

# *Astérisque*

ALBERT FATHI

## **Appendice**

*Astérisque*, tome 103-104 (1983), p. 39-46

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1983\\_\\_103-104\\_\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__103-104__39_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

A P P E N D I C E

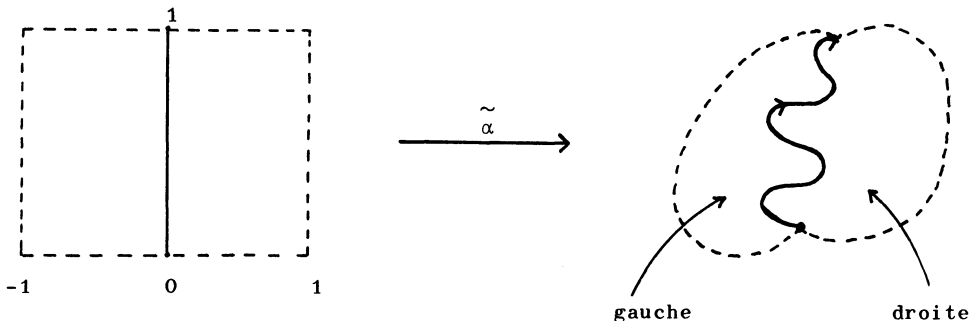
UNE INTERPRÉTATION PLUS TOPOLOGIQUE  
DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BIRKHOFF

par A. FATHI

§ 1. Quelques rappels de topologie.

Notion de gauche et de droite.

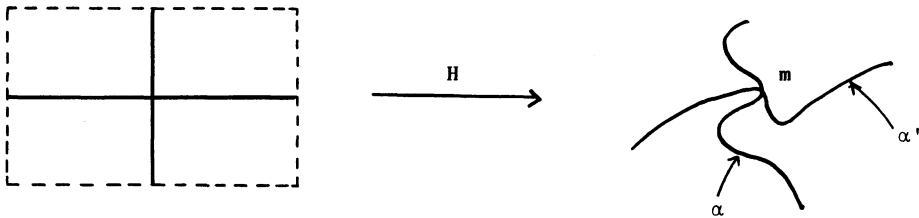
Si  $M$  est une variété orientée de dimension 2 et  $\alpha$  un arc orienté dans  $M$ , i.e. un plongement  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , on peut définir la droite et la gauche de  $\alpha$  dans un voisinage de  $\alpha ]0, 1[$ . Une des façons de le faire est, à l'aide du théorème de Schoenflies, de prolonger  $\alpha ]0, 1[$  en un plongement ouvert  $\tilde{\alpha} : ]-1, 1[ \times ]0, 1[ \rightarrow M$  tel que  $\tilde{\alpha} | \{0\} \times ]0, 1[ = \alpha ]0, 1[$ . Si  $\tilde{\alpha}$  préserve l'orientation, la région  $\tilde{\alpha} ]0, 1[ \times ]0, 1[$  est dite à droite de  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha} ]-1, 0[ \times ]0, 1[$  est dite à gauche de  $\alpha$ . Il est facile de voir que si  $\tilde{\alpha}'$  est un autre prolongement de  $\alpha$ , les notions de droite et de gauche définies par  $\tilde{\alpha}'$  coïncident avec celles définies par  $\alpha$ .



Si  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  est un plongement d'image fermée qui disconnecte  $M$ , on sait que  $M - \alpha$  a deux composantes connexes ; on peut les distinguer par le fait que l'une est à droite de  $\alpha$  et l'autre à gauche.

Notion de transversalité.

Soient  $\alpha : [0,1] \rightarrow M$  et  $\alpha' : [0,1] \rightarrow M$  deux arcs plongés. Supposons que  $t, t' \in ]0,1[$  vérifient  $m = \alpha(t) = \alpha'(t')$ , nous dirons que  $m$  est un point d'intersection transverse, si on peut trouver pour  $\varepsilon$  assez petit un homéomorphisme  $H$  de  $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[ \times ]t'-\varepsilon, t'+\varepsilon[$  sur un voisinage de  $m$  dans  $M$ , tel que  $H[ ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[ \times \{t'\} ] = \alpha[ ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$  et  $H[\{t\} \times ]t'-\varepsilon, t'+\varepsilon[ ] = \alpha'[ ]t'-\varepsilon, t'+\varepsilon[$ .



On peut voir, à l'aide du théorème de Schoenflies, qu'il est équivalent de dire que pour  $\varepsilon$  assez petit  $\alpha'([t'-\varepsilon, t'+\varepsilon]) \cap \alpha([0,1]) = m$  et que l'un des deux ensembles  $\alpha'([t'-\varepsilon, t'])$ ,  $\alpha'([t', t'+\varepsilon])$  est situé à droite de  $\alpha$  et l'autre à gauche.

Nous dirons que  $\alpha'$  traverse  $\alpha$  de gauche (resp. droite) à droite (resp. gauche), si c'est  $\alpha'([t'-\varepsilon, t'])$  qui est situé à gauche (resp. droite) de  $\alpha$ .

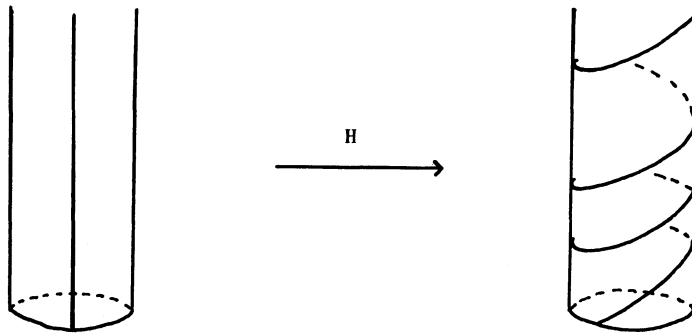
Les arcs  $\alpha$  et  $\alpha'$  seront dits transverses si tous leurs points d'intersection sont transverses, ceci recouvre aussi le cas où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont disjoints.

§ 2. Homéomorphismes déviant les verticales et théorème de Birkhoff.

Considérons un homéomorphisme  $H$  de l'anneau  $A = \mathbb{T}^1 \times [0, \infty[$  sur lui-même. Nous dirons que  $H$  dévie les verticales, si pour tout  $\theta, \theta'$  dans  $\mathbb{T}^1$ , l'arc

$H(\{\theta\} \times [0, \infty[)$  est transverse à  $\{\theta'\} \times [0, \infty[$ , i.e. si l'image de toute verticale est transverse aux verticales.

Munissons  $A$  de son orientation naturelle, et orientons une verticale  $\{\theta\} \times [0, \infty[$  par l'orientation naturelle de  $[0, \infty[$ . On peut voir que l'image par  $H$  d'une verticale traverse toutes les verticales qu'elle coupe dans le même sens. On dit que  $H$  dévie les verticales à droite (resp. gauche) si l'image d'une verticale par  $H$  traverse une verticale de gauche à droite (resp. droite à gauche).



$H$  dévie la verticale à droite.

Remarques : 1) Si  $H$  conserve l'orientation et dévie les verticales à droite, alors  $H^{-1}$  dévie les verticales à gauche.

2) L'homéomorphisme  $H$  dévie les verticales si l'image d'une verticale est localement le graphe d'une application de  $\mathbb{T}^1$  dans  $[0, \infty[$ .

3) La définition donnée ici de dévier les verticales est plus large que celle donnée dans le chapitre I.

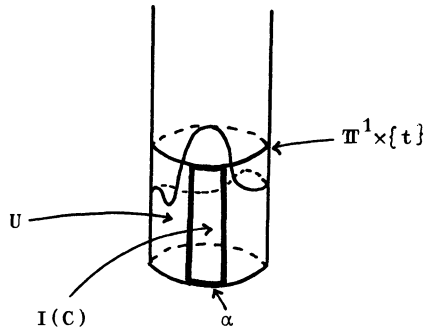
Théorème de Birkhoff : Soit  $H$  un homéomorphisme de  $A$  conservant l'orientation et déviant les verticales. Supposons que  $U$  soit un ouvert relativement compact de  $A$  et homéomorphe à  $A = \mathbb{T}^1 \times [0, \infty[$ . Si  $U$  est invariant par  $H$  (i.e.  $H(U) = U$ ) et est contenu dans l'ensemble non-errant de  $H$ , alors la frontière de  $U$  est le graphe d'une application continue de  $\mathbb{T}^1$  dans  $[0, \infty[$ .

La démonstration du théorème occupe le reste de l'appendice.

On peut supposer sans perte de généralité que  $H$  dévie les verticales à droite. Comme  $U$  est un ouvert de  $A$  homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$ , par le théorème de l'invariance du bord d'une variété, on a  $U \supset \mathbb{T}^1 \times \{0\}$  le bord de  $A$ .

On pose  $V = \{(\theta, t) \mid \forall t' \in [0, t], (\theta, t') \in U\}$ , c'est-à-dire que  $V$  est le sous-ensemble de  $U$  formé des points de  $U$  accessibles dans  $U$  par les verticales. Il est facile de voir que  $V$  est ouvert et connexe car il contient  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ . Notre but est de montrer  $V = U$ .

Lemme 1 : Soit  $\alpha$  un arc compact  $\subset \mathbb{T}^1$  d'extrémités  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Si  $(\theta_1, t)$  et  $(\theta_2, t) \in V$  et  $\alpha \times \{t\} \subset U$  alors  $U \supset \alpha \times ]0, t]$ .



Démonstration : Notons  $C$  la courbe simple formée par

$\alpha \times \{0\} \cup \{\theta_2\} \times ]0, t] \cup \alpha \times \{t\} \cup \{\theta_1\} \times ]0, t]$  (voir figure). Par hypothèse  $C \subset U$ .

De plus  $A - C$  est formé de deux composantes connexes dont l'une des deux est l'intérieur de  $\alpha \times ]0, t]$  et l'autre est non bornée. Puisque  $U$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$  et qu'il est relativement compact, on a que  $A - U$  est connexe et non borné. Comme  $C \subset U$ , il en résulte que  $A - U$  est contenu dans la composante non bornée de  $A - C$  et par conséquent  $U$  contient la composante bornée qui est l'intérieur de  $\alpha \times ]0, t]$ . ■

Si  $X$  est un sous-ensemble de  $U$ , nous noterons  $\text{Fr}_U(X)$  (resp.  $\text{Ad}_U(X)$ ) la

frontière (resp. l'adhérence) de  $X$  dans  $U$ , pour pouvoir la distinguer de celle de  $X$  dans  $A$  qui sera notée  $\text{Fr}_A(X)$  (resp.  $\text{Ad}_A(X)$ ).

Lemme 2 :  $\text{Fr}_U(V)$  est une sous-variété de dimension 1 constituée d'un certain nombre de segments verticaux disjoints  $S_i$  ( $i \in I \subset \mathbb{N}$ ) :

$S_i = \{\theta_i\} \times ]t_{i,1}, t_{i,2}[$  avec  $0 < t_{i,1} < t_{i,2}$ . On a  $(\theta_i, t_{i,1})$  et  $(\theta_i, t_{i,2}) \in \text{Fr}_A(U)$ . De plus (dans un voisinage de  $S_i$  dans  $U$ ) un des côtés de  $S_i$  dans  $U$  est contenu dans  $V$  et l'autre est contenu dans le complémentaire de  $V$ . En particulier  $V \cup \text{Fr}_U(V)$  est une sous-variété de codimension 0 dans  $U$ .

Démonstration : Soit  $(\theta, t) \in \text{Fr}_U(V)$ ; sa composante connexe dans  $U \cap \{\theta\} \times ]0, \infty[$  est de la forme  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[$  avec  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ , puisque  $(\theta, 0) \in V$  et que  $U$  est borné. De plus  $(\theta, t_1)$  et  $(\theta, t_2) \in \text{Fr}_A(U)$ , et aucun point de  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[$  n'est dans  $V$ . Soient  $\alpha$  un arc de  $\mathbb{T}^1$  qui contient  $\theta$  dans son intérieur  $\overset{\circ}{\alpha}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $W = \overset{\circ}{\alpha} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset U$ , on a bien sûr  $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset ]t_1, t_2[$ , et donc  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$  est dans le complémentaire de  $V$ . Si  $(\theta', t') \in W \cap V$ , on a par définition  $\{\theta'\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset V$ , donc  $V \cap W$  est constitué d'une famille de segments verticaux  $\{\theta'\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ , qui contiennent  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$  dans leur adhérence, en particulier  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset \text{Fr}_U(V)$ . Il en résulte que  $\text{Fr}_U(V) \cap \{\theta\} \times ]t_1, t_2[$  est ouvert dans  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[$ , il est aussi fermé car  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[ \subset U$  et  $\text{Fr}_U(V)$  est fermé dans  $U$ . Par connexité de  $]t_1, t_2[$ , on a  $\text{Fr}_U(V) \supset \{\theta\} \times ]t_1, t_2[$ . Le lemme 1 montre que si  $(\varphi, t)$  et  $(\varphi', t') \in W \cap V$  alors  $V$  contient  $[\varphi, \varphi'] \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ , où  $[\varphi, \varphi']$  est le sous-arc de  $\alpha$  d'extrémités  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Il en résulte facilement que  $V$  couvre exactement un des deux côtés de  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$  dans  $W$ . ■

Si les  $S_i$  sont les segments donnés par le lemme 2, on a  $\text{Fr}_U(V) = \bigcup_{i \in I} S_i$ . Comme  $U$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$ , chaque  $S_i$  coupe  $U$  en deux régions, l'une homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$  et l'autre à  $\mathbb{R}^2$ , nous notons  $H_i$  celle des deux qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . On a  $\text{Ad}_U(H_i) = H_i \cup S_i$ , et  $V \cap \text{Ad}_U(H_i) = \emptyset$  car  $V$  est con-

nexe et contient le bord de  $U$ , c'est-à-dire  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ .

Lemme 3 : On a  $U = V \cup \left( \bigcup_{i \in I} \text{Ad}_U(H_i) \right)$ .

Démonstration : Soit  $x \notin V \cup \left( \bigcup_{i \in I} \text{Ad}_U(H_i) \right)$ ,  $x \in U$ , si un tel  $x$  existe. On a  $x \notin \text{Ad}_U(V)$ , donc par connexité de  $U$ , on peut trouver un arc  $\alpha$  d'extrémités  $x$  et  $y$  avec  $y \in \text{Ad}_U(V)$  et tel que  $\alpha$  ne rencontre  $\text{Ad}_U(V)$  en aucun autre point. Il est clair que  $y \in \text{Fr}_U(V)$ , il appartient donc à un  $S_i$ . Comme  $\alpha - \{y\} \subset U - \text{Ad}_U(V) \subset U - S_i$  et que  $H_i \cup S_i \cup V$ , couvre un voisinage de  $y$ , on obtient que le connexe  $\alpha - y \subset H_i$  et donc  $x \in H_i$ , ce qui est absurde. ■

Lemme 4 : Les  $H_i$  sont deux à deux disjoints. En fait les  $H_i$  sont les composantes connexes de  $U - \text{Ad}_U(V)$ .

Démonstration : Les  $H_i$  sont ouverts, donc ouverts dans  $U - \text{Ad}_U(V)$ . Ils sont aussi fermés dans  $U - \text{Ad}_U(V)$  car  $\text{Fr}_U(H_i) = S_i \subset \text{Ad}_U(V)$ . ■

Lemme 5 : Les  $\text{Ad}_U(H_i)$  sont les composantes connexes de  $U - V$ .

Démonstration : Ces ensembles sont fermés dans  $U$  donc dans  $U - V$ . Ils sont ouverts dans  $U - V$  car  $V \cup \text{Ad}_U(H_i)$  contient un voisinage de  $\text{Fr}_U(H_i)$  par le lemme 2. ■

Nous distinguons deux types de régions  $H_i$  suivant que  $H_i$  se trouve à droite ou à gauche de  $S_i$  (qui est orienté puisque vertical). Nous noterons  $D_1 \dots D_\ell \dots$  les régions  $H_i$  qui se trouvent à droite de leur frontière et  $G_1 \dots G_k \dots$  celles qui se trouvent à gauche de leur frontière. On pose  $D = \bigcup D_i$  et  $G = \bigcup G_i$ .

*APPENDICE - THÉORIE DE BIRKHOFF*

Remarque fondamentale : Un chemin partant de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  et contenu dans  $U$  ne peut entrer dans une région du type  $D_i$  (resp.  $G_i$ ) qu'en transversant la première fois sa frontière de gauche à droite (resp. droite à gauche).

Lemme 6 : On a  $\text{Ad}_U(D) = \cup \text{Ad}_U(D_i)$ , et  $\text{Ad}_U(G) = \cup \text{Ad}_U(G_i)$ .

Démonstration : Montrons par exemple que  $\cup \text{Ad}_U(D_i)$  est fermé dans  $U$ . Son complémentaire est  $V \cup (\cup \text{Ad}_U(G_i))$  qui lui est ouvert par le lemme 2. ■

Lemme 7 : On a  $H(V) \cap \text{Ad}_U(G_i) = \emptyset$ . De même  $H^{-1}(V) \cap \text{Ad}_U(D_i) = \emptyset$  par échange de droite et gauche.

Démonstration : Si  $(v, t) \in V$ , l'arc  $H(v, s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ , part du bord de  $U$ , est entièrement contenu dans  $U$  et traverse les verticales de gauche à droite par la remarque fondamentale il ne peut jamais entrer dans  $G_i$ . ■

Corollaire 8 : On a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset \text{Ad}_U(D) \cup \text{Ad}_U(G)$ .

Lemme 9 : On a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \cap \text{Ad}_U(D) = \emptyset$ . De même  $H(\text{Ad}_U(D)) \cap \text{Ad}_U(G) = \emptyset$ .

Démonstration : Par le corollaire 8, et le fait que les  $\text{Ad}_U(D_i)$ ,  $\text{Ad}_U(G_j)$  soient deux à deux disjoints et connexes, si  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G_j)) \cap \text{Ad}_U(D_i) \neq \emptyset$ , alors  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G_j)) \subset \text{Ad}_U(D_i)$ . Puisque  $H^{-1}(\text{Fr}_U(G_j))$  est transverse aux verticales et  $\text{Fr}_U(D_i)$  est verticale, on a nécessairement  $H^{-1}(\text{Fr}_U(G_j)) \cap D_i \neq \emptyset$ . Il en résulte que  $H^{-1}(V) \cap D_i \neq \emptyset$ . Ce qui est impossible par le lemme 7. ■

Lemme 10 : On a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset G$ . De même  $H(\text{Ad}_U(D)) \subset D$ .

Démonstration : Par le corollaire 8 et le lemme 9, on a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset \text{Ad}_U(G)$ .



Le fait que  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset G$  résulte alors aisément du fait que  $H^{-1}(\text{Fr}_U(G))$  est transverse à  $\text{Fr}_U(G)$  qui est verticale. ■

Lemme 11 : On a  $U = V$ .

Démonstration : En effet, si  $\text{Fr}_U V \neq \emptyset$ , alors soit  $D \neq \emptyset$  soit  $G \neq \emptyset$ . Dans le premier cas  $D - H^{-1}(\text{Ad}_U(D))$  serait formé de points errants et dans le second cas  $G - H(\text{Ad}_U(G))$  serait formé de points errants. Remarquons que si  $D$  est non vide, alors  $D \neq H^{-1}(\text{Ad}_U(D))$ , car, par exemple,  $U$  est connexe et différent de  $D$ . Même raisonnement si  $G$  est non vide. ■

Fin de la démonstration du théorème de Birkhoff : Il suffit de voir que la projection  $\mathbb{T}^1 \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{T}^1$  est injective sur  $\text{Fr}_A U$  (la surjectivité résulte aisément du fait que  $U$  est relativement compact et contient  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ). Soient alors deux points  $(\theta, t_1)$  et  $(\theta, t_2) \in \text{Fr}_A U$ . Supposons que  $t_1 < t_2$ . Puisque  $V = U$ , on obtient que  $\{\theta\} \times [t_1, t_2]$  est inclus dans  $\text{Fr}_A U$ . Comme  $H$  conserve l'orientation et dévie les verticales à droite, un point proche de  $(\theta, \frac{t_1+t_2}{2})$  et situé à gauche a une image qui est au-dessus de  $\text{Fr}_A U$  et ne peut appartenir donc à  $U$ , puisque  $V = U$ . De même en utilisant  $H^{-1}$  on voit qu'un point proche de  $(\theta, \frac{t_1+t_2}{2})$  et situé à droite ne peut pas appartenir à  $U$ . Ceci est contradictoire avec le fait que  $\{\theta\} \times [t_1, t_2] \subset \text{Fr}_A U$ . ■

Université Paris-XI  
 Département de Mathématiques  
 Bât. 425  
 91405 ORSAY Cedex