

Astérisque

F. VARELA

**Sur l'orientation définie par une forme de Pfaff
de classe maximale**

Astérisque, tome 107-108 (1983), p. 169-173

http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__107-108__169_0

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ORIENTATION DÉFINIE PAR UNE FORME DE
PFAFF DE CLASSE MAXIMALE

F. VARELA

1. - Dans cet exposé, je voudrais faire une remarque sur le comportement par C^0 -perturbation, de l'orientation définie par une forme de Pfaff de classe maximale sur R^n .

Cette remarque est inspirée dans le fait suivant : "Pour un difféomorphisme f de R^n , le signe du jacobien de f est C^0 -stable".

2. - Soit maintenant ω une forme de Pfaff de classe deux sur R^2 , c'est-à-dire :

$$d\omega = f(x,y) dx \wedge dy \quad \text{avec } f > 0 \text{ partout.}$$

La formule de Stokes montre que si ω' est de classe deux, et C^0 -proche à ω alors $d\omega'$ définit la même orientation que celle de $d\omega$.

Par contre, dans R^{2n+1} on a la propriété suivante : ($n > 1$)

PROPOSITION 1. - Soit $\omega = x_1 dx_2 + \dots + x_{2n-1} dx_{2n} + dx_{2n+1}$ la forme de contact de Darboux sur R^{2n+1} . Alors dans tout C^0 -voisinage de ω , il existe une forme de Pfaff ω' vérifiant :

$$\omega' \wedge [d\omega']^n = -\lambda^2 \omega \wedge [d\omega]^n ; \quad \lambda \text{ nombre réel donné.}$$

Pour le prouver, il suffit de prendre :

$$\omega' = x_1 dx_2 + \dots + x_{2n-1} dx_{2n} + a_1(x_{2n-3}, x_{2n-2}) dx_{2n-1} + a_2(x_{2n-3}, x_{2n-2}) dx_{2n}$$

où a_1 et a_2 sont des fonctions analytiques sur R^{2n+1} vérifiant :

- a) $a_1^2 + a_2^2 < \omega$
- b) $da_1 \wedge da_2 = \lambda^2 dx_{2n-3} \wedge dx_{2n-2}$

Remarque 1. Les fonctions a_1 et a_2 sont données par :

$$\begin{aligned} a_1 &= f(x_{2n-3}, x_{2n-2}) \cos \lambda g(x_{2n-3}, x_{2n-2}) \\ a_2 &= f(x_{2n-3}, x_{2n-2}) \sin \lambda g(x_{2n-3}, x_{2n-2}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} f = \omega^{\frac{1}{2}} (1 + e^{x_{2n-3} + x_{2n-2}})^{-1} \\ g = \omega^{-1 - (x_{2n-3} + x_{2n-2})} (1 + e^{x_{2n-3} + x_{2n-2}})^{3(x_{2n-3} + 1)} \end{cases} \quad [1]$$

COROLLAIRE 1. L'ensemble des formes de contact qui définissent la même orientation sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ n'est pas C^0 -ouvert pour $n \geq 2$.

Remarque 2. Le même argument montre que la forme :

$$= x_1^d x_2 - x_2^d x_1 + \dots + x_{2n-1}^d x_{2n} - x_{2n}^d x_{2n-1}$$

peut s'approcher C^0 par ω' telle que :

$$[d\omega]^n = \lambda^2 [d\omega']^n \quad (n \geq 2)$$

Remarque 3. On considère sur $\mathbb{R}^2 \times S^3$ la forme de contact :

$$= x_1^d x_2 - x_2^d x_1 + \omega_3$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ est une base de 1-formes invariantes sur S^3 . Le champ de Reeb associé, a toutes ses orbites fermées, par conséquent ne peut pas s'exprimer globalement sous la forme de Darboux.

La forme $\omega' = x_1^d x_2 - x_2^d x_1 + \omega_3 + a_1(x_1, x_2) \omega_1 + a_2(x_1, x_2) \omega_2$ (pour a_1 et a_2 , voir remarque 1) est aussi de contact et d'orientation opposée à celle de ω .

3) En dimension trois, on a la

PROPOSITION 2. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme de contact $\omega = xdy + dz$. Alors si ω' est aussi de contact et suffisamment C^0 -voisine de ω , on a :

$$\omega' \wedge d\omega' = f dx \wedge dy \wedge dz$$

avec $f > 0$.

Remarque 4. On peut supposer $\omega' = a_1 dx + (x + a_2) dy + dz$ où a_1 et a_2 sont "petits".

Remarque 5. Soit ω une forme de Pfaff, et soient X, Y, Z des champs de vecteurs globaux et indépendants tels que $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, $\omega(Z) = 1$. Alors on a :

$$\omega \wedge d\omega(X, Y, Z) = -\omega([X, Y])$$

Si on applique cette remarque à la forme ω' , et aux champs de vecteurs

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial z} ; Y = \frac{\partial}{\partial y} - (x + a_2) \frac{\partial}{\partial z} ; Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

on obtient :

$$\omega' \wedge \omega'(X, Y, Z) = -f \frac{\partial}{\partial z}$$

où f est donnée par :

$$[X, Y] = f \frac{\partial}{\partial z}$$

Remarque 6. Soient φ_t et ψ_t les groupes à un paramètre engendrés respectivement par $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}$. On a alors pour $t = 1$:

$$\psi_{-1} \circ \varphi_{-1} \circ \psi_{+1} \circ \varphi_{+1}(0, 0, 0) = (0, 0, -1) .$$

La proposition 2 résulte maintenant du :

LEMME. Soient $X = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial z}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial z}$ des champs de vecteurs complets dans l'espace R et soient φ_t et ψ_t les groupes à un paramètre engendrés par X et Y respectivement. Alors la condition : $[X, Y] = f \frac{\partial}{\partial z}$ avec $f > 0$ implique, que pour tout $t > 0$

$$\sigma_t(0) = \psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t(0, 0, 0) = \lambda e_3 \text{ avec } \lambda > 0$$

Remarque 7. Soit $H = \{\varphi_{-t_5} \circ \psi_{-t_4} \circ \varphi_{-t_3} \circ \psi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}(0, 0, 0) : t_i \in [0, 1]\}$. De l'hypothèse $[X, Y] = f \frac{\partial}{\partial z}$ avec $f > 0$, on déduit qu'il existe un nombre rationnel h suffisamment petit, tel que pour tout point $P \in H$ on ait :

$$\sigma_h(P) - P = \psi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h(a_1, a_2, a_3) = \lambda' e_3 \text{ avec } \lambda' > 0 .$$

Démonstration du lemme : Il suffit de le montrer pour $t = 1$.

Soit K un entier tel que $Kh = 1$ et considérons le point $\sigma_1(0)$. Nous procédons par induction sur K . Pour $K = 1$, le résultat est trivial. Pour $K = 2$ la proposition signifiée $\sigma_{2h}(0) - (0) = \lambda e_3$ avec $\lambda > 0$. Pour le montrer, nous effectuons la construction suivante :

Soit $P_1 = \psi_h \circ \varphi_h(0)$; d'après le choix de h , le point

$$P_2 = \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h \circ \psi_{-h}(P_1) \text{ est tel que } P_2 - P_1 = \lambda_1 e_3 \text{ avec } \lambda_1 > 0 ;$$

comme les courbes intégrales du champ X qui passent par P_1 et P_2 sont dans un même plan vertical, le point

$$P_3 = \psi_{-h} \circ \varphi_{-h}(P_2) \text{ vérifie } P_3 - \sigma_h(0) = \lambda_2 e_3 \text{ avec } \lambda_2 > 0 .$$

Ainsi, on a :

$$P_3^-(0) = (P_3 - \sigma_h(0)) + (\sigma_h(0) - (0)) = (\lambda + \lambda_2) e_3$$

Le même raisonnement permet de voir que le point :

$$P_4 = \psi_{-h} \circ \psi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \varphi_{-h} \circ \psi_h \circ \varphi_h \circ \varphi_h \circ \psi_h(P_3) \text{ vérifie :}$$

$$P_4 - P_3 = \lambda_4 e_3 \text{ avec } \lambda_4 > 0$$

d'où $P_4^-(0) = (P_4 - P_3) + (P_3^-(0)) = (\lambda + \lambda_2 + \lambda_4) e_3$. Les relations antérieures montrent que $P_4 = \sigma_{2h}(0)$.

On obtient le lemme en appliquant la construction antérieure au point $\sigma_{(k-1)h}(0)$.

COROLLAIRE 2. L'ensemble des formes de contact qui définissent la même orientation sur une variété de dimension trois est C^0 -ouvert.

Remarque 8. Soit $\omega = x^2 dy + dz$ sur R^3 . La proposition 2 montre qu'une telle forme ne peut pas s'approcher au sens C^0 par une forme de contact, c'est-à-dire la surface $x = 0$ est "rigide".

Par contre, en dimension cinq, dans toute C^0 -voisinage de la forme :

$$\omega = x_1^2 dx_2 + x_3 dx_4 + dx_5$$

il existe une forme de contact. Il suffit de prendre :

$$\omega' = x_1^2 dx_2 + x_3 dx_4 + dx_5 + a_1 dx_3 + a_2 dx_4$$

(pour a_1 et a_2 , voir remarque 1). Ainsi l'hyperplane $x_1 = 0$ n'est pas rigide.

R É F É R E N C E S

- (1) C. CORONA et F. VARELA : Sur les C^0 -perturbations de la forme de contact canonique de la sphère S^{2p+1} .
C.R. Acad. Paris . t - 281 - 1980 .
- (2) C. GODBILLON : Géométrie différentielle et mécanique analytique.
Hermann Paris - 1969 .
- (3) F. VARELA : Sur une propriété de C^0 -stabilité des formes de contact en dimension 3.
C.R. Acad. SC. Paris . t - 280 - 1975 .

Universidad de Murcia
Facultad de Ciencias
Sección de Matemáticas
MURCIA , Espagne