

Astérisque

ROBERT LUTZ

**L'intrusion de l'analyse nonstandard dans l'étude
des perturbations singulières**

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 101-139

http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__101_0

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'INTRUSION DE L'ANALYSE NONSTANDARD DANS L'ÉTUDE DES
PERTURBATIONS SINGULIÈRES

par Robert LUTZ

à Georges , avec affection

"... plus conforme à l'art
d'inventer"

G.W. Leibniz

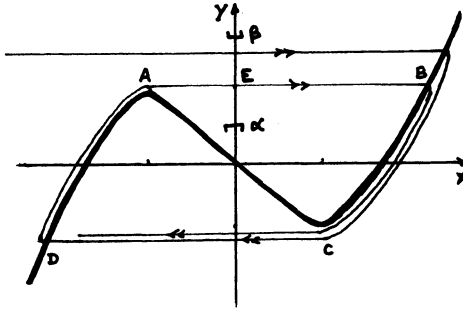
Vers 1973, Georges Reeb avait acquis la conviction que l'ANS était quelque chose de vraiment neuf dans l'univers mathématique, susceptible de développements féconds. La littérature non-standard existant à ce moment là montrait d'ailleurs clairement la voie, bien que les applications que l'on pouvait y trouver fussent soit trop élémentaires, soit trop spécialisées en analyse fine pour qu'un vaste public s'en trouvât interpellé. Il fallait tester l'efficacité de ce nouvel outil (*) sur des problèmes simples dont le traitement classique fût délicat, et si possible proches de préoccupations pratiques (selon le souhait d'Abraham Robinson) ; en somme mettre un pur produit de la logique mathématique au service de l'ingénieur. Il fallait aussi que la chose soit plaisante, apportant grâce et légèreté là où les méthodes classiques sont lourdes et peu élégantes ; ceci pour la popularité de ce retour à une source nouvelle ...

Une toute petite familiarité avec les idées infinitésimales, parfaitement fondées dans le cadre non-standard, suffit pour se convaincre que là où l'ingénieur dit "petit paramètre" et où le mathématicien classique répond "limite", l'intermédiaire "infiniment petit" apporte un éclairage utile, surtout lorsque les "limites" ont des difficultés d'existence...

Un mot jaillit alors - perturbations -. Petites causes, petits effets et voici une perturbation régulière ; "continuité" répond le mathématicien, "nous connaissons bien". Petites causes, grands effets et voici une perturbation singulière ; "chocs, turbulence, phénomènes de couche" pense l'ingénieur ; "développements asymptotiques, problèmes de convergence, bifurcations, difficultés innombrables" répond son interlocuteur...

A ce moment, l'Esprit de la Mécanique, que Reeb honore depuis fort longtemps, glisse dans la conversation un dessin célèbre depuis les travaux de Jules Haag sur les oscillations de relaxation ;

(*) Il s'agit ici de l'aspect "aide au mathématicien" de l'ANS. Nous ne parlerons pas ici de l'aspect "réservoir de modèles" pour évolutions floues, dualité macro-microscopique, complexités "infiniment grandes" (au-delà du fini intuitif) etc... dont l'importance dépasse le cadre étroit de notre art (voir par ex. [10]).



Lisez " $\epsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ " vue dans le plan de Liénard $(x, y = \epsilon \dot{x} + \frac{x^3}{3} - x)$. C'est la célèbre équation de Van der Pol, qui admet un cycle limite fait, pour ϵ tendant vers 0, de deux arcs "rapides" quasi-rectilignes AB et CD et de deux arcs "lents" BC et DA qui longent la cubique d'équation $y = \frac{x^3}{3} - x$.

De fait, dans un circuit électrique convenable, l'ingénieur constate pour ϵ petit un phénomène périodique de charge lente - décharge rapide qui dans les coordonnées (x, y) a le comportement approximatif du cycle ci-dessus, et le mathématicien démontre (non sans quelque difficulté de formulation et de raisonnement) que pour ϵ assez petit, il existe un unique cycle limite $\gamma(t, \epsilon)$ qui "tend vers" (en un sens à préciser) le comportement heuristiquement décrit ci-dessus. Une difficulté vient du raccord des phases "rapides" et "lentes".

Reeb se dit alors ; "voyons ce qui se passe pour ϵ infiniment petit fixé, en utilisant les propriétés qualitatives des systèmes différentiels". Il tient à peu de choses près le raisonnement suivant qui est, en dépit de son apparence heuristique, une démonstration rigoureuse (*) (voir [11] pour l'analyse de cette preuve)

"En tout point non infiniment proche de la cubique Γ , le champ X associé au système $\dot{x} = \frac{1}{\epsilon} (y - \frac{x^3}{3} + x)$ est presque horizontal, dans le sens des x croissants au-dessus, décroissants en-dessous. Il en résulte qu'une trajectoire $\gamma(t)$ issue d'un point de l'intervalle standard $[\alpha, \beta]$ atteint en un temps infiniment petit et presque horizontalement un point infiniment proche de Γ qu'elle traverse pour longer la cubique jusque près de C (si $\gamma(t)$ s'écartait de la cubique avant C, il serait ramené presque horizontalement ; mais alors un point moins éloigné aurait déjà impliqué le retour ce qui est absurde) ; de là elle saute presque horizontalement



près de D, longe DA puis saute près de E. Il en résulte que l'application de premier retour transforme $[\alpha, \beta]$ en un intervalle infiniment petit près de E, et admet donc un point fixe. D'où un cycle ; l'unicité résulte du calcul de l'indice".

(*) Le risque d'erreur que l'on attribue -avec raison- aux argumentations heuristiques trompeuses ne s'applique pas (c'est un fait d'expérience bien établi) aux raisonnements "infinitésimaux" correctement exprimés dans le cadre de l'ANS. Il s'agit en fait de la manière la plus impitoyable de débusquer les erreurs, en raison du caractère direct de la transcription.

Ainsi, pour tout $\epsilon \sim 0$, $\epsilon > 0$, il existe un unique cycle situé dans le halo (i.e. l'ensemble externe des points infiniment proches de $-$) de la courbe ABCD.

Il se trouve que pour des raisons simples qui tiennent à la structure de l'ANS, cette réponse équivaut de manière immédiate à l'énoncé classique.

On connaît la suite ; articles et thèses se succèdent et très vite creusent le sillon avec un raffinement croissant, découvrant à l'occasion des phénomènes inattendus (tremplins, crépitements, canards...). La densité bourbachique du sujet (*) passe de 0 à $\frac{1}{n}$ (cf [5]) et le monde asymptotique éprouve quelques frissons...

Chemin faisant, la robuste simplicité de l'idée Reebienne originelle est passée à l'arrière plan, comme ces objets d'usage trop quotidien pourqu'on y trouve quelque originalité. Qui donc, dans l'élégant carosse, admire la perfection de la roue qui le supporte ?

Pourtant, de même que la théorie des feuilletages roule sur des tores pleins "feuilletés Reeb", de même la nouvelle approche en théorie des perturbations singulières est elle fortement marquée de l'idée simple initiale, ce qui n'enlève évidemment rien au mérite de ceux qui ont su en développer les multiples facettes !

Le présent article a pour objet de prendre un peu de recul par rapport aux travaux de ces derniers en dégagant quelques idées générales nourries de l'acquis actuel et en insistant sur la signification géométrique des divers phénomènes. Chemin faisant, on clarifie quelques questions spécifiques que le contexte, dépouillé des hypothèses inutiles, met en évidence.

I.1. Quelques aspects généraux dans l'approche d'un problème de perturbation d'équation différentielle

1. Présentation du problème

Il se présente grossièrement sous la forme suivante :

on considère un système différentiel $\dot{x} = f(x, \epsilon)$ où $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$ est un multi-paramètre et $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application donnée ; on s'intéresse au comportement de certaines familles de solutions du type $x(t, \epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0 (éventuellement le long de courbes particulières de $\mathbb{R}^k$).

Le plus souvent ces familles sont définies pour chaque ϵ par une contrainte additionnelle (périodicité, valeurs aux limites prescrites dans un intervalle de temps, etc...), avec quelque difficulté si ces contraintes n'assurent pas l'unicité de la solution pour chaque ϵ .

(*) Non sans susciter quelque réprobation, l'orateur ayant cru utile de frapper les esprits à l'aide d'artifices optiques peu compatibles avec la dignité mathématique.

En général $x(t, \epsilon)$ n'admet pas de limite continue sur tout l'intervalle de temps considéré et il convient de décrire le comportement dans les endroits de discontinuité en introduisant dans l'approximation de x des "termes de couche" comme le montre E. de Jager dans l'article précédent.

En gros, les solutions présentent "à la limite" des phases lentes (souvent liées à l'équation réduite $\dot{x} = f(x, 0)$, mais pas toujours) entrecoupées de sauts rapides ; quelquefois les sauts se succèdent sans phases lentes (oscillations rapides) et l'on cherche à connaître l'évolution (lente) de l'allure de ces oscillations (période, amplitude moyenne, etc...).

Deux méthodes classiques essentielles (et bien rodées pour $k = 1$) - développements asymptotiques et techniques de moyennisation - permettent dans une certaine mesure d'étudier ces problèmes.

Cependant, ces méthodes nécessitent, pour obtenir le moindre renseignement, beaucoup de calculs (estimations a priori, majorations d'erreurs, etc...) et se justifient souvent par des techniques fines de l'Analyse (théorèmes de points fixes "ad hoc", ...). Dans certains cas, le problème est hérissé d'hypothèses techniques qui n'ont pour motivation que de rendre la méthode opérante ; ainsi pour éviter la détermination des couches libres, i.e. des sauts rapides à des instants approximatifs autres que les extrémités de l'intervalle de temps considéré, on met souvent des hypothèses qui contraignent les couches à être situées à des instants choisis à l'avance (afin de permettre le calcul d'un développement formel).

En résumé, on étudie un problème de géométrie (au moins en première approximation) avec des yeux d'Analyste. Rares sont d'ailleurs les figures dans les articles sur ce sujet ; tout est dans le calcul et le dessin est suspect pour cause d'heuristique (les développements formels aussi, à l'occasion, puisqu'ils peuvent produire des fausses solutions approchées). Au fond, les méthodes classiques restent très proches de la résolution quantitative approchée de l'équation.

L'approche non classique pressentie par Reeb à partir de l'équation de Van der Pol cherche au contraire à éviter le calcul quantitatif (sauf éventuellement sur l'équation réduite) pour tirer le maximum de renseignements de l'étude qualitative des trajectoires à laquelle le géomètre - paresseux de nature - aime à réduire son travail. Elle est basée sur trois faits complémentaires qu'il vaut la peine de redire une fois de plus (cf. par ex. [11]).

- (i) Pour $\epsilon \sim 0$, tous les théorèmes habituels sur les systèmes différentiels sont valables tels quels (puisque ϵ est un nombre comme un autre...)
- (ii) dire que deux courbes sont infiniment proches l'une de l'autre est mieux que n'importe quelle approximation effective car le raccord de tels renseignements dans

des zones adjacentes est immédiat, via un très simple "principe de permanence".

(iii) Le comportement des solutions pour $\epsilon \sim 0$ fixé traduit exactement tous les comportements asymptotiques possibles, le plus souvent en termes proches de leur expression heuristique.

Accessoirement, on obtient a posteriori un développement comme sous-produit, si on le désire, mais il n'est pas l'outil pour étudier le comportement asymptotique cherché. D'ailleurs, on n'étudie pas la solution $x(t, \epsilon)$ du problème considéré, mais le comportement général de toutes les trajectoires intéressantes d'où émerge celui des courbes vérifiant les contraintes additionnelles.

Là où la méthode classique calcule une "solution formelle $\bar{x}(t, \epsilon)$ " dont elle montre a posteriori qu'elle est une approximation d'une vraie solution $x(t, \epsilon)$ lorsque $\epsilon \sim 0$, la méthode non classique observe les trajectoires pour $\epsilon \sim 0$ et en déduit le comportement de tous les $x(t, \epsilon)$ éventuels lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, qu'il y ait une ou plusieurs solutions.

Ainsi, un système $\dot{x} = f(x, \epsilon)$ donné (donc standard, si f est explicite, ou standard par transfert s'il s'agit d'une étude sur un type général de systèmes) fournit pour $\epsilon \sim 0$ un champ de vecteurs (en général non standard) X dont on souhaite étudier les trajectoires ; tout renseignement qui exprime l'approximation parfaite - i.e. avec erreur infiniment petite - d'une trajectoire par une certaine courbe (après changement de variable ou de temps préalable, éventuellement) se traduit par un comportement asymptotique de certaines familles de solutions $x(t, \epsilon)$. Il en est de même pour les estimations à un i.p. près de temps de parcours.

Un tel renseignement (*) est une propriété externe, i.e. qui fait usage dans sa formulation du mot "standard" ou de ses dérivés (inf. petit par ex.) ; sa justification utilise d'une part les propriétés internes de X (celles du langage classique, par ex. les théorèmes généraux sur les flots), d'autre part les principes généraux de l'A.N.S. (idéalisation, standardisation, transfert) et leurs conséquences.

En résumé, la théorie des perturbations singulières de systèmes différentiels apparaît comme un sous-produit de l'étude des propriétés externes des trajectoires des champs de vecteurs non standard.

2. Rappel de quelques notions externes fondamentales

Rappelons la définition de quelques notions utiles ici (cadre I.S.T.).

- Réel infiniment petit (i.p.) x - $|x|$ est plus petit que tout réel standard > 0 .
- Réel infiniment grand (i.g.) - inverse d'un i.p. non nul.

(*) La traduction en langage classique de l'ensemble des renseignements obtenus pour un système $\dot{x} = f(t, \epsilon)$ est en général immédiate - elle existe, en tout cas, par la nature de l'A.N.S. - Lorsqu'elle n'est pas évidente, c'est que la formulation classique du phénomène est compliquée, donc sans intérêt...

- Réel limité x -il existe un réel standard supérieur à $|x|$.

Dans un espace topologique standard X

- le halo d'un point standard a est constitué des $x \in X$ appartenant à tous les voisinages ouverts standard de a . Comme les propriétés externes ne définissent pas des sous-ensembles (dans la théorie I.S.T.), $\text{hal}(a)$ n'est pas un ensemble, en général. On peut le considérer comme un "ensemble externe", notion justifiée dans une axiomatique adéquate (voir par ex. [11], leçon 3.2), mais qui n'a pas les propriétés usuelles des ensembles (sauf les "évidentes", intersections et réunions, inclusion...).

- le halo d'une partie standard $A \subset X$ est constitué de tous les $x \in X$ appartenant au halo d'au moins un point standard $a \in A$. C'est un ensemble externe auquel il ne faut pas appliquer les théorèmes internes sans précaution (*).

- un point $x \in X$ est accessible s'il est dans $\text{hal}(X)$, sinon il est inaccessible. Lorsque X est séparé, deux points standard a et b ont des halos disjoints. Il en résulte que tout point accessible appartient à un unique $\text{hal}(a)$, a standard. On dit que a est l'ombre de x et on note ${}^0x = a$.

- si $f: X \rightarrow Y$ est une application entre espaces topologiques standard séparés et $A \subset Y$ une partie standard telle que $f(A) \subset \text{hal}(Y)$, l'ombre de f , notée ${}^0f: A \rightarrow Y$ est l'unique application standard telle que $({}^0f)(a) = {}^0(f(a))$ pour tout a standard. Si, pour tout a standard, $f(\text{hal } a) \subset \text{hal } f(a)$, alors 0f est continue.

- Dans l'espace normé R^p (p standard, norme standard quelconque)

On note $x \sim y$ pour $\|x-y\|$ i.p. Alors ${}^0x = a$ équivaut à $x \sim a$.

Les points accessibles sont les points de norme limitée.

Les points inaccessibles sont ceux de norme i.g.

Si $\epsilon \in R^*$, $\epsilon \sim 0$, la ϵ -galaxie de $a \in R^p$ est l'ensemble externe des $x \in R^p$ tels que $\frac{\|x-a\|}{\epsilon}$ soit limité, i.e. $\|x-a\|$ est d'ordre ϵ .

- Une partie standard A de R^p est ouverte ssi pour tout $a \in A$ standard, $\text{hal}(a) \subset A$. Elle est compacte ssi tout $x \in A$ est accessible et ${}^0x \in A$.

- Si $f: R^p \rightarrow R^q$ (p, q standard) admet une ombre ${}^0f: R^p \rightarrow R^q$, alors $f(x) \sim f(a)$ pour tout $x \in \text{hal}(a)$ implique la continuité de 0f en a et $f(x) \sim f(y)$ pour tout $x \sim y$ la continuité uniforme sur R^p .

(*) Voici un exemple d'erreur typique, dans le domaine des équations diff. ; supposons qu'un certain champ de vecteurs X laisse le halo d'une courbe fermée standard Y invariant. On ne peut en déduire que le halo de Y contient un cycle, en appliquant le théorème du point fixe à l'application de premier retour, car le halo d'un point n'est pas un disque... (Pour Van der Pol, on avait un segment $[\alpha, \beta]$ appliqué dans le halo de son centre).

Les entiers standard ne constituent pas un ensemble (au sens de I.S.T.), faute de bornes sup et inf ("l'ensemble" serait un effet borné). On peut seulement considérer l'ensemble externe des entiers standard. Ce fait peut être exploité de la manière suivante ; soit $P(t)$ une propriété interne à une variable libre concernant les réels ; supposons $P(t)$ vraie pour tout t standard $> t_0$.

Alors l'ensemble $E = \{t \in \mathbb{R}, t > t_0 \text{ et } P(s) \text{ pour tout } t_0 < s < t\}$ contient tous les entiers standard $> t_0$, donc E contient également des entiers non standard, i.e. des réels infiniment grands !

Ainsi $P(t)$ est permanente jusqu'à un t inf. grand.

Ceci est évidemment faux pour les propriétés externes (par ex. " t standard"). Cependant, une propriété externe $Q(t)$ peut quelquefois impliquer une propriété interne en restriction aux entiers standard.

C'est en particulier le cas des propriétés du type " $f(t) \sim 0$ ", où f est interne ; pour t standard, elle implique $\|f(t)\| < \frac{1}{t}$ car $\frac{1}{t}$ est supérieur à tout i.p. Ainsi, on en déduit que, dans $\mathbb{R}^p$, p standard, si deux courbes $\gamma(t)$ et $\lambda(t)$ sont infiniment proches pour tout t standard $> t_0$, elles le restent jusqu'à un t_1 infiniment grand.

Ceci (et ses variantes) constitue notre outil de recollement fondamental ; on dira simplement "par permance γ et λ restent i.proches jusqu'à un t_1 i.g.". (*)

1.3. Les divers types de champs

Pour toute la suite, on considère des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^p$, p standard, bien que l'essentiel des résultats puisse déboucher sur des études globales plus générales sur les variétés différentielles standard.

Parmi tous les champs continus on distingue

(i) les champs standard, ou "lents purs", leurs propriétés externes sont équivalentes à des propriétés internes, en vertu d'un principe général de l'ANS ; toute propriété externe portant sur des "constantes" (ici $\mathbb{R}^p$ et le champ X) standard est équivalente à une propriété interne de ces constantes. Un exemple en est la dépendance continue par rapport aux conditions initiales ; si X est localement lipschitzien et admet un flot $\phi(x, t)$, alors pour tout x_0 standard et t limité, $x \sim x_0$ implique $\phi(x, t) \sim \phi(x_0, t)$.

(*) W.T. ECKHAUS [8] a mis au point un principe de recollement qui joue un rôle analogue du point de vue classique. L'exploitation en est encore à ses débuts (voir par ex. [9]).

Ces champs sont "lents" car dans l'espace accessible (*) on a $\|X_x\| \sim \|X_{O_x}\|$ par continuité, de sorte que les trajectoires ont une vitesse limitée.

Notons que dans le cas où $\|X\| < k$, la formule de Gronwall

$$e^{-tk} \|x - x_0\| < \|\phi(x, t) - \phi(x_0, t)\| < e^{tk} \|x - x_0\|$$

montre que pour k standard et t limité, les i.p. $\|x - x_0\|$ et $\|\phi(x, t) - \phi(x_0, t)\|$ sont de même ordre (i.e. leur rapport est limité non i.p.).

(ii) Les champs rapides purs. Ce sont les champs de la forme $X = \frac{1}{\epsilon} Y$ où Y est standard et $\epsilon \sim 0$, $\epsilon > 0$; $\|X\|$ est i.g. sauf dans les galaxies où $\|Y\|$ est i.p. d'ordre au plus ϵ , c'est-à-dire près des points singuliers (ou "à l'infini"). Si l'ensemble des points singuliers de Y est maigre, presque toutes les trajectoires de X sont parcourues à vitesse i.g. et évoluent sur les orbites de Y , d'où le nom. De tels champs apparaissent dans des problèmes aux limites de la forme

$$\begin{cases} \epsilon^2 \ddot{u} = f(u), & f \text{ standard,} \\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases} \quad \text{en posant}$$

$\epsilon \dot{u} = v$, ce qui donne le champ $Y = v \frac{\partial}{\partial u} + f(u) \frac{\partial}{\partial v}$ dans R^2 .

Les comportements asymptotiques des solutions échappent au traitement classique par les développements, en raison des couches libres qui apparaissent à des instants approximatifs inconnus à l'avance (cf. [11], leçon 13). Les équations $\epsilon^2 \ddot{u} = f(u, \epsilon \dot{u})$ sont également concernées.

(iii) Les champs lents sont de la forme $X = Y + Z$ où Y est standard et $\|Z\| \sim 0$ dans l'espace accessible. Les trajectoires accessibles ont une vitesse limitée; ce type de champ apparaît dans des problèmes de perturbations régulières. La propriété externe typique est l'approximation des trajectoires de X par celles de Y . Dans certains cas, cette approximation n'est pas valable, mais peut l'être si on remplace Y par une "moyenne" portant sur une ou plusieurs variables.

(iv) les champs rapides sont de la forme $X = \frac{1}{\epsilon} Y + Z$ où Y et Z sont lents. Ils apparaissent dans la plupart des problèmes de perturbation singulière proposés dans la littérature à ce jour, et un très grand nombre d'autres... Leurs propriétés externes n'ont évidemment pas comme en (i) d'équivalent interne, mais l'ingénieur (qui étudie un champ avec un ϵ "petit") y trouve son compte. Le mathématicien aura une formulation interne pour une propriété externe vérifiée par tous les champs d'une famille standard à un paramètre qui correspondent aux valeurs i.p. de ce paramètre.

(*) le choix de la norme n'importe pas, pourvu qu'elle soit standard, puisque deux telles normes équivalentes déterminent les mêmes points accessibles, et la même relation externe $\sim$.

Notons que la décomposition de X n'est pas unique ; si Z' est lent, $Y' = Y + \epsilon(Z - Z')$ l'est aussi et l'on a $X = \frac{1}{\epsilon} Y' + Z'$.

Le comportement des trajectoires de X résulte du conflit entre la composante $\frac{1}{\epsilon} Y$ qui l'emporte en dehors des galaxies où elle est limitée et la composante Z qui perturbe la vitesse dans ces galaxies et agit lentement sur l'évolution grossière des phases rapides. Pour apprécier son effet, on utilise des projections locales qui annulent Y , mettant en évidence le phénomène de dérive par rapport aux orbites de Y .

(v) les autres, qui apparaissent dans des problèmes de perturbations très singulières, encore peu étudiés. Citons les équations du type $\ddot{u} = f(u, \dot{u}, \epsilon)$ où f dépend de manière exponentielle de ϵ .

Notre objectif est de mettre en évidence de manière naturelle les principaux phénomènes, quelquefois inattendus, qui peuvent apparaître dans les cas (ii), (iii), (iv), en dégagant des outils qui permettent de traiter efficacement chaque cas particulier, par l'intermédiaire de changements de variables éventuels.

2. Les champs rapides purs

On suppose le champ standard Y de classe C^1 (pourqu'il ait la propriété d'unicité) et complet ; l'étude reste cependant possible dans des cas plus généraux. On note $\Phi(x, t)$ le flot de $X = \frac{1}{\epsilon} Y$ et $\Psi(x, T)$ celui de Y .

On a évidemment $\Phi(x, \epsilon T) = \Psi(x, T)$ de sorte que les deux flots ont des propriétés internes équivalentes par changement de temps.

Leur combinaison avec les hypothèses externes " p , Y standard, $\epsilon \sim 0$ " donne le comportement externe suivant

2.1. Lemme des sauts. Si x est accessible, il existe $t_1 > 0$, $t_1 \sim 0$ tel que

(i) sur $[0, t_1]$, $\Phi(x, t) \sim \Psi(x, \frac{t}{\epsilon})$,

(ii) $\Phi(x, t_1)$ est soit inaccessible, soit infiniment proche d'un point standard de l'ensemble ω -limite (*) associé à l'orbite de 0x par Ψ . Enoncé analogue pour les temps négatifs.

En effet, pour tout $t > 0$ tel que $T = \frac{t}{\epsilon}$ soit limité, on a $\Phi(x, t) = \Psi(x, T) \sim \Psi(^0x, ^0T) \sim \Psi(^0x, T)$ grâce à la continuité du flot standard Ψ exprimé sous forme externe.

Cette propriété est permanente jusqu'à un t_0 tel que $\frac{t_0}{\epsilon}$ soit i.g. ; soit $t_1 \in [0, t_0]$ tel que $t_1 \sim 0$ et $\frac{t_1}{\epsilon}$ i.g. (par ex. $\sqrt{\epsilon}$ si $t_0 \neq 0$).

Alors si $\Phi(x, t_1)$ est accessible, son ombre $^0(\Psi(^0x, \frac{t_1}{\epsilon}))$ est un point ω -limite de l'orbite de 0x par Ψ .

Ainsi, une trajectoire $\gamma(t) = \Phi(x, t)$ issue d'un point accessible x "saute" dans un halo d' ω -limite, ou bien "à l'infini" en un temps i.p., à moins que x n'y soit déjà.

Notons la description externe du concept d'épaisseur de la couche de temps qui correspond à un saut ; pour tout $t < t_1$ d'ordre supérieur à ϵ (i.e. $\frac{t}{\epsilon}$ i.g.), $\gamma(t)$ vérifie (ii). On dit que la couche est d'épaisseur $\theta(\epsilon)$ pour rappeler la notation classique (mais ici ϵ est un nombre fixé).

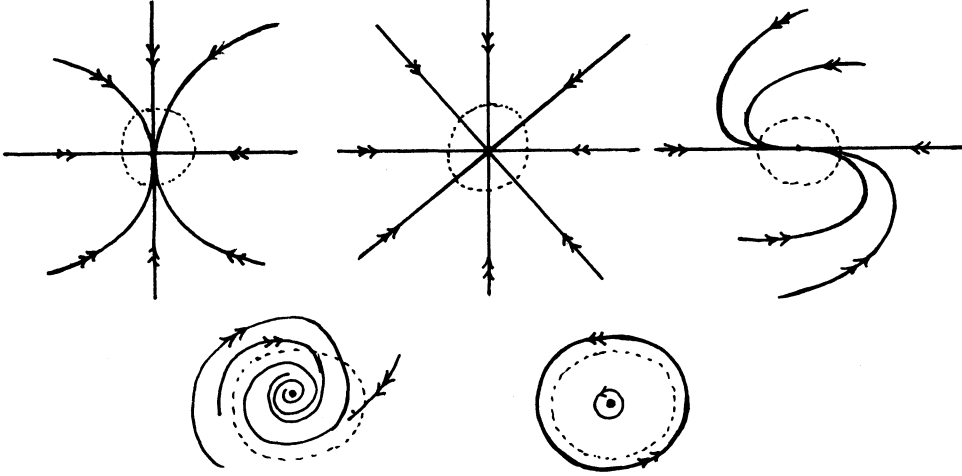
Le comportement après t_1 dépend de la nature des ω -limites de Y . En particulier, γ ne peut quitter le halo d'un ω -limite A que si A est au moins partiellement α -limite. On appellera ce cas situation de transit.

(*) L'ensemble ω -limite d'une courbe standard $\lambda(T)$ est l'ensemble standard dont les points standard sont les ombres des points $\lambda(T)$ pour T i.g.

2.2. Exemples

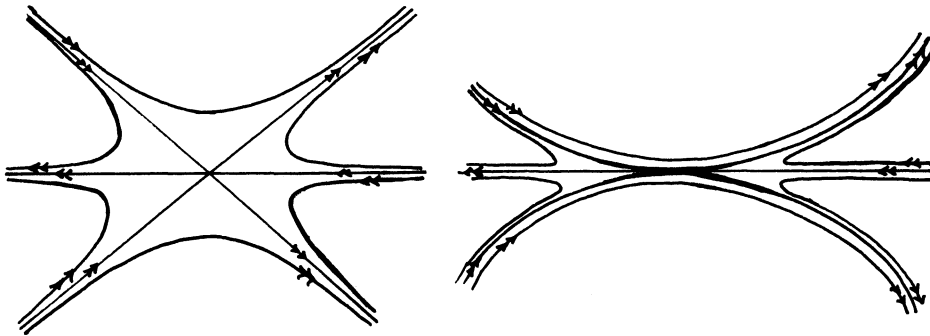
(a) Points singuliers dans $\mathbb{R}^2$

- Les noeuds ou foyers stables standard attirent les trajectoires qui visitent leur halo et ne les laissent plus ressortir. Pas de transit.



- Les noeuds ou foyers instables et les centres ne sont visités par aucune trajectoire issue d'un point extérieur à leur halo (aux temps positifs).

- Les cols multiples présentent $2n$ séparatrices qui admettent alternativement le point singulier comme ω et α -limite. Les trajectoires qui visitent le halo longent deux séparatrices consécutives ; il y a $2n$ situations de transit



$2n = 6$

$2n = 6$, cas très dégénéré

On obtient de telles singularités en considérant un système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial v} \\ \dot{v} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial u} \end{cases} \text{ où } H \text{ est le produit de } n \text{ facteurs irréductibles du type } (\alpha v - \beta u) \text{ ou } (\alpha v^p - \beta u^q) \text{ plus généralement.}$$

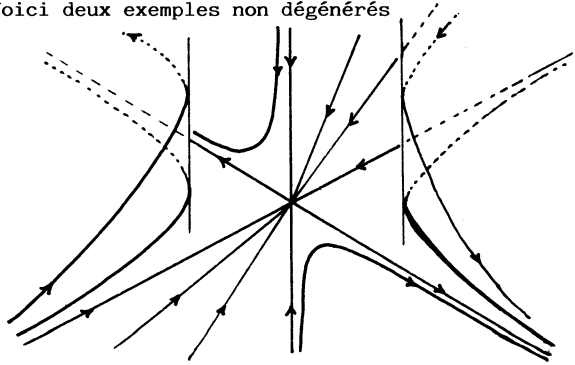
Si H admet des facteurs multiples, il y a des lignes de singularités qui sont longées par certaines trajectoires.

(b) Cycles dans $\mathbb{R}^2$

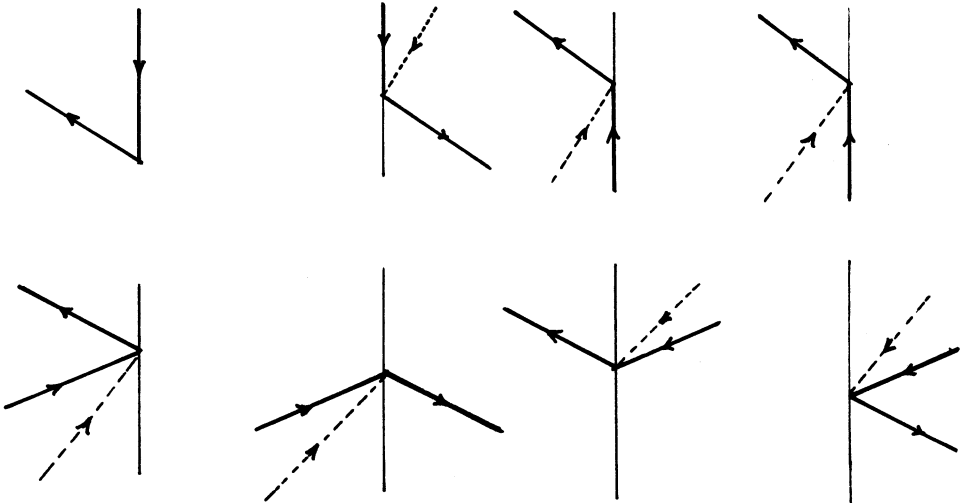
Dans tous les cas une trajectoire qui a pénétré depuis l'extérieur dans le halo d'un cycle limite standard n'en ressort plus, même si le cycle est aussi α -limite d'une trajectoire sortante.

(c) Points singuliers dans $\mathbb{R}^3$ - Voici deux exemples non dégénérés

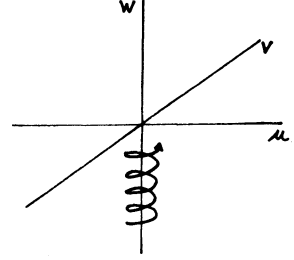
$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\alpha}{\epsilon} u \\ \dot{v} = -\frac{\beta}{\epsilon} v \\ \dot{w} = -\frac{\gamma}{\epsilon} w \end{cases} \quad \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \text{ réels} > 0 \\ \text{standard} \end{array}$$



Ce cas présente des situations de transit dont voici les ombres géométriques.



$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\alpha}{\epsilon} v \\ \dot{v} = -\frac{\beta}{\epsilon} u \\ \dot{w} = \frac{\gamma}{\epsilon} w \end{cases} \quad \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \text{ réels } > 0 \\ \text{standard} \end{array}$$



Ce cas présente une situation de transit d'ombre verticale.

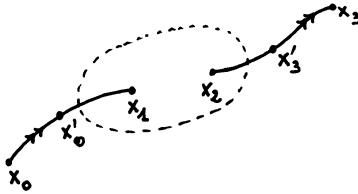
(d) Famille de cycles dans R^3 - Voici un exemple

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\alpha v}{\epsilon} \\ \dot{v} = -\frac{\beta u}{\epsilon} \\ \dot{w} = \frac{\gamma}{\epsilon} (u^2 + v^2 - 1) \end{cases}$$

On obtient des hélices qui évoluent dans la ϵ -galaxie du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ en tournant vite et montant (ou descendant) lentement.

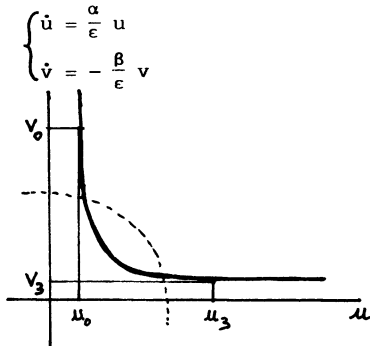
α, β, γ réels > 0 , standard.

2.3. Considérons une trajectoire $\gamma(t)$ de X qui rencontre le halo d'un ensemble connexe standard A de points singuliers entre deux points extérieurs $x_0 = \gamma(t_0)$ et $x_3 = \gamma(t_3)$ avec des sauts de x_0 à $x_1 = \gamma(t_1)$ et de $x_2 = \gamma(t_2)$ à x_3 .



Alors, pour tout $x'_0 = \gamma(t'_0)$ entre x_0 et x_1 et $x'_3 = \gamma(t'_3)$ entre x_2 et x_3 mais extérieurs au halo de A , on a $t'_3 - t'_0 \sim t_3 - t_0 \sim t_2 - t_1$, pourvu que tous les x'_i soient accessibles. Si ces nombres sont limités, leur ombre commune représente le temps de relaxation de γ dans le halo de A .

Il s'agit d'une notion externe ; pour le calcul on utilise l'arbitraire sur le choix de x_0 et x_3 . Voici un premier exemple ; le col simple



α, β réels > 0 , standard. Le système admet l'intégrale première $u^\beta v^\alpha = h$ qui est i.p. pour les trajectoires qui rencontrent le halo de $(0,0)$.

Considérons par exemple le cas $0 < u_0 < u_3$.

On a $t_3 - t_0 = \frac{\epsilon}{\alpha} (\text{Log } u_3 - \text{Log } u_0) \sim -\frac{\alpha}{\epsilon} \text{Log } u_0$ et aussi $t_3 - t_0 \sim -\frac{\epsilon}{\beta} \text{Log } v_3 \sim -\frac{\epsilon}{\alpha\beta} \text{Log } h$.

Ainsi, le temps de relaxation ne dépend que de l'ordre de h et du déterminant de la matrice du système.

Notons que l'ordre $\theta(h)$ peut être défini comme la galaxie des $h' > 0$ tels que $\frac{h'}{h}$ soit limité, non i.p.; c'est une notion externe, stable par addition, multiplication ; elle commute avec $-\text{Log}$.

Dans l'exemple précédent, $\theta(h) = \theta(u_0^\beta) = \theta(v_3^\alpha) = \theta(u_0) = \theta(v_3)$; il est donc lié à la distance d'entrée et de sortie de la trajectoire par rapport aux deux

séparatrices qu'elle longe, mesurée à l'extérieur du halo de (0,0).

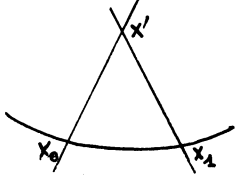
Nous allons généraliser ces observations en introduisant la notion d'écart de deux trajectoires comme un analogue "flou" de celle d'intégrale première, et suffisant dans beaucoup de cas à la détermination des temps de relaxation.

2.4. La conservation de l'écart

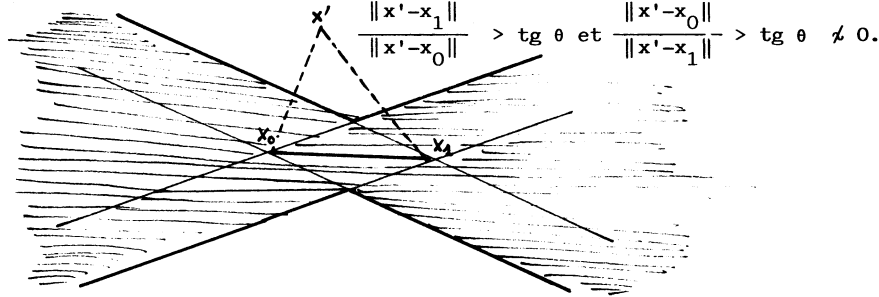
Proposition 1 - Soit $\lambda(T)$ une courbe standard C^1 dans R^p (p standard) et x' un point accessible infiniment proche d'un $x_0 = \lambda(T_0) \neq x'$.

Soit $x_1 = \lambda(T_1)$ tel que $x' \sim x_1$ et $x_1 \neq x'$, avec T_0 et T_1 limités, $T_0 \sim T_1$. Alors, si $\frac{d\lambda}{dT}(T_0)$ non i.p. et si les directions des droites x_0x' et x_1x' ne sont pas infiniment proches de celle des tangentes en x_0 et x_1 on a $\theta(\|x'-x_0\|) = \theta(\|x'-x_1\|)$ pour toute norme standard sur R^p .

En effet, toutes les normes standard sont équivalentes, i.e. $\frac{N_1(u)}{N_2(u)}$ est limité non i.p. pour tout $u \neq 0$. Choisissons la norme euclidienne pour faire le calcul. On a $x_1 - x_0 = (T_1 - T_0)(\frac{d\lambda}{dT}(T_0) + i.p.)$ car λ est standard C^1 et T_0 limité, de sorte que la droite x_0x_1 a une direction non infiniment proche de celle des droites x_0x' et x_1x' (noter que $\frac{d\lambda}{dT}(T_0) \sim \frac{d\lambda}{dT}(T_1)$ car $T_0 \sim T_1$).



Le reste est de la géométrie élémentaire: $\frac{\|x'-x_1\|}{\|x'-x_0\|}$ n'est ni i.p. ni i.g. car dans le plan x_0x_1x' , x' est extérieur au domaine hachuré d'angle θ standard non nul, de sorte que



Appelons écart de x' et λ l'ordre $\theta(\|x'-x\|)$ mesuré par une norme standard le long d'une droite $x'x$ "nettement" transverse à la tangente en x , à la manière de la proposition.

Proposition 2 - Si $f: R^p \rightarrow R^p$ est un difféomorphisme standard, il conserve la nette transversalité et l'écart de x et λ .

En effet $\frac{f(x')-f(x)}{\|x'-x\|} \sim Df_x\left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|}\right) \sim Df_{O_x}\left(\frac{x'-x}{\|x'-x\|}\right)$ qui est limité non i.p. en norme

Comme $\frac{d}{dT} (f \circ \lambda)_{(T)} = Df_{\lambda(T)} \left(\frac{d\lambda}{dT} (T) \right) \sim Df_{O_x} \left(\frac{d\lambda}{dT} (T) \right)$ la nette transversalité est conservée (car Df_{O_x} est standard inversible).

C'est encore vrai pour un difféomorphisme non standard mais C^1 proche d'un difféomorphisme standard dans un compact standard.

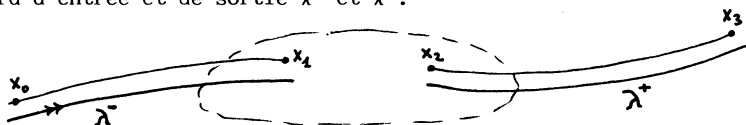
Lemme de conservation de l'écart - Soit $x_0 \in \mathbb{R}^p$ un point standard tel que $Y_{x_0} \neq 0$ et $x'_0 \sim x_0$ tel que la droite (x_0, x'_0) soit nettement transverse à Y_{x_0} . Alors pour tout T limitée, $Y_{\psi(x_0, T)}$ est non i.p., nettement transverse à la droite $(\psi(x_0, T), \psi(x'_0, T))$ et les deux écarts sont égaux.

En effet, $\psi(., T)$ est un difféomorphisme C^1 proche du difféomorphisme standard $\psi(., 0)$ dans un voisinage standard de x_0 .

Ainsi, tant qu'une trajectoire de X reste accessible et hors du halo des points singuliers, son écart par rapport à son ombre reste le même.

2.5. Fonction externe écart-temps de relaxation

Avec les notations de 2.3., considérons une trajectoire qui traverse le halo d'un ensemble connexe compact standard A de points singuliers, le long de trajectoires standard d'entrée et de sortie λ^- et λ^+ .



On dira que A est agréable si l'écart d'entrée (entre x_0 et λ^-) détermine l'écart de sortie (entre x_3 et λ^+) et la galaxie du temps de relaxation (ie $t_3 - t_0$ à un i.p. près d'ordre ϵ), ce qui donne la fonction externe écart d'entrée + (écart de sortie, temps).

Un difféomorphisme standard C^1 d'un voisinage standard U de A sur un ouvert standard U' qui échange Y et Y' , tel que $U-A$ ne contienne pas de point singulier de Y , échange les fonctions externes correspondantes. En effet, le difféomorphisme échange les écarts et conserve le temps de parcours ; le temps $t_3 - t_0$ est donc le temps entre $f(x_0)$ et $f(x_3)$ pour Y' ; ces points sont extérieurs au halo de $f(A)$ car f est bicontinu et standard, et déterminent donc le temps de relaxation pour la trajectoire image.

Ainsi le calcul des fonctions écart-écart-temps éventuelles ne dépend que du modèle (à difféomorphisme près) de la singularité.

Remarque. Un simple développement limité de Y au voisinage de A (par ex. si $A = \{a\}$) ne renseigne sur les trajectoires de X que dans la ϵ -galaxie de a ; or, entre celle-ci et la halo de a , l'écart n'est pas conservé. Il s'ensuit que le calcul des fonctions écart-temps ne sort pas d'un tel développement (qui peut cependant servir à justifier un modèle) ; ceci est du à la présence de $\epsilon \sim 0$ qui relativise la validité des approximations (voir l'exemple célèbre étudié dans [11], leçon 13).

Voici quelques exemples en dimension 2 (point singulier isolé).

- Pour le col simple non dégénéré de 2.3. on a la fonction écart-écart

$$S = E^{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ et écart temps } R = -\frac{\epsilon}{\alpha} \log E = -\frac{\epsilon}{\beta} \log S.$$

Si $\alpha = \beta$, $E = S$, ie la singularité est "symétrique".

Notons que la galaxie R ne dépend que de E et de la valeur propre α correspondant à la séparatrice de sortie.

Il résulte donc de la classification des singularités non dégénérées que si la matrice de l'approximation linéaire de Y au point singulier admet des valeurs propres réelles α et $-\beta$, α et $\beta > 0$, les fonctions écart d'entrée - écart de sortie et écart-temps existent et sont données par le calcul ci-dessus.

- point singulier isolé de type hamiltonien. Il est donné par un système

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial v} \\ \dot{v} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial u} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{où } H \text{ est une fonction standard } C^1 \text{ nulle en } (0,0) \text{ et sans} \\ \text{autre singularité que } (0,0) \text{ dans un voisinage standard} \\ \text{borné } U. \end{array}$$

Les trajectoires qui traversent le halo de $(0,0)$ correspondent à des valeurs $h \sim 0$ de H et l'écart d'entrée-sortie est mesuré le long des lignes de pente ; on obtient $h = H(x') - H(x) = \|x' - x\| \left(\frac{dH}{dx} \left(\frac{x' - x}{\|x' - x\|} \right) + i.p. \right) = \|x' - x\| (a \|\text{grad } H_x\|^2 + i.p.)$ avec a limité non i.p., car $\|\text{grad } H_x\|$ est limité non i.p. hors du halo de $(0,0)$ dans U . Ainsi $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(\|x' - x\|)$ ie les écarts sont égaux à (h) . Il en résulte qu'une telle singularité est symétrique.

Considérons le cas particulier $H(u,v) = v^{\frac{q}{p}} - u^{2q}$, $q > p > 1$ entiers standard.

Les séparatrices $v = \pm |u|^{\frac{p}{q}}$ déterminent un col simple. Le temps de relaxation le long d'un niveau $h > 0$, $h \sim 0$ vaut à un i.p. près.

$$I_{p,q}(a,h) = \int_{-a}^{+a} \frac{\epsilon \, du}{2p(u^{2q} + h) \frac{2p-1}{2p}}$$

Le changement de variable $u = h^{\frac{1}{2q}} w$ donne

$$I_{p,q}(a,h) = \epsilon \, h^{-r} \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \frac{dw}{2p(w^{2q+1}) \frac{2p-1}{2p}} \quad \text{avec } r = \frac{2p-1}{2p} - \frac{1}{2q} \text{ et } \bar{a} = a \, h^{-\frac{1}{2q}}$$

1er cas. $p = q = 1$. Alors $r = 0$ et $I_{1,1}(a,h) = -\epsilon (\text{Log } h - 2 \text{Log } (\sqrt{a^2+h}+a))$

2ème cas. $q > 1$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2p(w^{2q}+1)^{\frac{2p-1}{2p}}}$ converge vers un réel standard

$L_{p,q} > 0$ et $I_{p,q}(a,h) = \epsilon h^{-r} (L_{p,q} + i.p.)$ avec $r > 0$, car $\bar{a}$ est i.g.

Ainsi, pour un même écart $\Theta(h)$, on a $\frac{I_{1,1}(a,h)}{I_{p,q}(a,h)} \sim 0$ pour tout $q > 1$ et

$\frac{I_{p,q}(a,h)}{I_{p',q'}(a,h)} \sim 0$ pour $r' > r$. Le temps de relaxation est donc le plus grand pour les singularités les plus dégénérées.

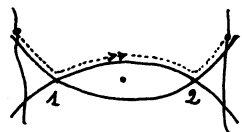
Cependant pour $q > 1$, on a $I_{p,q}(a,h) \sim I_{p,q}(a,h')$ ssi $\frac{h'}{h} \sim 1$. La singularité n'admet donc pas de fonction écart-temps, seulement une fonction écart-ordre du temps, sauf pour $p = q = 1$.

2.6. Applications

Considérons un problème de Cauchy associé à un champ rapide pur $X = \frac{1}{\epsilon} Y$ dans R^2 ; on cherche les courbes intégrales telles que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ appartiennent à une courbe δ standard donnée. Il y a deux types de solutions

- (i) celles qui "perdent le temps" en parcourant rapidement une orbite fermée un nombre infiniment grand de fois (d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$)
- (ii) celles qui perdent du temps en visitant le halo d'un ou plusieurs points singuliers (éventuellement plusieurs fois le même, le long d'une orbite fermée).

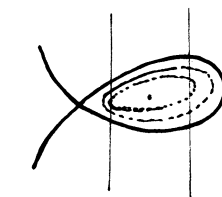
Un simple argument de continuité (méthode de "shooting") permet en général de prévoir les ombres des images des diverses solutions. Voici trois exemples (on dessine les séparatrices en trait continu et δ en pointillé).



Une ombre de solution



2 ombres de solutions



Un nombre infiniment grand de solutions

Il reste à déterminer les couches libres de chaque solution. Le premier exemple suffit pour comprendre la méthode

- si les deux cols sont non dégénérés, les fonctions écart-temps donnent, pour des valeurs propres α_1^-, α_1^+ et α_2^-, α_2^+ correspondant aux directions d'entrée-sortie les temps approximatifs

$$R_i \sim -\frac{\epsilon}{\alpha_i^+} \log E_i = -\frac{\epsilon}{\alpha_i^-} \log S_i \quad i = 1, 2.$$

Comme $S_1 = E_2$ on en déduit $R_2 \sim \frac{\alpha_2^+}{\alpha_2^-} R_1$ et comme $R_1 + R_2 \sim 1$ $R_1 \sim \frac{\alpha_2^+}{\alpha_1^+ + \alpha_2^+}$ ce qui détermine la couche libre (saut de 1 à 2) dans le halo de $\frac{\alpha_2^+}{\alpha_1^+ + \alpha_2^+}$.

Dans le cas où la solution visite plusieurs cols non dégénérés, on a une formule analogue.

- si l'un des cols, par ex. le n° 2, est dégénéré du type Hamiltonien avec modèle $H = \alpha^2 v^{2p} - \beta^2 u^{2q}$, la solution traverse le halo du col n° 1 en un temps i.p. ; il n'y a pas de vraie couche libre, tout au plus un bref ralentissement après le saut initial.

- si γ visite plus de 2 cols du type précédent, les écarts sont conservés tout le long et le temps 1 est réparti (à des i.p. près) entre les singularités qui ont le nombre $r = \frac{2p-1}{2p} - \frac{1}{2q}$ le plus grand.

En l'absence d'intégrale première globale, le calcul de la répartition précise semble difficile (phénomène hautement instable). Si le champ est globalement hamiltonien, on utilise le calcul de $I_{p,q}(a,h)$ en 2.5.

Ces techniques sont particulièrement bien adaptées à des problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} \epsilon^2 \ddot{u} = f(u, \epsilon \dot{u}) \\ u(0) \text{ et } u(1) \text{ standard donnés} \\ f \text{ standard} \end{cases} \quad \text{avec } \frac{\partial f}{\partial u} \neq 0 \text{ en } (u, 0) \text{ tel que } f(u, 0) = 0$$

(points singuliers non dégénérés)

ou bien $f(u, v) = -g(u)$ avec des zéros d'ordre $2q$ qui correspondent à l'hamiltonien $H(u, v) = V^2 - g(u)$.

Dans le deuxième cas, les singularités ont pour modèle à difféomorphisme près des champs d'hamiltonien $V^2 - \beta^2 u^{2q}$ (utiliser le développement de g au voisinage d'un zéro cf [41]).

3. La stroboscopie infinitésimale

L'étude des champs lents et rapides généraux nécessite un outil qui permette de comparer les trajectoires de X et celles de champs standard qui s'en déduisent par des procédures externes (ombre, ombre en moyenne, ombre de projections, ...) portant sur l'espace et pas seulement sur le temps.

La clef essentielle est la "stroboscopie infinitésimale", qui rappelle une approche heuristique utilisée par Minorsky dans l'étude de certaines oscillations rapides (sans réelle justification, semble-t-il).

A la base se trouve l'idée d'observer une courbe $\gamma(t)$ en des instants discrets t_i infiniment proches, mais éventuellement très irrégulièrement espacés, de sorte que

l'on reconnaisse dans le vecteur $\frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ la valeur (à un i.p. près) d'un champ standard Y . Alors, sous des hypothèses peu contraignantes (en particulier sur $\gamma(t)$ qui peut être très "sauvage"), $\gamma(t)$ est infiniment proche d'une trajectoire de Y .

3.1. Lemme de pointage. Soit Y un champ standard continu sur un ouvert standard U de $\mathbb{R}^p$ (p standard) et $(t_i, x_i)_{0 \leq i < n}$ une suite finie de points de $\mathbb{R} \times U$ tels que

- (i) $t_0 < \alpha < t_1 < \dots < t_{n-1} < \beta < t_n$ où $\alpha < \beta$ sont standard.
- (ii) $t_{i+1} \sim t_i$ pour tout $i < n$ et x_i accessible pour tout $i < n$, d'ombre dans U .
- (iii) pour tout $i < n$, $x_{i+1} - x_i = (t_{i+1} - t_i)(Y_{x_i} + \eta_i)$ où $\|\eta_i\| \sim 0$.

Alors il existe une trajectoire standard $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ de Y telle que pour tout i , $x_i \sim \lambda(t_i)$.

En effet, pour $i < j$ on a l'inégalité (1)

$$\begin{aligned} \|x_j - x_i\| &< \| (t_j - t_{j-1})Y_{x_{j-1}} + \dots + (t_{i+1} - t_i)Y_{x_i} \| + \| (t_j - t_{j-1})\eta_j + \dots + (t_{i+1} - t_i)\eta_i \| \\ &< (t_j - t_i)(m + \sup_{i < \ell < j} \|\eta_\ell\|) = (t_j - t_i)(m + i.p.) < 2m(t_j - t_i) \end{aligned}$$

où $m = \sup_{0 \leq \ell < n} \|Y_{x_\ell}\|$.

Or les x_ℓ sont accessibles et il existe p tel que $m = \|Y_{x_p}\|$; la formulation externe de la continuité de Y en ${}^o x_p$ donne $m \sim \|Y_{x_p}\|$ qui est standard, de sorte que m est limité.

Ainsi, $t_i \sim t_j$ implique $x_i \sim x_j$ et à chaque t standard de $[\alpha, \beta]$ correspond l'ombre commune (qui est dans U) de tous les x_i tels que $t_i \sim t$ (par ex. ceux qui encadrent t). Par construction, ceci définit une unique application standard

$\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ qui coïncide avec cette correspondance externe aux points standard.

Si t et t' sont standard tels que $\alpha < t < t' < \beta$, considérons deux indices i et j tels que $t_i \sim t$ et $t_j \sim t'$; on a $i < j$ et

$$\frac{\lambda(t') - \lambda(t)}{t' - t} = Y_{\lambda(t)} \sim \frac{x_j - x_i}{t_j - t_i} = Y_{x_i} \text{ car } Y_{\lambda(t)} \sim Y_{x_i} \text{ (continuité).}$$

Or $\left\| \frac{x_j - x_i}{t_j - t_i} - Y_{x_i} \right\| < \sup_{i < \ell < j} \|Y_{x_\ell} - Y_{x_i}\| + \|\eta_{x_\ell}\| < \sup_{i < \ell < j} \|Y_{x_\ell} - Y_{\lambda(t)}\| + \eta$ avec $\eta \sim 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, standard; la formulation interne de la continuité de Y en $\lambda(t)$ donne (après transfert) un $\delta > 0$ standard tel que $\|x_\ell - \lambda(t)\| < \delta$ implique $\|Y_{x_\ell} - Y_{\lambda(t)}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour $t' - t < \frac{\delta}{4m}$, on a $\|x_\ell - \lambda(t)\| = \|x_\ell - x_i\| + i.p. < \delta$ d'après (1) pour $i < \ell < j$, et donc $\sup_{i < \ell < j} \|Y_{x_\ell} - Y_{\lambda(t)}\| + \eta < \frac{\varepsilon}{2} + i.p. < \varepsilon$ qui donne la majoration

$\left\| \frac{\lambda(t') - \lambda(t)}{t' - t} - Y_{\lambda(t)} \right\| < \varepsilon + i.p.$; cet i.p. disparaît car les deux membres sont standard. Ceci montre que λ admet $Y_{\lambda(t)}$ comme demi-dérivée à droite en tout point

standard ; raisonnement analogue à gauche. Comme $x_i \sim \lambda(t_i)$ et que λ est standard continue, on a $x_i \sim \lambda(t_i)$ pour tout i .

Remarques. (i) L'entier n est i.g. (sinon $\beta - \alpha < t_n - t_0$ est i.p.).

(ii) Si Y a la propriété d'unicité, λ est l'unique trajectoire passant par 0x_i à l'instant 0t_i pour n'importe quel i , ce qui donne (si on sait intégrer Y) une approximation parfaite de tous les x_j à partir de 0t_j .

(iii) Une application directe du lemme est d'intégrer un champ standard Y ; toute procédure qui fournit à partir de Y des (t_i, x_i) convenables détermine une trajectoire standard. La plus immédiate s'inspire de la construction de PEANO ; sur une boule ouverte standard $B(a, r)$ où $\|Y\| < m$ standard, on obtient une demi-trajectoire standard $\lambda : [0, \alpha] \rightarrow B$ pour tout $\alpha < \frac{t}{m}$ en posant $t_i = \frac{i}{n} \alpha$, $x_{i+1} - x_i = \frac{\alpha}{n} Y_{x_i}$ où n est un entier i.g. arbitraire. Par transfert, on obtient le théorème d'existence classique. Des choix plus "approximatifs" pour les x_i peuvent donner des trajectoires différentes, ce qui fournit un outil nouveau dans l'étude du problème d'unicité (voir [1]).

3.2. Lemme de stroboscopie

L'application aux problèmes de perturbation relève de la remarque (ii) ; les trajectoires de Y sont supposées connues (en pratique par calcul sur machine) et l'on souhaite constater l'approximation parfaite d'une courbe non standard $\lambda(t)$ par l'une d'elles, à partir d'observations en des instants t_i bien choisis. Une telle "technique de stroboscopie" a permis initialement à J.L. CALLOT d'étudier les ombres des courbes intégrales de l'équation $\dot{x} = \sin \frac{tx}{\epsilon}$, $\epsilon \sim 0$ (cf [4]). Dans cet exemple, le choix des t_i s'impose à partir de la géométrie du problème (il s'agit de maxima) ; en général il n'y a pas de choix privilégié et récemment T. SARI (cf. [14]) a mis au point une technique de stroboscopie assez efficace pour étudier des problèmes de moyennisation, d'invariance adiabatique (perturbation de systèmes hamiltoniens) et diverses autres questions où une oscillation rapide évolue lentement, sous des hypothèses très générales. Nous allons examiner une version (légèrement renforcée) de cette technique qui est peut être l'un des apports les plus remarquables de l'A.N.S. à la mécanique des oscillateurs (entre autres).

Lemme de stroboscopie. Soit Y un champ standard continu sur un ouvert standard U de $\mathbb{R}^p$ (p standard) et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ une courbe définie sur un intervalle ouvert I . Soit $[\alpha, \beta] \subset I$ un intervalle standard, une partie $E \subset I$ contenant α et un i.p. $\mu > 0$ tels que

- (i) sur $E \cap [\alpha, \beta]$, $\gamma(t)$ est accessible et son ombre est dans U .
- (ii) pour tout $t \in E \cap [\alpha, \beta]$, il existe $t' \in E$ vérifiant les trois conditions

$\mu < t' - t \sim 0$; pour tout $s \in E \cap [t, t']$, $\gamma(s) \sim \gamma(t)$ et $\frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \sim \gamma_{\gamma(t)}$.

Alors il existe une trajectoire standard $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ de Y telle que, sur $E \cap [\alpha, \beta]$, on ait $\gamma(t) \sim \lambda(t)$ et il existe $t \in E \cap [\alpha, \beta]$ tel que $t \sim \beta$.

Démonstration. a) fausse. L'hypothèse (ii) permet de construire par récurrence une subdivision infiniment fine $t_0 < \alpha < \dots < \beta < t_n$ telle que $t_i \in E$ et $\frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \sim \gamma_{\gamma(t_i)}$; on conclut en appliquant le lemme de pointage aux $x_i = \gamma(t_i)$.

objection. La subdivision n'est pas construite par une procédure interne (on "choisit" à chaque pas un t' en fonction de critères externes $t' \sim t$ etc... ; or "l'ensemble des t' tels que" n'existe pas en général, donc ne permet pas le choix ^(*)).

Dans certains cas, on a une fonction (interne) $t \rightarrow t'$ et alors l'objection tombe car on peut itérer cette fonction un nombre infiniment grand de fois.

b) correcte. Soit q un entier standard. D'après l'hypothèse (ii), pour tout $t \in E \cap [\alpha, \beta]$, il existe $t' \in E$ tel que $\mu < t' - t < \frac{1}{q}$, $\|\gamma(s) - \gamma(t)\| < \frac{1}{q}$ pour $s \in E \cap [t, t']$ et $\|\frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} - \gamma_{\gamma(t)}\| < \frac{1}{q}$.

L'axiome du choix fournit alors une application $\eta : E \cap [\alpha, \beta] \rightarrow E$ telle que, pour chaque t , $t' = \eta(t)$ ait ces propriétés.

L'existence de η est une propriété interne, vraie pour tout q standard ; elle est donc permanente jusqu'à un entier i.g., de sorte qu'il existe une application η vérifiant $\mu < \eta(t) - t \sim 0$, $\gamma(s) \sim \gamma(t)$ sur $E \cap [t, \eta(t)]$ et

$\frac{\gamma(\eta(t)) - \gamma(t)}{\eta(t) - t} \sim \gamma_{\gamma(t)}$. Comme $\eta^i(\alpha) > i\mu + \alpha$, il existe un plus petit i tel que $\eta^i(\alpha) > \beta$, noté n . On applique alors le lemme du pointage à la suite $t_i = \eta^i(\alpha)$, $x_i = \gamma(t_i)$, $0 < i < n$, ce qui donne une trajectoire $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ de Y telle que $\gamma(t_i) \sim \lambda(t_i)$; pour $t_i < s < t_{i+1}$, $s \in E$, on a $\gamma(s) \sim \gamma(t_i) \sim \lambda(t_i) \sim \lambda({}^0 t_i) \sim \lambda(s)$ car λ est continue. La dernière affirmation est vérifiée par $\eta^{n-1}(\alpha)$.

Remarques. (i) L'hypothèse $t' - t > \mu$ est indispensable pour que la suite $\eta^i(\alpha)$ dépasse β .

(ii) Lorsque γ a pénétré dans le halo de la frontière de U , le lemme de pointage ne s'applique plus car ${}^0 \gamma(t) \notin U$.

(*) Rappelons que les axiomes ensemblistes classiques - en particulier les diverses formes du choix ne s'appliquent qu'aux propriétés internes, dans la théorie I.S.T.

(iii) Si E ne contient pas tous les points standard de $[\alpha, \beta]$, il se peut que ${}^o\gamma$ ne soit pas définie. On rencontre ce genre de situation dans les théorèmes d'approximation du type "presque partout" ; dans beaucoup de cas (par ex. dans le travail de SARI) l'ensemble E est l'intervalle I en entier.

(iv) L'approximation de γ par λ s'étend par permanence à une partie (interne) de E contenant la galaxie sur laquelle les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites ; ceci permet d'éventuels raccords avec une autre approximation valable sur la frontière de U .

3.3. Cas où l'approximation est contrainte par λ

Dans beaucoup d'applications de la stroboscopie, on ne connaît $\gamma(t)$ que de manière implicite (comme trajectoire d'un champ que l'on ne sait pas intégrer explicitement, par exemple), et on compte sur les trajectoires de Y pour localiser γ . Cela suppose que l'hypothèse (ii) reste vérifiée tant que ${}^o(\gamma(t)) \in U$, sans que $[\alpha, \beta]$ soit précisé, et que λ soit l'unique trajectoire de Y que γ puisse longer sur $E \cap [\alpha, \beta]$.

On obtient un lemme renforcé, utilisable en particulier lorsque Y a la propriété d'unicité et que l'hypothèse (ii) puisse être vérifiée sans calculer explicitement γ .

Lemme de stroboscopie contrainte

Soit Y un champ standard continu sur un ouvert standard U de $\mathbb{R}^p$ (p st), et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ une courbe définie sur un intervalle ouvert I .

Hypothèse sur γ - Il existe une partie $E \subset I$ et un réel $\mu > 0$ tels que pour tout $t \in E$ avec ${}^o(\gamma(t)) \in U$, il existe $t' \in E$ vérifiant les conditions $\mu < t' - t \sim 0$, $\gamma(s) \sim \gamma(t)$ sur $E \cap [t, t']$, et $\frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \sim \frac{Y}{\gamma(t)}$.

Soit $\alpha \in E$ tel que ${}^o(\gamma(\alpha)) \in U$, α standard.

Hypothèse sur Y - Il existe une unique demi-trajectoire standard maximale $\lambda : J \rightarrow U$ (où $J = [\alpha, \cdot]$ est standard), telle que $\lambda(\alpha) \sim \gamma(\alpha)$.

Alors pour tout $\beta \in J$, standard, tel que ${}^o(\lambda(s)) \in U$ sur $[\alpha, \beta]$, il existe $t \sim \beta$ dans $E \cap J$ et $\gamma(s) \sim \lambda(s)$ sur $E \cap [\alpha, \beta]$.

Démonstration - Supposons qu'il existe $\beta \in J$, standard, tel que ${}^o(\lambda(s)) \in U$ sur $[\alpha, \beta]$ et que pour un certain $\bar{s} \in E \cap [\alpha, \beta]$, $\|\gamma(\bar{s}) - \lambda(\bar{s})\| > \bar{k}$ où $\bar{k}$ est standard > 0 . Par compacité de l'image $\lambda([0, \beta])$, il existe k standard, que l'on peut supposer $< \bar{k}$, tel que $\|x - \lambda(s)\| < k$ pour un $s \in [\alpha, \beta]$ implique ${}^ox \in U$.

Soit $A = \{t \in J, \forall s \in E \cap [\alpha, t], \|\gamma(s) - \lambda(s)\| < k\}$; A est un intervalle majoré par β , de borne sup t_0 .

Comme ${}^o\gamma(s) \in U$ sur $A \cap E$, on obtient grâce à l'hypothèse sur Y , une application $\eta : E \cap A \rightarrow E$ comme dans la démonstration du lemme de stroboscopie (mais A n'est pas standard, en général) ; alors $\{i / \eta^i(\alpha) = s_i \in A\}$ est majoré par $\frac{\beta-\alpha}{\mu}$, de sorte qu'il existe un $n = \sup \{i, s_i \in A\}$. On a donc $s_{n+1} \notin A$ et $s_{n+1} \sim t_o$.

Le lemme de pointage donne, sur tout intervalle standard $[\alpha, a] \subset A$, un segment de trajectoire de Y issu de ${}^o(\gamma(\alpha))$ égal par hypothèse à λ (unicité). Ainsi, tant que $s_i \in A$, $t_o - s_i$ non i.p., on a $\gamma(s) \sim \lambda(s)$ sur $E \cap [\alpha, s_i]$. Cette propriété est permanente jusqu'à un s_p tel que $s_p \sim t_o$. Soit $s_p < s < s_n$, $s \in E$. Il existe i tel que $s_i < s < s_{i+1}$; alors $\gamma(s) \sim \gamma(s_i) = \gamma(s_p) + \sum_p^{i-s} (s_{\ell+1} - s_\ell)(Y_{\gamma(s_\ell)} + i.p.)$.

Or $s_\ell \in [\alpha, \beta]$, de sorte que $\gamma(s_\ell)$ appartient au compact standard $K \subset U$ des x dont la distance à $\lambda([\alpha, \beta])$ soit $< k$. Soit M le sup de $\|Y\|$ sur K . Alors $\|Y_{\gamma(s_\ell)} + i.p.\| < 2M$ (qui est standard) et donc $\|\gamma(s_i) - \gamma(s_p)\| < 2M(s_i - s_p) \sim 0$. Ainsi $\gamma(s) \sim \gamma(s_p) \sim \gamma(s_n)$. Comme $\gamma(s) \sim \gamma(s_n)$ sur $[s_n, s_{n+1}] \cap E$, on a $\gamma(s) \sim \gamma(s_p) \sim \lambda(s_p) \sim \lambda(s)$ (car λ est continue et $s \sim s_p$) sur $E \cap [\alpha, s_p]$. Sur $E \cap [\alpha, s_p]$, on a déjà $\gamma(s) \sim \lambda(s)$, ce qui montre que $s_{n+1} \in A$. D'où une contradiction.

L'autre partie de la conclusion résulte du fait que le lemme de stroboscopie s'applique maintenant à $[\alpha, \beta]$.

Ainsi, E et l'approximation $\gamma(s) \sim \lambda(s)$ sont "tirés vers la droite" dans J aussi longtemps que ${}^o(\lambda(t))$ existe et appartient à U , ie tant que $\lambda(t)$ ne pénètre pas dans le halo de la frontière de U . Lorsque λ atteint ce halo (ou sort de l'espace accessible), la propriété reste permanente jusqu'à ce que cette circonstance soit réalisée ; ceci permet le raccord avec un autre comportement dans un ouvert adjacent à U .

Remarque - La subtile simplicité de l'idée stroboscopique et de sa justification masque la très grande quantité d'information mathématique contenue dans les lemmes 3.2. et 3.3., dont l'exploitation poussée promet d'intéressants développements. Notons le dialogue constant, dans les démonstrations, entre la notion interne de limite et sa formulation externe ; à ce propos, il faut souligner que l'ANS est d'autant plus efficace qu'elle met en jeu une plus grande quantité de propriétés internes (éventuellement démontrées à l'aide de l'ANS à une autre occasion) ; il s'agit d'une valeur ajoutée (par étapes successives) et non, comme le pensaient les esprits naïfs dans les débuts, d'une mathématique parallèle où les vieux rêves infinitésimaux remplaceraient correctement les moeurs epsilon-deltaïques...

3.4. Application à l'approximation lente

Lemme - Soit X un champ continu sur un ouvert standard $U \subset \mathbb{R}^p$ et Y un champ continu standard sur U . Soit $\gamma : I \rightarrow U$ une trajectoire de X et $[\alpha, \beta] \subset I$ un intervalle standard sur lequel $X_{\gamma(t)} \sim Y_{\gamma(t)}$ et ${}^0(\gamma(t)) \in U$. Alors il existe une trajectoire standard $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow U$ de Y telle que $\gamma(t) \sim \lambda(t)$ sur $[\alpha, \beta]$.

En effet, soit $m = \sup_{[\alpha, \beta]} Y_{\gamma(t)}$. Comme m est atteint en un t_0 , on a $m \sim Y_{\gamma(t_0)}$ (continuité de Y), de sorte que m est limité. Alors, pour $t, s \in [\alpha, \beta]$, la formule des accroissements finis appliquée à chaque composante donne $\|\gamma(s) - \gamma(t)\| < |s - t| \sup_{[\alpha, \beta]} X_{\gamma(t)} \sim (s - t) m$; il en résulte que $t \sim s$ implique

$\gamma(t) \sim \gamma(s)$. Soit μ un i.p. > 0 fixé; la même formule donne

$\frac{\gamma_i(t+\mu) - \gamma_i(t)}{\mu} = X_i(\gamma(t+\theta_i\mu)) \sim Y_i(\gamma(t+\theta_i\mu))$ avec $0 < \theta_i < 1$; comme $\gamma(t+\theta_i\mu) \sim \gamma(t)$, on en déduit $\frac{\gamma(t+\mu) - \gamma(t)}{\mu} \sim Y_{\gamma(t)}$. La conclusion résulte du lemme de stroboscopie, pour $t' = t + \mu$, $E = I$.

Remarque - On obtient un résultat plus général en introduisant un ensemble E moins gros, avec plus de souplesse sur le choix de t' .

3.4. Lorsque Y a la propriété d'unicité dans U , on obtient l'outil essentiel dans l'étude des champs lents, utilisé dans la plupart des travaux "non standard" sur les équations différentielles sous une forme ou une autre (voir par ex. le "lemme de l'ombre courte" dans [6]).

Lemme d'approximation contrainte - Soient X et Y comme précédemment, et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ une trajectoire maximale de X dans U . On suppose que $\gamma(0)$ soit accessible, avec ombre dans U , et que $X_x \sim Y_x$ pour tout $x \in U$ accessible. Alors, si il existe une unique trajectoire standard $\lambda : J \rightarrow U$ de Y issue de ${}^0(\gamma(0))$, on a $\gamma(t) \sim \lambda(t)$ sur tout intervalle standard $[\alpha, \beta]$ contenant 0 où λ est définie.

En effet, si ${}^0(\gamma(t)) \in U$, il existe une boule fermée de rayon standard r centrée en ce point et contenue dans U (car U est ouvert standard); soit m le sup de $\|Y\|$ sur cette boule B ; alors $\|X\| < 2m$ sur B , de sorte que γ est définie et contenue dans B sur $]t - \frac{r}{m}, t + \frac{r}{m}[$. Comme m est standard, on peut choisir $\mu \sim 0$ arbitraire et alors le même argument que dans le lemme précédent montre que l'hypothèse sur γ dans la stroboscopie contrainte est vérifiée pour $E = I$, $t' = t + \mu$, car $\mu < \frac{r}{m}$.

Remarque - Il est important que la condition $X \sim Y$ soit vérifiée en tous les points accessibles d'un ouvert standard contenant l'image de λ , et pas seulement dans le halo de cette image, bien que dans beaucoup de cas cette dernière condition soit suffisante. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, le champ $X = \frac{\partial}{\partial u} + V^\alpha g(u) \frac{\partial}{\partial v}$ a bien la propriété

pour $Y = \frac{\partial}{\partial u}$, $\lambda(u) = (u, 0)$ lorsque α est entier > 0 (ie les trajectoires de X issues d'un point $\sim (0, 0)$ longent λ tant que u est limité) ; mais pour $\alpha = \frac{2}{3}$, les trajectoires de X quittent le halo de λ dans le plan accessible. F. DIENER ([6]) suggère que la propriété est vraie lorsque X a la propriété d'unicité, ou au moins est lipschitzien.

4. Les champs rapides - phases lentes et phases de dérive

On considère maintenant un champ rapide $X = \frac{1}{\epsilon} Y + Z$ sur R^D (p standard). Notons $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$ les champs standard ombres de Y et Z . On suppose, pour simplifier, que les approximations $Y \sim \bar{Y}$ et $Z \sim \bar{Z}$ sont valables dans tout l'espace accessible, que X et $\bar{Y}$ soient complets de classe C^1 et que dans l'espace accessible $x \sim y$ implique $Z_x \sim Z_y$ (ce qui implique la continuité uniforme de $\bar{Z}$).

4.1. Phases rapides

Notons ϕ le flot de X et Ψ celui de $\bar{Y}$. Si x est accessible, le lemme d'approximation contrainte 3.4. appliqué aux champs ϵX et $\bar{Y}$ implique $\phi(x, t) \sim \Psi(\overset{O}{x}, \frac{t}{\epsilon})$ pour $\frac{t}{\epsilon}$ limité, de sorte que le lemme des sauts 2.1. se généralise immédiatement.

Ainsi, en dehors des halos des points singuliers de $\bar{Y}$, l'influence de $\bar{Y}-Y$ et de Z est infiniment petite sur des intervalles de temps d'ordre ϵ , tant que les trajectoires de $\bar{Y}$ longées par celles de X restent accessibles.

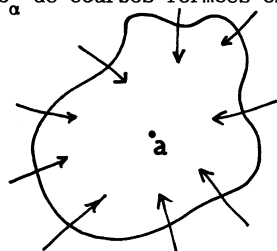
Bien entendu, il n'y a plus conservation des écarts, puisqu'une trajectoire de X peut traverser son ombre sous l'influence de $A = Y - \bar{Y} + \epsilon Z$.

4.2. Phase de conflit ponctuel

Lorsqu'une trajectoire γ de X a sauté dans le halo d'un point singulier standard a de X , son comportement ultérieur dépend fortement de la nature de a et des valeurs de Z dans la galaxie où $\frac{1}{\epsilon} Y$ est limité.

Ainsi, dans R^2 , les noeuds et foyers stables de $\bar{Y}$ restent des pièges qui ne laissent ressortir de leur halo aucune trajectoire de X .

En effet pour une telle singularité, il existe une famille standard à un paramètre C_α de courbes fermées emboîtées qui entourent a de façon que pour $\alpha \sim 0$, C_α soit



dans le halo de a et que pour α standard positif $\bar{Y}$ soit transverse rentrant à C_α ; Alors, comme $A = Y - \bar{Y} + \epsilon Z \sim 0$ sur C_α , X est aussi transverse aux C_α standard, de sorte que aucune trajectoire γ de X issue du halo de a ne traverse C_α . Cette propriété est permanente jusqu'à un $\alpha \sim 0$; ainsi γ ne peut sortir du halo de a .

Pour une raison analogue, aucun noeud ou foyer instable de $\bar{Y}$ n'est visité depuis l'extérieur de son halo.

Par contre les centres de $\bar{Y}$ peuvent perdre leur neutralité sous l'effet de A ; l'effet de dérive étudié plus loin se fait sentir et le point singulier peut être attractif ou répulsif (lentement !).

Dans le cas d'un col, les trajectoires qui visitent le halo peuvent repartir le long de n'importe quelle séparatrice sortante, contrairement aux champs purs. Il s'agit d'un phénomène hautement instable, puisque des trajectoires entrantes très proches peuvent ressortir dans des directions différentes. Le calcul du temps de relaxation en fonction de la position d'entrée est un problème très délicat, encore peu exploré.

4.3. Evolution le long d'une sous-variété lente

Dans certains cas, le champ $\bar{Y}$ admet une sous-variété standard S_q (supposée C_1) de points singuliers. Notons G la galaxie (ensemble externe) des points du halo de S où $\frac{\|Y\|}{\epsilon}$ est limité. En $x \in G$, $\|X\|$ est limité, donc il peut exister une trajectoire γ qui évolue lentement dans G, si la géométrie de S et X s'y prête (comme dans le cas de l'équation de Van der Pol). On se propose de décrire l'ombre $\lambda : [t_0, t_1] \rightarrow S$ d'un segment $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow R^p$ de trajectoire de X, où t_0, t_1 sont standard, lorsque l'image de γ est contenue dans G. Comme $\|X_{(*)}(t)\|$ est limité, $t \sim t'$ implique $\gamma(t) \sim \gamma(t')$, de sorte que λ est continue.

Supposons qu'il existe un ouvert standard U contenant l'image de γ et une application standard $C^1 \pi : U \rightarrow S$ telle que $\pi_x^t(Y_x) = 0$ pour tout $x \in U$ et $\pi(x) = x$ sur $\pi(U) = U \cap S$.

On dira dans ce cas que γ est projetable sur S. Alors, pour t standard dans $[t_0, t_1]$, on a $\gamma(t) \sim \lambda(t)$ et donc $\pi(\gamma(t)) \sim \pi(\lambda(t)) = \lambda(t)$ car $\lambda(t)$ est standard, situé dans le halo de S, et donc $\pi(\lambda(t)) \sim \lambda(t)$ par continuité de π . Ainsi γ et $\pi \circ \gamma$ ont même ombre.

Lemme - Soit $\hat{Z}$ le champ standard continu sur $U \cap S$ défini par $\hat{Z}_a = {}^0(\pi_a^t(Z_a)) = \pi_a^t(\bar{Z}_a)$ aux points standard. Alors $\lambda(t)$ est une trajectoire de $\bar{Z}$ issue de ${}^0\pi(\gamma(t_1))$ et sur $[t_0, t_1]$, on a $\gamma(t) \sim \lambda(t)$.

(*) On utilise le fait que la "s-continuité" de γ implique la continuité de son ombre.

En effet, une subdivision infiniment fine $\{s_i\}$ de $[t_0, t_1]$ donne, via la formule des accroissements finis,

$$\frac{\pi(\gamma(s_{i+1})) - \pi(\gamma(s_i))}{s_{i+1} - s_i} \sim \pi_{\gamma(s_i)}^t (Z_{\gamma(s_i)}) \sim \hat{Z}_{\pi(\gamma(s_i))}$$

car $\hat{Z}$ est continu (π est standard C^1 et $\bar{Z}$ est continu) ; de plus sur $[s_i, s_{i+1}]$, γ varie infiniment peu et l'image de γ est dans G (vitesse lente). Le lemme de pointage donne alors pour ${}^0(\pi \circ \gamma)$ une trajectoire de $\hat{Z}$ telle que $\pi(\gamma(t)) \sim \gamma(t) \sim \lambda(t)$ sur $[t_0, t_1]$.

Si $\hat{Z}$ a la propriété d'unicité (par ex. si $\bar{Z}$ est C^1 et π de classe C^2), le lemme décrit complètement λ et l'approximation reste valable aussi longtemps que γ ne sort pas de $U \cap G$.

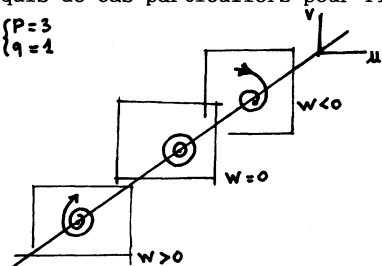
Cependant γ peut quitter G n'importe quand, même si λ continue dans $U \cap S$.

Examinons le problème global suivant - on suppose que π est la projection C^2 d'un tube $U = S \times D^{p-q} + S$ tel que $\pi_x^t(Y_x) = 0$ sur U , avec $\bar{Z}$ de classe C^1 . Etudier les trajectoires de X dans la partie accessible de U .

Supposons par exemple que S soit une réunion disjointe $S_a \cup S_r \cup S_n$ isolée de tout autre point singulier, où les points standard de S_a (resp S_r) sont ω -asymptotiquement stables (resp α -) pour la restriction de $\bar{Y}$ aux fibres de π correspondantes, S_a et S_r ouverts connexes dans S , et S_n sous-variété fermée de dimension $q-1$ qui sépare S_a et S_r . Alors, une trajectoire γ de X issue de $x \in \pi^{-1}(S_a)$ saute dans la galaxie G puis longe la trajectoire λ de $\hat{Z}$ issue de ${}^0\pi(x)$ tant que $\lambda(t)$ reste accessible et hors du halo de S_n (raisonnement analogue à celui de 4.2.). Si $\lambda(t)$ pénètre dans ce halo, elle y emmène $\gamma(t)$ par permanence, qui peut alors s'échapper hors de G ou continuer à longer $\lambda(t)$.

Dans le cas où $\lambda(t)$ tend vers un point singulier de $\hat{Z}$ situé sur S_n , et qui ne soit pas α -limite d'une trajectoire située dans S_r , γ ne peut franchir "la barrière" S_r ; elle peut soit repartir si Y le permet, soit longer S_n jusqu'à ce que la situation se modifie. On imagine la richesse des situations possibles. Voici quelques croquis de cas particuliers pour fixer les idées.

$\begin{cases} p=3 \\ q=1 \end{cases}$



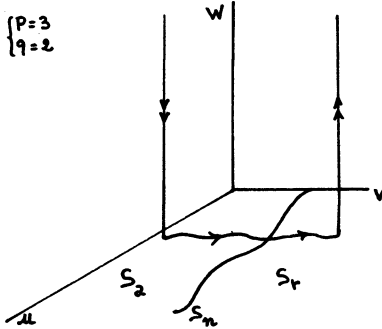
les fibres de π sont les plans $W = \text{cte}$.

S est l'axe des W .

Y est un champ standard du type

$f(u, v, w) \frac{\partial}{\partial u} + g(u, v, w) \frac{\partial}{\partial v}$ nul sur S pour lequel $(0, 0, w)$ est un foyer stable pour $w > 0$, instable pour $w < 0$, et un centre pour $W = 0$. L'évolution dépend de la composante de Z sur $\frac{\partial}{\partial w}$.

$$\begin{cases} p=3 \\ q=2 \end{cases}$$



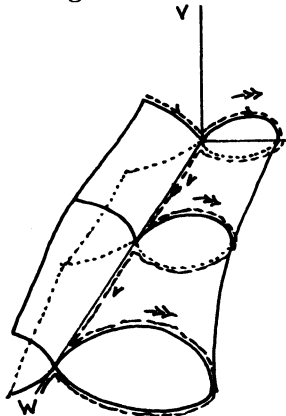
S est le plan (u,v) , π la projection verticale. La situation avec partie attractive et répulsive est exclue, car un plan décalé vers le haut serait quelque part tangent à $\bar{Y}$; à moins que $\bar{Y}$ n'admette des zéros non isolés de S.

Cette remarque s'applique en général pour $q = p-1$.

Par contre pour $p = 4$, $q = 2$, on peut avoir des S_a, S_n, S_r sur une surface de zéros isolée.

Lorsque λ traverse S_n , γ peut continuer à la longer dans S_r un certain temps, puis la quitter en longeant rapidement une trajectoire de $\bar{Y}$. La discussion devient délicate ; il faut résoudre le problème d'entrée-sortie, fonction externe qui relie les ombres des points d'entrée et de sortie de G pour les trajectoires de X qui y passent.

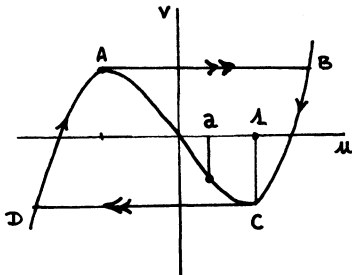
Voici un exemple encore non élucidé ; il s'agit de l'équation différentielle $\epsilon^2 \ddot{u} = f(u,t)$ vue dans l'espace $(u, \epsilon u = v, w = t)$ qui présente dans certains cas la configuration suivante (voir [11], leçon 14)



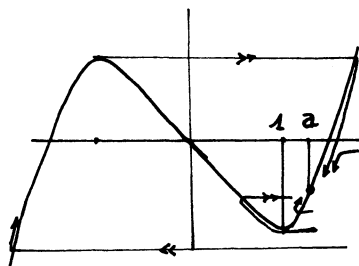
$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{v}{\epsilon} \\ \dot{v} = \frac{f(u,w)}{\epsilon} \\ \dot{w} = 1 \end{cases} \quad \text{ici } \bar{Y} = \begin{pmatrix} v \\ f(u,w) \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un argument de continuité montre qu'il existe des trajectoires qui alternent des phases lentes le long de l'axe des w et des boucles rapides le long de plans $w = \text{cte.}$ en des instants approximatifs $w_1, w_2, \dots$ qui ne sont certainement pas dans des rapports arbitraires. Ici les points singuliers ne sont ni attractifs ni répulsifs dans les plans $w = \text{cte.}$ puisqu'il s'agit de cols.

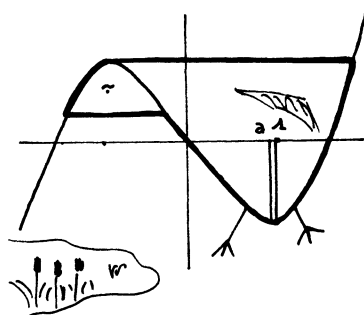
Le phénomène du passage, a priori surprenant, d'une zone attractive à une zone répulsive sans rejet immédiat est apparue initialement dans la discussion de l'équation de Van der Pol $\epsilon \ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u = a$. Dans le plan de Lienard, on a un grand



cycle d'ombre ABCD tant que le point singulier du champ $\frac{1}{\epsilon} (v - \frac{u^3}{3} - u) \frac{\partial}{\partial u} + (u-a) \frac{\partial}{\partial v}$ n'est pas dans le halo de C (ie $a \sim 1$). Pour $a > 1$, il n'y a plus de cycle, car aucune ombre de trajectoire n'est fermée. Une étude fine montre qu'il existe, pour certaines valeurs très particulières du rapport $\frac{a-1}{\epsilon}$, $a \sim 1$, $a < 1$, des cycles du type "canard" qui longent d'abord l'arc attractif BC, puis l'arc répulsif CA de la cubique.



Abondamment étudié par M. et F. DIENER, J.L. CALLOT, E. BENOIT, et récemment en dimension > 2 par E. BENOIT, ce phénomène concerne ici le passage d'un couple (S', π) purement attractif à un (S', π) répulsif, π n'étant pas défini au passage. Nous renvoyons à la littérature pour plus de détails, en particulier sur le calcul des fonctions entrée-sortie qui utilise des loupes très puissantes, du type exponentiel (phénomène très sensible !).



Remarque - Il arrive qu'il n'existe pas de projection π permettant d'utiliser le lemme ci-dessus, par exemple lorsque les phases rapides sont "parallèles" à une hypersurface de points singuliers de $\bar{Y}$. Il faut alors changer le problème à l'aide d'un difféomorphisme (en général non standard) qui brise ce parallélisme.

4.4. Dérive en phase rapide

Afin de situer le problème, considérons un oscillateur linéaire rapide d'équation

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{\epsilon} v & \epsilon \sim 0 \\ \dot{v} = -\frac{1}{\epsilon} u \\ \dot{w} = 1 \end{cases}$$

Dans l'espace (u, v, w) , une trajectoire γ issue d'un point accessible $(u_0, v_0, 0)$ évolue sur le cylindre d'équation $u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2$ en cumulant des oscillations presque planes dont chacune consomme un temps $\frac{2\pi}{\epsilon}$. Il s'agit d'un champ rapide

$$X = \frac{1}{\epsilon} Y + Z \quad \text{avec}$$

$$Y = \bar{Y} = \begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Notons } \pi \text{ la projection de}$$

$$U = \mathbb{R}^3 - (\text{axe des } w) \rightarrow B =]0, \infty[\times \mathbb{R} \text{ définie par } \pi(u, v, w) = (\sqrt{u^2 + v^2}, w).$$

Alors ${}^0(\pi \circ \gamma)$ a pour équations $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{w} = 1 \end{cases}$. C'est la trajectoire du champ $\hat{Z} = \frac{\partial}{\partial w}$ sur B

issue de ${}^0\pi(u_0, v_0, 0)$. Notons que $\hat{Z}$ est la projection de Z (qui est invariant sous l'action de S^1 sur le fibré trivial $\pi : U \rightarrow B$).

Remplaçons maintenant $\frac{\partial}{\partial w}$ par un champ Z plus général, avec les hypothèses du début du chapitre. On pose $Z = f \frac{\partial}{\partial u} + g \frac{\partial}{\partial v} + h \frac{\partial}{\partial w}$.

Dans la partie accessible de U (pour la topologie induite, i.e. les points où r est limité non i.p.), la trajectoire $\gamma(t)$ issue d'un point (u_o, v_o, w_o) à l'instant t_o est infiniment proche de

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = u_o \cos \frac{t-t_o}{\epsilon} + v_o \sin \frac{t-t_o}{\epsilon} \\ \bar{v}(t) = -u_o \sin \frac{t-t_o}{\epsilon} + v_o \cos \frac{t-t_o}{\epsilon} \\ \bar{w}(t) = w_o \end{cases}$$

aussi longtemps que $T = \frac{t-t_o}{\epsilon}$ est limité, en particulier jusqu'à $t_1 = t_o + 2\pi\epsilon$, qui correspond à un tour de la fibre correspondante de π .

Alors, si $(r(t), w(t)) = \pi(\gamma(t))$, on a $\begin{cases} \dot{r} = 2(uf+vg) \\ \dot{w} = h \end{cases}$

avec ${}_o f = \bar{f}$, ${}_o g = \bar{g}$, ${}_o h = \bar{h}$.

$$D'où \frac{r(t_1) - r(t_o)}{t_1 - t_o} = \frac{2}{2\pi\epsilon} \int_{t_o}^{t_1} u(t)f(u(t), v(t), w(t)) + v(t)g(u(t), v(t), w(t)) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{t_o}^{t_o+2\pi} (uf(u, v, w) + vg(u, v, w))(t_o + \epsilon T) dT$$

$$D'où \frac{r(t_1) - r(t_o)}{t_1 - t_o} \sim \frac{1}{\pi} \int_{t_o}^{t_o+2\pi} (\bar{u}\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) + \bar{v}\bar{g}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})) (t_o + \epsilon T) dT$$

$$De même \frac{w(t_1) - w(t_o)}{t_1 - t_o} \sim \frac{1}{2\pi} \int_{t_o}^{t_o+2\pi} (\bar{h}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})) (t_o + \epsilon T) dT$$

(noter que la continuité de $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ est indispensable ici).

Soit $\hat{Z} = a \frac{\partial}{\partial r} + b \frac{\partial}{\partial w}$ le champ standard sur B de composantes

$$a(r, w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r} (\cos \theta \bar{f}(\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta, w) + \sin \theta \bar{g}(\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta, w)) d\theta$$

$$b(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h}(\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta, w) d\theta$$

Soit $\lambda(t)$ la trajectoire de $\hat{Z}$ issue d'un point standard (r_o, w_o) . Alors, si $\hat{Z}$ a la propriété d'unicité (par ex. si $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ sont C^1), le lemme de stroboscopie contrainte (où l'on prend $t' = t + 2\pi$) assure que si $\pi(\gamma(o)) \sim (r_o, w_o)$, alors $\pi(\gamma(t)) \sim \lambda(t)$ aussi longtemps que $\lambda(t)$ reste accessible (i.e. $r(t)$ et $w(t)$ limités, $r(t)$ non i.p.).

Exemple - Partons de l'équation de Van der Pol modifiée

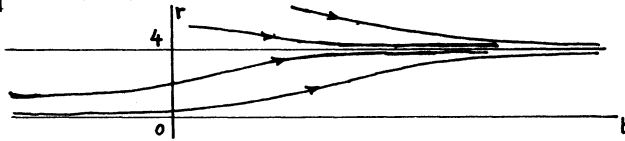
$$(1) \quad \epsilon^2(\ddot{u} - (1-u^2)\dot{u}) + u = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{\epsilon} v \\ \dot{v} = -\frac{1}{\epsilon} u + (1-u^2)v \\ \dot{w} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où on tire}$$

$$\begin{cases} a(r, w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (1-r \cos^2 \theta) d\theta = \frac{r(4-r)}{4} \\ b(r, w) \cong 1 \end{cases}$$

Ainsi pour $r_0 = u_0^2 + v_0^2$ limité non i.p., la trajectoire issue de (u_0, v_0) longe rapidement des cercles dont le rayon évolue selon l'équation

$\dot{r} = \frac{r(4-r)}{4}$ dont les solutions ont l'allure suivante



(un point fixe stable $r = 4$, un point fixe instable $r = 0$).

Il en résulte que le système (2) admet un cycle limite infiniment proche du cercle $u^2 + v^2 = 4$ (l'application de premier retour rapproche r de 4, d'où un point fixe). On retrouve là à peu de frais un résultat classique.

La situation de l'oscillateur modifié est un cas particulier de dérive (selon une expression d'ARNOLD) ; γ oscille rapidement le long des fibres mais sa projection $\pi \circ \gamma$ dérive lentement.

Voici un énoncé assez général concernant cette situation, dont la démonstration par stroboscopie est tout-à-fait analogue à la précédente.

Théorème - Soit $(\gamma(t), \theta(t))$ une trajectoire du système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) \\ \dot{y} = \frac{1}{\epsilon} a(x, \theta) + g(x, \theta) \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{p-1} \times S^1$$

issue d'un point accessible (y_0, θ_0) à l'instant 0. On suppose f, a, g 2π -périodiques en θ , continues, limitées aux points accessibles, et les ombres $\bar{f}, \bar{a}$ de f, a de classe C^1 et $\bar{a} \neq 0$.

Soit $F(y) = \frac{1}{T(y)} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{f}(y, \theta)}{\bar{a}(y, \theta)} d\theta$ avec $T(y) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\bar{a}(y, \theta)}$, et $y(t)$ la trajectoire de

$\dot{y} = F(y)$ issue de $y_0 = {}^0(x_0)$. Alors $x(t) \sim y(t)$ aussi longtemps que $y(t)$ reste définie et accessible.

Enoncé analogue dans le cas d'un ouvert $U \times S^1$, pour $y(t)$ non infiniment proche de la frontière.

Ce théorème signifie que les trajectoires d'un champ rapide $X = \frac{1}{\epsilon} Y + Z$ où Y est tangent aux fibres sur un fibré en cercle dérivent en projection sur la base approximativement selon les trajectoires de la projection moyenne de Z relative à Y , à condition que $\bar{Y}$ ne s'annule pas.

Il s'applique en particulier aux systèmes hamiltoniens à un degré de liberté et un paramètre lentement variable, et permet une description simple de leurs invariants adiabatiques.

L'étude des perturbations de systèmes plus généraux (par ex. presque périodiques) nécessite un théorème analogue sur les fibrés en droites, qui s'obtient par la stroboscopie générale, où t' n'est pas donné explicitement comme fonction interne de t .

Nous renvoyons à Sari [14] pour une étude détaillée, ainsi que pour des exemples où $\bar{Y}$ s'annule sur certaines fibres (voir aussi l'article de Sari sur la méthode KBM dans ce volume).

Enfin, le cas des fibrés en codimension > 1 (par ex. les fibrés en tores) relève de la "stroboscopie sélective" (ie. avec usage d'un ensemble E bien choisi) ; en effet, dans certaines fibres, les orbites de Y sont denses, dans d'autres elles sont fermées (cas de résonance) ; sur ces dernières, le champ projeté moyen sur la fibre est très différent du champ moyen le long de l'orbite de $\bar{Y}$, alors que dans le cas non résonnant la différence est négligeable.

Il semble que le traitement du problème à l'aide de la stroboscopie qui restreint le pointage à un ensemble E excluant les résonnances puisse éclairer fortement le problème.

5. Application à certaines équations différentielles

Considérons une équation différentielle de la forme

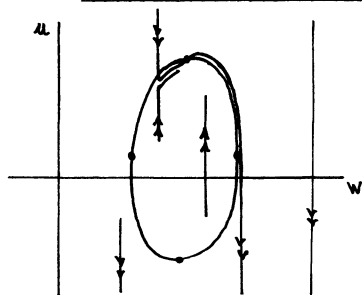
$\epsilon u^{(n)} = f(\eta, u, \eta_1 \dot{u}, \eta_2 \ddot{u}, \dots, \eta_{n-1} u^{(n-1)}, t)$ où f est une fonction standard C^∞ sur R^{n+2} et ϵ, η, η_i des paramètres > 0 . On s'intéresse au comportement des solutions $u(t)$ dans la galaxie où elles sont limitées, lorsque ϵ, η , tendent vers 0, indépendamment ou de manière concertée. On a vu que cela revient à étudier l'équation pour des valeurs $\epsilon \sim 0$, $\eta \sim 0$, avec des contraintes éventuelles sur les rapports de ces i.p., et sur les η_i .

Posons alors $v_i = \eta_i u^{(i)}$; on obtient un champ de vecteurs X associé au système

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{v_1}{\eta_1} \\ \dot{v}_1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} v_2 \\ \dot{v}_i = \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} v_{i+1} \\ \dot{v}_{n-1} = \frac{\eta_{n-1}}{\epsilon} f(\eta, u, v_1, \dots, v_{n-1}, w) \\ \dot{w} = 1 \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^{n+1}$$

Comme le produit des coefficients $\frac{1}{\eta_1}, \dots, \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}}, \dots, \frac{\eta_{n-1}}{\epsilon}$ est $\frac{1}{\epsilon}$, l'un au moins est i.g. de sorte que X est un champ rapide. Les phases rapides des trajectoires longent des droites, plans, ..., selon le nombre de coefficients non i.p. ; La situation globale générale est évidemment hors d'atteinte pour le moment, mais on peut assez bien décrire un grand nombre de cas typiques en utilisant les outils des chapitres précédents. En voici quelques uns, à titre d'illustration.

5.1. Equations du premier ordre



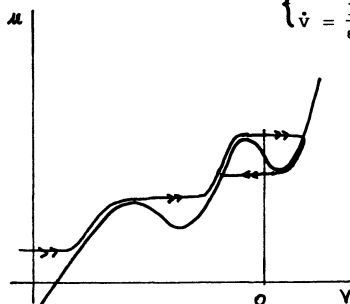
$$\epsilon \dot{u} = f(\eta, u, t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, w) \\ \dot{w} = 1 \end{cases}$$

$$\text{ou } x = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les ombres des trajectoires sont bien déterminées par la courbe Γ d'équation $f(0, u, w) = 0$, sauf si Γ présente des segments verticaux (indétermination sur les endroits où les trajectoires traversent un tel segment).

5.2. Equations du 2ème ordre autonomes

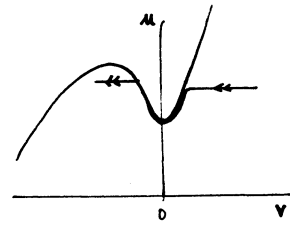
$$(a) \quad \epsilon \ddot{u} = f(\eta, u, \dot{u}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = -v \\ \dot{v} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v) \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$



situation déterminée

Les phases rapides longent des horizontales ; les phases lentes longent la courbe Γ d'équation $f(0, u, v) = 0$.

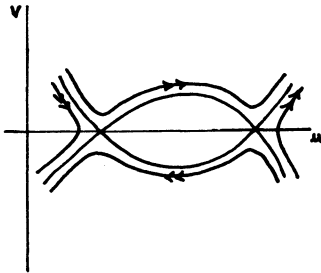
Si Γ est transverse aux horizontales sauf en des points isolés (cas d'une courbe régulière sans segments horizontaux), les arcs séparés par ces points sont attractifs ou répulsifs. Le seul cas où l'ombre d'une courbe intégrale qui longe un arc attractif



situation indéterminée
canards

avant de pénétrer dans le halo d'un point à tangente horizontale n'est pas déterminée est celui où le point est infiniment proche de la droite $v = 0$ et où le signe de v sur Γ permet de longer l'arc répulsif. C'est la situation "à canards" la plus simple (voir [7]) qui accompagne la plupart des phénomènes de bifurcation. Le travail essentiel est la détermination des fonctions externes "d'entrée-sortie".

$$(b) \quad \epsilon^2 \ddot{u} = f(\eta, u, \epsilon \dot{u}, t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{v}{\epsilon} \\ \dot{v} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v) \end{cases} \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{\epsilon} Y$$



Les phases rapides longent les trajectoires de

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} v \\ f(o, u, v) \end{pmatrix}.$$

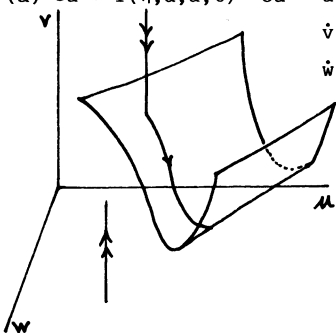
Les phases lentes se passent dans le halo des points singuliers $v = 0$, $f(o, u, o) = 0$. Lorsque f ne dépend pas de η , on a dans certains cas le calcul d'entrée-sortie-temps de relaxation du chapitre II.

$$(c) \quad \epsilon^2 \ddot{u} = f(\eta, u, \epsilon^2 \dot{u})$$

Pendant les temps d'ordre ϵ , se comporte comme le type précédent ; au delà la dérive se fait sentir, comme dans l'exemple 4.4.

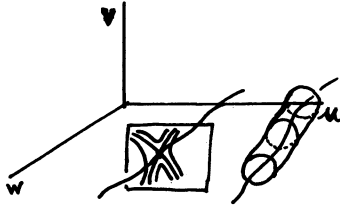
5.3. Equations du 2ème ordre non autonomes

$$(a) \quad \epsilon \ddot{u} = f(\eta, u, \dot{u}, t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v, w) \\ \dot{w} = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon} Y + Z$$



Les phases rapides longent les droites $u = \text{cte}$, $w = \text{cte}$; les phases lentes longent la surface $f(o, u, v, w) = 0$. Il y a des cas bien déterminés et des situations à "canards généralisés" (cf [2]) selon que la géométrie permet de longer les parties répulsives ou non, compte tenu de la projection de Z .

$$(b) \quad \epsilon^2 \ddot{u} = f(\eta, u, \epsilon \dot{u}, t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{v}{\epsilon} \\ \dot{v} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v, w) \\ \dot{w} = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon} Y + Z.$$



Les phases rapides longent les orbites de

$$\begin{pmatrix} v \\ f(o, u, v, w) \end{pmatrix} \quad \text{dans les plans } w = \text{cte.}$$

Les phases lentes longent les courbes $v = 0$,

$$f(o, u, o, w) = 0 \text{ du plan } u, w, \text{ à la vitesse } \dot{w} = 1.$$

Dans le cas d'une ligne de centres, il apparait des "cylindres" dont la géométrie se détermine par stroboscopie, comme en 4.

5.4. Equations du 3ème ordre autonomes

$$(a) \quad \epsilon \dot{u} = f(\eta, u, \dot{u}, \dot{u}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v, w) \end{cases} \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} o \\ o \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ w \\ o \end{pmatrix}.$$

Les phases rapides longent des droites $v = \text{cte}$, $w = \text{cte}$; les phases lentes la surface d'équation $f(o, u, v, w) = 0$. Difficulté lorsque la surface est "parallèle" à l'axe des u . (voir [1] pour des exemples d'étude globale).

$$(b) \quad \epsilon^2 \ddot{u} = f(\eta, u, \dot{u}, \epsilon \ddot{u}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \frac{w}{\epsilon} \\ \dot{w} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v, w) \end{cases}$$

$$\text{ou } X = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} o \\ w \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ o \\ o \end{pmatrix}.$$

Les phases rapides longent les trajectoires de

$$\begin{cases} \bar{u} = \text{cte} \\ \frac{\dot{v}}{v} = \frac{1}{\epsilon} \bar{w} \\ \frac{\dot{w}}{w} = \frac{1}{\epsilon} f(o, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \end{cases}$$

dont le portrait global dépend de la nature des points singuliers

$\bar{w} = 0$, $f(o, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0$. Dans le cas de centres, apparaissent des oscillations dont l'ombre engendre des cylindres que l'on détermine par stroboscopie.

$$(c) \quad \epsilon^3 \ddot{\ddot{u}} = f(\eta, u, \epsilon \dot{u}, \epsilon^2 \ddot{u}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{v}{\epsilon} \\ \dot{v} = \frac{w}{\epsilon} \\ \dot{w} = \frac{1}{\epsilon} f(\eta, u, v, w). \end{cases}$$

Les phases rapides longent les trajectoires du champ rapide pur obtenu pour $\eta = 0$. Les phases lentes (calcul des temps de relaxation) relèvent (dans les bons cas !) du chapitre II.

Pour terminer, étudions un exemple un peu général, à l'aide du stroboscope.

5.4. Un exemple d'ordre n (standard)

Il s'agit de $\epsilon^2 u^{(n)} = f(u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)}, \epsilon u^{(n-1)})$

ou

$$\begin{cases} \dot{u} = v_1 \\ \dot{v}_1 = v_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-2} = \frac{1}{\epsilon} v_{n-1} \\ \dot{v}_{n-1} = \frac{1}{\epsilon} f(u, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{cases}$$

Posons $v_{n-2} = v$, $v_{n-1} = w$. On a

$$X = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_{n-3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les phases rapides sont déterminées par le système $\bar{u} = \text{cte}$, $\bar{v}_1 = \text{cte}, \dots$, $\bar{v}_{n-3} = \text{cte}$

et

$$\begin{cases} \dot{\bar{v}} = \frac{1}{\epsilon} \bar{w} \\ \dot{\bar{w}} = \frac{1}{\epsilon} f(\bar{u}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}, \bar{w}) \end{cases}$$

La discussion porte sur la nature des points singuliers $\bar{w} = 0$, $f(\bar{v}, 0) = 0$. S'il s'agit de cols, foyers ou noeuds, les trajectoires de X ont des ombres bien déterminées dans l'espace accessible et en dehors des halos des points singuliers. Par permanence, et en utilisant (si possible) les résultats sur les phases lentes, on suit les trajectoires dans beaucoup de cas. Les difficultés viennent des entrées-sorties (cas des cols, ou du passage stable-instable entre des foyers lorsque $\bar{u}$, $\bar{v}_1$, ..., $\bar{v}_{n-3}$ varient).

Lorsqu'on a une famille de centres, on utilise le théorème du § 4.4. aussi longtemps que w et f ne sont pas i.p. le long de la trajectoire étudiée.

Cas particulier $f(u, v_1, \dots, v, w) = -v + g(u, v_1, \dots, v_{n-3})$, g standard indépendant de w .

Le système rapide donne

$$\begin{cases} \bar{v} = \sqrt{r} \cos \theta \\ \bar{w} = \sqrt{r} \sin \theta \\ \bar{r} \text{ constant.} \end{cases}$$

L'hypersurface le long de laquelle évolue une trajectoire accessible dans les coordonnées $(u, v_1, \dots, v, w)$ est déterminée par l'évolution lente de $u(t)$, $v_1(t), \dots, v_{n-3}(t)$, $r(t)$. La stroboscopie donne

$$\begin{cases} \dot{u} = v_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-3} = g(u, v_1, \dots, v_{n-3}) \\ \dot{r} = -r \frac{\partial g}{\partial v_{n-3}}(u, v_1, \dots, v_{n-3}) \end{cases}$$

avec $r(t) = w(t)^2 + (v(t) - g(u(t), v_1(t), \dots, v_{n-3}(t)))^2$

On obtient ainsi les ombres des trajectoires qui admettent des dérivées limitées jusqu'à $u^{(n-2)}$. L'étude se fait aisément par étude qualitative des points singuliers du système moyennisé ci-dessus.

En fait, on peut dans ce cas particulier, étudier également les ombres des trajectoires dont les dérivées sont limitées jusqu'à $u^{(n-3)}$ (si $n = 3$, il s'agit de toutes les solutions limitées).

On pose

$$\begin{cases} \dot{u} = v_1 \\ \dot{v}_1 = v_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-3} = \frac{v}{\varepsilon} \\ \dot{v} = \frac{w - v_{n-3}}{\varepsilon} \\ \dot{w} = g(u, v_1, \dots, v_{n-3}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{de solution rapide} \\ \bar{v}_{n-3} = \sqrt{r} \cos \theta + \bar{w} \\ \bar{v} = \sqrt{r} \sin \theta \end{array}$$

Posant $r = v^2 + (w - v_{n-3})^2$

on a le système moyennisé

$$\begin{cases} \dot{u} = v_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-4} = w \\ \dot{r} = \frac{\sqrt{r}}{\pi} \int_0^{2\pi} g(u, v_1, \dots, v_{n-4}, \sqrt{r} \cos \theta + w) \cos \theta \, d\theta \\ \dot{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u, v_1, \dots, v_{n-4}, \sqrt{r} \cos \theta + w) \, d\theta \end{cases}$$

qui peut être étudié explicitement dans des cas particuliers et conduire à des phénomènes très intéressants.

Remarque terminologique - Le halo d'une partie A défini en I.2. n'est pas en général "un halo" au sens de la terminologie utilisée dans l'article de I. van den Berg (ce volume). Pour les points de $\mathbb{R}^n$, entre autres, les deux notions coïncident. L'usage qu'on fait ici de ce vocable ne prête guère à confusion.

RÉFÉRENCES

- [1.] R. BEBBOUCHI, "Equations différentielles ordinaires - troisième ordre avec perturbation singulière et non unicité d'un point de vue non classique". Thèse Strasbourg-Mulhouse 1982.
- [2.] E. BENOIT, "Systèmes lents-rapides dans $\mathbb{R}^3$ et leurs canards". Ce volume et thèse Paris 1982-83.
- [3.] E. BENOIT, J.L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, "Chasse au canard". Collectanea Mathematica Vol XXXI Fasc. 3, 1980.
- [4.] J.L. CALLOT, "Bifurcation du portrait de phase pour des équations différentielles du second ordre". Thèse Strasbourg 1981.
- [5.] P. CARTIER, "Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non standard". Séminaire Bourbaki n° 580, Novembre 1981.
- [6.] F. DIENER, "Méthode du plan d'observabilité". Thèse Strasbourg 1981.
- [7.] M. DIENER, "Etude générique des canards". Thèse Strasbourg 1981.
- [8.] W. ECKHAUS, "Asymptotic Analysis of Singular Perturbations". North Holland 1979.
- [9.] W. ECKHAUS, "Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks". Preprint Utrecht n° 268 (1982).
- [10.] R. LUTZ, M. GOZE, "Analyse non standard". Preprint IRMA Strasbourg n° 172/98, 1982.
- [11.] R. LUTZ, M. GOZE, "Non-standard Analysis - a practical guide with Applications", Lecture Notes in Math. 881 Springer 1981.
- [12.] R. LUTZ, T. SARI, "Sur le comportement asymptotique des solutions dans un problème aux limites non linéaire" CRAS Paris 292.
- [13.] R. LUTZ, T. SARI, "Applications of non-standard analysis to boundary value problems in singular perturbation theory". Proceedings, Oberwolfach 1981, Lecture Notes in Math. 942 (1982).
- [14.] T. SARI, "Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes". Thèse Mulhouse 1983.
- [15.] G. REEB, "Séance-débat sur l'Analyse non Standard". Gazette des Mathématiciens 8 (1977) 8-14.

- [16.] G. REEB, "La mathématique non standard vieille de soixante ans",
Publication IRMA - Strasbourg 1979.
- [17.] A. TROESCH, "Etude qualitative de systèmes différentiels - une approche
basée sur l'analyse non standard". Thèse Strasbourg 1981.
- [18.] E. URLACHER, "Oscillations de relaxation et analyse non standard".
Thèse Strasbourg 1981.

Université de Haute Alsace
Département de Mathématique
4, rue des Frères Lumière
68093 MULHOUSE CEDEX