Astérisque

THÉODOR HANGAN
ROBERT LUTZ

Champs d'hyperplans totalement géodésiques sur les sphères

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 189-200
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__189_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.189-200

Champs d'hyperplans totalement géodésiques sur les sphères

Theodor HANGAN et Robert LUTZ

La structure de contact standard σ_o de la sphère S^3 jouit de la propriété remarquable de totale géodicité ; une géodésique de la sphère, tangente en un de ses points au plan de la structure lui est tangente en tous ses points. Nous avons posé la question de savoir dans quelle mesure cette propriété caractérise * σ_o. La réponse se trouve sous une forme légèrement déguisée dans l'un des derniers articles ** d'Elie Cartan [C], que nous nous proposons d'actualiser et de reconsidérer dans ses aspects globaux à la lumière des récents résultats d'Asimov et de Brito-Langevin-Rosenberg [B.L.R.] . D'autres extensions de cette étude feront l'objet d'un article ultérieur.

Le problème que nous considérons ici s'énonce ainsi :

<u>Déterminer tous les champs d'hyperplans totalement géodésiques (en abrégé t.g.) sur la sphère euclidienne S^n.</u>

Sa solution met en évidence la très forte rigidité de ce type d'objets ; en effet, nous allons obtenir, sans aucune hypothèse de continuité sur les champs, le résultat suivant :

<u>Théorème</u> (i) <u>Pour n pair, il n'existe aucun champ d'hyperplans t.g. sur S^n.</u>

(ii) <u>Pour $n = 2p+1$, tout champ d'hyperplans t.g. sur S^n est une structure de contact analytique projectivement isomorphe à la structure standard induite par la forme $\sum_{i=1}^{p+1} (x_i dy_i - y_i dx_i)$ de R^{2p+2}.</u>

La démonstration est un plaisant exercice de géométrie projective ; le résultat infirme l'affirmation de [C] d'après laquelle les champs C^∞ et t.g. sur un ouvert de la sphère S^{2p+1} seraient prolongeables globalement, pourvu que leur classe soit supérieure à 1. En effet, localement, un champ C^∞ et t.g. de classe > 1 est projectivement isomorphe au champ induit par l'une des formes $\sum_{i=1}^{s+1} (x_i dy_i - y_i dx_i)$ qui ne peut se prolonger pour $s < p$.

---

* Les articles [L_1] et [V] de ce volume décrivent d'autres caractérisations de σ_o.

** Cet article semble assez ignoré, bien que l'auteur y invite de jeunes mathématiciens à s'intéresser à la question. Il témoigne en tout cas que l'étude des champs de plans totalement géodésiques ne date pas d'hier...

C'est ici que les outils de la géométrie différentielle permettent de mesurer les obstacles au prolongement en termes de courbure ; en adaptant les formules de [B.L.R.] sur les intégrales de courbure extrinsèque d'un champ d'hyperplans au cas totalement géodésique on constate qu'en courbure constante positive, la totale géodicité doit être compensée par une extrême non intégrabilité - la condition de contact - alors qu'en courbure nulle aucun écart de la classe au-dessus de 1 n'est tolérable. On retrouve ici une observation déjà faite dans un autre contexte (cf. [L_2]), à savoir que "la sphère est aux structures de contact ce que le tore est aux feuilletages".

Incidemment, on en tire une démonstration du théorème dans le cadre différentiel, qui a l'avantage de traiter simultanément le cas du tore T^n et des espaces hyperboliques compacts.

Par ailleurs, on peut exploiter les mêmes outils dans l'étude des champs d'hyperplans partiellement géodésiques.

1. Quelques exemples

1.1. Un champ F d'hyperplans t.g. sur un ouvert U de la sphère euclidienne S^n est tel que tout grand-cercle tangent en un point à F l'est en tout ses points situés dans U.

On obtient une famille $F^{s,n}$ d'exemples en considérant une quelconque matrice antisymétrique A d'ordre n+1 et de rang 2s+2 ; la forme de Pfaff $\langle Ax,dx\rangle$ induit sur S^n une forme sans zéros dans l'ouvert $U = S^n - S^n \cap \mathrm{Ker}\, A$. Le champ d'hyperplans associé à F est analytique et t.g.

En effet un grand-cercle tangent en x à F_x a pour équation $x(t) = \cos t\, x + \sin t\, v$ où v est un vecteur orthogonal à x et Ax ; alors $\langle Ax(t), \dot{x}(t)\rangle = \langle Ax,v\rangle + \cos t \sin t\, (\langle Av,v\rangle - \langle Ax,x\rangle) = 0$.

La classe du champ F, ou si l'on préfère de l'équation de Pfaff qui le définit, est 2s+1 en tout point de U.

Une isométrie convenable réduit la matrice A à une forme diagonale ; ainsi la forme $\langle Ax,dx\rangle$ devient $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i(x_i dy_i - y_i dx_i)$, $\alpha_i > 0$.

Une transformation projective convenable absorbe les α_i de sorte que le champ F est projectivement isomorphe au champ $F^{s,n}$ induit par la forme $\sum_{i=1}^{s+1} (x_i dy_i - y_i dx_i)$ sur S^n. Il y a donc un prototype pour chaque classe 2s+1 ; en particulier pour n = 2p+1, $F^{p,2p+1}$ est défini partout ; il s'agit de la structure de contact standard sur S^{2p+1}. Notons que $F^{s,n}$ est défini sur le complémentaire d'une sphère géodésique de dimension n-(2s+1).

1.2. Considérons un champ d'hyperplans t.g. défini sur toute la sphère S^n. A chaque point $x \in S^n$ on associe la $(n-1)$-sphère géodésique $S(x)$ engendrée par les grands cercles tangents en x à F_x.

La géodicité de F implique $S(-x) = S(x)$, de sorte que, passant au quotient par antipodie, on obtient <u>une application $x \to c(x)$ qui associe à tout point de l'espace projectif P^n un $(n-1)$-plan projectif tel que pour tout $y \in c(x)$, la droite projective $D(x,y)$ soit contenue dans $c(x)$</u>.

Inversement, une telle application de P^n dans $(P^n)^*$ détermine un champ t.g. sur S^n, obtenu en remontant la construction précédente.

Il s'agit ainsi de résoudre le problème de géométrie projective suivant : <u>Trouver toutes les application $c : P^n \to (P^n)^*$ telles que, pour tout x, $x \in c(x)$, et pour tout $y \in c(x)$, $x \in c(y)$</u>.

1.3. <u>Lemme</u> - <u>L'application c est une corrélation</u> .

En effet, elle a les trois propriétés suivantes :

<u>surjectivité</u> - Soit $Q \in (P^n)^*$ un $(n-1)$-plan projectif, sous-tendu par n points $x_1,\dots,x_n$. En itérant la formule $\dim A \cap B \geq \dim A + \dim B - n$ concernant deux plans de P^n, on obtient $\dim c(x_1) \cap \dots \cap c(x_n) \geq 0$, de sorte qu'il existe au moins un point z commun à tous les $c(x_i)$. Mais alors $x_i \in c(z)$, et donc $Q = c(z)$.

<u>injectivité</u> - Supposons que $c(x) = c(y)$, avec $x \neq y$. Soit $u \in P^n$ et $z \in c(u) \cap D(x,y)$. Alors $u \in c(z)$; or, si $v \in c(x)$, on a $x \in c(v)$ et $y \in c(v)$. Ainsi $z \in c(v)$ et aussi $v \in c(z)$. Comparant les dimensions, on obtient $c(z) = c(x) = c(y)$, de sorte que tout l'espace P^n est contenu dans le $(n-1)$-plan $c(x)$, ce qui est absurde.

<u>projectivité</u> - Considérons trois points alignés x,y,z et $u \in c(x) \cap c(y)$; alors $x \in c(u)$ et $y \in c(u)$, de sorte que $z \in c(u)$ et donc $u \in c(z)$. Ainsi pour $x \neq y$, l'image de la droite $D(x,y)$ est le faisceau des $(n-1)$-plans qui tournent autour du $(n-2)$-plan $c(x) \cap c(y)$.

1.4. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème fondamental de la géométrie projective et l'on obtient une matrice antisymétrique A d'ordre $n+1$ telle que pour chaque $x \in P^n$ considéré comme une droite vectorielle de R^{n+1}, le plan $c(x)$ soit l'ensemble des droites vectorielles orthogonales à l'image de x par A. Le champ F d'hyperplans sur S^{n-1} associé à c est alors l'élément de la famille $F^{s,n}$ qui correspond à A. Comme l'injectivité de c suppose A de rang $n+1$, le théorème annoncé en résulte :

<u>Pour n pair, il n'existe pas de champ F t.g. sur S^n</u>.

<u>Pour $n = 2p+1$, F est projectivement isomorphe à la structure de contact standard $F^{p,2p+1}$</u>.

1.5. Remarque - Soit M_n une variété riemanienne à courbure constante $c > 0$; alors son revêtement universel est projectivement isomorphe à S^n et tout champ d'hyperplans t.g. sur M_n se relève en un champ t.g. sur S^n. Pour n pair, il n'y a donc pas de tel champ sur M_n ; pour $n = 2p+1$, les solutions correspondent aux éléments de la famille $F^{p,2p+1}$ qui sont invariants par le groupe fini d'isométries qui définit le revêtement. On obtient en particulier tous les espaces lenticulaires.

2. Le problème local

2.1. Soit F un champ C^∞ d'hyperplans t.g. sur un ouvert U de S^n. En utilisant la méthode du repère mobile, E. Cartan aboutit au résultat suivant :

Théorème - Si dans U, la classe de F est > 1, F est la restriction à U d'un élément d'une famille $F^{s,n}$.

En particulier, F ne dépend que de son jet d'ordre 1 en un point.
On peut donner une démonstration directe de ce résultat de géometrie différentielle locale en intégrant le système d'E.D.P. qui exprime la géodicité. L'idée est la suivante :

le champ F est projectivement isomorphe (si U est assez petit) au champ défini sur l'espace euclidien R^n par une forme de Pfaff du type $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, dx_i + dx_n$; la géodicité signifie que $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,(x+tv)v_i + v_n = 0$ pour tout $v \in R^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)v_i + v_n = 0$ et t assez petit. Ceci équivaut à la condition
$\sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} v_i v_j - (\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_n} v_i)(\sum_j a_j v_j) = 0$ pour tout v, ou encore
$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_n} + a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_n}$ pour $i,j = 1, \ldots, n-1$.

Quatre dérivations successives jointes à la condition $\omega \wedge d\omega_x \neq 0$ mènent après des calculs assez longs au système équivalent

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial^2 x_n} = 0$$

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_n \partial x_j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial x_n}$$

d'où l'on déduit que l'application $x \to a(x)$ de composantes a_i est "fractionnelle linéaire", i.e. de la forme

$$a_i = \frac{\sum_{r=1}^{n-1} \alpha_{ir} x_r + \alpha_i x_n + \beta_i}{-\sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r x_r + \beta},$$

où α_{ij} est une matrice antisymétrique.

2.2. Remarque - (i) Cette démonstration suppose la différentiabilité de F à un ordre suffisant. Il se peut que le théorème soit vrai sous des hypothèses plus faibles.

(ii) La condition de "non-intégrabilité" est essentielle ; en dimension 3, par exemple, la forme $a(x,z)dx + dz$ détermine un champ de plans t.g. dès que $a_x - aa_z = 0$; les variétés intégrales sont des surfaces réglées et pour certaines conditions initiales $a(0,z)$, la fonction a ne peut être définie au-delà d'une certaine valeur x_o à partir de l'origine. Par contre $a(x,z)$ n'est pas un quotient de formes linéaires en général.

(iii) Le théorème local est de nature essentiellement différente du théorème global, en ce sens qu'une démonstration basée sur l'intersection de droites, plans, ... est exclue par le fait que l'on ne sait pas prolonger F a priori hors de son ouvert de définition.

2.3. Il résulte du théorème 2.1. et des propriétés des champs de familles F_s que F se prolonge globalement si et seulement si $n = 2p+1$ et F est de contact.

Notons que l'on peut en tirer une version faible du théorème global :

Théorème - Si F est C^∞ et t.g. sur S^{2p+1} et vérifie la condition de contact dans un ouvert, il est de contact partout et projectivement isomorphe à la structure de contact standard.

En effet, d'après le théorème local, F coïncide au voisinage de chaque point avec un élément de $F^{s,2p+1}$; par connexité, cet élément est le même partout.

La démonstration géométrique garde cependant sa supériorité, même si l'on accepte l'hypothèse de différentiabilité, car on ne peut rien dire des champs de classe intermédiaire.

C'est ici que les formules de [B.L.R.] éclairent la situation.

3. Les obstacles liés aux intégrales de courbure extrinsèque.

On suppose désormais les champs C^∞ et on oublie provisoirement la démonstration directe du théorème global.

3.1. L'une des conséquences du théorème global est qu'un champ t.g. sur S^{2p+1} ne saurait être complètement intégrable (d'ailleurs les feuilles seraient des sphères géodésiques non sécantes, ce qui est évidemment impossible).

En dimension 3, ce fait * résulte également de la formule d'Asimov [A] $\int_{M_3} K_G(x)\, v = 2c \text{ vol } M$ où $K_G(x)$ représente la courbure de Gauss en x de la feuille

---

x Enoncé dans [C] sans preuve.

passant par x, dans le cas d'un quelconque feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte orientable M_3 munie d'une métrique g à courbure constante c. Un feuilletage de S^3 en sphères géodésiques donnerait $\int_{S_3} K(x)v = c \text{ vol } S^3$, d'où la contradiction.

Ainsi, un champ t.g. sur S^3 est de classe maximale 3 au moins : il est donc de contact partout.

Avant d'étendre ce résutat en dimension supérieure, voyons comment la formule d'Asimov se modifie pour permettre des structures de contact t.g. sur S^3.

Si on décompose la 2ème forme fondamentale II^F d'un champ d'hyperplans F en somme de sa partie symétrique s et antisymétrique a, la formule d'Asimov devient

(a) $$\int_M (\det s)\, v + \frac{1}{2}\int_M \|a\|^2\, v = c \text{ vol } M.$$

Si F est t.g., on a s = 0 et $a(X,Y) = \frac{1}{2}(II^F(X,Y) - II^F(Y,X)) = \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y,N) -$

$$- g(\nabla_Y X,N)) = \frac{1}{2} g(|X,Y|,N)$$

où X,Y sont deux champs tangents à F et N un champ normal unitaire.

Ainsi, la formule d'Asimov modifiée montre que le défaut d'intégrabilité peut compenser la totale géodicité pour c > 0, ce qui permet l'existence d'une structure de contact t.g. sur S^3.

Par contre, pour c < 0, il ne peut exister de champs t.g. et pour c = 0, un tel champ est intégrable.

La démonstration de la formule modifiée consiste, comme dans le cas intégrable, à trouver une 2-forme α sur M telle que

$$\frac{1}{2}\, d\alpha + (\det II^F)\, v = cv.$$

La forme α s'interprète géométriquement comme une somme $\alpha = \alpha^n + \alpha^m$ où α^n est le produit intérieur de la forme volume v de (M,g) par le champ de courbure normale des trajectoires orthogonales à F et α^m le produit de v par le champ normal de courbure moyenne de F.

D'autre part $(\det II^F)_x = s_{11}s_{22} - (s_{12}+a_{12})(s_{21}+a_{21})$

$$= s_{11}s_{22} - s_{12}^2 + (a_{12})^2 = (\det s)_x + \frac{1}{2}\|a\|_x^2$$

où l'on calcule II^F_x dans une base fixée de F_x.

On peut tirer un peu plus de renseignements de la formule (a).
Supposons le champ F géodésique dans une direction au moins, i.e. que la forme symétrique s(x) admet un vecteur isotrope en chaque point. Alors la matrice de s(x)

s'écrit dans une bonne base $\begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$, de sorte que det s $\leqslant 0$ partout. Ainsi, pour $c > 0$, un champ "partiellement géodésique" ne saurait être intégrable.

Notons qu'ici, aucun argument géométrique évident ne permet de conclure.

Une autre conséquence de la formule (a) est le calcul d'un obstacle au prolongement d'un champ t.g. défini sur un ouvert de S^n.

Ainsi, le champ $F^{1,3}$ défini par la forme $i^*(x, dx_2 - x_2 dx_1)$ sur S^3 privé d'un cercle γ ne peut s'étendre à S^3 en un champ t.g. parce que le résidu $\int_{\partial T} \alpha - 2 \text{ vol } S^3$ calculé sur le bord d'un voisinage tubulaire T de l'ensemble singulier γ n'est pas nul.

3.2. Voyons maintenant ce que deviennent ces remarques en dimension 2p+1 (on exclut la dimension paire, car S^{2p} n'admet pas de champs d'hyperplans C^∞).

La formule (a) est une interprétation en dimension 3 de la formule générale de [B.L.R.] concernant la courbure extrinsèque d'un champ d'hyperplans en courbure constante. Elle s'obtient ainsi :

Si (M_{2p+1}, g, c) est une variété riemanienne compacte orientable à courbure constante, et si F est un champ d'hyperplans, on définit les fonctions symétriques de courbure extrinsèque de F par la formule

$$\det(I + tA_x) = \sum_{i=0}^{2p+1} \eta_i(x) t^i$$

où A_x est la restriction à F_x de l'endomorphisme de $T_x(M)$ tel que $A_x(X) = (\nabla_X N)_x$, et N un champ de vecteurs unitaire normal à F.

Si F n'est pas transversalement orientable, cette construction est seulement locale ; cependant pour $i = 2j$, le choix de la normale n'influe pas sur η_i, de sorte que les fonctions η_{2j} sont globalement définies dans tous les cas.

D'après [B.L.R.], il existe des 2p-formes α_j telles que

$$\frac{1}{2} d\alpha_j + \eta_{2j} v = c^j \binom{p}{j} v$$ où v est la forme volume associée à g.

Ainsi, par la formule de Stokes on obtient la formule

(b) $$\int_M \eta_{2j} v = c^j \binom{p}{j} \text{ vol } M.$$

Ecrivons ces formules en termes de la 2ème forme fondamentale de F, notée II^F

$$II^F(X,Y) = g(\nabla_X Y, N)$$ où X,Y sont des sections de F comme fibré vectoriel.

D'après les propriétés de la connexion associée à g, on a

$X.g(Y,N) = g(\nabla_X Y,N) + g(Y,\nabla_X N)$ de sorte que $g(A(X),Y) = - II^F(X,Y)$.

D'autre part

$II^F(X,Y) - II^F(Y,X) = g(\nabla_X Y-\nabla_Y X,N) = g([X,Y],N) = - d\omega(X,Y)$ où $\omega = N \lrcorner g$.

Ainsi, <u>la partie antisymétrique a de II^F est égale à $-\frac{1}{2} d\omega_{|F\times F}$</u>

La partie symétrique $s(X,Y) = \frac{1}{2}(II^F(X,Y) + II^F(Y,X))$ renseigne sur les directions dans lesquelles F reste tangente aux géodésiques. Précisément, appelons <u>cône de géodicité en $x \in M$ l'ensemble des vecteurs $u \in F_x$ tels que $s_x(u,u) = - g(A_x(u),u) = 0$. On le note $K_x(F)$.</u>

Notons que $K_x(F)$ ne dépend pas du choix de N.

<u>Le champ F est t.g. si et seulement si $K_x(F) = F_x$ en tout point.</u>

Soit θ_x la restriction de $-\frac{1}{2} d\omega_x$ à $F_x\times F_x$.

3.3. <u>Lemme</u> – <u>Si F est t.g., alors $\eta_{2j}(x) = \frac{1}{(j!)^2}\|\theta_x^j\|^2$</u> .

En effet, on met θ_x sous forme réduite dans une base orthonormée convenable de F_x : $\theta_x = \Sigma\, \alpha_\ell \xi_\ell \bar{\xi}_\ell$. Alors la matrice de $I + tA_x$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 t & & & \\ -\alpha_1 t & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \alpha_p t \\ & & & -\alpha_p t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(I+tA_x) = (1+t^2\alpha_1^2)\ \dots\ (1+t^2\alpha_p^2)\ .$$

Ainsi $\eta_{2j} = \sum_{1\leq \ell_1<\dots<\ell_j\leq p} (\alpha_{\ell_1}\alpha_{\ell_2}\dots\alpha_{\ell_j})^2$;

or $\theta_x^j = j! \sum_{1\leq \ell_1<\dots<\ell_j\leq p} \alpha_{\ell_1}\dots\alpha_{\ell_j}\, \xi_{\ell_1}\wedge\bar{\xi}_{\ell_1}\wedge\dots\wedge\xi_{\ell_j}\wedge\bar{\xi}_{\ell_j}$

Comme les formes $\xi_{\ell_1}\wedge\dots\wedge\xi_{\ell_j}\wedge\bar{\xi}_{\ell_j}$ sont orthogonales dès que l'un des indices est différent, on en déduit

$$\eta_{2j} = \left\|\frac{\theta_x^j}{j!}\right\|^2 .$$

<u>Corollaire</u> – <u>La classe de F en x est 2k+1 si et seulement si $\eta_{2k}(x) \neq 0$ et $\eta_{2j}(x) = 0$ pour $j > k$.</u>

En effet 2k est exactement le rang de θ_x, dans la définition de la classe.

On obtient maintenant le résultat essentiel, en utilisant la formule (b).

3.4. Théorème - Soit F un champ d'hyperplans t.g. sur une variété compacte orientable (M_{2p+1},g,c). Alors

- si $c > 0$, la classe maximale de F est $2p+1$
- si $c = 0$, F est complétement intégrable
- si $c < 0$, il n'existe pas de tel champ.

On en déduit le théorème global dans le cas de la sphère, d'après 2.3. Dans le cas du tore euclidien, les feuilles du feuilletage engendré par F se relèvent en des plans parallèles de R^n, de sorte que F est défini par une forme fermée du type $\Sigma\, \alpha_i d\theta_i$, α_i constantes.

3.5. Il existe des champs d'hyperplans analytiques de classe maximale $2s+1 < 2p+1$ sur S^{2p+1} ; les plus simples ont été déterminés par l'un des auteurs en 1965 (cf. [L_3]) à la suite d'une question de G. REEB. Ils sont définis par des formes de Pfaff sur R^{2p+2} du type $\langle Ax,dx\rangle$, où A est la somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a de rang $2s+2$. La condition pour que la forme induite soit sans zéros est que A n'ait pas de valeur propre réelle.

Ainsi, un champ de ce type ne peut pas être t.g. pour $s < p$. En fait le cône $K_x(F)$ en $x \in S^{2p+1}$ correspond aux vecteurs v de R^{2p+2} tels que $\langle x,v\rangle = 0$, $\langle Ax,v\rangle = \langle Av,x\rangle = 0$ et $\langle Av,v\rangle = \langle Ax,x\rangle$. Il s'agit d'un cône quadratique de dimension générale $2p-2$.

3.6. Il existe plusieurs situations de géodicité partielle où la formule (b) fournit une limitation. En voici deux exemples

(i) Supposons F complètement intégrable sur S^{2p+1} ; soit k le plus grand entier tel que chaque cône $K_x(F)$ contienne un k-plan. Alors, on a $k < p$.

En effet, si $k \geqslant p$, il existe en chaque point une base de F_x dans laquelle la matrice de II^F, qui est réduite à sa partie symétrique, est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ {}^tM & N \end{pmatrix}$$

où M et N sont des matrices $p\times p$. Alors $\eta_{2p} = -(\det M)^2 \leqslant 0$, ce qui est exclu par la formule (b).

(ii) il n'existe pas de champ F de classe $\leqslant p+1$ sur S^{2p+1} tel qu'en chaque point, le sous-espace caractéristique soit contenu dans $K_x(F)$.

En effet, on aurait

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{ et } s = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & C \end{pmatrix}$$

où A,N et C sont d'ordre p.

Alors $\eta_{2p} = -(\det A)^2 \leq 0$, ce qui contredit la formule (b).

3.7. On peut également utiliser (b) pour étudier les champs d'hyperplans "totalement ombilicaux" sur les espaces compacts à courbure constante.

Un champ F est dit t.o. (par analogie avec le cas des feuilletages à feuilles ombilicales) si <u>la partie symétrique de II^F a toutes ses valeurs propres égales</u>.

Dans une base orthonormée convenable de F_x, on a alors la matrice suivante pour $I+tA_x$ (on se place en dimension 2p+1)

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda t & \alpha_1 t & & & \\ -\alpha_1 t & 1+\lambda t & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1+\lambda t & \alpha_p t \\ & & & -\alpha_p t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \det(I+tA_x) = \prod_{i=1}^{p} (1+\lambda t)^2 + \alpha_i^2 t^2 .$$

Ainsi $\eta_{2p} = \prod_{i=1}^{p} (\lambda^2 + \alpha_i^2)$ qui est ≥ 0 dans tous les cas, de sorte que <u>pour $c < 0$, il n'existe pas de champs t.o. sur (M_{2p+1}, g, c), M compacte orientable</u>.

<u>Pour $c = 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$ et on retrouve le cas t.g. étudié en 3.4.</u>

4. <u>Quelques remarques sur le cas euclidien et hyperbolique non compact</u>

4.1. D'après le théorème 3.4., il n'existe pas de champ t.g. et C^∞ sur les quotients compacts de l'espace hyperbolique H^n, et uniquement des champs intégrables d'un type très particulier sur ceux de l'espace euclidien E^n.

La situation locale est plus riche, puisque H^n et E^n sont localement projectivement isomorphes à S^n qui admet les champs t.g. de la famille $F^{s,n}$.

On peut décrire la situation globale de manière unifiée ; on définit pour $\varepsilon = -1,0,1$ l'espace $K_\varepsilon^n = \{(x,z) \in R^n x R,\ z^2 + \varepsilon \|x\|^2 = 1\}$ où $\|\ \|$ est la norme euclidienne sur R^n.

Alors $S^n = K_{+1}^n$, $E^n = K_o^n \cap \{(x,z),\ z > 0\}$ et $H^n = K_{-1}^n \cap \{(x,z),\ z > 0\}$.
Le tenseur $dz \otimes dz - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i$ induit sur K_ε une métrique g_ε dont les géodésiques sont les traces sur K_ε des 2-plans vectoriels de R^{n+1}.

Ainsi, en associant à chaque point de K la droite vectorielle correspondante, on obtient un revêtement à deux feuillets ϕ_ε d'un ouvert U_ε^n de l'espace projectif P^n qui transforme géodésique en géodésique et aussi champ de plans t.g. en champ de plans t.g.

Pour $\varepsilon = 0$ ou -1, ϕ_ε est un difféomorphisme de E^n (resp. H^n) sur U_ε ; U^n_o est le complémentaire d'un $(n-1)$-plan projectif et U^n_{-1} celui du compact défini par $y^2 \leqslant \|x\|^2$, qui est bordé par la quadrique d'équation $y^2 = \|x\|^2$.

Le problème global pour E^n et H^n est donc équivalent à celui de la détermination de tous les champs d'hyperplans t.g. sur U^n_o et U^n_{-1}.

4.2. Considérons une matrice antisymétrique A d'ordre n+1 et de rang 2s+2. Le champ d'hyperplans t.g. F qui lui est associé comme en 1.1. (en passant au quotient par antipodie) est défini sur l'ouvert U de P^n complémentaire de l'ensemble des droites vectorielles qui annulent A.

Ecrivons A sous la forme $\begin{pmatrix} \tilde{A} & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$ où $\tilde{A}$ est une matrice antisymétrique d'ordre n et B une matrice colonne. On obtient immédiatement la

Proposition - (i) On a $U \supset U^n_o$ si et seulement si l'image de R^n par $\tilde{A}$ ne contient pas B.

(ii) On a $U \supset U^n_{-1}$ si et seulement si l'image de la boucle ouverte $\|x\| < 1$ dans R^n ne contient pas B.

Ainsi, un calcul facile montre que sur E^n, on obtient des champs projectivement isomorphes à l'un des champs définis en coordonnées affines (i.e. z = 1) par $\sum_{i=1}^{p} (x_i dy_i - y_i dx_i) + dx_{p+1}$; dans les mêmes coordonnées, on obtient sur H^n (défini par $\|x\| < 1$), en plus des formes précédentes, les formes du type

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i((x_i+a_i)dy_i - (y_i+b_i)dx_i) \text{ avec } \sum_{i=1}^{p} (a_i^2 + b_i^2) \geqslant 1.$$

4.3. Considérons maintenant un champ t.g. F sur E^n (resp. H^n) qui soit C^∞ et non complètement intégrable. Alors le théorème local et un argument de connexité montrent que F est du type précédent.

Dans le cas intégrable, sur E^n on a un champ de plans parallèles, donc encore comme modèle dx = 0 ; sur H^x, la conclusion est plus subtile ; toute famille d'hyperplans de R^n qui induit un feuilletage sur le boule $\|x\| < 1$ convient, ce qui permet des exemples non "linéaires".

4.4. On peut également produire une démonstration géométrique (sans hypothèse de continuité) de ces résultats ; elle est compliquée par le fait que les transformations point $\to$ plan projectif qui apparaissent ne sont plus des corrélations globales.

Références

[A] D. ASIMOV, Average Gaussian Curvature of leaves of foliations, BAMS 84 (1978), 131-133.

[B.L.R.] F. BRITO, R. LANGEVIN, H. ROSENBERG, Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées, J. Diff. Géom. 16 (1981), 19-50.

[C] E. CARTAN, Sur un problème de géométrie différentielle projective, Ann. E.N.S. (3) LXII - Fasc. 3.

[L_1] R. LUTZ, Structure de contact à pivot. Ce volume.

[L_2] R. LUTZ, Sur la géométrie des structures de contact invariantes, Am. Inst. Fourier, t. XXIX Fas. 1 (1979).

[L_3] R. LUTZ, Sur la classe maximale des formes de Pfaff sur S^{2p+1}, CRAS Paris t. 264 (1967), p. 348-350.

[V] F. VARELA, Ce volume.

Université de Haute Alsace
Département de Mathématique
4, rue des Frères Lumière
68093 <u>MULHOUSE CEDEX</u>