace topologique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Alors nous notons $\overline{\mathcal{U}}$ le nerf de Vietoris de $\mathcal{U}$: il est le complexe simplicial abstrait dont un sommet est un point de X et un simplexe est une partie finie de X, $\{x_0, \ldots, x_n\}$, telle qui'il existe $U \in \mathcal{U}$ avec $x_i \in U$ pour $0 \leq i \leq n$. $\overline{\mathcal{U}}$ a les opérateurs de face standard i.e. les omissions des sommets. Soit $|\overline{\mathcal{U}}|$ la réalisation géométrique de $\overline{\mathcal{U}}$. Si $\mathcal{V}$ est un autre recouvrement ouvert de X qui est plus fin que $\mathcal{U}$, donc l'inclusion induit une application simpliciale $\overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{U}}$. Ainsi $\{|\overline{\mathcal{U}}|: \mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $X\}$ est un système projectif des polyèdres.

Soit maintenant A le foncteur contravariant qui fait correspondre à chaque espace topologique son algèbre des formes différentielles rationnelles polynomiales de Sullivan-de Rham ([11]). Alors $\{A(|\overline{\mathcal{U}}|): \mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $X\}$ est un système inductif des algèbres différentielles graduées commutatives (a.d.g.c.) sur $\mathbb{Q}$ (le corps des nombres rationnels).

1.1 Définition. Nous appelons algèbre de Sullivan-de Rham-Alexander-Spanier, et nous la notons $\overline{A}(X)$, la limite inductive

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} A(|\overline{\mathcal{U}}|),$$

où $\mathcal{U}$ parcourt l'ensemble des recouvrements ouverts de X.

Puisque l'homologie commute avec les limites inductives, l'homologie de $\overline{A}(X)$, $H\overline{A}(X)$, est naturellement isomorphe à $\overline{H}^*(X; \mathbb{Q})$, la cohomologie rationnelle d'Alexander-Spanier de X.

En particulier, si X est connexe, $\overline{A}(X)$ a un modèle minimal que nous notons $\overline{M}(X)$.

<u>1.2 Définition</u>. Si X est un espace topologique connexe, nous appelons homotopie rationnelle d'Alexander-Spanier de X, et nous le notons $\overline{\Pi}^*_\psi(X)$, le quotient indécomposable de $\overline{M}(X)$.

Les propriétés de $\overline{\Pi}^*_\psi(X)$ semblent celles de $\Pi^*_\psi(X)$ (le quotient indécomposable du modèle minimal singulier de X) données dans [9].

2. <u>Des théorèmes</u>

Les applications de limite $A(|\mathcal{U}|) \to \overline{A}(X)$ induisent des applications $\Pi^*_\psi(|\mathcal{U}|) \to \overline{\Pi}^*_\psi(X)$, et nous pouvons énoncer le théorème suivant.

<u>2.1 Théorème</u>. Si X est un espace topologique connexe, l'application $\varinjlim_{\mathcal{U}} \Pi^*_\psi(|\mathcal{U}|) \to \overline{\Pi}^*_\psi(X)$ est un isomorphisme.

Une démonstration de ce théorème dans le cas particulier où X est compact et métrisable est présentée dans [4]. Le cas général sera démontré dans la deuxième partie de [4].

Dans le théorème suivant qui est une version du théorème de Grivel-Halperin-Thomas nous utilisons la terminologie de [9]. M désigne le modèle minimal singulier.

<u>2.2 Théorème</u>. Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ une fibration de Hurewicz telle que

(i) B soit un espace séparé étant de type d'homotopie d'un CW-complexe 1-connexe avec les squelettes finis,

(ii) E et F soient paracompacts et connexes, et

(iii) $\overline{H}^*(F; \mathbb{Q})$ soit de type fini.

Alors il existe un diagramme commutatif d'a.d.g.c.

$$\begin{array}{ccccc} \overline{A}(B) & \xrightarrow{\overline{A}(p)} & \overline{A}(E) & \xrightarrow{\overline{A}(i)} & \overline{A}(F) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ M(B) & \longrightarrow & M(B) \otimes \overline{M}(F) & \longrightarrow & \overline{M}(F) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les quasi-isomorphismes, la ligne inférieure est une Λ-extension Λ-minimale, et la différentielle de $M(B) \otimes \overline{M}(F)$ n'est pas nécessairement celle de la somme directe.

Ensuite soit G un groupe de Lie compact connexe opérant sur un espace paracompact connexe X tel que $\overline{H}^*(X; \mathbb{Q})$ soit de type fini. Soit $E_G \to B_G$ le G-fibré universel, et soit $X \xrightarrow{i} X_G \xrightarrow{p} B_G$ le fibré associé de fibre type X où $X_G = (E_G \times X)/G$.

2.3 Corollaire. Il existe un diagramme commutatif d'a.d.g.c.

$$\begin{array}{ccccc} \overline{A}(B_G) & \xrightarrow{\overline{A}(p)} & \overline{A}(X_G) & \xrightarrow{\overline{A}(i)} & \overline{A}(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ M(B_G) & \longrightarrow & M(B_G) \otimes \overline{M}(X) & \longrightarrow & \overline{M}(X) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les quasi-isomorphismes et la ligne inférieure est une Λ-extension Λ-minimale.

Encore les démonstrations sont présentées dans [4] avec des généralisations dans la deuxième partie.

Bibliographie

1. C. J. Allday, On the rational homotopy of fixed point sets of torus actions, Topology 17 (1978), 95-100.

2. C. J. Allday, Rational homotopy and torus actions, Houston J. Math. 5 (1979), 1-19.

3. C. J. Allday and S. Halperin, Lie group actions on spaces of finite rank, Quart. J. Math. 29 (1978), 63-76.

4. C. J. Allday and S. Halperin, Sullivan-de Rham theory for rational Alexander-Spanier cohomology, à paraître.

5. A. Borel et al., Seminar on transformation groups, Ann. of Math. Studies, no. 46, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

6. G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York, 1972.

7. T. Chang and T. Skjelbred, The topological Schur lemma and related results, Ann. of Math., 100 (1974), 307-321.

8. P. P. Grivel, Thèse, Univ. de Genève, 1977.

9. S. Halperin, Lectures on minimal models, Publications Internes de l'U.E.R. de Mathèmatiques Pures et Appliquées, No. 111 (1977), Université des Sciences et Techniques de Lille I.

10. W. -Y. Hsiang, Cohomology Theory of Topological Transformation Groups, Ergebnisse der Math. 85 (1975), Springer-Verlag, Berlin and New York.

11. D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology, Publ. Math., I.H.E.S., 47 (1977), 269-332.

12. J. -C. Thomas, non publié.