Astérisque

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Géométrie et cohomologies associées a une variété de contact

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 31-41

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__31_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p. 31-41

GÉOMÉTRIE ET COHOMOLOGIES ASSOCIÉES A UNE VARIÉTÉ DE CONTACT

André LICHNEROWICZ (avril 1982)

Etant donnée une variété de contact de dimension $(2n+1)$, nous nous proposons d'étudier par des moyens géométriques les cohomologies de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de la variété à valeurs dans les densités et correspondant à la dérivation de Lie. On met ainsi en évidence une 2-classe de cohomologie β_1, toujours différente de zéro, qui est un invariant de la structure de contact. Cet invariant joue un rôle important dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre un, à symboles réels, sur une variété arbitraire, telle qu'elle a été développée par Omori et collaborateurs [4] .

1 - Variétés pfaffiennes et variétés de contact.

a) Soit $\hat{W}$ une variété différentiable connexe, paracompacte, orientée de dimension $m = 2n+1$ et classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés C^∞. Nous posons en particulier $\hat{N} = C^\infty(\hat{W}; R)$. La variété $\hat{W}$ admet une m-forme densité de poids-1 notée $\hat{\mathfrak{I}}$ telle que, dans le domaine $\hat{U}$ d'une carte positive $\{x^a\}$ $(a,b,\ldots = \bar{0},1,\ldots,2n)$ on ait :

$$\hat{\mathfrak{I}}_{|\hat{U}} = dx^{\bar{0}} \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n} .$$

Soit $\{x^{b'}\}$ une autre carte positive de domaine $\hat{V}$. Sur $\hat{U} \cap \hat{V}$, on pose $A^a_{b'} = \partial x^a/\partial x^{b'}$ et on note $J = J^{\hat{U}}_{\hat{V}} = \det(A^a_{b'})$ le jacobien associé aux deux cartes. On a $\hat{\mathfrak{I}}_{\hat{V}} = J^{-1}\hat{\mathfrak{I}}_{U}$. Une densité scalaire $\hat{k}$ de poids 1- ou noyau - est définie dans chaque carte positive d'un atlas par une composante, ces composantes vérifiant la relation de raccordement

$$\hat{h}_{\hat{V}} = J\,\hat{k}_{\hat{U}} \tag{1-1}$$

Il en résulte que $\hat{k}\hat{\mathfrak{I}}$ est une m-forme ordinaire. Un noyau $\hat{k}$ est dit positif si ses composantes sont strictement positives. Nous n'envisageons ici que des noyaux positifs ou des m-formes positives en un sens évident.

b) Une structure pfaffienne est définie sur $\hat{W}$ par une 1-forme $\hat{\omega}$ telle que $\hat{\eta} = \hat{\omega} \wedge (d\,\hat{\omega})^n \neq 0$ soit une m-forme positive ; $\hat{\eta}$ détermine par $\hat{\eta} = \hat{k}\,\hat{\mathfrak{I}}$ un noyau positif. La variété pfaffienne admet un champ de vecteurs fondamental $\hat{E}$ (dit de Reeb) défini par les relations (où $i(.)$ est le produit intérieur)

$$(1\text{-}2) \qquad i(\hat{E})\,\hat{\omega} = 1 \qquad i(\hat{E})\,\hat{F} = 0 \qquad (\text{avec } \hat{F} = d\hat{\omega})$$

et un 2-tenseur contravariant antisymétrique $\hat{\Lambda}$ défini par les relations

$$(1\text{-}3) \qquad \hat{\Lambda}^{ab}\,\hat{\omega}_a = 0 \qquad \hat{\Lambda}^{ab}\,\hat{F}_{ac} = \delta^b_c - \hat{E}^b\,\hat{\omega}_c$$

Le couple $(\hat{E},\hat{\Lambda})$, tel que partout $\hat{E} \wedge \hat{\Lambda}^n \neq 0$, vérifie les relations [1] :

$$(1\text{-}4) \qquad [\hat{E},\hat{\Lambda}] = 0 \qquad [\hat{\Lambda},\hat{\Lambda}] = 2\,\hat{E} \wedge \hat{\Lambda}$$

où $[\ ,\ ]$ est le crochet de Schouten. La structure pfaffienne peut être aussi décrite par un tel couple.

J'ai établi qu'il existe sur $(\hat{W},\hat{\omega})$ des connexions linéaires sans torsion telles que pour la dérivation covariante correspondante $\hat{\nabla}$, on ait :

$$\hat{\nabla}\,\hat{E} = 0 \qquad \hat{\nabla}\hat{F} = 0$$

Une telle connexion est dite une <u>connexion pfaffienne</u> [3] .

c) Deux structures pfaffiennes $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ sont dites équivalentes s'il existe $\varphi \in \hat{N}$ telle que

$$(1\text{-}5) \qquad \hat{\omega} = e^{\varphi}\,\hat{\omega}'$$

Une structure de contact (orientée) est définie sur $\hat{W}$ par une classe d'équivalence de structures pfaffiennes. Si $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ sont deux structures pfaffiennes induisant la même structure de contact et auxquelles correspondent les noyaux $\hat{k}$ et $\hat{k}'$, on déduit de (1-5) :

$$(1\text{-}6) \qquad e^{\varphi} = \hat{k}^{1/(n+1)}\,\hat{k}'^{-1/(n+1)} \qquad \varphi = \frac{1}{n+1}(\log \hat{k} - \log \hat{k}')$$

Il résulte de (1-5) et (1-6)

$$\hat{k}'^{-1/(n+1)}\,\hat{\omega}' = \hat{k}^{-1/(n+1)}\,\hat{\omega}\,.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire la 1-forme densité $\hat{\pi}$, de poids $-1/(n+1)$, donnée par

$$\hat{\pi} = \hat{k}^{-1/(n+1)}\,\hat{\omega}$$

qui satisfait la relation :

$$(1\text{-}7) \qquad \hat{\pi} \wedge (d\hat{\pi})^n = \hat{\mathfrak{J}}$$

Inversement une telle 1-forme densité définit une structure de contact. On a [3] :

PROPOSITION. Une structure de contact est définie sur $\hat{W}$ par la donnée d'une 1-forme densité $\hat{\pi}$, de poids $-1/(n+1)$, satisfaisant la condition (1-7).

Nous n'envisageons désormais qu'une structure de contact ainsi définie, sans recours à des structures pfaffiennes. Un automorphisme infinitésimal (a.i.) de la variété de contact $(\hat{W},\hat{\pi})$ est donné par un champ de vecteurs $\hat{X}$ de $\hat{W}$ tel que $\mathcal{L}(\hat{X})\hat{\pi} = 0$, où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie. Nous notons $\hat{L}$ l'algèbre de Lie des a.i de la structure de contact.

2 - Variété de contact et variété symplectique exacte canonique associée

a) Soit $(\hat{W},\hat{\pi})$ une variété de contact. Introduisons le fibré canonique $p : W \to \hat{W}$ des m-formes positives de $\hat{W}$. Ce fibré, de dimension $m+1 = 2n+2$, admet une m-forme canonique λ définie en chaque point y de W tel que $py = \hat{x}$ par :

$$\lambda_y(X_1,\dots,X_m) = y(p_*X_1,\dots,p_*X_m) \tag{2-1}$$

où $X_1,\dots,X_m \in T_yW$ et par suite $p_*X_m \in T_{\hat{x}}\hat{W}$. Si $\{x^a\}$ est une carte de $\hat{W}$ de domaine $\hat{U}$, elle définit une carte $\{y^A\} = \{y^o > o, y^a = x^a\}$ $(A,B,. = 0,\bar{0},1,\dots,2n)$ de W de domaine $p^{-1}(\hat{U})$ telle que :

$$\lambda_{|p^{-1}(\hat{U})} = y^o dy^{\bar{o}} \wedge dy^1 \wedge\dots\wedge dy^{2n} \tag{2-2}$$

Substituons à y^o la coordonnée z^o donnée par :

$$y^o = e^{(n+1)z^o} \qquad (z^o \in R)$$

e^{z^o} a la variance d'une densité scalaire de poids $1/(n+1)$. Considérons sur W la 1-forme, canonique pour la structure de contact, donnée par :

$$\omega = e^{z^o} p^* \hat{\pi} \tag{2-3}$$

On vérifie immédiatement que (W,ω) est une variété symplectique exacte. On a ainsi :

THÉORÈME. Etant donnée une variété de contact $(\hat{W},\hat{\pi})$, son fibré canonique $p : W \to \hat{W}$ des $(2n+1)$-formes positives admet une structure canonique ω de variété symplectique exacte, où ω est partout $\neq 0$.

Arnold a donné une autre "symplectisation", isomorphe à celle-ci, d'une variété de contact [2]. Il est plus simple, pour un certain nombre de problèmes métriques ou cohomologiques, de travailler sur la variété symplectique exacte géo- que sur la variété de contact considérée. Nous posons $F = d\omega$ et $N = C^\infty(W;R)$. le champs de vecteurs fondamental Z de (W,ω) est déterminé par :

$$i(Z)F = \omega$$

et admet dans une carte $\{z^o, z^a = x^a\}$ la seule composante non nulle $Z^o = 1$. C'est le champ des homothéties du fibré vectoriel $(p : W \to \hat{W})$. On a $i(Z)\omega = 0$ et par suite

(2-4) $$\mathcal{L}(Z)\omega = \omega$$

En remontant sur W une connexion pfaffienne, on voit qu'il existe sur (W,ω) des connexions symplectiques Γ invariantes par Z (voir [3]).

b) Nous notons $\mu.\ TW \to T^*W$ l'isomorphisme de fibrés vectoriel défini par $\mu(V) = -i(V)\,F$; μ s'étend naturellement aux tenseurs et $\Lambda = \mu^{-1}(F)$ est le tenseur de structure de la variété symplectique (W,F) ; il vérifie :

(2-5) $$\mathcal{L}(Z)\Lambda = -\Lambda$$

Si $u \in N$, nous désignons par X_u le champ hamiltonien $\mu^{-1}(du)$ déterminé par u.

Soit L_ω l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de W préservant ω. Un tel champ préserve Z et est par suite projectable par p qui définit un isomorphisme canonique entre les algèbres de Lie L_ω et $\hat{L}$.

Les éléments de L_ω sont des champs hamiltoniens correspondant aux solutions $u \in N$ de l'équation

(2-6) $$\mathcal{L}(Z)u = u$$

Soit N_1 l'espace de ces solutions ; le crochet de Poisson $\{\ ,\ \}$ de (W,F) déterminé par Λ définit sur N_1 une structure d'algèbre de Lie et l'algèbre $(N_1, \{\ ,\ \})$ est isomorphe à L_ω donc à $\hat{L}$. Nous considérons toujours N_1 comme muni de sa structure d'algèbre de Lie.

3 - Espaces N_h et cohomologie à valeurs dans N_h.

a) On note N_h (où $h \in \mathbb{R}$) l'espace des solutions de l'équation

(3-1) $$\mathcal{L}(Z)u = hu$$

Nous dirons qu'un élément de N_h est homogène de degré h. D'après (2-5) l'algèbre de Lie $(N_1, \{\ ,\ \})$ opère naturellement sur l'espace N_h par le crochet de Poisson. Nous nous intéressons à la cohomologie de Chevalley de cette algèbre de Lie à valeurs dans N_h. Pour cette cohomologie, une q-cochaîne C est une application différentielle multilinéaire alternée de $(N_1)^q$ dans N_h, les 0-cochaînes étant identifiées aux éléments de N_h. Le cobord de la q-cochaîne C est la $(q+1)$-cochaîne ∂C donnée par :

$$(3\text{-}2)\ \partial C(u_o,\dots,u_q) = \varepsilon^{\alpha_o\dots\alpha_q}_{o\ \dots\ q}\left(\frac{1}{q!}\{u_{\alpha_o}, C(u_{\alpha_1},\dots,u_{\alpha_q})\} - \frac{1}{2(q-1)!}C(\{u_{\alpha_o},u_{\alpha_1}\},u_{\alpha_2},\dots,u_{\alpha_q})\right)$$

où $u_\alpha \in N_1$ et où ε est l'indicateur d'antisymétrisation de Kronecker. Nous notons $H^q(N_1;N_h)$ le q^e espace de cohomologie et $H(N_1;\ N_h)$ le cohomologie elle-même.

b) Désignons par $\hat{\eta}_h$ l'espace des densités scalaires sur $\hat{W}$ de poids $-h/(n+1)$. On établit aisément qu'il existe entre les espaces $\hat{\eta}_h$ et N_h un isomorphisme ν, canonique pour la structure de contact, donné par :

$$(3\text{-}3)\qquad \nu : \bar{u} \in \hat{\eta}_h \to u = e^{hz^o}\, p^*\bar{u} \in N_h$$

Comparons la cohomologie de N_1 à valeurs dans N_h et la cohomologie de $\hat{L}$ à valeurs dans $\hat{\eta}_h$, sur lequel $\hat{L}$ opère par dérivation de Lie. Le cobord $\hat{\partial}$ correspondant d'une q-cochaîne $\hat{C}$ à valeurs dans $\hat{\eta}_h$ est donné par :

$$(3\text{-}4)\ \hat{\hat{\partial}}\hat{C}(\hat{X}_o,\dots,\hat{X}_q) = \varepsilon^{\alpha_o\dots\alpha_q}_{o\dots\ q}\left(\frac{1}{q!}\mathcal{L}(X_{\alpha_o})\hat{C}(\hat{X}_{\alpha_1},\dots,\hat{X}_{\alpha_q}) - \frac{1}{2(q-1)!}\hat{C}([\hat{X}_{\alpha_o},\hat{X}_{\alpha_1}],\hat{X}_{\alpha_2},\dots,\hat{X}_{\alpha_q})\right)$$

où $\hat{X}_\alpha \in \hat{L}$. Un calcul de cobord tenant compte de l'isomorphisme de $\hat{L}$ et de N_1, ainsi que des propriétés de la dérivée de Lie, conduit à la proposition suivante :

PROPOSITION. ν établit un isomorphisme canonique entre la cohomologie $H(\hat{L};\hat{\eta}_h)$ de $\hat{L}$, à valeurs dans $\hat{\eta}_h$, correspondant à la dérivation de Lie et la cohomologie $H(N_1;\ N_n)$.

J'ai établi ailleurs [3] que l'espace $\hat{\eta}_1$ est canoniquement isomorphe à $\hat{L}$. Le crochet obtenu sur $\hat{\eta}_1$ est donné par l'action de la dérivée de Lie par l'image dans $\hat{L}$ d'un élément de $\hat{\eta}_1$, sur un autre élément de $\hat{\eta}_1$. Ainsi pour $h = 1$, les cohomologies $H(\hat{L}\ ;\ \hat{L})$, $H(\hat{L}\ ;\hat{\eta}_1)$ et $H(N_1;\ N_1)$ sont canoniquement isomorphes.

Pour $h = 0, H(\hat{L}\ ;\ \hat{N})$, où $\hat{L}$ opère sur $\hat{N}$ par dérivée de Lie est canoniquement isomorphe à $H(N_1\ ;\ N_o)$.

Nous allons voir que le cas $h = -1$ présente aussi un intérêt particulier.

c) Nous allons être conduits à considérer sur W des fonctions à valeurs complexes, éléments de $N^C = C^\infty(W\ ;\ \mathbf{C})$. Nous notons N^C_h $(h \in \mathbf{R})$ le sous-espace de N^C défini par les éléments homogènes et de degré h. Pour la cohomologie de l'algèbre de Lie N_1 à valeurs dans N^C_h associée au crochet de Poisson, il résulte trivialement de l'expression (3-2) du cobord que l'on a :

$$H^q(N_1\ ;\ N^C_h) \simeq H^q(N_1;\ \eta_h) \times H^q(N_1\ ;\ N_h)$$

4 - Opérateurs pseudodifférentiels et cohomologies.

Nous rappelons brièvement les résultats d'Omori et coll. [4] concernant les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 sur une variété différentiable M de dimension $n+1 \geq 2$.

a) Soit $W = T_o^* M$ le fibré cotangent de M privé de sa section nulle et $\hat{W} = \Theta^* M$ le fibré des directions orientées cotangentes à M. Sur $W = T_o^* M$, la 1-forme de Liouville ω détermine une structure de variété symplectique exacte, qui définit par quotient sur $\hat{W} = \Theta^* M$ une structure de contact $\hat{\pi}$. La variété symplectique exacte associée à $(\hat{W}, \hat{\pi})$ peut être identifiée à $(W = T_o^* M, \omega)$.

A partir du choix d'une métrique riemannienne sur M, Omori donne une représentation (faiblement ambiguë) d'une classe d'opérateurs Fourier-intégraux sur M et d'opérateurs pseudodifférentiels à symboles principaux homogènes. En un sens convenable, l'algèbre de Lie du groupe correspondant aux opérateurs Fourier-intégraux d'ordre 0 est donnée par ip^1, où p^1 est l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, à symboles principaux réels [4].

b) Plus généralement, soit p^h ($h \in Z$) l'espace de tous les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre h. On sait que $p^{-\ell}$ ($\ell \geq 0$) est un idéal de Lie de p^1 et que $p^{-\ell}/p^{-\ell-1}$ est naturellement isomorphe à l'algèbre de Lie abélienne donnée par $N^c_{-\ell}$. En particulier p^o/p^{-1} est isomorphe à l'algèbre abélienne N^c_o.

On établit d'autre part que p^1/p^o est naturellement isomorphe à l'algèbre de Lie $(N_1, \{\ ,\ \})$ et qu'on a la suite exacte d'algèbres de Lie :

$$(4\text{-}1) \qquad 0 \to p^o/p^{-1} \simeq N^c_o \to p^1/p^{-1} \to p^1/p^o \simeq N_1 \to 0 ,$$

p^o/p^{-1} étant abélienne, cette suite définit une 2-classe de cohomologie, élément de $H^2(N_1; N^c_o)$. Par un long raisonnement mettant en oeuvre la structure riemannienne auxiliaire, Omori et coll. ont établi que cette classe est toujours nulle, ce qui correspond au "splitting" de la suite (4-1).

Il en résulte qu'il existe une sous-algèbre $\mathcal{G}$ de p^1, contenant p^{-1}, telle que $\mathcal{G}/p^{-1}$ soit isomorphe à p^1/p^o donc à $(N_1, \{\ ,\ \})$. On a donc la suite exacte :

$$(4\text{-}2) \qquad 0 \to p^{-1}/p^{-2} \simeq N^c_{-1} \to \mathcal{G}/p^{-2} \to \mathcal{G}/p^{-1} \simeq N_1 \to 0 ,$$

p^{-1}/p^{-2} étant abélienne, cette suite définit encore une 2-classe de cohomologie β_o, élément de $H^2(N_1 ; N^c_{-1})$. Omori et coll. ont réussi à établir que β_o n'est jamais nulle (théorème B de [4]).

En étudiant, pour une variété de contact quelconque, les deux espaces $H^2(N_1; N_o)$ et $H^2(N_1; N_{-1})$, nous montrerons que les résultats précédents peuvent être placés dans un cadre beaucoup plus général.

5 - Cohomologie 1-différentielle $H_1(\hat{L};\hat{\mathcal{N}}_h)$

a) Une cochaîne $\hat{C}$ de $\hat{L}$ (ou $\hat{\mathcal{N}}_1$) , à valeurs dans $\hat{\mathcal{N}}_h$, est dite 1-différentielle si elle peut s'exprimer par un opérateur multidifférentiel sur $\hat{\mathcal{N}}_1$ d'ordre maximum 1 en chaque argument. On vérifie immédiatement que si $\hat{C}$ est 1-différentielle, son cobord l'est aussi. Nous sommes ainsi conduits à étudier la cohomologie $H_{(1)}(\hat{L};\mathcal{N}_h)$ correspondant aux cochaînes 1-différentielles.

On établit que cette cohomologie est canoniquement isomorphe à la cohomologie 1-différentielle $H_{(1)}(N_1;N_h)$. Or on sait que, sur une variété symplectique, le cobord d'une cochaîne 1-différentielle C de l'algèbre de Lie de Poisson $(N,\{,\})$ à valeurs dans N , définie par un q-tenseur encore noté C est donné par :

$$\mu(\partial C) = - d\mu(C) \tag{5-1}$$

Choisissons une structure pfaffienne auxiliaire sur $\hat{W}$. Grâce à ce choix, une q-cochaîne C correspondant à $H_{(1)}(N_1;N_h)$ est caractérisée par le couple $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ d'une q-forme et d'une (q-1)-forme de $\hat{W}$. Il résulte de (5-1) que pour que C soit un q-cocycle, il faut et il suffit que l'on ait

$$d\,\hat{\alpha} = 0 \qquad\qquad h\,\hat{\alpha} = d\,\hat{\beta} \tag{5-2}$$

Pour que ce couple soit exact, il faut et il suffit qu'il existe une (q-1)-cochaîne décrite par (α',β') telle que :

$$\hat{\alpha} = d\,\hat{\alpha}' \qquad\qquad \hat{\beta} = h\,\hat{\alpha}' - d\,\hat{\beta}' \tag{5-3}$$

Si $h \neq 0$, il en est ainsi pour tout q-cocycle, pour $\hat{\alpha}' = \hat{\beta}/h$, $\hat{\beta}' = 0$. Si $h = 0$, on a un cocycle si $d\,\hat{\alpha} = 0$, $d\,\hat{\beta} = 0$, et ce cocycle est exact si les formes fermées $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ sont exactes. On a :

THEOREME 1. <u>Pour</u> $h = 0$, <u>tout espace de cohomologie</u> $H^q_{(1)}(N_1;N_h)$ <u>ou</u> $H^q_{(1)}(\hat{L};\hat{\mathcal{N}}_h)$ <u>est nul</u>.
<u>Pour</u> $h = 0$, <u>tout espace de cohomologie</u> $H^q_{(1)}(N_1;N_o)$ <u>ou</u> $H^q_{(1)}(\hat{L};\hat{N})$ <u>est isomorphe au produit des espaces de cohomologie de G. de Rham</u> $H^q(\hat{W};R) \times H^{q-1}(\hat{W};R)$ <u>et a pour dimension</u>

$$b_q(\hat{W}) + b_{q-1}(\hat{W})$$

<u>où</u> $b_q\,\hat{W}$ <u>est le</u> q^e <u>nombre de Betti de</u> $\hat{W}$ <u>pour la cohomologie à supports non restreints</u>.

b) On peut établir à partir d'une étude des types différentiels, qu'un 1-cocycle différentiel $\hat{C}$ de $\hat{L}$ à valeur dans $\hat{\mathcal{N}}_h$ est nécessairement 1-différentiel. Il résulte alors du théorème 1 :

THÉORÈME 2. <u>Pour</u> $h \neq 0$, <u>les espaces de cohomologie</u> $H^1(N_1 ; N_0)$ <u>ou</u> $H^1(\hat{L};\hat{\eta}_h)$ <u>sont nuls. Pour</u> $h = 0$, <u>les espaces de cohomologie</u> $H^1(N_1;N_0)$ <u>ou</u> $H^1(\hat{L};\hat{N})$ <u>sont isomorphes à</u> $\mathbf{R} \times H^1(\hat{W} ; \mathbf{R})$ <u>et de dimension</u> $1 + b_1(\hat{W})$.

Soit $\hat{k}$ une densité scalaire positive sur $\hat{W}$ de poids 1 . On vérifie aisément que $\hat{X} \in \hat{L} \to \mathcal{L}(\hat{X}) \log \hat{k}$ définit un 1-cocycle de $\hat{L}$, à valeurs dans $\hat{N}$, dont la 1-classe de cohomologie, indépendante du choix de $\hat{k}$, n'est jamais nulle. Tout 1-cocycle $\hat{C}$ de $\hat{L}$ à valeurs dans $\hat{N}$ est donnée par :

$$\hat{C}(\hat{X}) = c\, \mathcal{L}(\hat{X}) \log \hat{k} + \hat{\alpha}(\hat{X}) \qquad (\hat{X} \in \hat{L} ; c \in \mathbf{R}) \tag{5-4}$$

où $\hat{\alpha}$ est une 1-forme fermée arbitraire de $\hat{W}$.

6 - <u>Cohomologie différentielle en dimension deux</u>.

a) De manière analogue, une fort longue étude des types bidifférentiels montre que <u>pour</u> $h \neq -1$, tout 2-cocycle différentiel de $\hat{L}$ à valeurs dans $\hat{\eta}_h$ est cohomologue à un 2-cocycle 1-différentiel. On en déduit :

THEOREME 3 - <u>Pour</u> $h \neq 1, 0$ <u>les espaces de cohomologie</u> $H^2(N_1 ; N_h)$ <u>où</u> $H^2(\hat{L} ; \hat{\eta}_h)$ sont nuls.

<u>Pour</u> $h = 0$, <u>les espaces de cohomologie</u> $H^2(N_1 ; N_0)$ <u>où</u> $H^2(\hat{L} ; \hat{N})$ <u>sont de dimension</u> $b_1(\hat{W}) + b_2(\hat{W})$.

Avec des notations semblables à celles de (5-4) , tout 2-cocycle 1-différentiel $\hat{C}$ de $\hat{L}$ à valeurs dans $\hat{N}$ est donné par :

$$\hat{C}(\hat{X},\hat{Y}) = \hat{\alpha}(\hat{X},\hat{Y}) + (\hat{\beta}(\hat{X})\, \mathcal{L}(\hat{Y}) \log \hat{k} - \hat{\beta}(\hat{Y})\, \mathcal{L}(\hat{X}) \log \hat{k}) \qquad (\hat{X},\hat{Y} \in \hat{L}) \tag{6-1}$$

où $\hat{\alpha}$ (resp. $\hat{\beta}$) sont une 2-forme (resp. 1-forme) fermée arbitraire de $\hat{W}$.

Pour $h = 1$, on déduit du théorème 3 et de la théorie des déformations (voir [5] [7]) le

COROLLAIRE - <u>Toute déformation différentielle de l'algèbre de Lie</u> $\hat{L}$ <u>des automorphismes infinitésimaux d'une variété de contact est différentiablement triviale</u>.

On retrouve ainsi le caractère <u>rigide</u> de cette algèbre de Lie, rigidité que j'avais établie antérieurement [7] .

b) <u>Examinons le cas $h = 1$</u> qui est le plus intéressant. Soit Γ une connexion symplectique sur une variété symplectique (W,F) . Si $u \in N$, on note $\mathcal{L}(X_u)\Gamma$ la dérivée de Lie de Γ par le champ hamiltonien défini par u . On sait ([5] [10]) que la 2-cochaîne de l'algèbre de Lie de Poisson $(N,\{\ ,\ \})$

à valeurs dans N qui est donnée dans tout domaine U d'une carte arbitraire $\{x^A\}$ de W par :

$$S^3_\Gamma(u,v)_{|U} = -\Lambda^{AB}(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)^R_{SA}(\mathcal{L}(X_v)\Gamma)^S_{RB} \qquad (u,v \in N) \tag{6-2}$$

est un 2-cocycle de Chevalley de type bidifférentiel $(3,3)$ dont la classe de cohomologie est indépendante du choix de Γ et n'est jamais nulle. Cette 2-classe est un invariant de la structure symplectique de (W,F) ([5],[10]) .

Nous avons vu que, sur la variété symplectique exacte $(\hat{W},\omega)$ associée à $(\hat{W},\pi)$, il existe des connexions symplectiques invariantes par Z . On vérifie immédiatement que, pour un tel choix de la connexion Γ , la restriction à N_1 de (6-2) est un 2-cocycle de $(N_1,\{,\})$ à valeurs dans N_{-1}, et que sa 2-classe de cohomologie β_1 , élément de $H^2(N_1;\ N_{-1})$ est indépendante du choix de la connexion.

On peut établir d'autre part par un type de raisonnement devenu standard [1]

LEMME - <u>Si</u> T <u>est une 1-cochaîne de</u> N_1 <u>à valeurs dans</u> N_1 <u>telle que son cobord soit d-différentiel</u> $(d \geq 1)$, T <u>est un opérateur différentiel d'ordre</u> d .

Il en résulte que si S^3_Γ restreint à N_1 , est le cobord d'une 1-cochaîne sur laquelle aucune hypothèse a priori n'est faite, il est le cobord d'un opérateur différentiel. En introduisant deux couples de fonctions convenables éléments de N_1 [4] dont les crochets de Poisson diffèrent d'un facteur constant et en raisonnant par l'absurde, on établit :

PROPOSITION - <u>La classe de cohomologie</u> β_1 <u>, élément de</u> $H^2(N_1\ ;\ N_{-1})$ <u>ou de</u> $H^2(\hat{L};\hat{\mathcal{N}}_{-1})$ <u>que nous avons définie à partir de</u> S^3_Γ <u>n'est jamais nulle</u>. <u>C'est un invariant de la variété de contact</u> $(W,\ )$

Le même raisonnement que dans le cas $h \neq -1$ permet d'établir.

THEOREME 4. <u>L'espace de cohomologie</u> $H^2(N_1;N_{-1})$ <u>admet comme seul générateur la classe de cohomologie</u> $\beta_1 \neq 0$ <u>définie par</u> S^3_Γ . <u>On a donc toujours</u> dim. $H^2(N_1;N_{-1}) = \dim H^2(\hat{L};\hat{\mathcal{N}}_{-1}) = 1$.

L'introduction [6] faite par Flato et moi de la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable à valeurs dans les q-formes associée à la dérivation de Lie et l'étude correspondante développée par M. de Wilde et P. Lecomte [8] conduit à la considération des 2q-cochaînes $S^{3,q}_\Gamma$ de N_1 à valeurs dans N_{-q} données par :

$$(6\text{-}3)\quad S_{\Gamma}^{3,q}(u_1,\ldots,u_{2q}) =$$

$$= -\Lambda^{[A_1A_2}{}_{\Lambda}{}^{A_3A_4}\cdot\cdot{}_{\Lambda}{}^{A_{2q-1}A_{2q}]}(\mathcal{L}(X_{u_1})\Gamma)^{R_1}_{R_2A_1}(\mathcal{L}(X_{u_2})\Gamma)^{R_2}_{R_3A_2}\ldots(\mathcal{L}(X_{u_{2q}})\Gamma)^{R_{2q}}_{R_1A_{2q}}$$

où $u_\alpha \in N_1$ et où $[..]$ indique l'antisymétrisation. Les $S_{\Gamma}^{3,q}$ sont des 2q-cocycles de N_1 à valeurs dans N_{-q} dont la classe de cohomologie est indépendante du choix de Γ. On peut conjecturer que (6-3) fournit les générateurs de $H^{2q}(N_1;N_{-q})$.

On note qu'on a montré que S_{Γ}^{3} est un 2-cocycle qui n'est jamais le cobord d'une 1-cochaîne, sans aucune hypothèse a priori de localité, continuité ou différentiabilité sur cette 1-cochaîne. Ainsi la classe de cohomologie définie par S_{Γ}^{3} peut être considérée comme appartenant à un espace de cohomologie général.

c) Dans le cas particulier $W = T_o^* M$ envisagé par Omori, on peut montrer que la cohomologie de G. de Rham correspondant à $h = 0$ n'intervient pas et que l'on a

PROPOSITION - <u>La 2-classe de cohomologie β_o associée à la suite exacte</u> (4-2) <u>est reliée à l'invariant β_1 correspondant à $\hat{W} = \Theta^* M$ par</u>

$$(6\text{-}4)\qquad \beta_o = (1/4)\,\beta_1$$

On voit en quel sens le théorème B d'Omori est un cas particulier de notre théorème 4.

RÉFÉRENCES

[1] A. LICHNEROWICZ — J. de Math pures et appl. t 57 (1978) p. 453-488 .

[2] V. ARNOLD — Méthodes mathématiques de la Macanique classique Mir Moscou (1976) p 35 .

[3] A. LICHNEROWICZ — Comptes rendus t 290 A (1980) , p 963 et t 291 A (1980) , p 129 .

[4] H. OMORI, Y. MAEDA, A. YOSHIOKA, O KOBAYASHI — On regular Frechet-Lie groups III : a second cohomology class related to the Lie algebra of pseudo differential operators of order one. Tokyo J. of Math. (à paraître)

[5] J. VEY — Comm. Math Helv t 50 (1975) , p 421-454 .

[6] M. FLATO et A. LICHNEROWICZ — Comptes rendus t. 291 A (1980) p 331-335 .

[7] A. LICHNEROWICZ — Comptes rendus t 290 A (1980) p 241-245

[8] M. de WILDE et P. LECOMTE — Cohomologie of the Lie algebra of smooth vector fields of a manifold associated to the Lie derivative of smooth forms (à paraître)

[9] M.V. LOSIK — Funct.Anal and Appl. t 4 (1970) , p 127-135.

[10] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER — Deformation theory and quantization Ann. of Physics t 111 (1978) p 61-110 .

Collège de France
Place Marcelin Berthelot
75005 PARIS