Astérisque

R. MOUSSU

Une démonstration géométrique d'un théorème de Lyapunov-Poincaré

Astérisque, tome 98-99 (1982), p. 216-223

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__98-99__216_0>

UNE DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE LYAPUNOV-POINCARÉ.

par R. Moussu.

1. Introduction. Le but essentiel de ce travail est de démontrer géométriquement le "théorème du centre" attribué à Poincaré [5] dans la littérature occidentale et à Lyapunov [3] dans la littérature russe. Ensuite, nous montrons, à l'aide d'un contre exemple, qu'un centre ne possède pas nécessairement une intégrale première.

Avant de rappeler son énoncé, précisons quelques notations et quelques définitions. L'anneau des séries convergentes à deux indéterminées x,y sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $\mathbb{C}$) est noté $\mathbb{R}\{x,y\}$ (respectivement $\mathbb{C}\{x,y\}$). Si

$$f = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta$$

est un élément de $\mathbb{R}\{x,y\}$ nous écrivons aussi

$$f = \sum_{\alpha+\beta\leq\nu} f_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta + \ldots \qquad ,$$

les 3 petits points désignant évidemment des termes d'ordre $> \nu$. Dans toute la suite nous notons

$$\omega = a\, dx + b\, dy$$

le germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ d'une 1-forme différentielle, analytique, i.e. $a,b \in \mathbb{R}\{x,y\}$. Il est dit à *singularité algébriquement isolée* si le quotient de $\mathbb{R}\{x,y\}$ par l'idéal engendré par a et b est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un élément f de $\mathbb{R}\{x,y\}$ est une *intégrale première forte* de ω s'il existe $g \in \mathbb{R}\{x,y\}$ tel que

$$\omega = g\, df$$

Le point 0 est dit un "*centre*" pour ω s'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que les courbes intégrales de $\omega/U-\{0\}$ soient homéomorphes à des cercles. Enfin nous notons

$$\omega_\nu = \sum_{\alpha+\beta\leq\nu} a_{\alpha,\beta}\, dx + b_{\alpha,\beta}\, dy$$

le jet d'ordre ν de ω en 0.

Théorème du centre : Soit $\omega = a\, dx + b\, dy$ un germe en $0 \in \mathbb{R}^2$ de 1-forme analytique tel que 0 soit

i) une singularité isolée de ω_1

ii) un centre pour ω.

Alors ω possède une intégrale première forte qui est un germe de fonction de Morse de signe constant.

Comme nous le verrons dans dans le paragraphe suivant, il est très facile de déduire des hypothèses i) et ii) que :

i') ω_1 est la différentielle d'une forme quadratique définie de signe constant.

Il est clair que la réunion des hypothèses i) , ii) est équivalente à celle de i') , ii) et que i') se généralise de la façon suivante :

iii) le premier jet non nul ω_ν de ω en 0 est la différentielle d'un polynome (naturellement homogène de degré $\nu+1$) de signe constant dont 0 est une singularité isolée.

On pourrait penser qu'un germe ω qui vérifie ii) et iii) possède une intégrale première forte. Or nous verrons dans le paragraphe 5 que

$$\omega = \frac{1}{4}\, d(x^4 + y^4) - \frac{1}{2}\, x^2 y^2\, dx$$

vérifie ii) et iii) mais n'a pas d'intégrale première forte.

1. <u>Application retour et argument de la démonstration de Poincaré</u>. Montrons tout d'abord que i') est une conséquence de i) et ii). Soit X_1 le champ de vecteurs tel que

$$i_{X_1}\, dx \wedge dy = \omega_1 \,.$$

Il est bien connu (voir [6]) que, si les valeurs propres du champ linéaire X_1 ont une partie réelle non nulle , X_1 est de l'un des types : noeud - foyer - selle. Dans ces trois cas l'une au moins des courbes intégrales non singulières de ω contient 0 dans son adhérence. Les valeurs propres de X_1 sont donc imaginaires pures ; i') s'en déduit immédiatement. Ainsi, en faisant un changement linéaire de coordonnées, on écrit ω sous la forme

$$(1) \qquad \omega = (x+\dots)dx + (y+\dots)dy \,.$$

Il existe un voisinage de 0 sur lequel les courbes intégrales (non singulières) de ω sont transverses au champ radial $R = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ puisque

$$\omega(R) = x^2 + y^2 + \dots$$

Ainsi, dans des coordonnées polaires (r,θ) , l'équation de la courbe intégrale qui passe par le point $(r,0)$ s'écrit :

$$\rho(\theta) = r + a_2(\theta)\, r^2 + \dots$$

Le *difféomorphisme premier retour* correspondant à ω est l'application

$$h : r \to h(r) = \rho(2\pi).$$

La démonstration de Poincaré consiste à montrer , voir [1] , que l'hypothèse ii)$_n$ les $a_k(\theta)$ sont périodiques de période 2π pour $k \leq n$

est équivalente (lorsque $\omega = x\,dx + y\,dy + \ldots$) à

ii')$_n$ il existe des polynomes homogènes P_k de degré k pour $k = 3,4,\ldots,2n$ tels que :

$$\omega \wedge df_n = (C_n(x^2+y^2)^n+\ldots)\,dx \wedge dy \quad , \text{ où}$$

$$f_n = x^2+y^2+P_3+\ldots+P_{2n}$$

Il est clair que l'application premier retour h est l'identité si ii) est vrai et qu'alors les $a_k(\theta)$ sont tous périodiques. Par induction, on construit ainsi une série formelle

$$f = x^2 + y^2 + P_3 + \ldots$$

telle que $\omega \wedge df = 0$. Le lemme de division de G. De Rham [2] permet alors d'affirmer que f est une intégrale première forte formelle de ω. Mais il reste encore à montrer (pour obtenir le résultat énoncé) que les P_n peuvent-être choisis de telle façon que f converge ! Ceci est une conséquence du théorème A page 472 de [4] . Nous démontrons directement et géométriquement l'existence d'un tel f dans le paragraphe 4. Mais, auparavant, dans le paragraphe suivant nous allons présenter dans le cadre qui nous intéresse un résultat de [4].

3. Existence de variétés invariantes et d'intégrales premières. Dans tout ce paragraphe et en particulier dans l'énoncé des propositions 1 et 2, Ω désigne un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme differentielle holomorphe dont le jet d'ordre 1 en 0 s'écrit :

$$(2) \qquad \Omega_1 = p\,y\,dx + q\,x\,dy$$

où p et q sont deux entiers positifs premiers entre eux. Un germe de sous variété holomorphe de $\mathbb{C}^2$ qui contient 0 et qui est une variété intégrale de Ω s'appelle une *variété invariante* de Ω ; rappelons la :

Proposition 1. (Poincaré) Ω possède deux variétés invariantes L_o , L'_o dont les équations sont du type

$$Y = y + \ldots = 0 \qquad \text{et} \qquad X = x + \ldots = 0$$

Ainsi il existe de nouvelles coordonnées notées encore (x,y) telles que :

$$\Omega = p\,y(1+\ldots)dx + q\,x(1+\ldots)\,dy$$

La droite complexe $y = 0$ privée de 0 est une feuille, notée encore L_o, du feuilletage $\mathcal{F}_\Omega$ (sans singularité) défini par la restriction de Ω à $\mathbb{C}^2 - \{0\}$. L'*holonomie* de cette feuille est définie de la façon suivante : pour $r > 0$ et $y \in \mathbb{C}$ petits, le lacet (dans L_o)

$$\Gamma_o : \theta \to (r\, e^{2i\pi\theta}, 0) \quad , \quad \theta \in [0,1]$$

se relève, suivant la projection $(x,y) \to x$, dans la feuille L_y de $\mathcal{F}_\Omega$ passant par le point (r,y) en le chemin

$$\Gamma_y : \theta \to (r\, e^{2i\pi\theta} , \gamma(y,\theta)) \quad , \quad \gamma(y,0) = y$$

Le difféomorphisme d'holonomie qui correspond à Γ_o est la série entière en y

$$h_{\Gamma_o} : y \to h(y) = \gamma(y,1)$$

Un calcul élémentaire (voir [4] page 480) montre que

$$h_{\Gamma_o}(y) = e^{\frac{2i\pi p}{q}} y + \dots$$

Nous dirons que l'*holonomie* de L_o *est périodique* si h_{Γ_o} est périodique de période q.

<u>Proposition 2</u>. ([4] page 482). L'holonomie de L_o est périodique si et seulement si Ω possède une intégrale première du type X^pY^q où

$$Y = y + \dots = 0 \qquad \text{et} \qquad X = x + \dots = 0$$

sont des équations des variétés invariantes L_o et L'_o.

Ce résultat est démontré avec des hypothèses moins restrictives dans [4] . Dans le cadre qui nous intéresse on peut le montrer plus facilement de la façon suivante. On déduit rapidement de la périodicité de h_{Γ_o} que $\Omega/(\partial D_{r_1} \times D_{r_2})$ où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ possède une intégrale première

$$f : (r_1,y) \to r_1^p . y^q . u(r_1,y), \text{ où } u\,|0,0| = 1.$$

L'application F de $(D_{r_1} - \{0\}) \times D_{r_2}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $F(x,y) = f(r_1,y_1)$ si la variété intégrale de Ω passant (x,y) coupe $\partial D_{r_1} \times D_{r_2}$ en (r_1,y_1) est bien définie, holomorphe. Par construction, elle est constante sur les variétés intégrales de $\Omega/((D_{r_1} - \{0\}) \times D_{r_2})$ et puisqu'elle est bornée elle s'étend en une intégrale première de $\Omega/(D_{r_1} \times D_{r_2})$.

4. <u>Démonstration du théorème du centre</u>. Nous allons voir que ce théorème est une conséquence immédiate des propositions précédentes en éclatant le $0 \in \mathbb{C}^2$. Rappelons brièvement cette technique. L'éclaté en 0 de $\mathbb{C}^2$ est le fibré canonique en droites complexes sur $P\mathbb{C}(1)$ noté $p : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to P\mathbb{C}(1)$. Si (x,y) sont les coordonnées des points de $\mathbb{C}^2$, $\tilde{\mathbb{C}}^2$ est défini par les deux cartes

$$(t,x) : \tilde{\mathbb{C}}^2 - p^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}^2$$
$$(s,y) : \tilde{\mathbb{C}}^2 - p^{-1}(0) \to \mathbb{C}^2 \qquad \text{avec } s = \frac{1}{t} \ , \ y = tx.$$

L'application d'éclatement , $\pi: \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$, et la projection p s'écrivent respectivement dans ces cartes

$$\pi : (t,x) \to (x,tx) \quad , \quad (s,y) \to (sy,y)$$
$$p : (t,x) \to t \quad , \quad (s,y) \to s$$

Soit ω qui vérifie les hypothèses i) et ii) du théorème. Notons Ω le germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe obtenue en complexifiant ω . Il existe des coordonnées (x,y) de $\mathbb{C}^2$ dans lesquelles

$$\Omega = (x+\ldots)dx + (y+\ldots)dy.$$

Dans les cartes (t,x) et (s,y) de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ on pose

$$\pi^*(\Omega) = x\,\tilde{\Omega}_0 = y\,\tilde{\Omega}_\infty$$

avec

$$\tilde{\Omega}_0 = ((1+t^2)+x(\ldots))dx + xdt(t+x(\ldots))$$
$$\tilde{\Omega}_\infty = ((1+s^2)+y(\ldots))dy + yds(s+y(\ldots))$$

où les ... désignent des fonctions holomorphes sur les domaines de définition des cartes correspondantes. Soient I et I' les points de $P\mathbb{C}(1) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ de coordonnées $(i,0)$ et $(-i,0)$ dans la carte (t,x). Les formes $\tilde{\Omega}_\infty$ et $\tilde{\Omega}_0$ définissent sur $\tilde{\mathbb{C}}^2 - I \cup I'$ un feuilletage sans singularité dont

$$\tilde{L}_0 = P\mathbb{C}(1) - I \cup I'$$

est une feuille. Pour étudier $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ au voisinage du point I, posons $t = u + i$. On a dans la carte (u,x)

$$\tilde{\Omega}_0 = (2iu + u^2 + x(\ldots))dx + x\,du\,(i+u+x(\ldots))$$

Modulo un changement $u \to u + \alpha x$ son jet d'ordre 1 en I vérifie (2),avec $(p,q) = (2,1)$. Admettons provisoirement que la condition nécessaire de la proposition 2 soit vérifiée , i.e :

Affirmation : L'holonomie de la variété invariante $\tilde{L}_0$ est périodique de période 2.

Le germe de $\tilde{\Omega}_0$ possède une intégrale première du type $U.x^2$ où $U(u,x) \in \mathbb{C}\{u,x\}$ est une équation de la deuxième variété invariante $\tilde{L}'_0$ de $\tilde{\Omega}_0$. La restriction de π à $\tilde{\mathbb{C}}^2 - P\mathbb{C}(1)$ étant un difféomorphisme holomorphe sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$, $L'_0 = \pi(\tilde{L}'_0)$ est une variété intégrale de Ω qui possède la même holonomie que $\tilde{L}'_0$. D'après la condition suffisante de la proposition 2, cette holonomie est périodique de période 1, i.e c'est l'identité.

Dans les coordonnées $(x' = x + iy,\ y' = x - iy)$ le jet d'ordre 1 de Ω s'écrit

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(x'\,dy' + y'\,dx')$$

D'après la proposition 1, Ω possède deux variétés invariantes L_o, tangente à $y' = 0$, et une seconde qui est nécessairement L'_o, tangente à $x' = 0$. Les hypothèses de la proposition 2 sont vérifiées et Ω possède une intégrale première du type

$$F = (x' + \ldots)(y' + \ldots)$$

Dans les coordonnées (x,y) elle s'écrit

$$F = x^2 + y^2 + \ldots$$

La partie réelle $f \in \mathbb{R}\{x,y\}$ de F vérifie

$$\omega \wedge df = 0 \quad , \quad f = x^2 + y^2 + \ldots$$

puisque $\omega = \Omega/\mathbb{R}^2$ et $\Omega \wedge dF = 0$. La conclusion du théorème est alors une conséquence du lemme de division de G. De Rahm [2] .

Démonstration de l'affirmation .La "partie réelle" de $\tilde{\mathbb{C}}^2$, $\pi^{-1}(\mathbb{R}^2) = \tilde{\mathbb{R}}^2$ où $\tilde{\mathbb{R}}^2 \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ est la bande Moëbus , c'est à dire le fibré canonique en droite réelle sur

$$S^1 \simeq P\mathbb{R}(1) \subset P\mathbb{C}(1)$$

La classe d'homotopie du plongement canonique de $P\mathbb{R}(1)$ dans $\tilde{L}_o = P\mathbb{C}(1) - I \cup I'$ est un générateur de son groupe fondamental.

D'autre part la restriction de π à

$$\tilde{\mathbb{R}}^2 - P\mathbb{R}(1) = \pi^{-1}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$$

est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Les courbes intégrales ℓ de ω étant homéomorphes à des cercles, l'intersection $\tilde{\ell}$ d'une feuille $\tilde{L}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ avec $\tilde{\mathbb{R}}^2$ est homéomorphe à un cercle. Plus précisément la restriction de la projection canonique de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ sur $P\mathbb{C}(1)$ à une telle intersection $\tilde{\ell}$ est un revêtement à deux feuillets de $P\mathbb{R}(1) = S^1$. D'après ce qui précède, l'holonomie de $\tilde{L}_o$ est périodique de période 2.

5. Le contre exemple. Il est clair que le germe en $0 \in \mathbb{R}^2$

$$\omega = x^3\,dx + y^3\,dy - \frac{1}{2}x^2 y^2\,dx$$

vérifie iii). D'autre part ω est invariante par la symétrie $(x,y) \to (x,-y)$ Il en est de même pour ses courbes intégrales. Il en résulte que ω vérifie ii) d'après un résultat de Poincaré (voir par exemple [6] page 95).

Montrons que ω ne possède pas d'intégrale première forte. En effet s'il existe $f,g \in \mathbb{R}\{x,y\}$ tels que

$$\omega = g\,df \; ,$$

le point 0 étant une singularité algébriquement isolée de ω_3, on a

$$g = g_0 + g_{1,0}x + g_{0,1}y + \dots \qquad , \text{ avec } g_0 \neq 0$$

$$f = \frac{1}{4 g_0}(x^4 + y^4) + \dots$$

En prenant les termes d'ordre 3 dans l'égalité $d\omega = dg \wedge df$, on en déduit

$$x^2 y \, dx \wedge dy = (g_{1,0}dx + g_{0,1}dy) \wedge (x^3 dx + y^3 dy)$$

Or ceci est impossible puisque x^2y n'appartient pas au $\mathbb{R}$ - sous espace vectoriel de $\mathbb{R}\{x,y\}$ engendré par x^3 et y^3.

Ce contre exemple s'interprète , géométriquement, très facilement. Notons comme dans le paragraphe 4

$$\Omega = x^3 \, dx + y^3 \, dy - \frac{1}{2} x^2 y^2 \, dx$$

le germe en $0 \in \mathbb{C}^2$, complexifié de ω et

$$\pi^*(\Omega) = x^3 \, \tilde{\Omega}_0^2 = x^3[((1+t^4)+x(\dots))dx + x \, dt(\dots)]$$

l'éclaté de Ω dans la carte (t,x). Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ défini par $\tilde{\Omega}_0$ (et $\tilde{\Omega}_\infty$) possède 4 points singuliers,

$$I_k = (e^{\frac{i\pi}{4}(1+2k)}, 0), \quad k = 0,1,2,3$$

Le groupe fondamental de la feuille

$$\tilde{L}_0 = P\mathbb{C}(1) - \bigcup_{k=0}^{3} I_k$$

de $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ n'est plus engendré par le lacet représenté par $P\mathbb{R}(1) \subset P\mathbb{C}(1)$. La condition ii) n'est plus suffisante pour affirmer que l'holonomie correspondant à un lacet d'indice 1 dans $P\mathbb{C}(1)$ autour d'un des points I_k est périodique.

6. Bibliographie.

[1] J. CHAZY : Sur la théorie des centres. *CR Acad. Sc. Paris* 221 (1945) pages 3-10.

[2] G. De RHAM : Sur la division des formes et des courants par une forme linéaire. *Commentari. Math. Hel.* 28 (1954).

[3] A. LYAPUNOV : Etude d'un cas particulier du problème de la stabilité du mouvement. *Mat. Sbornik* 17 (1893) pages 252-333 (Russe)

[4] J.F. MATTEI et R. MOUSSU : Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 4ème série t. 13 (1980) pages 469-523.

[5] H. POINCARE : Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Jour. de Math. Pures et Appli.* (3) 7 (1881) pages 375-422.

[6] G. SANSONE and R. CONTI : Non linear differential equations. *Pergamon Press* (1964) pages 84-95.

Université de Dijon
Département de Mathématiques-ERA 945
B.P. 138
21004 DIJON CEDEX