Jacques Harthong

Éléments pour une théorie du continu

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 235-244
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__235_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 109-110 (1983) p.235-244

ÉLÉMENTS POUR UNE THÉORIE DU CONTINU

par

Jacques HARTHONG

Depuis Cantor, Dedekind, et Hilbert, la conviction qu'aucune théorie mathématique du continu n'est possible sans recourir aux ensembles infinis est partagée par la quasi-totalité des mathématiciens.(*) Cette conviction est devenue un dogme d'autant plus prégnant que l'enseignement contemporain de la mathématique met le plus grand soin à évacuer systématiquement la seule connaissance qui eût permis de le relativiser : celle de l'histoire de la mathématique, qui répond à la question comment et pourquoi en est-on arrivé là ?

Il faut donc rappeler certains faits bien oubliés. Lorsque Hilbert a inventé la mathématique formelle, c'était pour pouvoir conserver la théorie cantorienne des ensembles infinis, qui lui paraissait indispensable pour fonder la géométrie et le calcul infinitésimal (dont il ne peut être question de priver la mathématique) et qui sous sa forme primitive était inconsistante (voyez les célèbres paradoxes). L'idée de Hilbert, qui constitue le principe fondamental de la mathématique formelle, fut de nier tout caractère objectal aux ensembles ; seul un système de propriétés détachées de toute intuition resterait objectif, à condition d'être dépourvu de contradiction interne [4] . Oublier cela et croire naïvement que les termes de la théorie formelle des ensembles infinis sont les objets que notre intuition tente de concevoir (comme le continu) est non seulement une erreur que Hilbert n'a pas commise, mais mène tout droit au cercle vicieux dénoncé par le mathématicien L.E.J. Brouwer : c'est que la construction de la mathématique formelle se fait dans le cadre d'une métamathématique qui présuppose au moins la suite intuitive (ou intuitionniste) des entiers naturels. Si après cela la mathématique formelle prétend avoir construit ces mêmes objets qu'elle n'a fait que restituer, elle mystifie. Par contre, si elle prétend fournir une théorie scientifique sur ces objets qui, eux, nous sont donnés en quelque sorte par la nature, elle rend un très grand service à la mathématique. La théorie formelle des ensembles est donc une invention remarquable, mais il faut la prendre pour ce qu'elle est : une théorie, c'est à dire un système logique fabriqué de toutes pièces par l'esprit, et qui permet, à partir d'un petit nombre de principes de base et de concepts, de retrouver par déduction toutes les propriétés observables des objets auxquels elle s'applique. Et puisque les ensembles infinis

---

(*) On notera cependant qu'il y a des exceptions, des mathématiciens qui ne sont pas dupes de ce préjugé ; exemple : Takeuti [2] .

non dénombrables ne sont certainement pas des objets (Hilbert dixit) c'est à son adéquation avec les propriétés observables du continu par exemple qu'on pourra tester la théorie des ensembles. Notons bien que sur ce point, elle a donné jusqu'ici entière satisfaction, sauf qu'elle est bien compliquée.

Ainsi, vue de l'extérieur, par un observateur impartial, mais nécessairement intuitionniste (du seul fait qu'il s'est placé à l'extérieur), la théorie des ensembles n'a pas la même apparence que si on la regarde de son intérieur : elle est relativisée. C'est de l'extérieur qu'on peut poser la question célèbre : "les entiers naïfs remplissent-ils $\mathbb{N}$?"(1) à laquelle Reeb a répondu par la négative.

Je voudrais montrer dans cette communication que cette réponse est liée à un enjeu de taille : si on admet que les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$, la seule théorie des ensembles finis suffit à rendre compte de toutes les propriétés du continu, et il est inutile de recourir à des ensembles non dénombrables.

Au départ nous admettrons donc l'arithmétique formelle de Peano, comportant les concepts bien connus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$; en outre, nous admettrons tout théorème portant sur les ensembles finis de la théorie formelle des ensembles, c'est à dire l'analyse combinatoire. Et bien entendu, la clé sera l'élément ω de $\mathbb{N}$, non naïf.

Posons alors les définitions suivantes :

a) Nous dirons que deux éléments k et ℓ de $\mathbb{Z}$ sont <u>équivalents</u>, $k \simeq \ell$, si pour tout naïf n, $n|k-\ell| \leq \omega$.

b) Nous dirons qu'un élément k de $\mathbb{Z}$ est <u>limité</u> (2) s'il existe un naïf n tel que $|k| \leq n\omega$.

A propos de ces deux définitions, il faut être bien conscient de leur caractère externe : elles ne peuvent être posées que par un intuitionniste qui observe l'arithmétique formelle de l'extérieur, et avec une bienveillance presque paternelle. Pour un esprit dogmatique qui refuse de sortir de sa chère théorie formelle des ensembles, ces définitions n'ont aucun sens.

La définition a) nous fournit, entre éléments de $\mathbb{Z}$, une relation d'équivalence externe (qui n'existe pas dans la théorie des ensembles) et donc aussi des classes d'équivalence (qui ne sont pas des ensembles). Nous appellerons halos ces classes d'équivalence. Puis, nous posons encore la définition :

c) Un <u>nombre réel</u> est le halo d'un élément limité de $\mathbb{Z}$.

Donnons tout de suite des exemples de nombres réels :

1. Les entiers $\omega, 2\omega, 3\omega$, et plus généralement les multiples naïfs de ω, sont limités. Leurs halos sont donc par définition des nombres réels.

2. Considérons l'ensemble $D = \{(k,\ell) \in Z \times Z \mid k^2 + \ell^2 < \omega\}$. Cet ensemble est fini ; donc, d'après un théorème de la théorie des ensembles, son cardinal est un élément a de $\mathbb{N}$; on vérifie facilement que $a \leq 4\omega$, c'est à dire que a est limité. Son halo est donc un nombre réel, que nous appellerons π .

3. ω^{ω} et $(\omega+1)^{\omega+1}$ sont deux éléments de $\mathbb{N}$; on peut faire la division euclidienne du second par le premier : $(\omega+1)^{\omega+1} = \omega^{\omega} b + r$, $0 \leq r < \omega^{\omega}$; en développant $(\omega+1)^{\omega}$ suivant la formule du binôme, un raisonnement d'arithmétique très simple montre que $(\omega+1)^{\omega} \leq 3\omega^{\omega}$, donc b est limité ; son halo est un nombre réel, désigné par le symbole e .

En analyse combinatoire, il est souvent nécessaire de diviser des entiers, et par conséquent il est commode de recourir aux fractions si on veut éviter que l'écriture ne devienne trop lourde. De même que sur Z , on peut définir sur Q une relation d'équivalence externe, des éléments limités, etc :

DÉFINITIONS. Soit $r \in Q$. Nous dirons que r est <u>infiniment petit</u>, ou <u>négligeable</u>, si pour tout naïf n , $n|r| \leq 1$. Nous dirons que r est <u>limité</u> s'il existe un naïf n tel que $|r| \leq n$. Nous dirons que deux éléments r et s de Q sont <u>infiniment voisins</u> (et noterons $r \simeq s$) si $r-s$ est infiniment petit.

A tout nombre rationnel r limité, on peut associer un nombre réel, que nous appellerons son <u>ombre</u> , et que nous noterons $St(r)$: en effet, r s'écrit sous forme de fraction irréductible $r = \frac{p}{q}$ avec $q > 0$. Soit $m(r)$ le quotient euclidien de $p\omega$ par q ; si r est limité dans Q , $m(r)$ est limité dans Z , donc son halo est un nombre réel qui par définition sera l'ombre de r .

Deux rationnels limités et infiniment voisins ont la même ombre (<u>Exercice</u> : le démontrer).

Pour illustrer ces nouvelles notions, et donner une idée des méthodes qu'elles induisent, nous allons les appliquer à un exemple typique : démontrer la formule :

$$St\Big[\frac{1}{\omega}\sum_{k=-\omega^2}^{+\omega^2}\Big(1-\frac{1}{\omega^2}\Big)^{k^2}\Big] = \sqrt{\pi}$$

(N.B. $\sqrt{\pi}$ est par définition le halo de l'entier limité $c = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k^2 < a\omega\}$).

Cette formule est bien comme sous la forme classique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

dont les symboles se traduisent comme ceci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \to \mathrm{St}\Big[\sum_{-\omega^2}^{+\omega^2} \cdots\Big] \ ; \quad x = \mathrm{St}\Big(\frac{k}{\omega}\Big) \ ; \quad e^{-x^2} = \mathrm{St}\Big[\Big(1-\frac{1}{\omega^2}\Big)^{k^2}\Big] \ ;$$

et $dx = \frac{1}{\omega}$.

La démonstration est surtout une affaire de dénombrement, c'est à dire d'analyse combinatoire. Notre formule à démontrer équivaut à dire que l'ombre de

$$\Big[\frac{1}{\omega}\sum_{k=-\omega^2}^{+\omega^2}\Big(1-\frac{1}{\omega^2}\Big)^{k^2}\Big]^2 = \frac{1}{\Omega}\sum_{k=-\Omega}^{+\Omega}\ \sum_{\ell=-\Omega}^{+\Omega}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{k^2+\ell^2} \qquad (\text{avec } \Omega = \omega^2)$$

est égale à π . La somme double ci-dessus est finie ; nous allons regrouper ses termes d'une manière différente, comme ceci :

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{q\geq 0}\Big[\sum_{(k,\ell)\in C_q}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{k^2+\ell^2}\Big]$$

où C_q est l'ensemble $\{(k,1) \in Z \times Z \mid q^2\varepsilon^2 \leq k^2+\ell^2 < (q+1)^2\varepsilon^2 \ , \ |k| \leq \Omega \ , |\ell| \leq \Omega\}$ ε étant un élément de $\mathbb{N}$ qui reste à déterminer par la suite. On remarquera que dans la somme ci-dessus, les termes correspondants aux grandes valeurs de q donnent une contribution négligeable ; de façon précise, pour $N \in \mathbb{N}$, nous pouvons dire que si $(k,\ell) \in C_q$, avec $q > 2N$, alors $k^2+\ell^2 > 4N^2\varepsilon^2$, donc nécessairement $|k| > N\varepsilon$ ou $|\ell| > N\varepsilon$, ce qui implique :

$$\sum_{q>2N}\Big[\sum_{(k,\ell)\in C_q}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{k^2+\ell^2}\Big] \leq \sum_{|k|>N\varepsilon \text{ ou } |\ell|>N\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{k^2+\ell^2}$$

$$\leq \sum_{|k|>N\varepsilon}\Big[\sum_{|\ell|>N\varepsilon} + \sum_{\ell\in Z}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{k^2+\ell^2}\Big] \leq 2\sum_{|k|>N\varepsilon}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{k^2} . \sum_{\ell\in Z}\Big(1-\frac{1}{\Omega}\Big)^{\ell^2}$$

(nous omettons d'indiquer les bornes supérieures de sommation, mais il faut garder à l'esprit que ces sommes sont toujours finies). On peut encore majorer :

$$\sum_{|k|>N\epsilon} (1-\frac{1}{\Omega})^{k^2} = 2\sum_{j\geq 1} (1-\frac{1}{\Omega})^{(N\epsilon+j)^2} = 2(1-\frac{1}{\Omega})^{N^2\epsilon^2} \sum_{j\geq 1} (1-\frac{1}{\Omega})^{2N\epsilon j+j^2}$$

$$\leq 2(1-\frac{1}{\Omega})^{N^2\epsilon^2} \sum_{j\geq 1} (1-\frac{1}{\Omega})^{2N\epsilon j} \leq 2(1-\frac{1}{\Omega})^{N^2\epsilon^2} \cdot \frac{1}{1-(1-\frac{1}{\Omega})^{2N\epsilon}}$$

(la dernière inégalité résultant de l'identité $\sum_{j=0}^{n} X^j = \frac{1-X^n}{1-X}$) . Il est bien clair que $(1-\frac{1}{\Omega})^{2N\epsilon} \leq 1-\frac{1}{\Omega}$, donc :

$$\sum_{|k|>N\epsilon} (1-\frac{1}{\Omega})^{k^2} \leq 2\Omega\,(1-\frac{1}{\Omega})^{N^2\epsilon^2}$$

et $$\sum_{\ell\in Z} (1-\frac{1}{\Omega})^{\ell^2} \leq 2\Omega \quad .$$

Par conséquent, d'après ce qui précède

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{q>2N}\Big[\sum_{(k,\ell)\in C_q} (1-\frac{1}{\Omega})^{k^2+\ell^2}\Big] \leq 8\Omega\,(1-\frac{1}{\Omega})^{N^2\epsilon^2} \quad .$$

Il suffit donc de choisir N assez grand pour que $\Omega(1-\frac{1}{\Omega})^{N^2\epsilon^2} \simeq 0$

Autrement dit, si N est assez grand, on ne change pas l'ombre en ne retenant dans la somme que les termes correspondants à $q \leq 2N$. D'autre part, si $(2N+1)\epsilon \leq \Omega$ (ce qui sera à fortiori vérifié si par exemple $N\epsilon \ll \Omega$), les entiers k et ℓ tels que $k^2+\ell^2 < (q+1)^2\epsilon^2$ vérifieront automatiquement les inégalités $|k| \leq \Omega$ et $|\ell| \leq \Omega$, tant que $q \leq 2N$; de sorte que les ensembles C_q s'écriront plus simplement :

$$C_q = \{(k,\ell) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid q^2\epsilon^2 \leq k^2+\ell^2 < (q+1)^2\epsilon^2\} \quad .$$

Nous allons maintenant estimer le cardinal de C_q , c'est à dire le dénombrer approximativement . Pour cela, posons pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$D_m = \{(p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid p^2+q^2 < m^2\omega\} \quad .$$

Pour $m = 1$, cet ensemble n'est autre que D , dont le cardinal est a , l'entier introduit plus haut, qui a pour halo π . Désignons par $\theta = \sqrt{\omega}$ la racine carrée entière de ω :

$$\theta = \max \{k \in \mathbb{N} \mid k^2 \leq \omega\} .$$

Pour simplifier, nous pouvons même (mais ce n'est pas indispensable) supposer que ω est un carré parfait, de sorte que $\omega = \theta^2$. Si nous choisissons ε parmi les multiples de θ, et si nous prenons $m = \frac{q\varepsilon}{\theta}$, nous voyons que $C_q = D_{m+\frac{\varepsilon}{\theta}} - D_m$.

Pour dénombrer les C_q, il suffit donc de dénombrer les D_m. Pour cela, nous allons démontrer :

LEMME. <u>Soient les ensembles finis</u> :

$$A_m = \{(km+r, \ell m+s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid k^2+\ell^2<\omega \ ; \ kr \geq 0, \ell s \geq 0; \ 0 \leq |r| < m, 0 \leq |s| < m\}$$

$$B_m = \{(km-r, \ell m-s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid k^2+\ell^2<\omega \ ; \ kr \geq 0 \ ; \ell s \geq 0; \ k \neq 0 \ ; \ell \neq 0; \ 0 \leq |r| < m, \ 0 \leq |s| < m\} .$$

Alors : a) $B_m \subset D_m \subset A_m$

b) $\text{card } B_m = m^2(a - 4\theta + 3)$

$\text{card } A_m = m^2(a + 4\theta - 1)$.

<u>Démonstration du lemme</u> :

a) Soit $(km-r, \ell m-s) \in B_m$; puisque kr et ℓs sont ≥ 0, $(km-r)^2 = (|k|m - |r|)^2$ et de même $(\ell m-s)^2 = (|\ell|m-|s|)^2$; puisque $|r|$ et $|s|$ sont $< m$ et $m \geq 1$, $(|k|m-|r|)^2 \leq k^2m^2$ et $(|\ell|m-|s|)^2 \leq \ell^2m^2$; donc :

$$(km - r)^2 + (\ell m - s)^2 \leq (k^2 + \ell^2)m^2 < \omega m^2$$

qui signifie que $(km-r, \ell m-s) \in D_m$; ainsi $B_m \subset D_m$.

Soit maintenant $(p,q) \in D_m$; on peut toujours faire la division euclidienne de $|p|$ et $|q|$ par m, de sorte que $p = km + r$ et $q = \ell m + s$, où p,k,r d'une part, et q, ℓ, s d'autre part ont même signe ; dans ce cas $kr \geq 0$, $\ell s \geq 0$, $0 \leq |r| < m$, $0 \leq |s| < m$. Enfin, par hypothèse $p^2 + q^2 < m^2 \omega$, c'est à dire :

$$(km + r)^2 + (\ell m + s)^2 < m^2\omega$$

ou encore, en développant le premier membre :

$$(k^2 + \ell^2)m^2 + 2m(kr + \ell s) + r^2 + s^2 < m^2\omega .$$

Puisque $2m(kr + \ell s) + r^2 + s^2 \geq 0$, cela n'est possible que si $k^2 + \ell^2 < \omega$, c'est à dire si $(p,q) \in A_m$.

b) Soit $X = \{(k,\ell) \in D \mid k = 0$ et $\ell \neq 0$, ou $k \neq 0$ et $\ell = 0\}$; puis considérons l'application :

$$J : \begin{array}{ccc} B_m & \longrightarrow & D \times \{0,1,2,\ldots,m-1\} \times \{0,1,2,\ldots,m-1\} \\ (km-r, \ell m-s) & \longrightarrow & (k,\ell \ ; \ |r|,|s|) \end{array}$$

cette application est injective, le signe de r et s étant toujours déterminé par les relations $kr \geq 0$, $\ell s \geq 0$, puisque $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$. Par contre elle n'est pas surjective, car les couples $(km-r, \ell m-s)$ tels que $k = 0$ ou $\ell = 0$ ne sont pas dans B_m ; nous pouvons donc écrire l'égalité (en posant $M = \{0,1,2,\ldots, m-1\}$) :

$$D \times M^2 = \mathfrak{Im}(J) \cup X \times M^2 \cup \{(0,0)\} \times M^2$$

d'où on déduit :

$$\text{card } D \times M^2 = \text{card } \mathfrak{Im}(J) + \text{card } X \times M^2 + \text{card } \{(0,0)\} \times M^2$$

c'est à dire :

$$m^2 a = \text{card } B_m + [4(\theta-1) + 1]m^2$$

ce qui donne bien le résultat de l'énoncé.

Pour dénombrer A_m, introduisons l'application :

$$K : \begin{array}{ccc} A_m & \longrightarrow & D \times M \times M \\ (km+r, \ell m+s) & \longrightarrow & (k,\ell \ ; \ |r|,|s|) \end{array}$$

qui cette fois est surjective, mais non injective ; toutefois elle est injective en tout point de A_m tel que $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$, car dans ce cas les relations $kr \geq 0$ et $\ell s \geq 0$ déterminent le signe de r et s ; K est donc injective sur $A_m - X - \{(0,0)\}$. Sur X il y a deux points qui ont la même image : $(\pm r, \ell m+s)$ si $k = 0$ et $\ell \neq 0$, $(km+r, \pm s)$ si $k \neq 0$, $\ell = 0$; en $(0,0)$ il y a quatre points qui ont la même image : $(\pm r, \pm s)$. Donc :

$$\begin{aligned} \text{card } A_m &= \text{card } D \times M^2 + \text{card } X \times M^2 + 3 \text{ card } \{(0,0)\} \times M^2 \\ &= m^2[a + 4(\theta-1) + 3] = m^2(a + 4\theta - 1) \ . \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. On remarquera qu'elle utilise exclusivement des techniques d'analyse combinatoire.

De ce lemme nous déduisons les inégalités suivantes :

$$m^2(a - 4\theta) \le \text{card } D_m \le m^2(a + 4\theta)$$

en conséquence desquelles on obtient, puisque $C_q = D_{(q+1)\frac{\varepsilon}{\theta}} - D_{q\frac{\varepsilon}{\theta}}$:

$$(2q+1)a\,\frac{\varepsilon^2}{\theta^2} - 4[(q+1)^2 + q^2]\,\frac{\varepsilon^2}{\theta} \le \text{card } C_q \le (2q+1)a\,\frac{\varepsilon^2}{\theta^2} + 4[(q+1)^2 + q^2]\,\frac{\varepsilon^2}{\theta}\ .$$

Par ailleurs, les inégalités suivantes sont immédiates :

$$\text{card } C_q.(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{(q+1)^2\varepsilon^2} \le \sum_{(k,\ell)\in C_q} (1 - \tfrac{1}{\Omega})^{k^2+\ell^2} \le \text{card } C_q.(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{q^2\varepsilon^2}\ .$$

Et enfin, en développant $(1 - \frac{1}{\Omega})^{(2q+1)\varepsilon^2}$ suivant la formule du binôme, et en majorant les termes d'ordre supérieur au second, on obtient, si $q\varepsilon^2 \ll \Omega$:

$$\left|(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{q^2\varepsilon^2} - (1 - \tfrac{1}{\Omega})^{(q+1)^2\varepsilon^2} - \frac{(2q+1)\varepsilon^2}{\Omega}(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{q^2\varepsilon^2}\right| \le 2(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{q^2\varepsilon^2}.\frac{(2q+1)^2\varepsilon^4}{\Omega^2}$$

En regroupant ces inégalités membre à membre, il vient en définitive :

$$[(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{(q+1)^2\varepsilon^2} - (1 - \tfrac{1}{\Omega})^{(q+2)^2\varepsilon^2}]\frac{a}{\omega} - [\frac{2(2q+1)^2\varepsilon^4}{\omega^4} + \frac{8(q+1)^2\varepsilon^2}{\theta^5}] \le \frac{1}{\Omega} \sum_{(k,\ell)\in C_q} (1 - \tfrac{1}{\Omega})^{k^2+\ell^2}$$

$$\le [(1 - \tfrac{1}{\Omega})^{q^2\varepsilon^2} - (1 - \tfrac{1}{\Omega})^{(q+1)^2\varepsilon^2}]\frac{a}{\omega} + [\frac{2(2q+1)^2\varepsilon^4}{\omega^4} + \frac{8(q+1)^2\varepsilon^2}{\theta^5}]\ .$$

En sommant cela de $q = 0$ à $q = 2N$, les termes de la forme $(1 - \frac{1}{\Omega})^{q^2\varepsilon^2} - (1 - \frac{1}{\Omega})^{(q+1)^2\varepsilon^2}$ s'annulent deux à deux, de telle sorte qu'il ne reste que le premier, qui vaut 1, et le dernier, qui est négligeable (c'est à dire qui ne change pas l'ombre). Quant aux termes de la forme $\frac{2(2q+1)^2\varepsilon^4}{\omega^4} + \frac{8(q+1)^2\varepsilon^2}{\theta^5}$, ils ne donneront une somme négligeable que si les entiers ε et N ont des ordres de grandeur judicieusement choisis. Pour que leur somme soit négligeable, il suffit par exemple que $2N\,[\frac{2(4N+1)^2\varepsilon^4}{\omega^4} + \frac{8(2N+1)^2\varepsilon^2}{\theta^5}]$ le soit, et pour cela il faut que $N^3\varepsilon^4 \ll \omega^4$, et $N^3\varepsilon^2 \ll \theta^5$. Avec les conditions exigées déjà précédemment, à savoir $\Omega(1 - \frac{1}{\Omega})^{N^2\varepsilon^2} \simeq 0$, $N\varepsilon \ll \Omega$, la voie est étroite (nous invitons le lecteur à s'en convaincre en cherchant lui-même), mais c'est possible si $N^{16} \simeq \omega^5$ et $\varepsilon^4 \simeq \omega^3$; par exemple, on peut poser $\omega = \alpha^{16}$, α entier non naïf, et ensuite prendre $N = \alpha^5$ et $\varepsilon = \alpha^{12}$.

Pour un tel choix de N et de ε, nous aurons donc la relation :

$$\sum_{q=0}^{2N} \sum_{(k,\ell)\in C_q} \left(1 - \frac{1}{\Omega}\right)^{k^2+\ell^2} \simeq \frac{a}{\omega}$$

qui est bien ce que nous voulions, puisque $St\left(\frac{a}{\omega}\right) = \pi$.

Pour conclure, quelques commentaires s'imposent. On aura remarqué que la démonstration de notre formule se décompose en trois temps :

1. Dénombrement (analyse combinatoire)
2. Inégalités
3. Choix d'échelles de grandeurs pour des paramètres .

Ce schéma est typique : toute la théorie du continu (calcul différentiel et intégral, géométrie, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, distributions, analyse complexe, etc...) est contenue dans l'analyse combinatoire classique ; mais pour l'obtenir, il est nécessaire de savoir détecter les grandeurs négligeables en écrivant des inégalités, puis en choisissant des paramètres dont les ordres de grandeurs peuvent être ensuite judicieusement déterminés, exercices peu pratiqués jusqu'ici par les maitres de l'analyse combinatoire.

La théorie du continu ainsi construite comme branche de l'analyse combinatoire classique a pour le moment un inconvénient majeur, c'est de n'être pas dans les moeurs. Elle peut offrir, toutefois, deux avantages : le premier, c'est sa simplicité conceptuelle : les êtres mathématiques qu'elle manipule sont toujours de vraies fonctions définies sur un ensemble fini : par exemple, les distributions y sont remplacées par de vraies fonctions ; cette simplicité conceptuelle pourrait avoir des répercussions dans l'enseignement de l'analyse. Le second, c'est que, tout se faisant dans des ensembles finis, aucune des étapes intermédiaires d'un raisonnement ou d'un calcul n'exige les vérifications usuelles d'existence : le théorème de Fubini est toujours vrai, les fonctions sont toujours dérivables, etc. Seule l'ombre, à la fin, n'est pas assurée d'exister. Mais vous n'attendiez tout de même pas un tel miracle ! Je prétends seulement que cela vaut la peine d'être essayé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Georges REEB : La mathématique non-standard, vieille de soixante ans ? Publ. IRMA, 1978.

[2] G. TAKEUTI : Two applications of Logic to Mathematics (Princeton University Press, 1976).

[3] Les entretiens de Zürich sur les fondements des sciences mathématiques. Editeur : S.A. Lehmann frères & Cie, Zürich, 1941 .

[4] D. HILBERT : Ueber das Unendlichen . Mathematische Annalen, vol.95,1926, p 161 - 190 .

NOTES

(1) On peut considérer que cette question demeure posée depuis Brouwer, quoique sous une forme moins directe (ou moins brutale).

(2) Plus loin, dans Q nous donnerons à ce mot un sens légèrement différent, plus proche du sens usuel. Dans Q , l'échelle sera ω fois plus petite.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 01

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG CEDEX