Astérisque

MICHEL GOZE

Étude locale des courbes algébriques planes

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 245-259

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__245_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 109-110 (1983) p.245-259

ÉTUDE LOCALE DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES

Michel GOZE

L'objet de cet article est d'illustrer les affirmations suivantes

a) à chaque point limité de $\mathbb{C}^2$ est associée une suite standard de transformations quadratiques ;

b) lorsque le point est situé sur une courbe algébrique standard, la suite détermine la branche passant par ce point avec sa multiplicité.

Il en résulte une procédure qui met en évidence toutes les branches de la courbe centrées en un point singulier.

Il est clair que l'on peut utiliser la même technique dans le cas des courbes algébriques réelles, et aussi celui des courbes analytiques.

Elle admet une extension naturelle en dimension quelconque, faisant intervenir une suite de transformations birationnelles de degré égal à la dimension, qui se décomposent chacune en transformations quadratiques mais de manière non naturelle.

Faut-il préciser, mais le lecteur l'aura sans doute deviné, que cette étude se place dans le cadre de l'A.N.S. (précisément sous la forme axiomatique I.S.T.).

I. Décomposition d'un point limité de $\mathbb{C}^2$

I.1. Théorème

Soit M un point limité (*) de $\mathbb{C}^2$, d'ombre M_o. Alors si $M \neq M_o$, il existe deux vecteurs standard V_1 et V_2 linéairement indépendants et des nombres complexes $\varepsilon_1 \sim 0$ et $\varepsilon_2 \sim 0$ tels que

$$M = M_o + \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2$$

les objets dépendent fonctionnellement de M.

Plus précisément, si l'on a deux décompositions de M

$$M = M_o + \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2 = M_o + \varepsilon'_1 V'_1 + \varepsilon'_1\varepsilon'_2 V'_2$$

alors,

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_1\varepsilon_2 & \text{avec } a_1, b_1, a_2 \text{ standard} \\ \varepsilon'_1\varepsilon'_2 = a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 & \text{et } a_1 . a_2 \neq 0 \end{cases}$$

(*) limité signifie qu'aucune composante de M n'est infiniment grande.

et $\begin{cases} V_1 = a_1 V'_1 \\ V_2 = a_2 V'_2 + b_1 V'_1 \end{cases}$

Démonstration

Par hypothèse $M-M_o = (\eta_1, \eta_2)$ avec $\eta_1 \sim \eta_2 \sim 0$. Soit ε_1 le plus grand des deux nombres η_1, η_2 en module (si $|\eta_1| = |\eta_2|$ on peut choisir $\varepsilon_1 = \eta_1$ pour avoir une description fonctionnelle) ; alors $\frac{1}{\varepsilon_1}(M-M_o)$ a une ombre $V_1 \neq 0$ dont l'une des composantes est 1 et $\frac{1}{\varepsilon_1}(M-M_o)-V_1$ est de la forme $\varepsilon_2 V_2$ où V_2 a une composante nulle là où V_1 a une composante égale à 1.

D'où $M = M_o + \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 V_2$.

I.2. Si on itère la procédure pour le point $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{C}^2$ on obtient au bout d'un nombre standard d'opérations

$$M = M_o + P_1(\varepsilon, \varepsilon')V_1 + P_2(\varepsilon, \varepsilon')V_2$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes standard et $\varepsilon \sim \varepsilon' \sim 0$.

I.3. Transformations quadratiques associées au point M

Soit $M = (\eta_1, \eta_2) + M_o = M_o + \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 V_2$ un point limité de $\mathbb{C}^2$. Nous pouvons distinguer plusieurs cas dans la transformation

$$(\eta_1, \eta_2) \to (\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

I.3.1. Supposons $\eta_2 \neq 0$ et $\eta_1 / \eta_2 \sim 0$. Alors

$$\begin{cases} \eta_2 = \varepsilon_1 \\ \eta_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{cases}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que (η_1, η_2) est l'image de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ par la transformation

$$L_1(X,Y) = (XY,X).$$

I.3.2. Supposons $\eta_1 \neq 0$ et $\frac{\eta_2}{\eta_1} \sim 0$ et non nul. La transformation

$$L_2(X,Y) = (X,XY)$$

vérifie $L_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\eta_1, \eta_2)$.

I.3.3. Supposons $\eta_1 \neq 0$ et $\frac{\eta_2}{\eta_1} \sim a$ standard non nul (et $\frac{\eta_2}{\eta_1} \neq a$).

La transformation $L_{3,a}(X,Y) = (X, X(a+Y))$ vérifie

$$L_{3,a}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\eta_1, \eta_2).$$

I.3.4. Si l'une des égalités $\eta_2 = a\eta_1$, $\eta_1 = a\eta_2$, a standard est satisfaite le point M admet une décomposition ([1])

$$M = M_o + \varepsilon_1 V_1$$

et est situé sur la droite standard passant par M_o et de vecteur directeur V_1. (i.e. la droite MM_o est standard).

Remarque - Chacune des transformations L_1, L_2, L_3 est birationnelle (ici quadratique). Si le point M est fixé, il lui correspond une seule de ces transformations (appelée transformation associée à M).

Notons que les transformations L_1 et L_2 correspondent à des éclatements, la transformation $L_{3,a}$ est la composée d'une translation et d'un éclatement.

I.4. Suite de transformations associées à M

A chaque point limité M d'ombre M_o est associée de manière fonctionnelle une suite standard L^i (via le théorème de construction point par point d'applications standard) de transformations du type L_1, L_2, L_3 telles que pour chaque n standard

$$M = L^1 \circ L^2 \circ \ldots \circ L^n(\varepsilon, \varepsilon') \text{ avec } \varepsilon,\ \varepsilon' \sim 0.$$

Notons que s'il existe un entier n standard tel que

$$M = L^1 \circ L^2 \circ \ldots \circ L^{n-1}(\varepsilon, \varepsilon')$$

avec ε/ε' ou ε'/ε standard, le point M est situé sur la courbe standard d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = x_o + P_1(t) \\ y(t) = y_o + P_2(t) \end{cases}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes standard et réciproquement.

II. Transformations d'une courbe algébrique associées à un point de cette courbe

II.1. Soit f(X,Y) un polynôme standard, nul en (0,0) et soit $M \sim (0,0)$ un point situé sur la courbe (C) d'équation f(X,Y) = 0. Soit (L^i) la suite de transformations quadratiques associée à M. On se propose d'étudier les polynômes standard f_n (i.e. les courbes d'équations $f_n(X,Y) = 0$) pour des valeurs standard de n, où f_n est défini par

$$f_n = f \circ L^1 \circ \ldots \circ L^n$$

La courbe (C_n) est birationnellement isomorphe à la courbe (C).

II.2. Soit $M = (\eta_1,\eta_2) \sim (0,0)$ un point de (C) et $M = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2$ une décomposition de M. Si $\varepsilon_2 = 0$, nous avons vu que (C) ou du moins la composante de (C) contenant M est une droite. Sinon

$$(\eta_1,\eta_2) = L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

Proposition - Le vecteur V_1 est un vecteur tangent du cône des tangentes en (0,0) à la courbe (C).

En effet l'ombre de la droite OM est la droite passant par O et de vecteur directeur V_1. Or par définition une tangente du cône des tangentes en O à la courbe (C) est limite dans $P_2(\mathbb{C})$ d'une sous-suite convergente d'une suite (OM_n) où (M_n) est une suite de point de (C) convergent vers O. Le principe de construction montre qu'une telle tangente peut être obtenue comme ombre d'une droite OM où $M \sim (0,0)$ et $M \in (C)$.

II.3. Cas où l'origine est un point régulier

Si l'origine est un point régulier, le vecteur V_1 est le vecteur tangent en (0,0) à la courbe (C). Soit $f_1(X,Y)$ le polynôme standard défini par

$$f_1(X,Y) = f \circ L^1(X,Y).$$

Si $\quad M = (\eta_1,\eta_2)$ et $L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = (\eta_1,\eta_2)$ alors,

$$f_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = f(\eta_1,\eta_2) = 0.$$

Soit $f = h_n + h_{n-1} + \dots + h_1$ la décomposition de f en composantes homogènes. Comme (C) est régulière à l'origine, le polynôme homogène h_1 de degré 1 est non identiquement nul. Les coorodnnées (α_1,α_2) du vecteur V_1 vérifie $h_1(\alpha_1,\alpha_2) = 0$, i.e. $h_1(X,Y) = \alpha_2 X - \alpha_1 Y$. D'où si $M = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2$, $h_1 \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \Delta\varepsilon_1\varepsilon_2$ où $\Delta = \det(V_1,V_2) \neq 0$ et $h_i \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^i(\bar{h}_i(\varepsilon_2))$ où $\bar{h}_i$ est un polynôme standard de degré i. Ainsi

$$f_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^n\bar{h}_n(\varepsilon_2) + \dots + \varepsilon_1^2\bar{h}_2(\varepsilon_2) + \varepsilon_1\bar{h}_1(\varepsilon_2) \text{ avec } \bar{h}_1(0) \neq 0.$$

soit $\quad f_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1\,[\bar{f}_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)]$ avec

$$\bar{f}_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^{n-1}\bar{h}_n(\varepsilon_2) + \dots + \bar{h}_1(\varepsilon_2).$$

Il s'en suit que le polynôme f_1 s'écrit

$$f_1(X,Y) = X\bar{f}_1(X,Y) \text{ avec } \bar{f}_1 \text{ régulier en } (0,0).$$

Soit (C_1) la courbe d'équation $\bar{f}_1(X,Y) = 0$; alors (C_1) est birationnellement isomorphe à (C) et est régulier en l'origine.

Plus généralement, le polynôme $f_n(X,Y) = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1(X,Y)$ s'écrit

$$f_n(X,Y) = X^n\bar{f}_n(X,Y).$$

Supposons que la courbe (C_n) d'équation $\bar{f}_n(X,Y) = 0$ soit régulière à l'origine, un calcul analogue au précédent montre que le polynôme $f_{n+1}(X) = f \circ L^{n+1} \circ \ldots \circ L^1(X,Y)$ s'écrit $f_{n+1}(X) = X \,.\, \bar{f}_{n+1}(X,Y)$, et la courbe (C_{n+1}) d'équation $\bar{f}_{n+1}(X,Y) = 0$ est birationnellement isomorphe à la courbe (C), et est régulière à l'origine. D'où

Proposition - Soit $M \sim (0,0)$ un point d'une courbe algébrique (C) d'équation $f(X,Y) = 0$ régulière en l'origine. Soit (L^i) la suite de transformations quadratiques associées à M. Alors, ou bien M est situé sur une branche de (C) d'équation paramétrique $(x(t) = P_1(t),\ y(t) = P_2(t))$ où P_1 et P_2 sont des polynômes standard, ou bien chacune des courbes (C_n) birationnellement isomorphes à (C) d'équation $\bar{f}_n(X,Y) = 0$ où $f_n(X,Y) = f \circ L^n \circ \ldots \circ L'(X,Y) = X\,\bar{f}_n(X,Y)$ est régulière en l'origine.

Remarque - Supposons que la suite (L^i) ne soit pas finie. Alors $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = L^n \circ \ldots \circ L^2(\varepsilon_1,\varepsilon_2^{(n)})$ est de la forme

$$\varepsilon_2 = P_n(\varepsilon_1)[a_n+\varepsilon_2^{(n)}] \text{ où } a_n \text{ est standard et } \varepsilon_2^{(n)} \sim 0.$$

i.e.
$$\varepsilon_2 = \sum_1^n a_n\varepsilon_1^n + \varepsilon_1^n\varepsilon_2^{(n)}.$$

Cette procédure nous fournit une série standard $\Sigma\, a_nX^n$ qui vérifie formellement $\bar{f}_1(X,\Sigma a_nX^n) = 0$.

De plus pour tout n standard $\varepsilon_2 \sim \sum_1^n a_n\varepsilon_1^n$. La convergence de cette série se montre de manière ordinaire. ELle n'est rien d'autre que la série de Puiseux relative à une équation régulière.

III. Cas où l'origine est un point singulier

III.1. Définissons pour un polynôme standard P(X,Y) nul sur $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ les nombres

$O_1(P)$ = nombre de racines infiniment petites de $P(X,\varepsilon_2)$

$O_2(P)$ = nombre de racines infiniment petites de $P(\varepsilon_1,Y)$.

Si $\ {}^o(P(X,\varepsilon_2)) \not\equiv 0$, (resp ${}^o(P(\varepsilon_1,Y)) \not\equiv 0$), alors $O_1(P)$ (resp $O_2(P)$) correspond à l'ordre du polynôme $Q(X) = {}^oP(X,\varepsilon_2)$ (resp $Q(Y) = {}^o(P(\varepsilon_1,Y))$).

Nous allons étudier l'évolution des ordres des polynômes qui se déduisent des f_i par extraction des facteurs non nuls au point M.

Soit $f = h_n + h_{n-1} + \ldots + h_j$ la décomposition en composante homogène de f. Par hypothèse $\quad d^o\, h_j = j > 1$.

Notons (L^n) la suite des transformations associées à M. Nous supposerons que cette suite n'est pas finie (sinon (C) est birationnellement isomorphe à une droite du plan (I.4)).

Soit $M = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2$ une décomposition de M et L^1 définie par $(\eta_1,\eta_2) = L^n(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Alors

$$f_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = f \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = h_n \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \ldots + h_j \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$
$$= \varepsilon_1^n h_n^1(\varepsilon_2) + \ldots + \varepsilon_1^j h_j^1(\varepsilon_2)$$

où $\quad h_k^1(\varepsilon_2) = \varepsilon_1^{-k} h_k(V_1+\varepsilon_2 V_2)$.

Le polynôme $h_k^1(Y)$ est standard et de degré k.

Comme V_1 est un vecteur tangent du cône des tangentes en O à (C), $h_j^1(0) = 0$. D'où

$$f_1(X,Y) = X^j \bar{f}_1(X,Y) \text{ avec}$$
$$\bar{f}_1(X,Y) = X^{n-j} h_n^1(Y) + \ldots + X h_{j+1}^1(Y) + h_j^1(Y).$$

On se propose de comparer, suivant la nature dela transformation L^1 les ordres $O_1(\bar{f}_1)$, $O_2(\bar{f}_1)$ avec $O_1(f)$ et $O_2(f)$.

Lemme (L_1) - Si L^1 est du type L_1, alors

i) $O_1(\bar{f}_1) = O_2(f) - j$

ii) $O_2(\bar{f}_1) \leqslant O_1(f)$, l'égalité n'ayant lieu que si $h_j(X,Y) = X^j$.

Lemme (L_2) - Si L^1 est du type L_2, alors

i) $O_1(\bar{f}_1) = O_1(f) - j$

ii) $O_2(\bar{f}_1) \leqslant O_2(f)$, l'égalité n'ayant lieu que si $h_j(X,Y) = Y^j$

Lemme (L_3) - Si L^1 est du type L_3, alors

$O_2(\bar{f}_1) \leqslant O_2(f)$, l'égalité n'ayant lieu que si $h_j(X,Y) = (Y-aX)^j$.

Démonstration - voir § III.6.

III.2. Conséquences

Notons $O(P) = \min (O_1(P), O_2(P))$. Si $O(P) = 1$ la courbe d'équation $P(X,Y) = 0$ est régulière en l'origine. Si $O(P) > 1$, les lemmes ci-dessus montrent qu'en général $O(\bar{f}_1) < O(f)$. Les seuls cas où ceci n'a pas lieu sont

cas 1) L^1 du type L_1, $j = O(f)$, $O_2(f) \geqslant 2j$, $h_j(X,Y) = X^j$

cas 2) L^1 du type L_2, $j = O(f)$, $O_1(f) \geqslant 2j$, $h_j(X,Y) = Y^j$

cas 3) L^1 du type L_3, $j = O(f)$, $O_1(\bar{f}_1) > j$, $h_j(X,Y) = (Y-aX)^j$.

Dans chacun de ces cas nous avons $O(\bar{f}_1) = O(f) = j$. Plus précisément

cas 1) $O_2(\bar{f}_1) = j \leqslant O_1(\bar{f}_1)$

cas 2) $O_2(\overline{f}_1) = j \lessdot O_1(\overline{f}_1)$

cas 3) $O_2(\overline{f}_1) = j \leqslant O_1(\overline{f}_1)$

III.3. <u>Cas où</u> $O(\overline{f}_n) > 1$ <u>pour tout n</u>

Dans le paragraphe précédent nous avons mis en évidence 3 cas dans lequels $O(\overline{f}_1) = O(f)$.

Si $\overline{f}_n$ désigne le polynôme défini par $f_n = f \circ L^n \circ \ldots \circ L^1$ après simplification du facteur non nul ($f_n = X^k \overline{f}_n$), supposons que $O(\overline{f}_n) = O(f\ )$ pour tout n (standard), $n > \ell$. Nous allons supposer, pour simplifier les notations que $f_\ell = f$. Alors les cas 1), 2), 3) montrent que la transformation L^2 est du type L_2 ou L_3. Comme $O(\overline{f}_2) = O(f) = j$, on a

1°) si L^2 est du type L_2

i) $O_2(\overline{f}_1) = j < O_1(\overline{f}_1)$

ii) $O_1(\overline{f}_2) = O_1(\overline{f}_1) - j$

iii) $O_2(\overline{f}_2) = O_2(\overline{f}_1) = j$ et $\overline{h}^1_j(X,Y) = Y^j$

2°) si L^2 est du type L_3

i) $O_2(\overline{f}_1) = O_1(\overline{f}_1) = j$

ii) $O_2(\overline{f}_2) = O_2(\overline{f}_1) = j$ et $\overline{h}^1_j(X,Y) = (Y-a_1X)^j$

iii) $O_1(\overline{f}_2) \geqslant j$

où $\overline{h}^1_j(X,Y)$ est la composante homogène de degré j du polynôme $\overline{f}_1$.

Notons que dans le cas 1°) ii, $O_1(\overline{f}_2) = O_1(\overline{f}_1) - j \geqslant j$, sinon $O_1(\overline{f}_2) < j = O(f)$ contraire à l'hypothèse.

Donc si $O(\overline{f}_n) = O(f)$, les transformations L^i, $2 \leqslant i \leqslant n$ sont du type L_2 ou L_3 et il existe un entier standard n_o tel que L^i soit du type L_3.

<u>Proposition</u> – <u>Si</u> $O(\overline{f}_n) = O(f)$ <u>pour tout n standard alors il existe</u> ε_1 et $\varepsilon_2 \sim 0$ <u>tels que</u> $\left(\eta_1 = \varepsilon_1 \text{ et } \eta_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_1^i + \varepsilon_1^n\varepsilon_2\right)$ <u>ou</u> $\left(\eta_1 = \varepsilon_1\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\varepsilon_1^i + \varepsilon_1^{n-1}\varepsilon_2\right), \eta_2 = \varepsilon_1\right)$.

En effet ceci résulte du fait que $f_n = f \circ L^n \circ \ldots \circ L^1$ avec L^i du type L_2 ou L_3 pour tout $i, i \geqslant 2$.

III.4. <u>Conclusion</u>

La discussion précédente peut se résumer en le théorème suivant.

Soit (C) une courbe algébrique d'équation $f(X,Y) = 0$ passant par l'origine et $M = (\eta_1,\eta_2) \sim (0,0)$ un point de (C). Soit (L^n) la suite de transformation associée à M. Supposons que (L^n) ne soit pas finie et notons (C_n) la courbe birationnellement isomorphe à (C) d'équation $\bar{f}_n(X,Y) = 0$, où $\bar{f}_n$ est défini par $f_n = X^k\bar{f}_n(X,Y)$ avec $f_n = f \circ L^n \circ \dots \circ L^1$. Posons $j = O(f)$.

<u>Théorème - Il existe un entier standard</u> n_o <u>tel que ou bien</u>

1) $O(\bar{f}_{n_o}) = 1$, <u>ou bien</u>

2) $O(\bar{f}_n) = O(\bar{f}_{n_o}) \leqslant j$ <u>pour tout</u> $n \geqslant n_o$.

<u>Si</u> $(\eta_1,\eta_2) = L^{n_o+1} \circ \dots \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ <u>alors</u> $\varepsilon_2 = \sum_{i>1} a_i\varepsilon_1^i$, <u>la série standard</u> $\sum a_iX^i$ <u>étant convergente</u>.

III.5. <u>Paramétrage (ou branche) associé à M</u>

D'après le théorème ci-dessus, les coordonnées du point M s'écrivent $(\eta_1,\eta_2) = L^{n_o+1} \circ \dots \circ L^1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 = \sum a_i\varepsilon_1^i$, c'est-à-dire

$$\eta_1 = P_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

$$\eta_2 = P_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \text{ avec } \varepsilon_2 = \sum a_i\varepsilon_1^i$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes standard définis à partir des transformations associées à M.

Il s'en suit, par permanence, un paramétrage de la courbe. (la permanence "autorise" le remplacement de ε_1 par un paramètre complexe t !).

Ainsi tout point M infiniment proche de l'origine détermine, par ses transformations associées, un paramétrage de la courbe. Un tel paramétrage détermine par définition une branche de (C). Dans le cas des hypothèses du théorème III.3.2° nous dirons que la branche (associée à M) est d'ordre $j_o = o(\bar{f}_{n_o})$.

<u>Conséquence</u> - Si M parcourt $h(O) \cap (C)$, où h(O) est le halo de l'origine, nous décrivons de façon systématique (et algorithmique car seules les trois transformations sont possibles pour une courbe $\bar{f}_n$ donnée) toutes les branches de la courbe (C). La multiplicité de ces branches est donnée par la procédure aboutissant au théorème III.3.

III.6. <u>Démonstration des lemmes L_1, L_2 et L_3</u>

III.6.1. <u>Démonstration de L_1</u>

Par hypothèse $M = (\eta_1,\eta_2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ et $V_1 = (0,1)$.

Soit $f = h_n + h_{n-1} + \dots + h_j$ avec h_p homogène de degré p.

On a $f(\eta_1,\eta_2) = f(\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon_1) = h_n(\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon_1) + \dots + h_j(\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon_1) = 0$.

Comme h_p est homogène, $h_p(\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon_1) = \varepsilon_1^p h_p^1(\varepsilon_2)$ avec $d^o h_p^1 = p$.

Si $\overline{f}_1 = X^{-j} f \circ L_1$, on a

$$\overline{f}_1(X,Y) = X^{n-j} h_n^1(Y) + \ldots + X h_{j+1}^1(Y) + h_j^1(Y).$$

Par définition $O_1(f) = \inf \{k,\ h_{j+k}(X,0) \not\equiv 0\}$

$$O_2(f) = \inf \{k,\ h_{j+k}(0,Y) \not\equiv 0\}.$$

Comme $h_j(0,1) = 0$, $O_2(f) > j$.

Or $O_1(\overline{f}_1) = -j + \min \{k \ / \ h_{j+k}^1(0) \neq 0\} = -j + O_2(f)$

et $O_2(\overline{f}_1) =$ ordre du polynôme $h_j^1 < j < O_1(\overline{f}_1)$.

Si $O_2(\overline{f}_1) = j$, alors $h_j^1(Y) = Y^j$, d'où $h_j(X,Y) = X^j$.

d'où le lemme.

III.6.2. <u>Démonstration des lemmes L_2 et L_3.</u>

Notons que la transformation L_2 correspond à une transformation du type $L_{3,a}$ avec $a = 0$. Ainsi dans cette démonstration nous considérerons les transformations $L(X,Y) = (X, X(a+Y))$ avec a nul ou pas.

On a $M = (\eta_1,\eta_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_1(a+\varepsilon_2))$ et $V_1 = (1,a)$.

En reprenant les notations de III.5.1. nous obtenons de même

$$\overline{f}_1(X,Y) = X^{n-j} h_n^1(Y) + \ldots + X h_{j+1}^1(Y) + h_j^1(Y)$$

Comme $h_j(1,a) = 0$, $O_1(f) > j$, l'égalité n'ayant lieu que si $a \neq 0$. ALors

$$O_1(\overline{f}_1) = \inf \{k \ / \ h_{j+k}^1(0) \neq 0\} - j$$

et $$O_2(\overline{f}_1) = \text{ordre de } h_j^1(Y) < j < O_2(f).$$

Si $O_2(\overline{f}_1) = j$ alors $h_j^1(Y) = Y^j$, i.e. $h_j(X,Y) = (Y-aX)^j$ et

$$O_2(f) = O_1(f) = j \text{ si } a \neq 0$$

$$\text{ou } O_2(f) = j \text{ si } a = 0.$$

Déterminons enfin $O_1(\overline{f}_1)$ dans le cas où $a = 0$.

$$O_1(\overline{f}_1) = \inf \{k \ / \ h_{j+k}^1(0) \neq 0\} - j.$$

Or si $a = 0$, $h_{k+k}^1(0) \neq 0 \leftrightarrow h_{j+k}(X,0) \neq 0$, d'où

$$O_1(\overline{f}_1) = O_1(f) - j.$$

Notons que si $a \neq 0$, cette équivalence est fausse.

En effet si l'on a par exemple $O_1(f) = O_2(f) = j$, alors

$$h_j(X,0) \neq 0 \text{ et } h_j^1(0) = 0.$$

Dans ce cas $O_1(\overline{f}_1) = \inf \{k, k > 1 \ / \ h_{j+k}(X,a) \neq 0\}$ car $h_j(X,a) = 0$.

D'où les lemmes.

IV. Transformations associées à M et désingularisation

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que pour un point $M \sim (0,0)$ donné , les transformations associées à M permettaient de trouver le paramétrage de la branche passant par M. Deux cas se distinguant

Cas 1 $\qquad \exists^{st}\, n_o$ tel que $O(\bar{h}_{n_o}) = 1$.

Cas 2 $\qquad \nexists^{st}\, n_o$ tel que $\forall n,\ n > n_o\ O(\bar{f}_n) = O(\bar{f}_{n_o})$.

Dans le cas 1, la courbe (C_{n_o}) d'équation $\bar{f}_{n_o}(X,Y) = 0$ est régulière à l'origine ; il en est de même de toutes les courbes (§ II) (C_n) d'équation $\bar{f}_n(X,Y) = 0$ pour tout $n \geqslant n_o$. Nous avons dans ce cas désingularisé la courbe (C) et la courbe (C_{n_o}) correspondant au plus petit entier (standard) n_o t_q (C_{n_o}) soit régulière le nom de désingularisée "minimale".

Dans le cas 2, aucune des courbes (C_n) n'est désingularisée. Ceci n'empêchant nullement de trouver le paramétrage. Or d'après la discussion des paragraphes III.2. et III.3., il s'en suit que le paramétrage de la courbe (C_{n_o}) est tel que l'origine se comporte comme un point régulier. Comme le vecteur tangent est d'ordre $j = O(f_{n_o})$, la courbe (C_{n_o}) "passe j fois" par l'origine, i.e. son équation est de la forme $0 = \bar{f}_{n_o}(X,Y) = (\bar{g}(X,Y))^j$, où $g(X,Y) = 0$ détermine une courbe (de même paramétrage que C_{n_o}) régulière en l'origine. Ainsi le polynôme $f(X,Y)$ est non réduit. La courbe $(\bar{C})$ d'équation $g(X,Y) = 0$ est dans ce cas la désingularisée de (C).

V. Exemples

V.1. Les coniques

Soit (C) une conique dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$ définie par l'équation $f(X,Y) = 0$, où $f(X,Y)$ est un polynôme à coefficients complexes de degré 2. Soit M_o un point standard de (C), la conique étant supposée standard, i.e. f est standard. Par un changement convenable des axes de coordonnées, on peut supposer $M_o = (0,0)$ et

$$f(X,Y) = a_o X^2 + a_1 Y^2 + a_2 XY + a_3 X$$

Soit M une perturbation de M_o et $M = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 V_2$ une décomposition de M. Posons

$$V_1 = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ et } V_2 = (\beta_1, \beta_2).$$

Si M est située sur la conique, on obtient l'équation

$$a_o(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1)^2+a_1(\varepsilon_1\alpha_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_2)^2 + a_2(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1)(\varepsilon_1\alpha_2+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_2)+a_3(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1)=0$$

Soit, en développant

$$\varepsilon_1^2\left[(a_o\alpha_1^2+a_1\alpha_2^2+a_2\alpha_1\alpha_2)+\varepsilon_2(2a_o\alpha_1\beta_1+2a_1\alpha_2\beta_2+a_2\alpha_1\beta_2+a_2\alpha_2\beta_1)+\varepsilon_2^2(a_o\beta_1^2+a_1\beta_2^2+a_2\beta_1\beta_2)\right]$$

$$+\ \varepsilon_1(a_3\alpha_1+\varepsilon_2 a_3\beta_1) = 0$$

Après division par ε_1 et par passage à l'ombre on obtient

$$a_3\alpha_1 = 0$$

Supposons $a_3 \neq 0$, on a alors $\alpha_1 = 0$ et le vecteur V_1 peut être choisi égal à (0,1). On peut ainsi prendre comme vecteur V_2 le vecteur (1,0) car sa seule vertu est d'être linéairement indépendant de V_1.

L'équation f(M) = 0 se réduit donc à

$$\varepsilon_1(a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_2^2 a_o) + \varepsilon_2 a_3 = 0 \qquad (1)$$

Cette équation représente la conique dans le repère "mobile" $(V_1,\varepsilon_1 V_2)$. Ainsi, la courbe (C_1) d'équation $\bar{f}_1(X,Y) = X(a_1+a_2Y+a_3Y^2) + a_3Y = 0$ est la transformée de (C) par l'isomorphisme birationnel

$$L^1(X,Y) = (XY,X).$$

Si $a_1 = 0$, alors d'après (1) $\varepsilon_2 = 0$ (sinon f est identiquement nulle). Le point M est donc uneperturbation de longueur 1 ; la droite M_oM est une tangente en M_o à (C) entièrement contenue dans (C) ; la conique est par conséquent dégénérée.

Supposons $a_1 \neq 0$. De l'équation (1) on déduit $\varepsilon_1 = -a_3\varepsilon_2 \;/\; (a_1+a_2\varepsilon_2+a_o\varepsilon_2^2)$.
Les coordonnées du point M sont donc

$$X = -a_3\varepsilon_2^2 \;/\; (a_1+a_2\varepsilon_2+a_o\varepsilon_2^2)$$
$$Y = -a_3\varepsilon_2 \;/\; (a_1+a_2\varepsilon_2+a_o\varepsilon_2^2).$$

Via le principe de permanence on en déduit le paramétrage suivant de la conique (C)

$$X = -a_3t^2 \;/\; (a_1+a_2t+a_ot^2)$$
$$Y = -a_3t \;/\; (a_1+a_2t+a_ot^2)$$

ce qui montre que toute conique est rationnelle (admet un paramétrage rationnel).

Remarque - Nous avons supposé que le coefficient a_3 était non nul. Dans le cas contraire, l'équation de (C) se réduit à

$$f(X,Y) = a_oX^2 + a_1Y^2 + a_2XY = 0.$$

Un tel polynôme n'est pas irréductible ; la conique est dans ce cas réunion de deux droites.

V.2. Les cubiques

1° Exemple - le cusp $X^3 - Y^2 = 0$

L'origine est un point singulier (il n'y a pas de terme de degré 1).

Soit M une perturbation de l'origine ; considérons une décomposition

$$M = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2 \text{ avec } V_1 = (\alpha_1,\alpha_2) \text{ et } V_2 = (\beta_1,\beta_2).$$

Le point M est sur la courbe si et seulement si

$$\varepsilon_1^2(\alpha_2+\varepsilon_2\beta_2)^2 - \varepsilon_1^3(\alpha_1+\varepsilon_2\beta_1)^3 = 0$$

ce qui donne

$$\alpha_2^2 = 0$$

$$2\varepsilon_2\alpha_2\beta_2 + \varepsilon_2^2\beta_2^2 = \varepsilon_1(\alpha_1+\varepsilon_2\beta_1)^3.$$

Ainsi le vecteur $V_1 = (1,0)$ est vecteur directeur de la tangente (double) de la courbe à l'origine.

Si on choisit pour V_2 le vecteur $(0,1)$, l'équation ci-dessus se réduit à

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1.$$

Le point M admet donc pour coordonnées $\eta_1 = \varepsilon_2^2$, $\eta_2 = \varepsilon_2^3$.

Par permanence, on déduit que $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ est un paramétrage de la courbe. Le comportement local de (C) autour de l'origine est déterminé par ce paramétrage. La courbe tourne 2 fois sur le cercle $|X| = |\varepsilon_2|$ et 3 fois sur le cercle $|Y| = |\varepsilon_2|$. Considérons la courbe (C_1) d'équation $\bar{f}_1(X,Y) = X-Y^2 = 0$. Le calcul précédent montre que le halo de l'origine est représentatif du halo de la singularité du cusp. Elle se déduit de l'équation $X^3 - Y^2 = 0$ par la transformation

$$L^1(X,Y) = (X,XY).$$

Nous avons par cette transformation (quadratique) désingularisé le cusp, la parabole $Y^2 = X$ est donc l'équation de la surface de Riemann associée à $X^3 - Y^2 = 0$ qui est homéomorphe à une sphère dans le projectif $P^2(\mathbb{C})$.

2° Exemple - $X^3 - Y^2 - X = 0$

Contrairement à l'exemple précédent, cette cubique ne comporte aucun point singulier.

Le point à l'infini est aussi régulier ; ceci se voit, soit par une transformation qui le ramène par exmeple en l'origine des coordonnées, soit en se plaçant dans le plan projectif par homogénéisation de l'équation.

Nous allons donc étudier le comportement d'une perturbation d'un point quelconque de la courbe. Comme tous les points se ressemblent, autant se placer à l'origine des coordonnées qui n'est nullement privilégiée, alors que dans le cas du cusp c'était l'unique point singulier.

Soit $M = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 V_2$ une perturbation de l'origine. On a donc

$$\varepsilon_1^3(\alpha_1+\varepsilon_2\beta_1)^3 - \varepsilon_1^2(\alpha_2+\varepsilon_2\beta_2)^2 - \varepsilon_1(\alpha_1+\varepsilon_2\beta_1) = 0$$

Par passage à l'ombre, on trouve $\alpha_1 = 0$.
Le vecteur V_1, tangent en 0 à la courbe, peut donc être choisi égal à (0,1).
Prenons $V_2 = (1,0)$.
L'équation ci-dessus se réduit alors à

$$\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0.$$

Ceci montre que ε_1 ne saurait s'exprimer rationnellement en fonction de ε_2. Par contre une telle équation polynomiale en ε_1, à coefficients dépendant de ε_2 admet une unique solution infiniment petite, l'ombre d'un tel polynôme se réduisant à $X = 0$. Une telle solution est développable en série entière en ε_2. En effet posons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2(-1 + \varepsilon_1').$$

On obtient $\varepsilon_2^5(-1+\varepsilon_1')^2 - \varepsilon_2\varepsilon_1' = 0$, soit $\varepsilon_2^4(-1 + \varepsilon_1')^2 = 0$.
Posons $\varepsilon_1' = \varepsilon_2^4(-1 + \varepsilon_1'')$. On obtient $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2^4(-2 + \varepsilon_1''')$ d'où $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_2^5 - 2\varepsilon_2^9 + \varepsilon_2^9\varepsilon'''$.
La série s'obtient par itération. On trouve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2(\Sigma\, a_n \varepsilon_2^{4n})$. Une telle série est convergente. Par permanence on a le paramétrage suivant

$$X = -t^2 - t^6 - 2t^{10} + \dots$$
$$Y = -t - t^5 - 2t^9 + \dots$$

Un tel paramétrage n'est évidemment pas unique ; en changeant de représentant de la décomposition associée à M, on trouve un autre paramétrage (qui est équivalent).
Notons que l'on peut également paramétrer la courbe en développant ε_2 en fonction de ε_1. On trouve dans ce cas le développement de Puiseux.

$$X = -s^2 + s^6 - 3s^{10} + \dots$$
$$Y = s.$$

<u>3° Etude générale des cubiques</u>

Soit (C) une cubique dont l'équation, après changement de repère s'écrit

$$f(X,Y) = a_0X^3 + a_1Y^3 + a_2X^2Y + a_3XY^2 + a_4X^2 + a_5Y^2 + a_6XY + a_7X = 0.$$

SOit M une perturbation de l'origine et $\varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 V_2$ une décomposition. Si $V_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $V_2 = (\beta_1, \beta_2)$, l'équation $f(M) = 0$ donne, par passage à l'ombre,

$$a_7\alpha_1 = 0.$$

Supposons dans un premier temps $a_7 \neq 0$ (l'origine est un point régulier). On a alors $\alpha_1 = 0$, d'où $V_1 = (0,1)$ et $V_2 = (1,0)$. Soit $\bar{f}_1(X,Y) = Xf \circ L^1(X,Y)$ avec $L^1(X,Y) = (XY,X)$; on a

$$\bar{f}_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^2(a_o\varepsilon_2^3 + a_2\varepsilon_2^2 + a_3\varepsilon_2 + a_1) + \varepsilon_1(a_4\varepsilon_2^2 + a_6\varepsilon_2 + a_5) + a_7\varepsilon_2 = 0. \qquad (1)$$

La suite de transformation associé à $M = (\eta_1,\eta_2)$ permet d'écrire

$$\eta_1 = \varepsilon_2(\Sigma\, r_i\varepsilon_2^i)$$
$$\eta_2 = \Sigma\, r_i\varepsilon_2^i$$

ce qui donne par permanence un paramétrage de la cubique.

Proposition - Tout point régulier d'une cubique est le centre d'un paramétrage.

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'origine était un point régulier ($a_7 \neq 0$). Considérons maintenant le cas contraire ; $a_7 = 0$, l'origine est donc point double.

Proposition - Si l'origine est un point singulier, alors ε_1 s'écrit rationnellement en fonction de ε_2.

Démonstration - Si $a_7 = 0$, l'équation (1) s'écrit

$$\bar{f}_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^2(a_o\varepsilon_2^3 + a_2\varepsilon_2^2 + a_3\varepsilon_2 + a_1) + \varepsilon_1(a_4\varepsilon_2^2 + a_6\varepsilon_2 + a_5) = 0$$

d'où $\quad a_5 = 0$ et $\varepsilon_1 = -(a_6\varepsilon_2 + a_4\varepsilon_2^2) / (a_1 + a_3\varepsilon_2 + a_2\varepsilon_2^2 + a_o\varepsilon_2^3)$.

Corollaire - Si la cubique possède un point singulier, elle est rationnelle.

Ceci est une conséquence du principe de permanence. Notons que si l'origine est un point singulier de la cubique, il ne saurait y avoir d'autres points singuliers. En effet la transformation (quadratique) L^1 entre la cubique et la courbe (C_1) d'équation

$$X(a_oY^3 + a_2Y^2 + a_3Y + a_1) + (a_4Y^2 + a_6Y) = 0$$

ne perturbe pas la régularité des points du plan fini ; or (C_1) ne possède qu'une singularité à l'infini, qui est "l'image" de la singularité en 0 de (C).

Proposition - Si une cubique admet un paramétrage rationnel, elle est singulière.

Démonstration - Si la cubique est rationnelle, il existe un point M_o de (C) tel que pour toute décomposition $M_o + \varepsilon_1V_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2V_2$ d'une perturbation M de M_o située sur (C), ε_1 s'exprime rationnellement en fonction de ε_2.(*) Supposons $M_o = (0,0)$; alors la proposition est une conséquence du lemme suivant.

Lemme - Si l'origine est un point régulier, et si ε_1 s'écrit rationnellement en fonction de ε_2, alors $\varepsilon_1 = a\varepsilon_2 / (b+c\varepsilon_2 + d\varepsilon_2^2)$.

(*). car M est sur une cubique (paramétrage par des polynômes de d°<3 dans le projectif

Si l'on a positionné les axes de manière à rendre la tangente en O horizontale, l'équation $\overline{f}_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0$ se réduit à

(2) $\varepsilon_1^2(P_3(\varepsilon_2)) + \varepsilon_1(P_2(\varepsilon_2)) + P_1(\varepsilon_2) = 0$ avec P_i polynôme standard de d°i.

Les coordonnées de M étant

$$= \quad \begin{array}{l} \eta_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \eta_2 = \varepsilon_1 \end{array}$$

la cubique (C) a pour équation

$$Y(bY^2 + cXY + d) - aXY^2 = 0 \;;$$

elle n'est pas irréductible.

Démonstration du lemme

Supposons $\varepsilon_1 = h(\varepsilon_2) \,/\, g(\varepsilon_2)$ avec h et g polynôme standard de degré respectif p et r. En remplaçant ε_1 par cette fraction rationnelle dans (2), et en étudiant les termes de plus haut degré en ε_2, on trouve r = p+1. De plus

$$h^2(\varepsilon_2) \,.\, P_3(\varepsilon_2) + h(\varepsilon_2) \,.\, g(\varepsilon_2) \,.\, P(\varepsilon_2) + g^2(\varepsilon_2) \,.\, P_1(\varepsilon_2) = 0$$

Ceci montre que toute racine non nulle de $h(X) = 0$ est aussi racine de $g(X) = 0$. Comme la fraction est irréductible, $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_2^p$.

Si $p > 1$, alors le terme constant de g(X) est nul (passage à l'ombre après division par ε_2) et la fraction n'est pas irréductible, d'où p = 1, ce qui démontre le lemme.

Conclusion - Il existe deux classes de cubiques modulo les transformations associées à une décomposition d'une perturbation

1) les cubiques rationnelles (ayant un point double)
2) les cubiques régulières.

RÉFÉRENCES

[1] ABHYANKAR S.S., American Math. Monthly 83 (6) 1976.

[2] CHENCINER A., Courbes algébriques planes, Publication Paris VII, N°4.

[3] GOZE M., Etude locale de la variété des lois d'algèbre de Lie, Publication Mulhouse, N°8, 1982.

[4] LUTZ R., GOZE M., Non Standard Analysis. A Pratical Guide with applications. L.N. N°881, Springer 1981.

Université de Haute Alsace
Département de Mathématique
4, rue des Frères Lumière
68093 MULHOUSE CEDEX