

# *Astérisque*

MICHAEL R. HERMAN

**Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes  
de l'anneau**

*Astérisque*, tome 103-104 (1983), p. 1-221

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1983\\_\\_103-104\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__103-104__1_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PLAN

CHAPITRE I .....	3
La théorie de Birkhoff	
Une interprétation plus topologique de la démonstration du théorème de Birkhoff, Appendice au Chapitre I, par A. FATHI.	39
CHAPITRE II .....	47
Contre-exemples de classe $C^{3-\epsilon}$ et à nombre de rotation fixé au théorème des courbes invariantes	
CHAPITRE III .....	85
Contre-exemples de Denjoy et contre-exemples de classes $C^{3-\epsilon}$ au théorème des courbes invariantes ayant un nombre de rota- tion fixé	
CHAPITRE IV .....	139
Démonstration du théorème des courbes translatées de nombre de rotations de type constant	
ENGLISH SUMMARY .....	221



## INTRODUCTION

Le Chapitre I expose la théorie due à Birkhoff. Nous avons inclus ce chapitre pour la commodité du lecteur et aussi pour donner des démonstrations complètes là où Birkhoff donne seulement une idée, voir une esquisse de démonstration. Dans l'appendice, Albert Fathi donne une démonstration plus topologique du théorème de Birkhoff (I.3).

Chacun des chapitres comporte une introduction, et a été rédigé, dans la mesure du possible, pour pouvoir être lu indépendamment.

Une variété difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  est appelé cylindre ou anneau (ouvert) et une variété difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$  est appelée anneau (sous-entendu à bord).

## REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier tout particulièrement Marc Chaperon, Alain Chenciner, Albert Fathi, Raphaël Douady, Nicole Desolneux, Jean-Paul Thouvenot et Jean-Christophe Yoccoz pour de nombreuses et fructueuses discussions. Je voudrais remercier John Mather de m'avoir signalé en 1979 l'existence de la théorie de Birkhoff et H. Rüssmann de m'avoir signalé en 1976 la réduction de la démonstration des courbes translatées (i.e. IV.5.3). Cette réduction, bien que non indispensable (cf. IV), simplifie un peu l'écriture des choses et a été utilisée la première par J. Moser (I, Moser [1]).

Ce travail a été exposé au séminaire sur les Systèmes Dynamiques que j'organise au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, et je voudrais remercier les participants.

Je remercie Alain Chenciner pour son patient travail de "correcteur".

Je remercie Marie-Jo Lécuyer d'avoir tapé avec dextérité le manuscrit et d'avoir dessiné avec grand soin les figures.

-----



## CHAPITRE I

### LA THÉORIE DE BIRKHOFF

#### INTRODUCTION.

Nous exposons les résultats de Birkhoff [1, § 44 - § 47] tels que nous les utiliserons ultérieurement. Le lecteur peut aussi consulter Birkhoff [2] et [3]. Les résultats 2.2 et 2.3 = B[1,p.196], 2.4 = B[1,p.200-201], 3.1 = B[1, p.195-196], 5.7 ~ B[1,§ 46], 5.9.2 ~ B[1,§ 47]. Les résultats 5.1 à 5.6 sont énoncés dans Birkhoff [3]. Nous exposerons en 5.8 et 5.9 les zones d'instabilités de Birkhoff [3] en nous appuyant sur les résultats de généricité de Robinson [1] et le théorème de J. Moser [1] (on peut aussi consulter Herman [2] pour une démonstration du théorème de Moser).

Pour un exposé élémentaire dans  $S^2$  de la dualité d'Alexander, le lecteur peut consulter Wall [1]. Pour la démonstration du théorème de Jordan voir Wall [1], pour celle du théorème de Jordan-Schönflies, voir Newman [1,VI], et pour la démonstration du théorème de la représentation conforme le lecteur peut consulter Rudin [1].

#### NOTATIONS.

On note le tore de dimension  $n$  par  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ ,  $\text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$  est le groupe des homéomorphismes de  $\mathbb{T}^1$  préservant l'orientation et  $\text{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)$  est le groupe des difféomorphismes de classe  $C^k$  de  $\mathbb{T}^1$  préservant l'orientation.

Une fonction  $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$  est lipschitzienne, si 
$$\sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} = \text{Lip}(\varphi) < +\infty.$$
 On note  $\text{Lip}(\mathbb{T}^1) = \{\varphi \in C^0(\mathbb{R}) \mid \varphi \text{ est } \mathbb{Z}\text{-périodique et } \text{Lip}(\varphi) < +\infty\}$ . Une application  $h \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$  est dite lipschitzienne si

elle est lipschitzienne pour la métrique de groupe de  $\mathbb{T}^1$  (notée  $\| \cdot \|$ ) quotient de la métrique standard de  $\mathbf{R}$ . Le rapport de Lipschitz de  $h$  est alors noté

$\text{Lip}(h)$ . (On rappelle que si  $(X_i, d_i)$ ,  $i = 1, 2$  sont 2 espaces métriques

$f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  est une application lipschitzienne s'il existe  $K > 0$  tel que l'on ait  $d_2(f(x), f(y)) < Kd_1(x, y)$  pour  $x, y \in X_1$ .)

On note par  $C^k(\mathbb{T}^1)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , l'espace des fonctions de classe  $C^k$  de  $\mathbb{T}^1$ . Si  $f \in C^k(\mathbb{T}^1)$ ,  $D^k f$  désigne la dérivée d'ordre  $k$  de  $f$ .

Si  $X$  est un espace topologique séparé, un cercle de  $X$  est l'image  $C$  d'une application continue injective (i.e. un plongement topologique) de  $\mathbb{T}^1$  dans  $X$ .

$C$  est aussi appelé cercle plongé ou encore courbe fermée simple,  $C$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^1$ .

$C$  est dit invariant par un homéomorphisme  $f$  de  $X$  si on a  $f(C) = C$ .

Soit  $n \geq 1$  et soit  $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}^n$  une fonction continue, on note  $\|\varphi\|_{C^0} = \text{Sup}_{x \in X} \|\varphi(x)\|$ ,

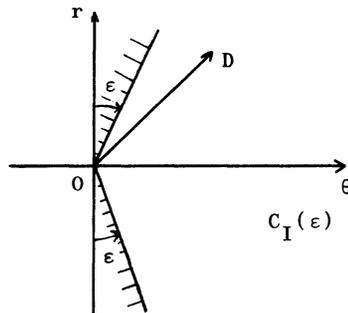
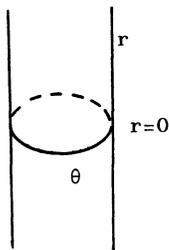
où, si  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|y\| = \sup_i |y_i|$ .

On note par  $\mathbb{D}^2$  le disque  $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ .

1.1  $A$  désigne une des variétés suivantes :  $\mathbb{T}^1 \times \mathbf{R}$ ,  $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty[$  ou  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ .

$f$  sera un difféomorphisme de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) de  $A$  supposé homotope à l'identité. Pour  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ,  $C_I(\varepsilon)$  est le cône de  $\mathbf{R}^2$  des demi-droites  $OD$  vérifiant  $|\text{angle}(OD, 0\theta)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ .

On note le cône opposé  $C_{II}(\varepsilon) = -C_I(\varepsilon)$ .



Figure

**THÉORIE DE BIRKHOFF**

1.2 Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $A$ ,  $Df$  l'application tangente de  $f$ , l'espace tangent de  $A$  étant muni de sa trivialisatıon canonique. Le champ de vecteurs vertical de  $A$  est le champ de vecteurs  $v_x = (0, 1)$ ,  $x \in A$ . L'application  $Df$  au point  $x$  est notée  $Df_x$  et on a  $Df_x : \{x\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \{f(x)\} \times \mathbb{R}^2$ .

Définition : Le difféomorphisme  $f$  de  $A$  dévie (ou tourne) la verticale à gauche (resp. à droite) s'il existe  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  tel que, pour tout  $x \in A$ , on ait

$$Df_x v_x \in C_{II}(\varepsilon) \quad (\text{resp. } C_I(\varepsilon))$$

$$Df_x^{-1} v_x \in C_I(\varepsilon) \quad (\text{resp. } C_{II}(\varepsilon)) .$$

Si  $f$  dévie la verticale à gauche, alors  $f^{-1}$  dévie la verticale à droite.

Le difféomorphisme  $f$  dévie la verticale à gauche s'il existe  $C > 0$  tel que,

si  $Df_x = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ , alors pour tout  $x$ , on ait  $b(x) < -C$  et

$$a(x)d(x) - b(x)c(x) \geq C.$$

1.3 Exemples : a) Soit  $t(r) \in C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$ , vérifiant  $\frac{dt(r)}{dr} \geq \varepsilon_0 > 0$ , alors le difféomorphisme  $(\theta, r) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow (\theta + t(r), r)$  dévie la verticale à droite.

b) Soit  $\varphi(\theta) \in C^k(\mathbb{T}^1)$  et  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ ,  
 $f^{-1}(\theta, r) = (\theta - r + \varphi(\theta), r - \varphi(\theta))$ .

Le difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  préserve la mesure de Lebesgue  $d\theta \wedge dr$ ,  $f$  est homotope à l'identité et  $f$  dévie la verticale à droite.  $f$  est un difféomorphisme globalement canonique si et seulement si  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ ,  $f$  a alors la propriété d'intersection (voir Herman [2, § 2]).

On peut aussi remarquer que  $f$  définit un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}) / (\theta, r) \sim (\theta, r+1)$  qui est isotope à  $(\theta, r) \in \mathbb{T}^2 \rightarrow (\theta + r, r) \in \mathbb{T}^2$ .

1.4 Remarque : Si  $f$  est un difféomorphisme de  $A$  qui dévie la verticale, alors il existe  $\eta > 0$  tel que, si  $g$  est un difféomorphisme de  $A$  vérifiant  $\sup_{x \in A} \|Df_x - Dg_x\| < \eta$ , alors  $g$  dévie la verticale ( $\| \cdot \|$  est une norme de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ).

La  $C^1$ -topologie uniforme sur  $\text{Diff}^1(A)$  est la topologie de la convergence uniforme sur  $A$  plus la topologie de la convergence uniforme des matrices jacobiniennes.

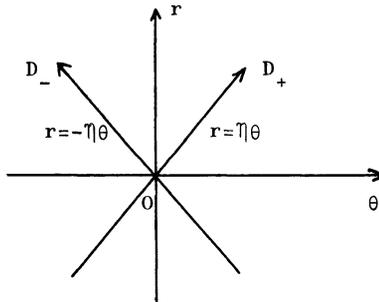
1.5 Si  $f$  est un difféomorphisme de  $A$  qui dévie la verticale à gauche, alors il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in A$ , on ait

$$\frac{3\pi}{2} > \text{angle}(\vec{O\theta}, Df_x \vec{OD}_+) > \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \text{angle}(\vec{O\theta}, Df_x^{-1} \vec{OD}_-) < \frac{\pi}{2}$$

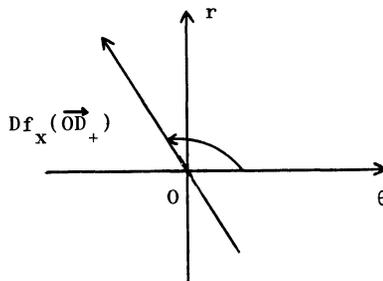
où  $D_+ = (1, \eta)$ ,  $D_- = (1, \eta)$

Figure



(remarquer que  $Df_x(\vec{Or}) \in C_{II}(\varepsilon)$ ,  $Df_{f^{-1}(x)}^{-1}(\vec{Or}) = \vec{Or}$ ,  $Df_x^{-1}(\vec{Or}) \in C_I(\varepsilon)$  et qu'une matrice  $B \in GL_+(2, \mathbf{R})$  agissant sur les directions des demi-droites (i.e.  $\mathbb{S}^1$ ) préserve l'ordre).

Figure



*THÉORIE DE BIRKHOFF*

On vérifie que si  $f$  est un difféomorphisme de  $A$  homotope à l'identité et que si  $f$  vérifie la propriété ci-dessus, alors  $f$  dévie la verticale à gauche.

2.1 On se donne un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^1$  de  $A$  homotope à l'identité.

On suppose qu'il existe  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  tel que le graphe de  $\varphi$  :

$C = \{(\theta, \varphi(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{T}^1\}$  soit invariant par  $f$ . Soit  $p_1(\theta, r) = \theta$  la première projection. On pose  $g = p_1(f|_C)$  ;  $g$  est un homéomorphisme du cercle  $\mathbb{T}^1$  préservant l'orientation puisque  $f$  est homotope à l'identité. On a

$$f(\theta, \varphi(\theta)) = (g(\theta), \varphi(g(\theta)))$$

puisque le cercle  $C$  est invariant par  $f$  (i.e.  $f(C) = C$ ).

2.2 On suppose que le difféomorphisme  $f$  de 2.1 dévie la verticale (à gauche). Soit le nombre  $\eta > 0$  défini en 1.5.

Proposition : Si le difféomorphisme  $f$  qui dévie la verticale laisse invariant un cercle  $C$  qui est le graphe de  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , alors  $\varphi$  est lipschitzienne et on a même

$$|\varphi(\theta) - \varphi(\theta')| < \eta \|\theta - \theta'\| \quad \text{pour} \quad \|\theta - \theta'\| \leq \frac{1}{2} ,$$

où, si  $\theta \in \mathbb{T}^1$  et  $\tilde{\theta}$  est un relèvement de  $\theta$  à  $\mathbb{R}$

$$\|\theta\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{\theta} + p| .$$

Démonstration : On se place dans le revêtement universel  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times I$  de  $A$  (difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times I$ , où  $I = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$  ou  $[0,1]$ ), et on désigne par  $\tilde{f}$  un relèvement de  $f$ .  $\tilde{f}$  laisse invariant  $\tilde{C}$  qui est le graphe de  $\tilde{\varphi}$  où  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ p$  et  $p: \tilde{A} \rightarrow A$  est la projection.  $g$  se relève en  $\tilde{g} \in \text{Homéo}_+(\mathbb{R})$  vérifiant  $\tilde{g}(\theta + 1) = 1 + \tilde{g}(\theta)$ . La propriété de dévier la verticale à gauche est aussi vérifiée pour  $\tilde{f}$ .

L'homéomorphisme  $\tilde{g}$  préserve l'ordre et l'orientation de  $\mathbb{R}$  (on choisit une orientation de  $\mathbb{R}$ ).

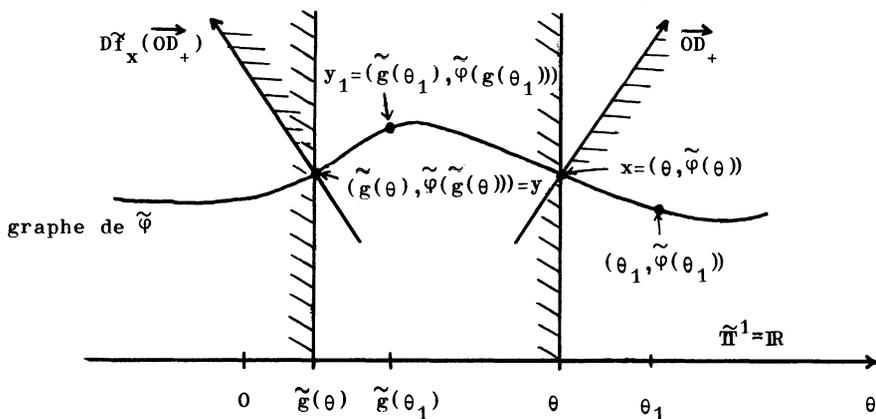
On a, si  $\theta < \theta_1$ ,

$$|\text{angle}(\vec{0\theta}, \vec{yy_1})| \leq \frac{\pi}{2}$$

avec  $y = \tilde{f}(\theta, \tilde{\varphi}(\theta)) = (\tilde{g}(\theta), \tilde{\varphi}(\tilde{g}(\theta)))$ ,  $y_1 = \tilde{f}(\theta_1, \tilde{\varphi}(\theta_1)) = (\tilde{g}(\theta_1), \tilde{\varphi}(\tilde{g}(\theta_1)))$ .

Pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ , il existe  $\varepsilon(\theta) > 0$  tel que

$$(-\varepsilon(\theta) < \theta - \theta_1 < 0) \implies \frac{\tilde{\varphi}(\theta_1) - \tilde{\varphi}(\theta)}{\theta_1 - \theta} < \eta .$$



Figure

(Ceci résulte du fait que  $\tilde{f}$  est de classe  $C^1$  et, si on supposait, par

l'absurde, qu'il existe une suite  $\theta_i > \theta$ ,  $\theta_i \rightarrow \theta$  vérifiant  $\frac{\tilde{\varphi}(\theta_i) - \tilde{\varphi}(\theta)}{\theta_i - \theta} \geq \eta$ ,

on aurait par 1.5  $\text{angle}(\vec{O\theta}, \vec{yy_1}) > \frac{\pi}{2}$ , ce qui est impossible.)

On a de même, pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ , il existe  $\varepsilon_1(\theta) > 0$ , tel que

$$(\varepsilon_1(\theta) > \theta - \theta_1 > 0) \implies \frac{\tilde{\varphi}(\theta_1) - \tilde{\varphi}(\theta)}{\theta_1 - \theta} < \eta .$$

En faisant le même raisonnement pour  $\tilde{f}^{-1}$ , on a, pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ , il existe  $\varepsilon_2(\theta) > 0$ , tel que

$$(0 < |\theta - \theta_1| < \varepsilon_2(\theta)) \implies |\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta_1)| \leq \eta |\theta - \theta_1| .$$

En considérant un recouvrement fini de  $\mathbb{T}^1$  par des intervalles

$]\theta_i - \varepsilon_2(\theta_i), \theta_i + \varepsilon_2(\theta_i)[$ ,  $1 \leq i \leq N$ , il existe  $\varepsilon_3 > 0$  tel que si  $0 < |\theta - \theta_i| < \varepsilon_3$  on ait  $|\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta_i)| \leq \eta |\theta - \theta_i|$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N$ . Donc il existe  $\varepsilon_4 > 0$  tel que, si  $0 < |\theta - \theta'| < \varepsilon_4$  on ait  $|\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta')| \leq \eta |\theta - \theta'|$ .

La fonction  $\tilde{\varphi} \in C^0(\mathbb{T}^1)$  est donc lipschitzienne.  $\tilde{\varphi}$  est presque partout dérivable pour la mesure de Lebesgue  $d\theta$  et on a  $D\tilde{\varphi} \in L^\infty$ ,  $\|D\tilde{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \eta$  (puisque c'est vrai localement).

On a donc pour  $\theta$  et  $\theta'$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta') = \int_{\theta'}^{\theta} D\tilde{\varphi}(t) dt$  et donc

$$|\tilde{\varphi}(\theta) - \tilde{\varphi}(\theta')| \leq \eta |\theta - \theta'| . \quad \blacksquare$$

**2.3 Corollaire :** Sous les mêmes hypothèses que 2.2, les homéomorphismes  $g$  et  $g^{-1}$  sont des applications lipschitziennes de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{T}^1$  (pour la métrique de groupe définie par  $\| \cdot \|$ ).

**Démonstration :** On désigne par  $k$  le supremum des rapports de Lipschitz de  $f|_C$  et de  $f|_C^{-1}$  (on munit  $A$  de la métrique induite de  $d((\theta, r), (\theta', r')) = \sup(\|\theta - \theta'\|, |r - r'|)$ ). On a

$$g = p_1 \circ f|_C \circ \tilde{\varphi}$$

$$g^{-1} = p_1 \circ f|_C^{-1} \circ \tilde{\varphi}$$

où  $\tilde{f}(\theta, r) = (\theta, \varphi(\theta))$  et  $p_1(\theta, r) = \theta$  (i.e. la 1ère projection).

Il en résulte l'inégalité suivante :

$$\sup(\text{Lip}(g), \text{Lip}(g^{-1})) \leq k \sup(1, \text{Lip}(\varphi)) \quad . \quad \blacksquare$$

2.4.1 Soit  $f$  un difféomorphisme de  $A$  qui dévie la verticale à droite. On suppose que  $f$  laisse invariants deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  qui sont les graphes de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  éléments de  $C^0(\mathbb{T}^1)$ . Soit  $\tilde{f}$  un relèvement de  $f$  à  $\tilde{A}$ . On pose  $f_i = \tilde{f}|_{\tilde{C}_i}$ ,  $f_i \in D^0(\mathbb{T}^1) = \{f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{R}) \mid f - \text{Id} \in C^0(\mathbb{T}^1)\}$ , où on note par  $\tilde{C}_i$  le relevé de  $C_i$  à  $\tilde{A}$ .

Si  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$ ,  $\rho(g) \in \mathbb{R}$  est son "nombre de rotation" (cf. Herman [1, II]).

Puisque le nombre de rotation est indépendant du point, si  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , alors on a  $\rho(f_1) = \rho(f_2)$ .

2.4.2 Proposition : On a, si  $\varphi_1 < \varphi_2$ ,  $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$ .

Démonstration : Il suffit, par (Herman [1, III.4]) de démontrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a  $\tilde{g}_1(\theta) < \tilde{g}_2(\theta)$ , où  $\tilde{g}_i(\theta) = p_1(\tilde{f}(\theta, \varphi_i(\theta)))$  ( $\tilde{g}_i$  est  $C^0$ -conjugué à  $f_i$ ). Or, si  $f(\theta, r) = (\tilde{f}_1(\theta, r), \tilde{f}_2(\theta, r))$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\tilde{g}_2(\theta) - \tilde{g}_1(\theta) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r}(\theta, \tilde{\varphi}_1(\theta) + t(\tilde{\varphi}_2(\theta) - \tilde{\varphi}_1(\theta))) (\tilde{\varphi}_2(\theta) - \tilde{\varphi}_1(\theta)) dt$$

mais  $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial r}(\theta, \tilde{\varphi}(\theta) + t(\tilde{\varphi}_2(\theta) - \tilde{\varphi}_1(\theta))) > 0$ , puisque  $f$  dévie la verticale à droite.  $\blacksquare$

2.4.3 Par (Herman [1, III.4]), si  $\rho(f_1) \notin \mathbb{Q}$  ou si  $\rho(f_2) \notin \mathbb{Q}$ , on a  $\rho(f_1) < \rho(f_2)$ .

2.4.4 Complément : Sous les mêmes hypothèses que 2.4.1, si on suppose

de plus que  $f$  préserve la mesure de Lebesgue, on a, si  $\varphi_1 < \varphi_2$ ,  $\rho(f_1) < \rho(f_2)$ .

Démonstration : Par 2.4.2 et 2.4.3, on peut supposer que  $\rho(f_1) = \rho(f_2) = \frac{p}{q}$ , où  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $q \geq 1$  et  $(p, q) = 1$ . Soit  $x_i = (\theta_i, r_i)$  un point fixe de  $R_{-p} \circ f_i^q$ ,  $x_i \in \tilde{C}_i$ , pour  $i = 1, 2$  et tel que  $x_2$  soit le premier point fixe de  $R_{-p} \circ f_2^q$  sur  $\tilde{C}_2$  à droite de la droite  $\{\theta_1\} \times \mathbb{R}$ . (On n'exclut pas  $\theta_1 = \theta_2$  a priori.) On pose  $y_1 = \tilde{C}_2 \cap (\{\theta_1\} \times \mathbb{R})$ ,  $y_2 = \tilde{C}_1 \cap (\{\theta_2\} \times \mathbb{R})$ . Si  $x_2 \neq y_1$ , soit  $R$  le disque bordé par  $[x_1, y_1] \cup (\text{Arc}(y_1, x_2) \text{ sur } \tilde{C}_2) \cup [x_2, y_2] \cup (\text{Arc}(y_2, x_1) \text{ sur } \tilde{C}_1)$ .

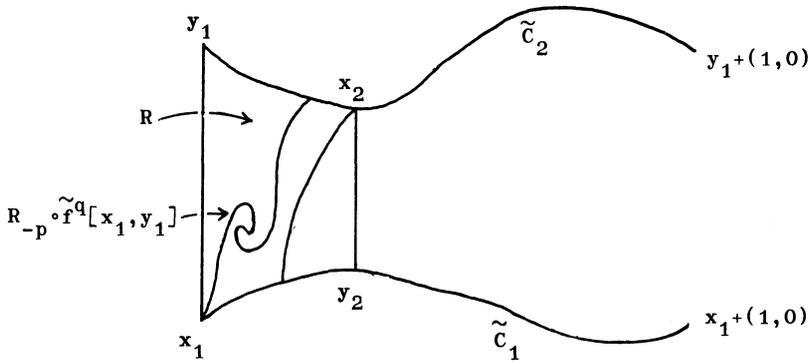


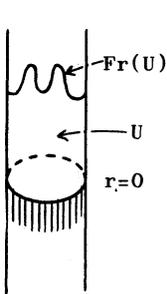
Figure dans  $\tilde{\mathbb{T}}^1 \times \mathbb{R}$

Par un raisonnement analogue à 3.5.6 (iii) (puisque  $R_{-p} \circ \tilde{f}^q([x_1, y_1])$  est un chemin négatif de classe  $C^1$  à partir de  $x_1 \in \tilde{C}_1$ , que  $\tilde{f}$  laisse invariant chaque courbe  $\tilde{C}_i$ ,  $i = 1, 2$ , ainsi que l'orientation sur chaque  $\tilde{C}_i$ , que  $\tilde{f}$  dévie la verticale à droite et que  $R_{-p} \circ \tilde{f}^q(y_1)$  est le premier point d'intersection de  $R_{-p} \circ \tilde{f}^q([x_1, y_1])$  avec  $\tilde{C}_2$  si on pose  $R_{-p} \circ \tilde{f}^q(y_1) = (\theta', r')$ , on a  $\theta_1 < \theta' < \theta_2$ . Il suit que  $\theta_1 = \theta_2$  est impossible. Par 3.5.6 (i),  $R_{-p} \circ \tilde{f}^q([x_1, y_1])$  est contenu dans l'intérieur du domaine  $R$ . La même conclusion est valable pour  $R_{-p} \circ \tilde{f}^q([x_2, y_2])$ . Les courbes  $\tilde{C}_i$  sont de mesure de Lebesgue nulle ainsi que les intervalles  $[x_i, y_i]$ ,  $i = 1, 2$ . Ce qui contredit le fait que  $\tilde{f}$  préserve la mesure de Lebesgue. ■

Remarque : En général, si  $n \in \mathbb{N}$  est grand, le difféomorphisme  $f^n$  ne dévie pas la verticale à droite. (Par exemple, il suffit de supposer que  $f$  possède un point périodique elliptique irrationnel dans le domaine limité par  $C_1$  et  $C_2$ ). En contrepartie, si  $n \geq 1$ , le chemin  $\tilde{f}^n([x, y_1])$  est un chemin négatif à partir de  $\tilde{f}^n(x_1) \in \tilde{C}_1$  (i.e. l'angle de la verticale et de la tangente de la courbe  $t \rightarrow \varphi(t) = \tilde{f}^n((1-t)x_1 + ty_1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\text{angle}(v_x, \frac{d\varphi(t)}{dt})$ ,  $x = \varphi(t)$ , est toujours algébriquement négatif, ceci en ayant choisi une détermination d'angle dans le revêtement universel (ad hoc) à partir de  $t=0$  le long de  $\varphi(t)$  et satisfaisant la condition pour  $t=0$ ).

§ 3. UN THÉORÈME DE BIRKHOFF.

3.1 On se donne un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  ( $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ) qui dévie la verticale à gauche ( $f$  laisse invariant  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ). On suppose que  $f$  préserve une mesure de Radon  $\mu > 0$  vérifiant  $\text{support}(\mu) = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  et on suppose que :



- $U$  est d'adhérence compacte dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  (on note l'adhérence par  $\bar{U}$ ) ;
- $U$  est difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  ;
- Il existe  $\delta > 0$ , tel que  $\{0 \leq r \leq \delta\} \subset U$  ;
- $U$  est l'intérieur de son adhérence (i.e.  $\text{Int}(\bar{U}) = U$ ) ;
- $U$  est invariant par  $f$  (i.e.  $f(U) = U$ ).

Figure

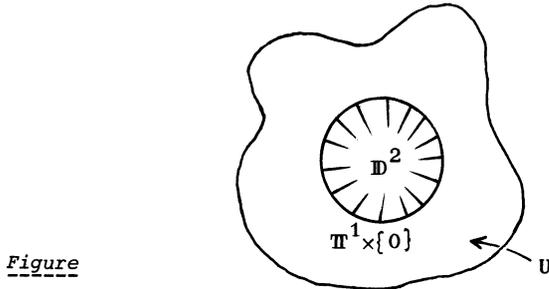
On note  $C = \text{Fr}(U)$  la frontière de  $U$  dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$ .

Théorème : Sous les conditions ci-dessus,  $\text{Fr}(U)$  est le graphe d'une fonction  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ .

3.2 Le théorème 3.1 sera démontré en 3.6.

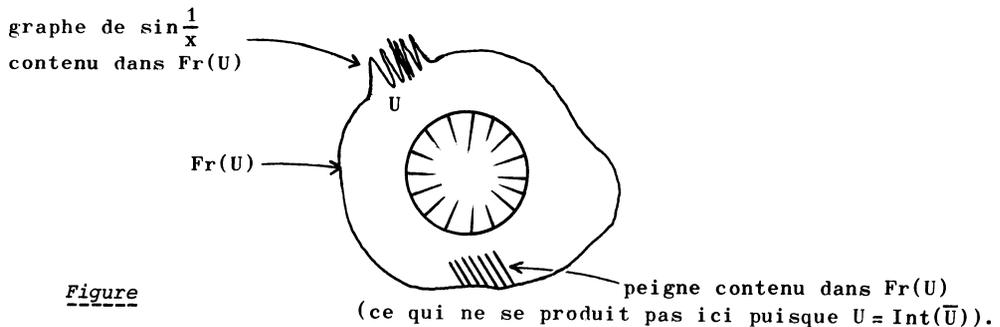
THÉORIE DE BIRKHOFF

Si on ajoute un disque  $\mathbb{D}^2$  à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  le long de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ,  $(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+) \cup \mathbb{D}^2$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ ;  $U \cup \mathbb{D}^2$  est un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$  (d'adhérence compacte) et donc la frontière de  $U \cup \mathbb{D}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est un compact connexe (voir Wall [1, 14.10]).

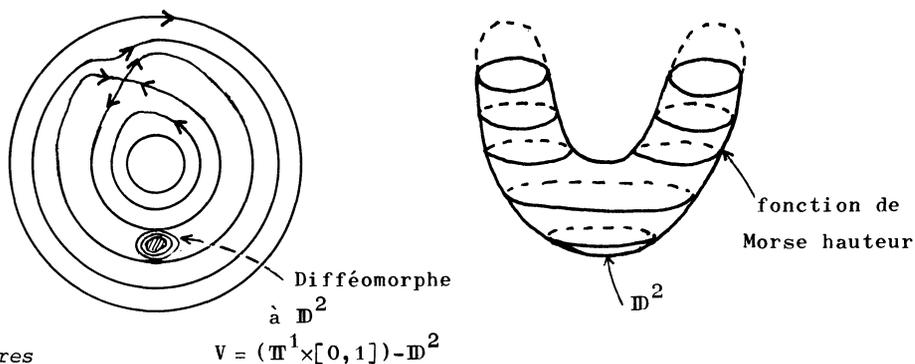


(Il est à noter que Birkhoff appelle "courbe" ce que nous appelons aujourd'hui continuum : un compact connexe mais pas forcément localement connexe).

Remarques : A priori,  $\text{Fr}(U)$  est assez compliqué.



On doit nécessairement supposer que  $U \cong S^1 \times \mathbb{R}$ . En effet, sur  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ , un champ de vecteurs induit d'un hamiltonien sur  $S^2$  venant d'une fonction de Morse de  $S^2$  ayant 4 points critiques possède une région  $V$  invariante vérifiant  $\pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  et telle que le bord  $\partial V$  n'est pas le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ .



Figures

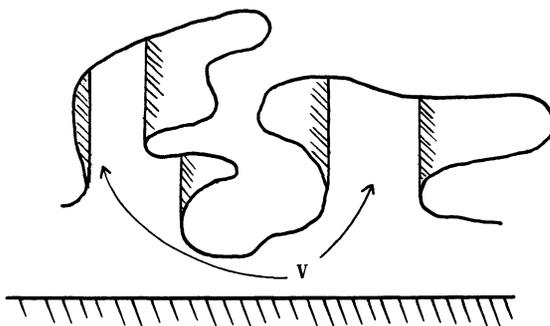
3.3 Nous allons commencer par des préliminaires.

3.3.1 Soit, pour  $\theta \in \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi(\theta) = \text{Inf}\{y \mid (\theta, y) \in (\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+) - U\}$ .

La fonction  $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est semi-continue inférieurement (en effet, on a

$\varphi(a) = \liminf_{\theta \rightarrow a} \varphi(\theta)$ , puisque  $(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+) - U$  est fermé, où

$\liminf_{\theta \rightarrow a} \varphi(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \inf_{\theta \in ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[} (\varphi(\theta)) \right)$  cf. (Bourbaki [1, § 6 n°2 et Ex. § 6, n°8]).



Figure

3.3.2 Il suit que  $V = \{(\theta, y) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+ \mid \varphi(\theta) > y\}$  est ouvert. V est l'ensemble des points de U accessibles par les verticales à partir de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ .

3.3.3 Puisque  $\varphi$  est de 1ère classe de Baire, l'ensemble G des points de continuité de  $\varphi$  est un  $G_\delta$  dense de  $\mathbb{T}^1$ .

3.3.4 Soient les fonctions définies pour  $\theta \in \mathbb{T}^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

## THÉORIE DE BIRKHOFF

$$\varphi_+(\theta) = \limsup_{y \rightarrow \theta, y \in G} \varphi(y)$$

$$\varphi_-(\theta) = \liminf_{y \rightarrow \theta, y \in G} \varphi(y) .$$

On a, pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi(\theta) \leq \varphi_-(\theta) \leq \varphi_+(\theta)$ . Les fonctions  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement.

3.3.5 Il suit de 3.3.3 et de la définition de la  $\liminf$  que l'on a

$$\text{adhérence de } (V) = \bar{V} = \{(\theta, y) \mid \varphi_+(\theta) \geq y\}$$

et

$$\text{Int}(\bar{V}) = \{(\theta, y) \mid \varphi_-(\theta) > y\}$$

(noter que  $\varphi_-$  est la plus grande fonction semi-continue inférieurement  $\leq \varphi_+$ ).

On a, pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi(\theta) \in \text{Fr}(U)$  et  $\varphi_+(\theta) \in \text{Fr}(U)$ .

3.3.6 On rappelle que si  $X$  est un espace topologique et  $U$  un ouvert de  $X$ , alors  $W = \text{Int}(\bar{U}) \supset U$  et l'ouvert  $W$  est l'intérieur de son adhérence.

3.4

3.4.1 On se donne un espace topologique  $X$  métrisable et complet.  $X$  est donc un espace topologique de Baire. On se donne un homéomorphisme  $f$  de  $X$ .

3.4.2 On se donne un sous-ensemble  $\Lambda$  de  $X$  et on suppose que  $f(\Lambda) = \Lambda$ .

Alors on a

$$f(\bar{\Lambda}) = \bar{\Lambda} \quad , \quad f(\text{Int}(\bar{\Lambda})) = \text{Int}(\bar{\Lambda}) \quad \text{et} \quad f(\text{Fr}(\text{Int}(\bar{\Lambda}))) = \text{Fr}(\text{Int}(\bar{\Lambda})) \quad .$$

3.4.3 On suppose que  $\Omega(f)$ , l'ensemble non errant de  $f$ , est égal à  $X$

(i.e. si  $U$  est un ouvert de  $X$  vérifiant  $f(U) \subset U$ , alors  $U - f(U)$  est un fermé dans  $U$  sans point intérieur). Si  $V$  est un ouvert vérifiant  $f(V) \subset V$ , alors il existe un  $G_\delta$  dense  $\Lambda$  de  $V$  tel que  $f(\Lambda) = \Lambda$ . (Il suffit de prendre

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(V) .)$$

3.4.4 On se donne un difféomorphisme  $f$ , un ouvert  $U$  vérifiant les hypothèses de 3.1 (beaucoup moins suffit). Alors  $f|_U$  préserve la mesure de probabilité  $\nu = \frac{1}{\mu(U)} \mu|_U$  et on a  $\text{support}(\nu) = U$ . On a donc, par le théorème de récurrence de Poincaré,

$$\Omega(f|_U) = U .$$

3.4.5 On se place sous les mêmes hypothèses que 3.1, et on considère l'ouvert  $V$  défini en 3.3. On suppose qu'il existe un ensemble  $\Lambda \subset V$ , dense dans  $V$  et vérifiant  $f(\Lambda) = \Lambda$ .

**Proposition** : Sous les hypothèses ci-dessus,  $\text{Fr}(U)$  est le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ .

**Démonstration** : Par 3.4.2, on a  $f(\bar{V}) = \bar{V}$  et  $f(\text{Int}(\bar{V})) = \text{Int}(\bar{V})$ . On a  $\bar{V} \subset \bar{U}$ . Nous allons montrer que  $\varphi_+ = \varphi_-$  (voir 3.3.5). Il suivra que  $\varphi_+ \in C^0(\mathbb{T}^1)$ ,  $\bar{V} = \{(\theta, y) \mid y \leq \varphi_+(\theta)\}$ . On a aussi  $\{(\theta, y) \mid y = \varphi_+(\theta)\} \subset \text{Fr}(U)$ , mais puisque  $U$  (et  $\bar{U}$ ) sont connexes,  $U \subset \bar{V}$  et donc, puisque  $\text{Int}(\bar{U}) = U$ ,  $U = \text{Int}(\bar{V})$ . Pour montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$  on a  $\varphi_+(\theta) = \varphi_-(\theta)$ , nous allons raisonner par l'absurde.

Le segment  $[\varphi_-(\theta), \varphi_+(\theta)] \subset \text{Fr}(\text{Int}(\bar{V})) \subset \text{Fr}(V)$ . On peut supposer qu'on a une des éventualités suivantes : si  $z \in [\varphi_-(\theta), \varphi_+(\theta)]$ ,

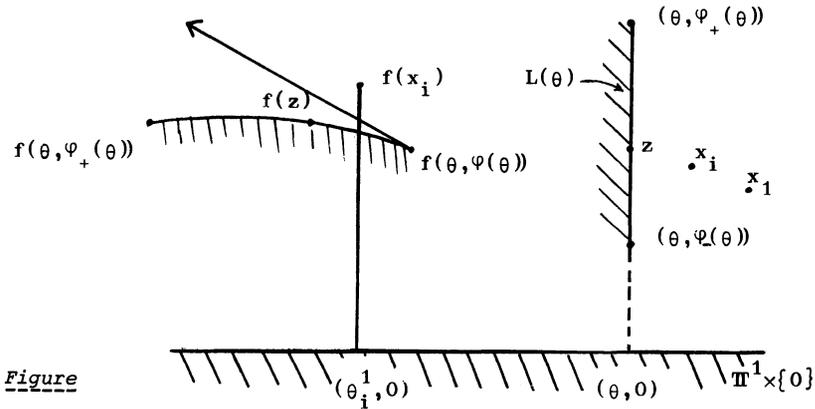
a) il existe une suite  $x_i = (\theta_i, y_i)$ ,  $\theta_i > \theta$ ,  $\theta_i \rightarrow \theta$  si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $x_i = (\theta_i, y_i) \rightarrow z$ ,  $(\theta_i, y_i) \in \Lambda \subset V$  ;

b) il existe une suite comme en a) vérifiant  $\theta_i < \theta$ , mais à part cela,

les autres conditions de a) sont vérifiées.

Nous allons exclure la possibilité a) (le cas b) étant analogue en considérant  $f^{-1}$ ).

Puisque  $f$  dévie la verticale à gauche, et que  $f$  est de classe  $C^1$ , pour  $z$  assez voisin de  $\varphi_-(\theta)$ ,  $f$  est très proche de  $Df_{(\theta, \varphi_-(\theta))}$  et on peut schématiser les choses comme dans la figure ; de plus on a  $f(x_i) \in \Lambda$ ,  $f(x_i) \rightarrow f(z)$ .



Figure

Comme  $f(x_i) \in \Lambda \subset V$ , le segment vertical vérifie  $S_i = [(\theta_i^1, 0), f(x_i)] \subset V$  où  $p_1(f(x_i)) = \theta_i^1$ .

Pour  $i$  assez grand,  $S_i \cap f(L(\theta)) \neq \emptyset$ , où  $L(\theta)$  est le segment

$L(\theta) = [(\theta, \varphi_-(\theta)), (\theta, \varphi_+(\theta))]$  (cf. la démonstration de 2.4.2). Ceci est absurde car

$L(\theta) \subset \text{Fr}(\text{Int}(\bar{V})) \subset \text{Fr}(V)$  et que  $f(\text{Fr}(\text{Int}(\bar{V}))) = \text{Fr}(\text{Int}(\bar{V}))$ . Il suit que a)

est impossible. Le cas b) est analogue. ■

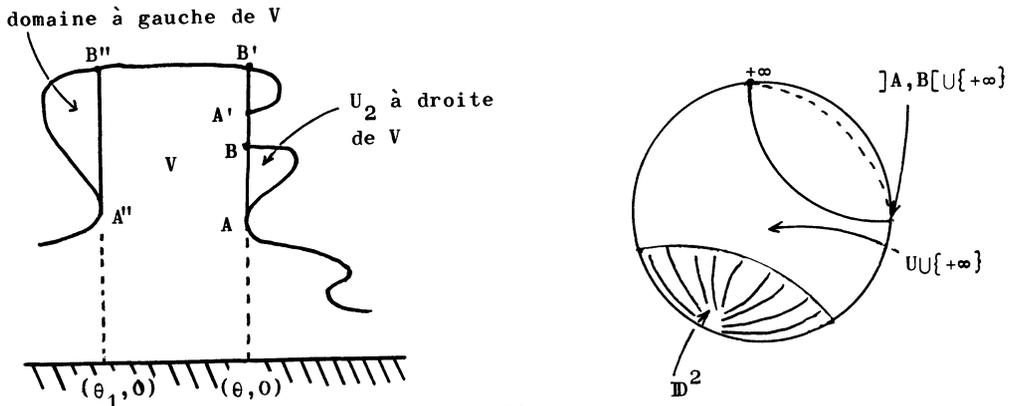
### 3.5 Domaines à droite et à gauche de $V$ .

3.5.1 Soit  $\theta \in \mathbb{T}^1$ , alors  $\varphi_-(\theta) \leq \varphi_+(\theta)$  et de plus  $\varphi_-(\theta) \in \text{Fr}(U)$  et  $\varphi_+(\theta) \in \text{Fr}(U)$ .

On suppose qu'il existe  $[A, B] \subset \{\theta\} \times [\varphi_-(\theta), \varphi_+(\theta)]$  vérifiant

$$A, B \in \text{Fr}(U) \quad \text{et} \quad ]A, B[ \cap \text{Fr}(U) = \emptyset.$$

3.5.2 Le segment  $]A, B[$  sépare alors  $U$  en deux parties  $U_1$  et  $U_2$ , avec  $U_1$  difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  et  $U_2$  difféomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . (On considère  $\mathbb{R}^2 \cong U \cup \mathbb{D}^2 \subset S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{+\infty\}$ , alors  $]A, B[ \cup \{+\infty\}$  est un cercle plongé, et il suffit alors d'appliquer le théorème de Jordan-Schönflies (cf. Neumann [1]).



Figure

On dit que  $[A, B]$  borde un domaine à gauche (resp. à droite) de  $V$  si le domaine  $U_2$  simplement connexe est à gauche (resp. à droite) de  $V$ .

3.5.3 Lemme : On se donne 2 segments  $[A, B] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$  et  $[A', B'] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$  vérifiant l'hypothèse de 3.5.1. Si  $[A, B]$  borde un domaine à droite, il en est de même de  $[A', B']$ .

Démonstration : Il faut montrer que les figures I et II ne sont pas possibles.

Il existe une suite  $\theta_1 \rightarrow \theta$  telle que  $\theta_1 \in G$  (points de continuité de  $\varphi$ ) et telle que  $\varphi_+(\theta_1) \rightarrow \varphi_+(\theta)$ . Par définition de  $V$ ,  $\{\theta_1\} \times [0, \varphi_+(\theta_1)] \subset V$  et ce segment ne peut intersecter les frontières de  $U_2$  et  $U'_2$ . Or, pour  $i$  assez grand, ceci serait nécessairement le cas si  $U_2$  et  $U'_2$  n'étaient

pas du même côté de  $V$ . ■

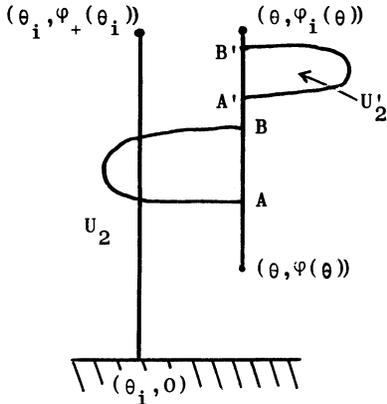


Figure I

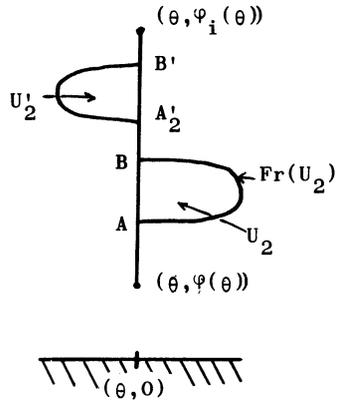


Figure II

3.5.4 Par un argument de connexité, on a les faits suivants :

. Soit un chemin dans  $U$  joignant un point de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  à un point dans un domaine à gauche de  $V$  défini par  $[A, B] \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$ , alors ce chemin intersecte  $]A, B[$ .

. Un chemin dans  $U$  joignant un point de  $V$  à un point de  $U - V$  doit intersecter un segment  $\{\theta\} \times ]\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)[$ .

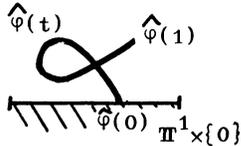
Définition : Soit  $\hat{\varphi} : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin plongé de classe  $C^1$  vérifiant  $\hat{\varphi}(0) \in \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ .

On dit que le chemin  $\hat{\varphi}$  (plongé de classe  $C^1$ ) est positif (resp. négatif) si, en choisissant une détermination algébrique<sup>♦</sup> d'angle le long de  $\hat{\varphi}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , à partir de  $\hat{\varphi}(0) \in \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ , l'angle de  $\frac{d\hat{\varphi}(t)}{dt}$  avec la verticale  $v = (0, 1)$  est toujours algébriquement strictement supérieur à 0 (resp. strictement inférieur à 0) en supposant que pour  $t = 0$  il est dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$  (resp.  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ).

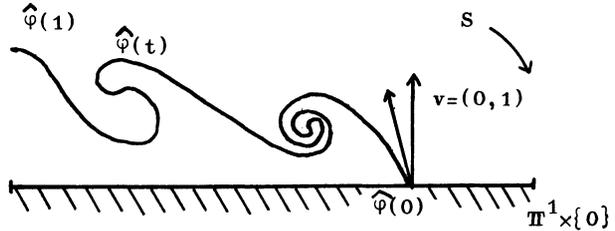
Un chemin de classe  $C^1$  plongé positif est aussi appelé un chemin qui tourne la verticale à gauche.

♦ On suppose que le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

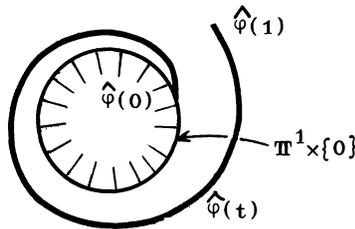
Chemin positif immergé



Chemin positif plongé



Chemin  $> 0$   
dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$



Figures

Remarques : Tout point de  $V$  est accessible par un chemin de classe  $C^1$  plongé positif (resp. négatif).

Le chemin  $\hat{\varphi} : [0,1] \rightarrow U$  doit être plongé (i.e.  $\frac{d\hat{\varphi}(t)}{dt} \neq 0$  et sans point double) et vérifier  $\hat{\varphi}(0) \in \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ .

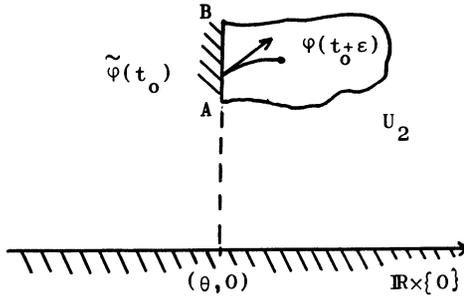
3.5.5 On se donne  $]A, B[ \subset \{\theta\} \times [\varphi(\theta), \varphi_+(\theta)]$  qui borde un domaine ouvert  $U_2$  à droite de  $V$ .

Lemme : Pour tout chemin  $\hat{\varphi}$  plongé de classe  $C^1$  positif, on a  $\hat{\varphi}(1) \notin U_2$ .

Démonstration : On se place dans le revêtement universel  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$ , et on note  $\tilde{\varphi}$  le relevé du chemin  $\hat{\varphi}$ . Soit  $t_0$  le plus petit  $t \in [0,1]$  vérifiant  $\tilde{\varphi}(t_0) \in ]A, B[$ , et il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\tilde{\varphi}(]t_0, t_0 + \varepsilon[) \in U_2$ .

On a

$$|\text{angle}(\vec{0\theta}, \frac{d\varphi(t_0)}{dt}) \bmod(2\pi)| \leq \frac{\pi}{2} .$$

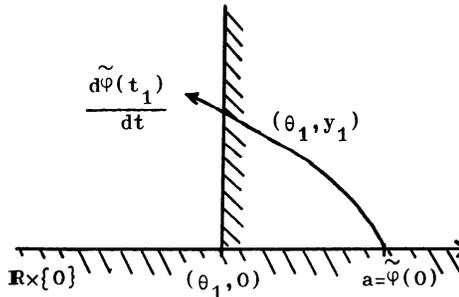


Figure

3.5.6 On a les propriétés suivantes du chemin de classe  $C^1$  plongé positif  $\tilde{\varphi}$  :

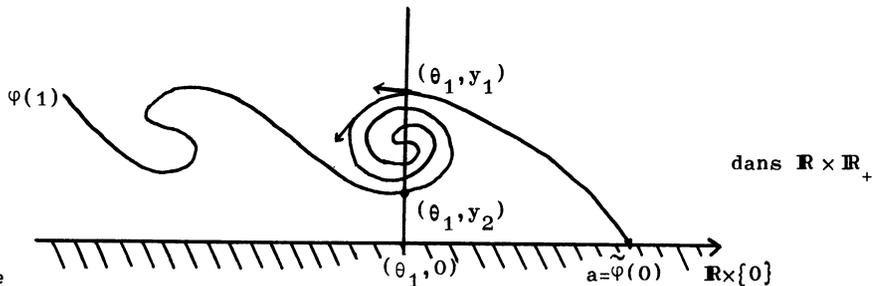
- i) si  $a = \tilde{\varphi}(0)$ , et si  $t > 0$ , alors  $p_1(\tilde{\varphi}(t)) < a$  ( $p_1(\theta, r) = \theta$ )
- ii) si  $t_1$  est le plus petit t tel que  $\tilde{\varphi}(t_1) = (\theta_1, y_1)$  intersecte  $\{\theta_1\} \times \mathbf{R}_+$ , alors on a algébriquement (en considérant une détermination à partir de  $\tilde{\varphi}(0)$ )

$$0 < \text{angle}\left(v_x, \frac{d\tilde{\varphi}(t_1)}{dt}\right) \leq \pi, \text{ où } x = \varphi(t)$$



Figure

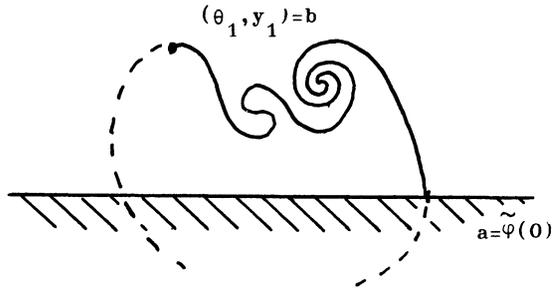
- iii) De plus, si  $t_2 > t_1$  vérifie  $\tilde{\varphi}(t_2) = (\theta_1, y_2)$ , alors  $y_2 \leq y_1$ .



Figure

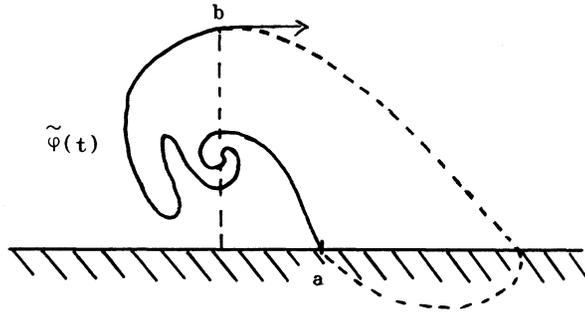
Les affirmations ii) et iii) impliquent i).

Si ii) est faux, l'angle algébrique de  $\alpha = \text{angle}(\vec{0\theta}, \frac{d\tilde{\varphi}(t_1)}{dt})$  vérifie  $\frac{\pi}{2} + k 2\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  ( $k \geq 1$ ). Si on ferme l'arc (a,b) en un cercle comme dans la figure, on contredit le fait que pour tout cercle plongé dans  $\mathbb{R}^2$  la variation algébrique de l'angle de la tangente vaut  $2\pi$ .



Figure

La démonstration de iii) est similaire (par l'absurde). ■



Figure

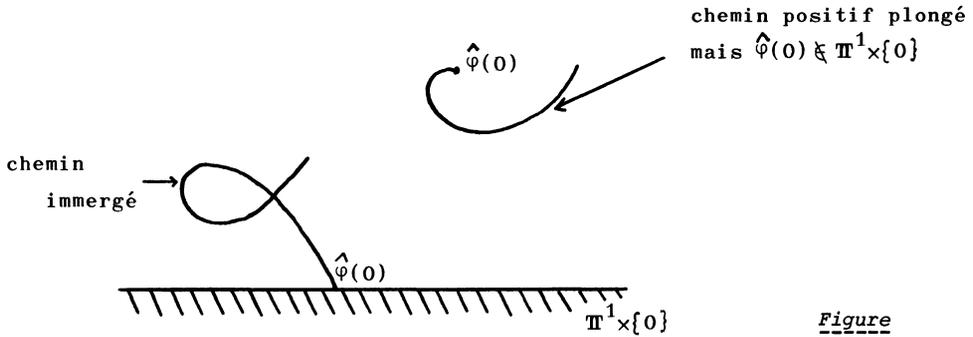
Figure impossible pour un chemin positif, car cela contredirait que la rotation de l'angle de la tangente =  $2\pi$ .

Fin de la démonstration de 3.5.5 : Si on avait  $\tilde{\varphi}(1) \in U_2$ , alors le point  $\varphi(t_0 + \epsilon)$  ( $\epsilon > 0$  petit) contredirait 3.5.6 ii) et iii) et le lemme 3.5.5 suit par l'absurde. ■

On a un lemme analogue en remplaçant  $U_2$  par un domaine à gauche de  $V$  et  $\hat{\varphi}$  par un chemin négatif.

Pour que la proposition 3.5.5 soit vraie, les figures suivantes montrent qu'on doit supposer que  $\hat{\varphi}$  est un chemin plongé de classe  $C^1$  positif et que

$$\hat{\varphi}(0) \in \mathbb{T}^1 \times \{0\}.$$



Figure

3.6 Démonstration de 3.1 : Soient :

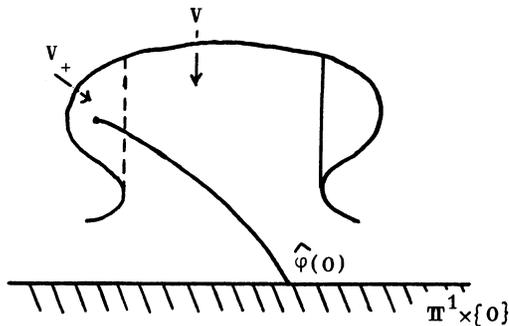
$$V_+ = \{x \in U \mid \text{il existe un chemin plongé de classe } C^1 \text{ positif } \varphi: [0,1] \rightarrow U \text{ tel que } \hat{\varphi}(1) = x\}.$$

$$V_- = \{x \in U \mid \text{il existe un chemin plongé de classe } C^1 \text{ négatif } \varphi: [0,1] \rightarrow U \text{ tel que } \hat{\varphi}(1) = x\}.$$

$V_+$  et  $V_-$  sont des ouverts de  $U$ , car si  $\hat{\varphi}_1: [0,1] \rightarrow U$  est un chemin plongé de classe  $C^1$  positif (resp. négatif) et si  $\hat{\varphi}_2: [0,1] \rightarrow U$  est un chemin de classe  $C^1$ ,  $C^1$ -voisin de  $\hat{\varphi}_1$  et vérifiant  $\hat{\varphi}_2(0) \in \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ , alors  $\hat{\varphi}_2$  est un chemin plongé positif (resp. négatif). On a  $V_+ \supset V_-$ ,  $V_- \supset V_+$ , et  $V_+ \cap V_- = V$  par 3.5.3 et 3.5.5.

Puisque  $f$  est un difféomorphisme qui dévie la verticale à gauche, on a

$$f(V_+) \subset V_+ \text{ et } f^{-1}(V_-) \subset V_-.$$



Figure

Par 3.4.3 et 3.4.4, il existe un  $G_\delta$  dense  $\Lambda_+$  (resp.  $\Lambda_-$ ) de  $V_+$  (resp.  $V_-$ ) tel que l'on ait  $f(\Lambda_+) = \Lambda_+$  (resp.  $f(\Lambda_-) = \Lambda_-$ ).

$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$  est un  $G_\delta$  dense de  $V$  et on a  $f(\Lambda) = \Lambda$ .

Le théorème de Birkhoff 3.1 suit de 3.4.5. ■

4.1 Soit  $f$  un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  qui dévie la verticale, et qui laisse invariant la forme volume  $\Omega = d\theta \wedge dr$ . Soit l'anneau

$$A_\delta = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq \delta\},$$

Proposition :  $f$  laisse invariant un cercle homotope à  $r=c$ <sup>te</sup> (n'intersectant pas  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ) si et seulement s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (f^n(A_\delta))$  soit d'adhérence compacte.

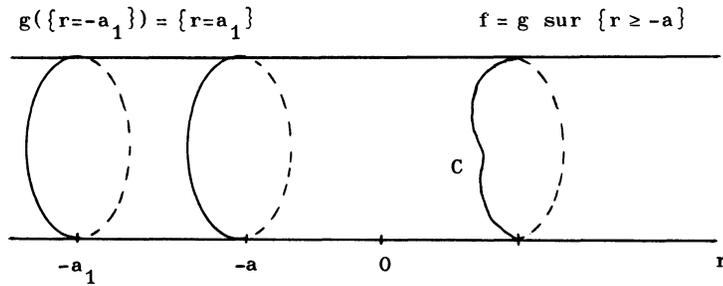
Démonstration : L'ensemble  $V$  est connexe puisque  $f^n(A_\delta)$  l'est et que  $f^{n_1}(A_\delta) \cap f^{n_2}(A_\delta) \supset \mathbb{T}^1 \times \{0\}$  pour tous entiers  $n_1$  et  $n_2$  car  $f$  laisse invariant  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ . La condition est évidemment nécessaire. Inversement, comme  $\bar{V}$  est compact et connexe, soit  $W_+$  la composante connexe de  $+\infty$  de  $(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+) - \bar{V}$ ; par la dualité d'Alexander<sup>(\*)</sup> (cf. Wall [1])  $H_1(W_+, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ,  $W_+$  est difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ ; on a de même que l'ouvert  $U_1$ , composante connexe contenant  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  de l'ouvert  $(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+) - \bar{W}_+$ , est difféomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$ , et on vérifie que  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+ \supset A_\delta$ . On a aussi  $U_1 = \text{Int}(\bar{U}_1)$  (si  $X$  est un espace topologique métrisable localement connexe si  $U \subset X$  est un ouvert, alors chaque composante connexe  $V$  de  $X - \bar{U}$  vérifie  $V = \text{Int}(\bar{V})$ ). Comme  $f(W_+) = W_+$  et  $f(U_1) = U_1$  par 3.1,  $\text{Fr}(U_1)$  est le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  et donc  $\text{Fr}(U_1)$  est un cercle invariant par  $f$  homotope à  $r=c$ <sup>te</sup> (distinct de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ). Par 2.2,  $\psi$  est une fonction lipchitzienne. ■

---

(\*) Si  $F$  est un compact connexe de la sphère  $S^2$ , alors chaque composante connexe  $U$  de  $S^2 - F$  est simplement connexe, et si  $\emptyset \neq F \neq S^2$ , par le théorème de la représentation conforme,  $U$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^2$ .

4.2 On se donne un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) homotope à l'identité préservant la forme volume  $\Omega = d\theta \wedge dr$  et qui dévie la verticale. On suppose que  $f$  vérifie les conditions (+) suivantes :

(+)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } a > 0, \text{ il existe un difféomorphisme } g \text{ de classe } C^1 \text{ préservant } \Omega \text{ et qui dévie la verticale et tel que} \\ \\ g|_{\{r \geq -a\}} = f|_{\{r \geq -a\}} \quad , \\ \\ \text{et il existe } a_1 > a \text{ tel que } g(\{r = -a_1\}) = \{r = -a_1\} \quad . \end{array} \right.$



Figure

Alors, si  $f$  laisse un cercle  $C$  invariant homotope à  $r = c^{te}$ ,  $C$  est le graphe d'une fonction  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  qui est lipchitzienne. (Utiliser 2.2 et 3.1.)

Si l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\{|r| \leq \delta\})$  ( $\delta > 0$ ) est d'adhérence compacte, alors  $f$  a un cercle invariant qui est le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  (par le même raisonnement qu'en 4.1).

4.3 Exemple : Soit  $f_\varphi = h \circ t$  avec  $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$  et  $h(\theta) = (\theta, r + \varphi(\theta))$  où  $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^1)$  et vérifiant  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ .

Proposition : Si  $k \geq 1$ , alors  $f_\varphi$  vérifie les conditions (+) de 4.2.

**Démonstration** : (En s'inspirant de Mather [2].) Soit

$\psi(\theta) = \int_0^\theta \varphi(t) dt \in C^{k+1}(\mathbb{T}^1)$ . On se place dans le revêtement universel  $\mathbb{R}^2$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ . On écrit  $\tilde{f}_\varphi(\theta, r) = (\Theta, R)$ . On choisit pour nouvelles coordonnées  $(\theta, v)$  où  $v = \Theta - \theta$ ,  $\Theta = \theta + r$ ,  $r + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\Theta) = R$ . La 1-forme  $Rd - rd\theta = Rdv + (R-r)d\theta$  est exacte (i.e.  $\frac{v^2}{2} + \psi(\theta+v)$  est une fonction génératrice de  $f_\varphi$ ).

Soient  $\eta \geq 0$  et  $x \geq 0$  des fonctions appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant :

$\eta(v) = 1$ , si  $v \geq -2$ ,  $\eta(v) = 0$ , si  $v \leq -3$  ;  $x(v) = 0$ , si  $v \geq -1$ ,  $\frac{d^2}{dv^2} x(v) \geq 0$  pour tout  $v$ , et  $\frac{d^2}{dv^2} x(v) = c$ , si  $v \leq -2$ , où  $c > \text{Sup}_{\theta, v} \left| \frac{d}{dv} \left( \frac{d\eta}{dv}(v) \cdot \psi(\theta+v) \right) \right|$ .

Soit  $g$  l'application de fonction génératrice  $\ell(\theta, v) = \frac{v^2}{2} + \eta(v) \cdot \psi(\theta+v)$ . On a, si  $g(\theta, r) = (\tilde{\Theta}, \tilde{R})$ ,  $v = \tilde{\Theta} - \theta$ ,

$$\tilde{R}(\theta, v) = \frac{\partial}{\partial v} \ell(\theta, v) \quad , \quad \tilde{r}(\theta, v) = \left( \frac{\partial \ell}{\partial v} - \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)(\theta, v) = v + \frac{dx}{dv}(v) + \frac{d\eta}{dv}(v) \cdot \psi(\theta+v) .$$

Pour tout  $\theta$  et  $v$ , on a

$$\textcircled{1} \quad \frac{d\tilde{r}}{dv}(v) > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{r}(\theta, v) = \begin{cases} v & , \quad \text{si } v \geq 0 \\ (1+c)v & , \quad \text{si } v \leq -3 \end{cases} .$$

Ceci détermine une application de classe  $C^k$ ,  $g = (g_1, g_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même vérifiant

$$g(\theta + 1, r) = (g_1(\theta, r) + 1, g_2(\theta, r))$$

puisque par  $\textcircled{1}$  on peut résoudre  $v$  en fonction de  $\theta$  et de  $r$ . L'application  $g$  induit donc une application de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  dans lui-même homotope à l'identité.

L'application  $g$  préserve la forme-volume  $d\theta \wedge dr$  puisque la 1-forme  $Rdv - rd\theta$  est fermée. L'application  $g$  est bien un difféomorphisme puisque

$H(\theta, r) = (\theta, g_1(\theta, r) - \theta)$  l'est par  $\textcircled{1}$  et  $g \circ H(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta, r))$  vérifie  $\det D(g \circ H) = 1 + \frac{\partial}{\partial r} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} > 0$ . Il en résulte que l'application

$g \circ H \circ t^{-1}(\theta, r) = (\theta, r + \varphi(\theta - r, r))$  est un difféomorphisme (car

$1 + \frac{\partial}{\partial r}(\varphi(\theta - r, r)) > 0$  et c'est le cas si  $|r|$  est assez grand) et donc finalement  $g$ . Par  $\textcircled{1}$ , le difféomorphisme  $g$  dévie la verticale. On a, si  $v \geq -1$

(i.e. si  $r \geq -1$ ),  $g(\theta, r) = f_\varphi(\theta, r)$  et, si  $v \leq -3$  (i.e. si  $r \leq -3(1+c)$ ),  
 $g(\theta, r) = (\theta + \frac{r}{1+c}, r)$ . On se ramène au cas où  $a > 0$  est arbitraire en remarquant  
 que  $f_\varphi \circ L_p = L_p \circ f_\varphi$ , si  $p \in \mathbb{Z}$  avec  $L_p(\theta, r) = (\theta, r+p)$ . ■

Remarque : Dans la proposition nous avons utilisé le formalisme des fonctions génératrices (voir par exemple Arnold et Avez [1, Annexe 33], et aussi Zehnder [1]). Le même raisonnement montre que la propriété (+) est vérifiée par un difféomorphisme  $f$  qui est homotope à l'identité, qui préserve la forme-volume  $\Omega$ , qui est globalement canonique (i.e.  $f^*w - w = dS$ , où  $w = rd\theta$ ) et qui est  $C^1$ -uniformément voisin du difféomorphisme  $t$  (ou plus généralement d'un difféomorphisme complètement intégrable qui dévie la verticale).

4.4 Soit  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ , où  $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^1)$ ,  $k \geq 1$ , avec

$$\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0, \text{ alors}$$

f a un cercle invariant homotope à  $r = c^{te}$  si et seulement si

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\theta, r} |f_2^n(\theta, r) - r| < +\infty, \text{ où } f^n(\theta, r) = (f_1^n(\theta, r), f_2^n(\theta, r)).$$

(Cela résulte de 4.2 et 4.3 et du fait que, si  $C$  est une courbe invariante par  $f$ , alors il en est de même de  $L_p(C)$  si  $p \in \mathbb{Z}$ , avec  $L_p(\theta, r) = (\theta, r+p)$ ). On a même mieux : il existe  $k > 0$  ne dépendant que de  $\|\varphi\|_{C^1}$  tel que  $f$  ait un cercle invariant homotope à  $r = c^{te}$  si et seulement si  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\theta, r} |f_2^n(\theta, r) - r| \leq k$  (cela ne résulte que de 2.2 et du fait que  $f$  a la propriété d'intersection, cf. chap. II, 1.2).

## 5. CONSEQUENCES.

Pour simplifier nous nous limiterons à la variété  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$  mais les résultats se généralisent très simplement à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}_+$  et aussi à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  si on considère les difféomorphismes globalement canoniques (cf. 4.3).

On désigne par  $\text{Diff}_\Omega^k(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$  le groupe des difféomorphismes de classe  $C^k$  de  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$  qui préserve la forme volume  $\Omega = d\theta \wedge dr$ .

5.1 On se donne un  $g_0 \in \text{Diff}_\Omega^k(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$  qui dévie la verticale à droite. Soit  $V^k$  un voisinage ouvert de  $g_0$  dans  $\text{Diff}_\Omega^k(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$  ( $V^k$  est induit par la  $C^1$ -topologie) tel qu'il existe  $\eta_1 > 0$  et  $K > 0$  tels que pour tout  $g \in V^k$  on ait

- le nombre  $\eta$  de 1.5 vérifie  $\eta < \eta_1$  ;
- les rapports de Lipschitz de  $g$  et  $g^{-1}$  sur  $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$  sont  $< K$

(on munit  $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$  de la métrique de 2.3).

5.2 Il suit de 3.1, 2.2 et 2.3 que si  $g \in V^k$  possède un cercle invariant  $C$  homotope à  $r = c^{te}$  alors  $C$  est le graphe de  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$  et on a  $g(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta)))$  avec  $h \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$  et de plus

$$\text{Max}(\text{Lip}(\psi), \text{Lip}(h), \text{Lip}(h^{-1})) < K_1$$

où  $K_1 = \text{Max}(2\eta, 2\eta K)$ .

5.3 Si  $\tilde{g}$  est un relèvement de  $g \in V^k$  à  $\tilde{\mathbb{T}}^1 \times [0,1] = \mathbb{R} \times [0,1]$ ,  $\tilde{g}|_{\tilde{C}} = \tilde{h} \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , et  $\tilde{C}$  est le graphe de  $\tilde{\psi} = \psi \circ p$  où  $p: \tilde{\mathbb{T}}^1 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{T}^1 \times [0,1]$  est la projection.

On a, par 2.4,

$$\rho(\tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{0\}}) \leq \rho(\tilde{h}) \leq \rho(\tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{1\}}) .$$

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ ), et  $0 \leq r \leq +\infty$ , on désigne par  $F_\alpha^r = \{f \in D^r(\mathbb{T}^1) | \rho(f) = \alpha\}$  (resp.  $F_\alpha^r = \{f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1) | \rho(f) = \alpha\}$ ). Les ensembles  $F_\alpha^r$  sont fermés pour la  $C^r$ -topologie, la fonction  $\rho$  étant continue pour la  $C^0$ -topologie (cf. Herman [1, II]).

5.4 Soit  $J$  un ensemble fermé non vide de  $\mathbb{T}^1$  et  $G_J^k = \{f \in V^k | \text{pour tout } \beta \in J \text{ il existe un cercle } C \text{ homotope à } r = c^{te} \text{ (dépendant de } \beta \text{ et de } f) \text{ invariant par } f \text{ et vérifiant } \rho(f|_C) = \beta\}$ .

Proposition :  $G_J^k$  est un fermé de  $V^k$  ( $G_J^k$  est même fermé pour la topologie  $C^0$  induite sur  $V^k$ ).

Démonstration : Soit  $(f_i)$  une suite de  $V^k$ ,  $f_i \rightarrow f \in V^k$ , dans la  $C^0$ -topologie où  $f$  est de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ).

Soit  $(\psi_i, h_i) \in C^0(\mathbb{T}^1) \times \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ ,  $\rho(h_i) \in J$  définissant le cercle  $C_i$  invariant par  $f_i$ . Par le théorème d'Ascoli et l'inégalité 5.2 (et le fait que  $0 \leq \psi_i \leq 1$ ), pour une sous-suite d'entiers (que l'on note encore  $i \in \mathbb{N}$ ), on a, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $\psi_i \rightarrow \psi$ ,  $h_i \rightarrow h$ ,  $h_i^{-1} \rightarrow g$ , dans la  $C^0$ -topologie ; on a  $g = h^{-1}$  (puisque  $h_i \circ h_i^{-1} = h_i^{-1} \circ h_i = \text{Id}$ ),  $\rho(h) \in J$ , ainsi que  $f(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta)))$  (puisque  $f_i(\theta, \psi_i(\theta)) = (h_i(\theta), \psi_i(h_i(\theta)))$ ). ■

5.5 Pour  $f \in V^k$ , on désigne par  $C_f$  l'ensemble des cercles invariants par  $f$  :

$C_f = \{(\psi, h) \in C^0(\mathbb{T}^1) \times \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1) \mid f(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta)))\}$ , et on met sur  $C_f$  la  $C^0$ -topologie.

Proposition : L'ensemble  $C_f$  est compact.

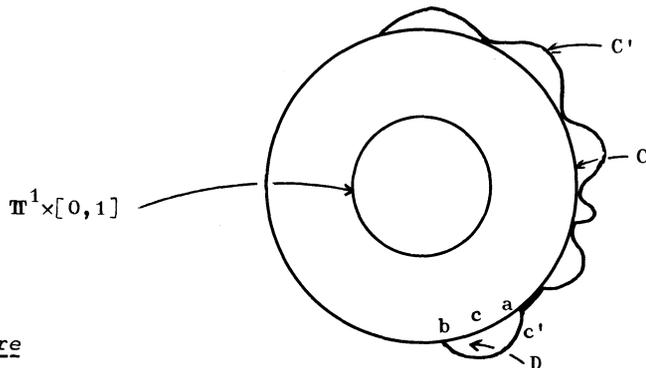
Démonstration : En utilisant 5.2, on vérifie que  $C_f$  est fermé pour la  $C^0$ -topologie dans  $C^0(\mathbb{T}^1) \times C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$ , équicontinu (et borné puisque  $0 \leq \psi \leq 1$ ) et le résultat suit du théorème d'Ascoli. ■

5.6 On note  $\rho(C_f) \subset \mathbb{T}^1$  l'image de l'application  $(\psi, h) \in C_f \rightarrow \rho(h) \in \mathbb{T}^1$ .  $\rho(C_f)$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{T}^1$ .

5.7.1 Proposition : Si  $f \in V^k$ , alors  $\tilde{f}$  a au plus une courbe  $\tilde{C}$  invariante dans  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  qui est le graphe de  $\tilde{\psi}$  tel que  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}}) = \alpha \in \mathbb{Q}$ .

Démonstration : Par l'absurde, on suppose qu'il existe deux courbes  $\tilde{C}$  et  $\tilde{C}'$ , graphes de  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\psi}'$ , telles que  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}}) = \rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}'})$ .

Par 2.4, on a nécessairement  $\tilde{C} \cap \tilde{C}' \neq \emptyset$ , et donc  $C \cap C' \neq \emptyset$ , où  $C = p(\tilde{C})$ ,  $C' = p(\tilde{C}')$ . On peut donc trouver deux arcs,  $(acb) \subset C$ ,  $(ac'b) \subset C'$ ,  $(acb) \cap (ac'b) = \{a, b\}$  et le cercle  $(acb) \cup (ac'b)$  borde un disque  $D$ . Puisque



Figure

$f$  est récurrent, il existe  $n \geq 1$  tel que  $f^n(\text{Int}(D)) \cap \text{Int}(D) \neq \emptyset$  et, puisque  $f(C) = C$  et  $f(C') = C'$ , on a  $f^n((acb)) = (acb)$ . Il suit donc que  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}}) = \rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}'}) \in \mathbb{Q}$ . Par l'absurde,  $\tilde{C}$  est unique. ■

5.7.2 Remarque : Soit  $f$  un difféomorphisme comme en 5.7.1. Si  $f$  laisse invariant deux cercles  $C$  et  $C'$  homotopes à  $r = c^{te}$  et vérifiant  $C \cap C' \neq \emptyset$ , alors  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}}) = \rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}'}) \in \mathbb{Q}$ .

5.7.3 On suppose que le difféomorphisme  $g_0$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) qui dévie la verticale est tel que, si  $\tilde{g}_0$  est un relevé de  $g_0$  à  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  alors  $|\rho(\tilde{g}_0|_{\mathbb{R} \times \{0\}}) - \rho(\tilde{g}_0|_{\mathbb{R} \times \{1\}})| < 1$ .

On suppose que le voisinage  $V^k$  de  $g_0$  est assez petit pour que cette propriété soit encore vraie pour  $g \in V^k$ . Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  et  $g \in V^k$ , il existe au plus un cercle invariant  $(\psi, h) \in C^0(\mathbb{T}^1) \times F_\alpha^0$  par  $g$  (i.e.  $g(\theta, \psi(\theta)) = (h(\theta), \psi(h(\theta)))$ ,  $\rho(h) = \alpha$ ).

Proposition : L'application  $g \in G_\alpha^k \rightarrow (\psi, h) \in C^0(\mathbb{T}^1) \times F_\alpha^0$  est continue si on munit ces espaces de la  $C^0$ -topologie.

Nous laissons la démonstration en exercice, puisque cela suit très simplement par un argument de compacité.

5.8.1 Proposition : On se donne  $1 \leq k \leq +\infty$ . Alors il existe un  $G_\delta$  dense  $G^k$  de  $V^k$  pour la  $C^k$ -topologie, tel que, si  $f \in G^k$ , il n'existe pas de cercle  $C$  invariant par  $f$  homotope à  $r = c^{te}$ ,  $C \neq \mathbb{T}^1 \times \{0\}$  ou  $C \neq \mathbb{T}^1 \times \{1\}$  tel que  $\rho(f|_C) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

Remarque : La propriété suivante est vraie sur un ouvert dense de  $V^\infty$ , si  $f_i = f|_{\mathbb{T}^1 \times \{i\}}$  pour  $i = 0, 1$ , alors  $f_0$  et  $f_1$  sont des difféomorphismes structurellement stables et donc vérifient  $\rho(f_0), \rho(f_1) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . (En effet, l'application  $f \in \text{Diff}_\Omega^\infty(\mathbb{T}^1 \times [0, 1]) \rightarrow (f_0, f_1) \in (\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1))^2$  est continue ouverte et surjective.)

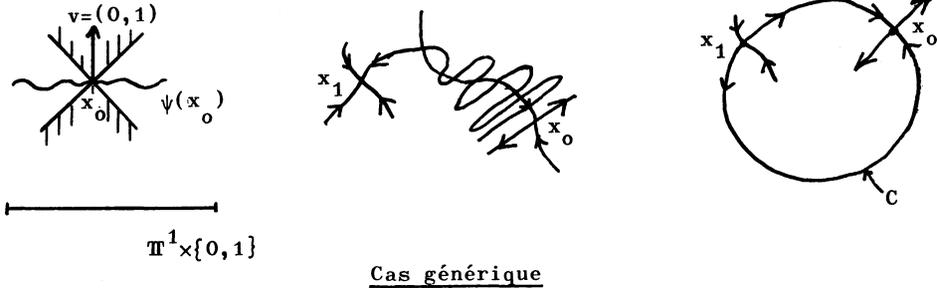
Démonstration de 5.8.1 : Par Robinson [1], les propriétés suivantes sont vraies sur un  $G_\delta$  dense de  $V^k$  :

a) Tout point périodique a un spectre générique : si  $x \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$  est un point périodique de  $f \in V^k$ ,  $f^q(x) = x$  alors le spectre de la matrice  $Df^q(x) \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  est générique (i.e.  $-1, 1 \notin \text{Spectre}(Df^q(x))$ ) et si  $e^{2\pi i \alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est une valeur propre de  $Df^q(x_0)$  alors  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

b) Tout point périodique hyperbolique  $x \in \mathbb{T}^1 \times ]0, 1[$  est tel que les variétés stable et instable s'intersectent transversalement.

Soit  $C$  un cercle invariant par  $f$  et tel que  $\rho(f|_C) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $f|_C$  a un point  $x_0$  périodique. Si a) est vérifié,  $x_0$  est un point périodique hyperbolique de  $f$ . En effet,  $C$  est le graphe de  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ ,  $C$  est donc contenu dans un cône passant par  $x_0$ , il suit que  $Df^q(x_0)$  n'est pas conjugué dans

$SL(2, \mathbb{R})$  à une rotation irrationnelle.  $C$  est nécessairement une réunion de variétés stables et instables de points périodiques hyperboliques de  $f$ .

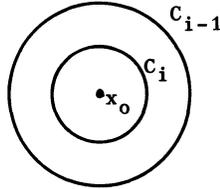


Figure

Si on suppose la propriété b) le cercle  $C$  ne peut pas exister (si  $C \neq \mathbb{T}^1 \times \{i\}$ ,  $i = 0,1$ ). ■

Remarque : La propriété suivante est vraie sur un  $G_0$  dense de  $\text{Diff}_\Omega^\infty(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$  pour la  $C^\infty$ -topologie :  $f$  ne laisse pas invariant un cercle  $C$  (distinct de  $\mathbb{T}^1 \times \{i\}$ ,  $i = 0,1$ ) tel que  $\rho(f|_C) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . (On ne suppose pas ici que  $C$  est homotope à  $r = c^{te}$ .)

La démonstration est presque identique à celle de 5.8.1, à cette différence qu'on suppose en plus que les points périodiques elliptiques ont leur 1er invariant de Birkhoff non nul (i.e.  $f^q(x_0)$  s'écrit en coordonnées polaires  $(\theta, r) \rightarrow (\theta + \alpha + a_1 r^2 + o(r^4), r + o(r^4))$ ,  $a_1 \neq 0$  et  $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ). Il suit alors du théorème de J. Moser [1] que  $f^q$  laisse invariant chaque cercle  $C_i$  d'une suite de cercle  $(C_i)$  de classe  $C^\infty$ ,  $C_i \rightarrow x_0$  et vérifiant  $\rho(f^q|_{C_i}) \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Ceci implique qu'il n'existe pas de courbe plongée passant par  $x_0$  et invariante par  $f$ . La démonstration de la remarque est alors identique à celle de 5.8.1.



Figure

Il est à remarquer que le 1er invariant de Birkhoff dépend des trois premières dérivées de  $f^q$  en  $x_0$ . Pour une discussion plus complète, le lecteur peut consulter J. Mather [1].

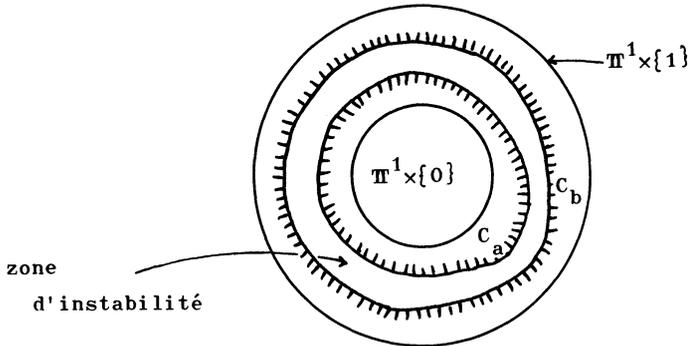
5.8.2 Soit  $f \in G^k$ , alors l'ensemble compact  $\rho(C_f)$  est contenu dans  $\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Il suit que si l'on considère  $\tilde{f}$ , alors il existe  $a < b$ ,  $\psi_a$  et  $\psi_b \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , des courbes invariantes  $\tilde{C}_a, \tilde{C}_b$  graphes de  $\psi_a$  et  $\psi_b$  tels que  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}_a}) = a$ ,  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}_b}) = b$ , mais il n'existe pas de courbe invariante  $\tilde{C}$  qui soit un graphe et vérifiant  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}}) \in ]a, b[$ .

5.8.3 Soit  $(f_i)$  une suite de  $\text{Diff}_\Omega^\infty(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$  telle que, si  $i \rightarrow +\infty$ , alors  $f_i \rightarrow t$  dans la  $C^\infty$ -topologie où  $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$ .

Il suit du théorème de J. Moser [1] que, si  $i$  est assez grand,  $\rho(C_{f_i})$  contient un ensemble de Cantor de nombres satisfaisant à une condition diophantienne.

### 5.9 Zones d'instabilités.

5.9.1 Si on suppose que la suite  $(f_i)$  de 5.8.3 vérifie 5.8.1 pour tout  $i$ ,  $f_i \in G^\infty \subset V^\infty$ , il suit de 5.8 qu'il existe  $g \in V^\infty$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ ,  $a$  et  $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , il existe des courbes invariantes de  $g$   $C_a, C_b$ , graphes de fonctions lipschitziennes, telles que l'on ait  $\rho(\tilde{g}|_{\tilde{C}_a}) = a$ ,  $\rho(\tilde{g}|_{\tilde{C}_b}) = b$ , mais il n'existe pas de cercle  $C$  invariant par  $g$  (homotope à  $r = c^{te}$ ) tel que  $\rho(\tilde{g}|_{\tilde{C}}) \in ]a, b[$ . Par 2.4, on a  $C_a \cap C_b = \emptyset$ .



Figure

L'anneau déterminé par  $C_a$  et  $C_b$  est appelé un domaine d'instabilité pour  $g$ .

**5.9.2 Proposition :** On se donne un domaine d'instabilité de  $g \in V^k$  ( $k \geq 1$ ) bordé par  $C_a$  et  $C_b$ . Soit  $W$  un voisinage ouvert connexe de  $C_a$  et

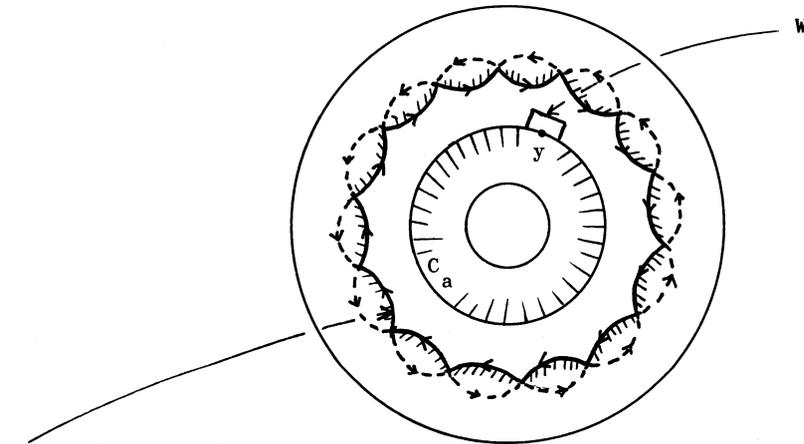
$H = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(W)$ . On a l'inclusion  $C_b \cap \bar{H} \neq \emptyset$ .

**Démonstration :** Si  $C_b \cap \bar{H} \neq \emptyset$ , soit  $U$  la composante connexe de  $(\mathbb{T}^1 \times [0, 1]) - H$  contenant  $C_b$ . Par le même raisonnement qu'en 4.1, on peut appliquer le théorème de Birkhoff 3.1 (et 2.2), et donc  $C = \text{Fr}(U)$  serait le graphe d'une fonction de  $\text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ , mais  $C$  est contenu dans le domaine d'instabilité et donc  $C = C_b$  (puisque  $\rho(\tilde{g}|_{\tilde{C}}) = b$  avec  $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , on peut appliquer 2.4 et 5.7.1). Il suit que  $\bar{H} \cap C_b = \emptyset$  est absurde. ■

**5.9.3 Remarques :** 1) On peut remplacer dans 5.9.2 "W est un voisinage ouvert connexe de  $C_a$ " par "W est un voisinage ouvert et connexe d'un point  $y \in C_a$ ,  $y \in W$ ". En effet, soit  $H_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(W \cup C_a)$ ,  $H_1$  est connexe et donc aussi  $\bar{H}_1$ . Si  $\bar{H}_1 \cap C_b = \emptyset$ , alors par le même raisonnement qu'en 4.1, la composante connexe contenant  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  de l'ouvert  $(\mathbb{T}^1 \times [0, 1]) - \bar{V}$ , où  $V$  est la composante connexe contenant  $C_b$  de l'ouvert  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] - \bar{H}_1$ , vérifie les hypothèses de 3.1. Par le même raisonnement qu'en 5.9.2 ceci est absurde.

2) Si  $C_b \cap (\mathbb{T}^1 \times \{1\}) = \emptyset$  alors dans 5.9.2, on a l'inclusion  $C_b \subset \bar{H}$ .

5.9.4 En utilisant 2.4.4, on n'a pas besoin dans 5.9.2 et 5.9.3 de supposer que  $a$  et  $b \in \mathbb{Q}$ . Si l'on choisit les courbes invariantes par  $g, C_a$  et  $C_b$ , pour que, si  $C$  est une courbe invariante par  $g$ , homotope à  $r = c^{te}$ , contenue dans le domaine d'instabilité bordé par  $C_a$  et  $C_b$ , alors  $\rho(\tilde{g}|_C) = a$  (resp.  $b$ ) implique que  $C = C_a$  (resp.  $C_b$ ).



$C_b$ , si  $b \in \mathbb{Q}$ , s'il y a des connexions homocliniques on doit choisir  $C_b$  de façon appropriée.

Figure

\* \* \*

BIBLIOGRAPHIE

R. ABRAHAM, J. ROBBIN

- [1] Transversal mappings and flows, W.A. Benjamin, New York, 1967.

V.I. ARNOLD, A. AVEZ

- [1] Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier Villars, Paris, 1967.

G.B. BIRKHOFF

- [1] = B[1] Surface transformations and their dynamical applications, Acta Mathematicae 43 (1920) § 44-47 = Collected Mathematical Papers of G.D. Birkhoff, vol. II, p. 195-202, Dover, New York (1968) .
- [2] Sur quelques courbes fermées remarquables, Bull. S.M.F. 60 (1932), Collected Math. Papers, vol. II, p. 418-443.
- [3] Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique, Ann. I.H.P. 2 (1932), Collected Math. Papers, vol. II, p. 444-461.
- [4] Note sur la stabilité, J. Math. 15 (1936), Collected Math. Papers, vol. II, p. 662-667.

N. BOURBAKI

- [1] Topologie générale, Chap. IV, Nombres réels, Hermann, Paris, 1961, 3ème édition.

R. DOUADY

Equivalence des théorèmes des tores invariants pour les difféomorphismes et les champs de vecteurs, Chap. I, Thèse de 3ème cycle, Paris VII 1982, voir.C.R. Acad. Sc. Paris 295 (1982), 201-204.

M.R. HERMAN

- [1] Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Pub. I.H.E.S. 49 (1979), 5-233 .
- [2] Démonstration du théorème des courbes invariantes pour les difféomorphismes de l'anneau (Manuscrit 1980), voir aussi "Théorèmes des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet et quelques applications aux systèmes dynamiques", cours à l'E.N.S. en préparation.
- [III] Contre-exemples de Denjoy et contre-exemples de classe  $C^{3-\varepsilon}$  au théorème

## THÉORIE DE BIRKHOFF

des courbes invariantes ayant un nombre de rotation fixé (Chap. III).

- [IV] Démonstration du théorème des courbes translitées de nombre de rotation de type constant (Chapitre IV).

### E.M. Mac MILLAN

- [1] A problem in the stability of periodic systems, in "Topics in Modern Physics, A tribute to Edward U. Condon", Ed. by W.R. Brillin and H. Odabasi, Colorado Associated Univ. Press, Boulder (1971), p. 219-244.

### J. MATHER

- [1] Invariant subset for area preserving homeomorphisms of surfaces, in "Mathematical Analysis and Applications", edited by L. Nachbin, Part B, Academic Press, New York, 1981.
- [2] Non-uniqueness of solutions of Percival's Euler-Lagrange equation, Comm. Math. Phys. 86 (1982), 465-473.

### J. MOSER

- [1] On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II, (1962), 1-20.
- [2] On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations, Proc. Int. Conf. on "Functional Analysis and Related Topics", Tokyo, (1969), 60-67.

### M.H.A. NEWMAN

- [1] Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge Univ. Press, Londres, 1939.

### J. PÖSCHEL

- [1] Über invariante tori in differenzierbaren Hamiltonschen systemen, Bonner Math. Schriften No 102, Bonn, 1980.

### R.C. ROBINSON

- [1] Generic properties of conservative systems, Amer. J. Math. 92 (1970), 562-603.

### W. RUDIN

- [1] Real and complex analysis, MacGraw Hill, New York, 1966.

H. RÜSSMANN

- [1] On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus, preprint, Mainz Univ. (1982).

F. TAKENS

- [1] A  $C^1$ -counterexample to Moser's twist theorem, Indag. Math. 33 (1971) 379-386.

C.T.C. WALL

- [1] A geometric introduction to topology, Addison-Wesley, 1972.

E. ZEHNDER

- [1] Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphism, Lecture Notes in Maths. No 597, Springer Verlag, 1977, 855-866.

---

A P P E N D I C E

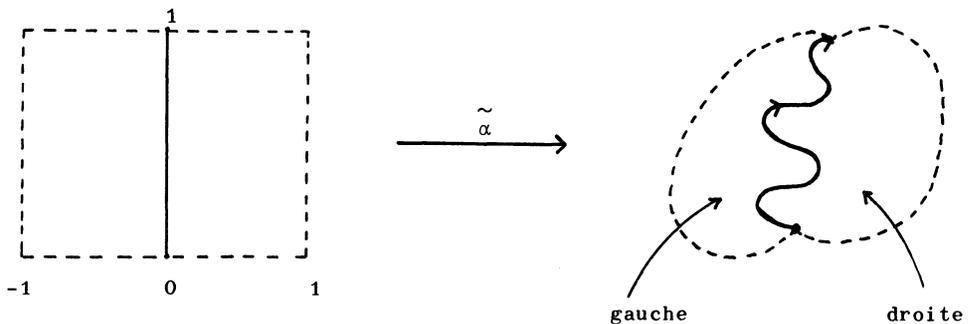
UNE INTERPRÉTATION PLUS TOPOLOGIQUE  
DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BIRKHOFF

par A. FATHI

§ 1. Quelques rappels de topologie.

Notion de gauche et de droite.

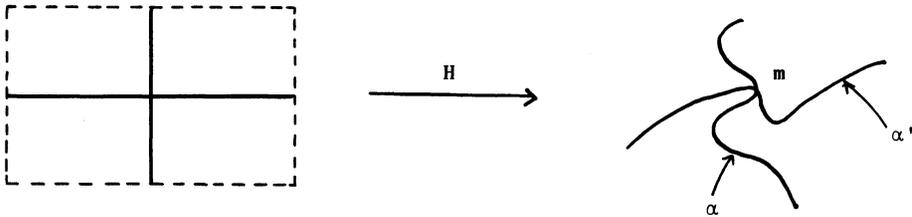
Si  $M$  est une variété orientée de dimension 2 et  $\alpha$  un arc orienté dans  $M$ , i.e. un plongement  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , on peut définir la droite et la gauche de  $\alpha$  dans un voisinage de  $\alpha(]0, 1[)$ . Une des façons de le faire est, à l'aide du théorème de Schoenflies, de prolonger  $\alpha|_{]0, 1[}$  en un plongement ouvert  $\tilde{\alpha} : ]-1, 1[ \times ]0, 1[ \rightarrow M$  tel que  $\tilde{\alpha}(\{0\} \times ]0, 1[) = \alpha|_{]0, 1[}$ . Si  $\tilde{\alpha}$  préserve l'orientation, la région  $\tilde{\alpha}(]0, 1[ \times ]0, 1[)$  est dite à droite de  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}(]-1, 0[ \times ]0, 1[)$  est dite à gauche de  $\alpha$ . Il est facile de voir que si  $\tilde{\alpha}'$  est un autre prolongement de  $\alpha$ , les notions de droite et de gauche définies par  $\tilde{\alpha}'$  coïncident avec celles définies par  $\alpha$ .



Si  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  est un plongement d'image fermée qui disconnecte  $M$ , on sait que  $M - \alpha$  a deux composantes connexes ; on peut les distinguer par le fait que l'une est à droite de  $\alpha$  et l'autre à gauche.

Notion de transversalité.

Soient  $\alpha : [0,1] \rightarrow M$  et  $\alpha' : [0,1] \rightarrow M$  deux arcs plongés. Supposons que  $t, t' \in ]0,1[$  vérifient  $m = \alpha(t) = \alpha'(t')$ , nous dirons que  $m$  est un point d'intersection transverse, si on peut trouver pour  $\varepsilon$  assez petit un homéomorphisme  $H$  de  $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[ \times ]t'-\varepsilon, t'+\varepsilon[$  sur un voisinage de  $m$  dans  $M$ , tel que  $H[ ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[ \times \{t'\} = \alpha ] ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$  et  $H[\{t\} \times ]t'-\varepsilon, t'+\varepsilon[ = \alpha' ] ]t'-\varepsilon, t'+\varepsilon[$ .



On peut voir, à l'aide du théorème de Schoenflies, qu'il est équivalent de dire que pour  $\varepsilon$  assez petit  $\alpha'([t'-\varepsilon, t'+\varepsilon]) \cap \alpha([0,1]) = m$  et que l'un des deux ensembles  $\alpha'([t'-\varepsilon, t'])$ ,  $\alpha'([t', t'+\varepsilon])$  est situé à droite de  $\alpha$  et l'autre à gauche.

Nous dirons que  $\alpha'$  traverse  $\alpha$  de gauche (resp. droite) à droite (resp. gauche), si c'est  $\alpha'([t'-\varepsilon, t'])$  qui est situé à gauche (resp. droite) de  $\alpha$ .

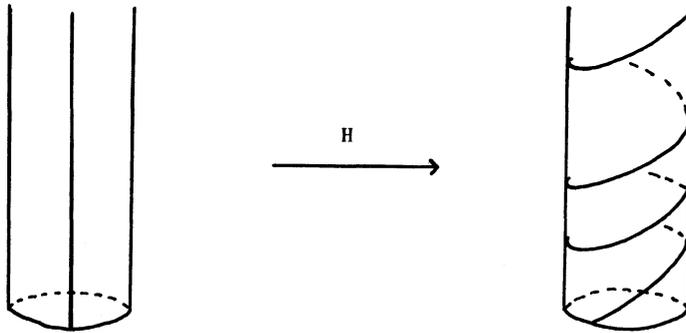
Les arcs  $\alpha$  et  $\alpha'$  seront dits transverses si tous leurs points d'intersection sont transverses, ceci recouvre aussi le cas où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont disjoints.

§ 2. Homéomorphismes déviant les verticales et théorème de Birkhoff.

Considérons un homéomorphisme  $H$  de l'anneau  $A = \mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$  sur lui-même. Nous dirons que  $H$  dévie les verticales, si pour tout  $\theta, \theta'$  dans  $\mathbb{T}^1$ , l'arc

$H(\{\theta\} \times [0, \infty[)$  est transverse à  $\{\theta'\} \times [0, \infty[$ , i.e. si l'image de toute verticale est transverse aux verticales.

Munissons  $A$  de son orientation naturelle, et orientons une verticale  $\{\theta\} \times [0, \infty[$  par l'orientation naturelle de  $[0, \infty[$ . On peut voir que l'image par  $H$  d'une verticale traverse toutes les verticales qu'elle coupe dans le même sens. On dit que  $H$  dévie les verticales à droite (resp. gauche) si l'image d'une verticale par  $H$  traverse une verticale de gauche à droite (resp. droite à gauche).



$H$  dévie la verticale à droite.

Remarques : 1) Si  $H$  conserve l'orientation et dévie les verticales à droite, alors  $H^{-1}$  dévie les verticales à gauche.

2) L'homéomorphisme  $H$  dévie les verticales si l'image d'une verticale est localement le graphe d'une application de  $\mathbb{T}^1$  dans  $[0, \infty[$ .

3) La définition donnée ici de dévier les verticales est plus large que celle donnée dans le chapitre I.

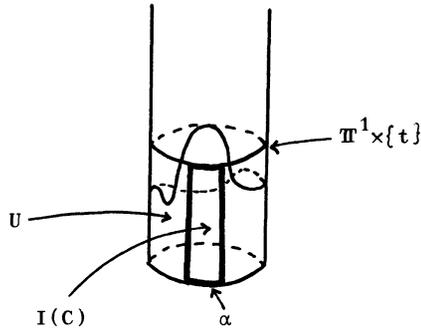
Théorème de Birkhoff : Soit  $H$  un homéomorphisme de  $A$  conservant l'orientation et déviant les verticales. Supposons que  $U$  soit un ouvert relativement compact de  $A$  et homéomorphe à  $A = \mathbb{T}^1 \times [0, \infty[$ . Si  $U$  est invariant par  $H$  (i.e.  $H(U) = U$ ) et est contenu dans l'ensemble non-errant de  $H$ , alors la frontière de  $U$  est le graphe d'une application continue de  $\mathbb{T}^1$  dans  $[0, \infty[$ .

La démonstration du théorème occupe le reste de l'appendice.

On peut supposer sans perte de généralité que  $H$  dévie les verticales à droite. Comme  $U$  est un ouvert de  $A$  homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times [0, \infty[$ , par le théorème de l'invariance du bord d'une variété, on a  $U \supset \mathbb{T}^1 \times \{0\}$  le bord de  $A$ .

On pose  $V = \{(\theta, t) \mid \forall t' \in [0, t], (\theta, t') \in U\}$ , c'est-à-dire que  $V$  est le sous-ensemble de  $U$  formé des points de  $U$  accessibles dans  $U$  par les verticales. Il est facile de voir que  $V$  est ouvert et connexe car il contient  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ . Notre but est de montrer  $V = U$ .

Lemme 1 : Soit  $\alpha$  un arc compact  $\subset \mathbb{T}^1$  d'extrémités  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Si  $(\theta_1, t)$  et  $(\theta_2, t) \in V$  et  $\alpha \times \{t\} \subset U$  alors  $U \supset \alpha \times [0, t]$ .



Démonstration : Notons  $C$  la courbe simple formée par  $\alpha \times \{0\} \cup \{\theta_2\} \times [0, t] \cup \alpha \times \{t\} \cup \{\theta_1\} \times [0, t]$  (voir figure). Par hypothèse  $C \subset U$ . De plus  $A - C$  est formé de deux composantes connexes dont l'une des deux est l'intérieur de  $\alpha \times ]0, t]$  et l'autre est non bornée. Puisque  $U$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times [0, \infty[$  et qu'il est relativement compact, on a que  $A - U$  est connexe et non borné. Comme  $C \subset U$ , il en résulte que  $A - U$  est contenu dans la composante non bornée de  $A - C$  et par conséquent  $U$  contient la composante bornée qui est l'intérieur de  $\alpha \times ]0, t]$ . ■

Si  $X$  est un sous-ensemble de  $U$ , nous noterons  $\text{Fr}_U(X)$  (resp.  $\text{Ad}_U(X)$ ) la

frontière (resp. l'adhérence) de  $X$  dans  $U$ , pour pouvoir la distinguer de celle de  $X$  dans  $A$  qui sera notée  $Fr_A(X)$  (resp.  $Ad_A(X)$ ).

Lemme 2 :  $Fr_U(V)$  est une sous-variété de dimension 1 constituée d'un certain nombre de segments verticaux disjoints  $S_i$  ( $i \in I \subset \mathbb{N}$ ) :

$S_i = \{\theta_i\} \times ]t_{i,1}, t_{i,2}[$  avec  $0 < t_{i,1} < t_{i,2}$  . On a  $(\theta_i, t_{i,1})$  et  $(\theta_i, t_{i,2}) \in Fr_A(U)$ .

De plus (dans un voisinage de  $S_i$  dans  $U$ ) un des côtés de  $S_i$  dans  $U$  est contenu dans  $V$  et l'autre est contenu dans le complémentaire de  $V$ . En particulier  $V \cup Fr_U(V)$  est une sous-variété de codimension 0 dans  $U$ .

Démonstration : Soit  $(\theta, t) \in Fr_U(V)$ ; sa composante connexe dans  $U \cap \{\theta\} \times ]0, \infty[$  est de la forme  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[$  avec  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ , puisque  $(\theta, 0) \in V$  et que  $U$  est borné. De plus  $(\theta, t_1)$  et  $(\theta, t_2) \in Fr_A(U)$ , et aucun point de  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[$  n'est dans  $V$ . Soient  $\alpha$  un arc de  $\mathbb{T}^1$  qui contient  $\theta$  dans son intérieur  $\overset{\circ}{\alpha}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $W = \overset{\circ}{\alpha} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset U$ , on a bien sûr  $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset ]t_1, t_2[$ , et donc  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$  est dans le complémentaire de  $V$ . Si  $(\theta', t') \in W \cap V$ , on a par définition  $\{\theta'\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset V$ , donc  $V \cap W$  est constitué d'une famille de segments verticaux  $\{\theta'\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ , qui contiennent  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$  dans leur adhérence, en particulier  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \subset Fr_U(V)$ . Il en résulte que  $Fr_U(V) \cap \{\theta\} \times ]t_1, t_2[$  est ouvert dans  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[$ , il est aussi fermé car  $\{\theta\} \times ]t_1, t_2[ \subset U$  et  $Fr_U(V)$  est fermé dans  $U$ . Par connexité de  $]t_1, t_2[$ , on a  $Fr_U(V) \supset \{\theta\} \times ]t_1, t_2[$ . Le lemme 1 montre que si  $(\varphi, t)$  et  $(\varphi', t') \in W \cap V$  alors  $V$  contient  $[\varphi, \varphi'] \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ , où  $[\varphi, \varphi']$  est le sous-arc de  $\alpha$  d'extrémités  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Il en résulte facilement que  $V$  couvre exactement un des deux côtés de  $\{\theta\} \times ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$  dans  $W$ . ■

Si les  $S_i$  sont les segments donnés par le lemme 2, on a  $Fr_U(V) = \bigcup_{i \in I} S_i$ . Comme  $U$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$ , chaque  $S_i$  coupe  $U$  en deux régions, l'une homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times ]0, \infty[$  et l'autre à  $\mathbb{R}^2$ , nous notons  $H_i$  celle des deux qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . On a  $Ad_U(H_i) = H_i \cup S_i$ , et  $V \cap Ad_U(H_i) = \emptyset$  car  $V$  est con-

nexe et contient le bord de  $U$ , c'est-à-dire  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ .

Lemme 3 : On a  $U = V \cup \left( \bigcup_{i \in I} \text{Ad}_U(H_i) \right)$ .

Démonstration : Soit  $x \notin V \cup \left( \bigcup_{i \in I} \text{Ad}_U(H_i) \right)$ ,  $x \in U$ , si un tel  $x$  existe. On a  $x \notin \text{Ad}_U(V)$ , donc par connexité de  $U$ , on peut trouver un arc  $\alpha$  d'extrémités  $x$  et  $y$  avec  $y \in \text{Ad}_U(V)$  et tel que  $\alpha$  ne rencontre  $\text{Ad}_U(V)$  en aucun autre point. Il est clair que  $y \in \text{Fr}_U(V)$ , il appartient donc à un  $S_i$ . Comme  $\alpha - \{y\} \subset U - \text{Ad}_U(V) \subset U - S_i$  et que  $H_i \cup S_i \cup V$ , couvre un voisinage de  $y$ , on obtient que le connexe  $\alpha - y \subset H_i$  et donc  $x \in H_i$ , ce qui est absurde. ■

Lemme 4 : Les  $H_i$  sont deux à deux disjoints. En fait les  $H_i$  sont les composantes connexes de  $U - \text{Ad}_U(V)$ .

Démonstration : Les  $H_i$  sont ouverts, donc ouverts dans  $U - \text{Ad}_U(V)$ . Ils sont aussi fermés dans  $U - \text{Ad}_U(V)$  car  $\text{Fr}_U(H_i) = S_i \subset \text{Ad}_U(V)$ . ■

Lemme 5 : Les  $\text{Ad}_U(H_i)$  sont les composantes connexes de  $U - V$ .

Démonstration : Ces ensembles sont fermés dans  $U$  donc dans  $U - V$ . Ils sont ouverts dans  $U - V$  car  $V \cup \text{Ad}_U(H_i)$  contient un voisinage de  $\text{Fr}_U(H_i)$  par le lemme 2. ■

Nous distinguons deux types de régions  $H_i$  suivant que  $H_i$  se trouve à droite ou à gauche de  $S_i$  (qui est orienté puisque vertical). Nous noterons  $D_1 \dots D_\ell \dots$  les régions  $H_i$  qui se trouvent à droite de leur frontière et  $G_1 \dots G_k \dots$  celles qui se trouvent à gauche de leur frontière. On pose  $D = \bigcup D_i$  et  $G = \bigcup G_i$ .

Remarque fondamentale : Un chemin partant de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  et contenu dans  $U$  ne peut entrer dans une région du type  $D_i$  (resp.  $G_i$ ) qu'en transversant la première fois sa frontière de gauche à droite (resp. droite à gauche).

Lemme 6 : On a  $\text{Ad}_U(D) = \cup \text{Ad}_U(D_i)$ , et  $\text{Ad}_U(G) = \cup \text{Ad}_U(G_i)$ .

Démonstration : Montrons par exemple que  $\cup \text{Ad}_U(D_i)$  est fermé dans  $U$ . Son complémentaire est  $V \cup (\cup \text{Ad}_U(G_i))$  qui lui est ouvert par le lemme 2. ■

Lemme 7 : On a  $H(V) \cap \text{Ad}_U(G_i) = \emptyset$ . De même  $H^{-1}(V) \cap \text{Ad}_U(D_i) = \emptyset$  par échange de droite et gauche.

Démonstration : Si  $(v, t) \in V$ , l'arc  $H(v, s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ , part du bord de  $U$ , est entièrement contenu dans  $U$  et traverse les verticales de gauche à droite par la remarque fondamentale il ne peut jamais entrer dans  $G_i$ . ■

Corollaire 8 : On a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset \text{Ad}_U(D) \cup \text{Ad}_U(G)$ .

Lemme 9 : On a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \cap \text{Ad}_U(D) = \emptyset$ . De même  $H(\text{Ad}_U(D)) \cap \text{Ad}_U(G) = \emptyset$ .

Démonstration : Par le corollaire 8, et le fait que les  $\text{Ad}_U(D_i)$ ,  $\text{Ad}_U(G_j)$  soient deux à deux disjoints et connexes, si  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G_j)) \cap \text{Ad}_U(D_i) \neq \emptyset$ , alors  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G_j)) \subset \text{Ad}_U(D_i)$ . Puisque  $H^{-1}(\text{Fr}_U(G_j))$  est transverse aux verticales et  $\text{Fr}_U(D_i)$  est verticale, on a nécessairement  $H^{-1}(\text{Fr}_U(G_j)) \cap D_i \neq \emptyset$ . Il en résulte que  $H^{-1}(V) \cap D_i \neq \emptyset$ . Ce qui est impossible par le lemme 7. ■

Lemme 10 : On a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset G$ . De même  $H(\text{Ad}_U(D)) \subset D$ .

Démonstration : Par le corollaire 8 et le lemme 9, on a  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset \text{Ad}_U(G)$ .

Le fait que  $H^{-1}(\text{Ad}_U(G)) \subset G$  résulte alors aisément du fait que  $H^{-1}(\text{Fr}_U(G))$  est transverse à  $\text{Fr}_U(G)$  qui est verticale. ■

Lemme 11 : On a  $U = V$ .

Démonstration : En effet, si  $\text{Fr}_U V \neq \emptyset$ , alors soit  $D \neq \emptyset$  soit  $G \neq \emptyset$ . Dans le premier cas  $D - H^{-1}(\text{Ad}_U(D))$  serait formé de points errants et dans le second cas  $G - H(\text{Ad}_U(G))$  serait formé de points errants. Remarquons que si  $D$  est non vide, alors  $D \neq H^{-1}(\text{Ad}_U(D))$ , car, par exemple,  $U$  est connexe et différent de  $D$ . Même raisonnement si  $G$  est non vide. ■

Fin de la démonstration du théorème de Birkhoff : Il suffit de voir que la projection  $\mathbb{T}^1 \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{T}^1$  est injective sur  $\text{Fr}_A U$  (la surjectivité résulte aisément du fait que  $U$  est relativement compact et contient  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ). Soient alors deux points  $(\theta, t_1)$  et  $(\theta, t_2) \in \text{Fr}_A U$ . Supposons que  $t_1 < t_2$ . Puisque  $V = U$ , on obtient que  $\{\theta\} \times [t_1, t_2]$  est inclus dans  $\text{Fr}_A U$ . Comme  $H$  conserve l'orientation et dévie les verticales à droite, un point proche de  $(\theta, \frac{t_1+t_2}{2})$  et situé à gauche a une image qui est au-dessus de  $\text{Fr}_A U$  et ne peut appartenir donc à  $U$ , puisque  $V = U$ . De même en utilisant  $H^{-1}$  on voit qu'un point proche de  $(\theta, \frac{t_1+t_2}{2})$  et situé à droite ne peut pas appartenir à  $U$ . Ceci est contradictoire avec le fait que  $\{\theta\} \times [t_1, t_2] \subset \text{Fr}_A U$ . ■

Université Paris-XI  
 Département de Mathématiques  
 Bât. 425  
 91405 ORSAY Cedex

## CHAPITRE II

### CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE $C^{3-\varepsilon}$ ET À NOMBRE DE ROTATION FIXÉ AU THÉORÈME DES COURBES INVARIANTES

[I] = La théorie de Birkhoff, par M.R. Herman (Chap. I).

Les autres références sont celles de [I]. On reprend aussi les notations de [I].

#### 0. INTRODUCTION.

Aux paragraphes 1 et 2, on introduit les difféomorphismes de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de la forme  $f : (\theta, r) \rightarrow (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  où  $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^1)$ ,  $k \geq 1$ , vérifie  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ . On note aussi  $f$  par  $f_\varphi$ . Un difféomorphisme  $f_\varphi$  a la propriété d'intersection. Par [I], la théorie de Birkhoff s'applique, et tout cercle  $C$  (homotope à  $\{r = \text{Cte}\}$ ) invariant par  $f_\varphi$  est le graphe d'une fonction  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ . On montre au § 2 que si  $C = \text{graphe de } \psi$  ( $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ ) est invariant par  $f_\varphi$  alors  $g = \text{Id} + \psi \pmod{1}$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  préservant l'orientation et on a

- $(g + g^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi$  ;
- $f_\varphi|_C$  est conjugué par la 1ère projection à l'homéomorphisme  $g$  (et donc  $\rho(f_\varphi|_C) = \rho(g)$ ).

L'étude des courbes invariantes des difféomorphismes  $f$  qui sont des graphes revient à étudier l'application  $\Phi : g \in D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \frac{g+g^{-1}}{2} \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , et à essayer de comprendre son image. Au § 2 on décrit quelques propriétés de l'application  $\Phi$ .

Il y a deux problèmes :

a) comprendre l'image  $\Phi(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap D^k(\mathbb{T}^1)$  ( $k \geq 1$ ) ;

b) comprendre  $\Phi(F_\alpha^0) \cap D^k(\mathbb{T}^1)$  ,

où  $F_\alpha^0 = \{g \in D^0(\mathbb{T}^1) \mid \rho(g) = \alpha\}$  (i.e. on fixe le nombre de rotation sur la courbe invariante).

Au § 3, on construit une suite de difféomorphismes

$f_i(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_i(\theta + r))$  de classe  $C^\infty$ , où  $\int_0^1 \varphi_i(\theta) d\theta = 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi_i \rightarrow 0$  dans la  $C^{2-\varepsilon}$ -topologie mais  $f_i$  ne laisse invariant aucun cercle homotope à  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ . Il revient au même de dire que  $\text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_i \notin \Phi(D^0(\mathbb{T}^1))$ . Pour un contre-exemple en classe  $C^1$  au théorème des courbes invariantes, le lecteur peut consulter Takens [1].

Le théorème 4.9 est un contre-exemple (à nombre de rotation fixé) à une conjecture de J. Moser (Stable and random motions in dynamical systems, Annals of Math. Study, Princeton Univ. Press, Princeton, page 53). Il affirme que si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  sont fixés, il existe une suite de difféomorphismes de classe  $C^\infty$   $f_i$  (définis comme ci-dessus) telle que, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $f_i \rightarrow t$  dans la  $C^{3-\varepsilon}$ -topologie (où  $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$  est un difféomorphisme "twist" "complètement intégrable"), mais  $f_i$  ne laisse invariant aucun cercle  $C_i$  (homotope à  $\{r = Cte\}$ ) tel que l'on ait  $\rho(f_i|_{C_i}) = \alpha$ . Par la théorie de Birkhoff [I.5.9] il en résulte que  $\alpha$  est dans un domaine d'instabilité.

Une autre démonstration de ce résultat se trouve dans Herman [3].

La méthode donnée au § 4 est très sensible à l'arithmétique du nombre de rotation sur la courbe invariante. Le théorème 4.11 montre que le théorème de Rüssmann [1] ou de Moser [2] (en utilisant R. Douady [1]) est le meilleur possible. (Pour une démonstration de Moser [2] voir Pöschel [1]).

Comme les difféomorphismes  $f_i$  sont de classe  $C^\infty$ , les exemples construits en 4.9 ont une infinité de courbes invariantes. C'est aussi le cas en 4.11, pour  $\beta > 1$ , comme conséquence du théorème des courbes invariantes en classe  $C^{3+\varepsilon}$  (voir Herman [4]).

L'importance de considérer  $\frac{f+f^{-1}}{2}$  a été trouvée dans un autre contexte (i.e. l'étude d'exemples de certains points fixes elliptiques) par E.M. Mac Millan [1].

1.1 Nous allons étudier les difféomorphismes de  $f$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de la forme

$$f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r)) \quad ,$$

$\varphi \in C^k(\mathbb{T}^1)$ ,  $k \geq 1$ ,  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ . Dans la suite on identifiera  $\varphi$  et  $f$ . On écrira aussi  $f_\varphi$ .

$f$  est homotope à l'identité et préserve la forme volume  $\Omega = d\theta \wedge dr$ . Le difféomorphisme  $f$  définit par passage au quotient un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} / (\theta, r) \sim (\theta, r + 1)$  isotope à  $(\theta, r) \rightarrow (\theta + r, r)$ , préservant la mesure de Haar de  $\mathbb{T}^2$ .

1.2  $f$  est un difféomorphisme globalement canonique, par Herman [2, § 2],  $f$  a la propriété d'intersection : si  $C$  est un cercle plongé dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  (homotope à  $r = \text{Cte}$ ) alors  $f(C) \cap C \neq \emptyset$ .

1.3 Par [I, 1.3 et 2.2],  $f$  dévie la verticale à droite et donc tout cercle  $C$  invariant par  $f$  qui est le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  vérifie :  $\psi$  est une fonction lipschitzienne de  $\mathbb{T}^1$  (i.e. il existe  $K > 0$ , tel que pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $\mathbb{T}^1$  on ait  $|\psi(x) - \psi(y)| \leq K \|x - y\|$  où, si  $x \in \mathbb{T}^1$  et  $\tilde{x}$  est un relèvement de  $x$  à  $\mathbb{R}$ ,  $\|x\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{x} + p|$ , la métrique de groupe standard de  $\mathbb{T}^1$ ). De plus, la constante  $K$  ne dépend que de  $\|\varphi\|_{C^1}$ .

1.4 Par [I, 4.2 et 4.3], pour tout  $\delta > 0$ , si

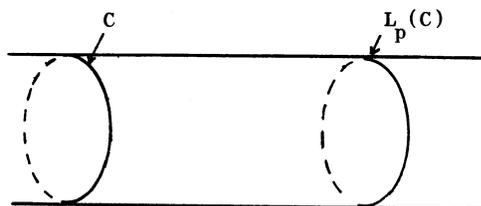
$\varphi \in V_\delta^1 = \{\text{Id} + \varphi \in D^1(\mathbb{T}^1), \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0, \|\varphi\|_{C^1} \leq \delta\}$ , alors tout cercle invariant par  $f_\varphi$  est le graphe d'une fonction  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ .

Par [I, 4.4], il existe  $K > 0$  tel que, si  $\varphi \in V_\delta^k$ ,  $f_\varphi$  ait une courbe invariante si et seulement si

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\theta, r} |f_2^n(\theta, r) - r| \leq K$$

où  $f_\varphi^n(\theta, r) = (f_1^n(\theta, r), f_2^n(\theta, r))$ . (Par 2.2.1, pour tout  $\delta > 0$ ,  $K = 4$  convient.)

1.5 Si  $f$  a un cercle invariant  $C$  homotope à  $r = \text{Cte}$  alors pour Lebesgue presque-tout point de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  est récurrent par  $f$  (en effet,  $f$  laisse invariant les courbes  $L_p(C)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  où  $L_p(\theta, r) = (\theta, r + p)$  et il suffit d'appliquer le théorème de récurrence de Poincaré).



Figure

Exemple : On se donne  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T}^1)$ ,  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$  et  $-1 < \frac{d\varphi}{d\theta}(0) < 0$ .

Soit  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ .

On vérifie que si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^n(0, 0) = (0, n)$ .

Si on considère  $\bar{f}$  le difféomorphisme induit sur  $\mathbb{T}^2$  par  $f$ , le point  $(0, 0) = (0, 1) \in \mathbb{T}^2$  est un point fixe elliptique de  $\bar{f}$ . Quitte à perturber  $\varphi$  (vérifiant  $\varphi(0) = 1$ ), on peut supposer que le 1er invariant de Birkhoff du point fixe  $(0, 0)$  de  $\bar{f}$  est non nul et que les valeurs propres de  $D\bar{f}(0, 0)$  ne sont pas des racines 3ème ou 4ème de l'unité. Il suit du théorème de J. Moser [1] que  $\bar{f}$  laisse invariant un disque  $D \ni (0, 0)$ . En remontant le disque  $D$  en en  $\tilde{D} \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ , on obtient que le disque  $\tilde{D}$  est errant pour le difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ .

---

\* On peut prendre par exemple,  $\varphi(\theta) = 1 + a\theta + c\theta^3 + o(\theta^3)$  si  $\theta \rightarrow 0$ .

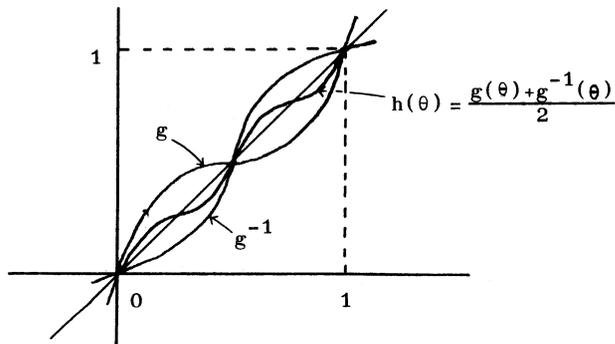
2.

2.1 Nous allons chercher un cercle invariant qui est le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  pour le difféomorphisme

$$f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r)) .$$

On a l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} \theta + \psi(\theta) &= g(\theta) \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1) \\ \varphi(g(\theta)) + \psi(\theta) &= \psi(g(\theta)) . \end{aligned}$$



Figure

Soit

$$\theta + \psi(\theta) = g(\theta)$$

$$g^{-1}(\theta) = \theta + \psi_-(\theta) \quad , \quad \text{avec } \psi_-(\theta) = -\psi(g^{-1}(\theta))$$

$$\varphi(\theta) = \psi(\theta) - \psi(g^{-1}(\theta)) .$$

2.2 On considère  $D^k(\mathbb{T}^1) = \{g \in \text{Diff}_+^k(\mathbb{R}) \mid g - \text{Id} \in C^k(\mathbb{T}^1)\}$  le revêtement universel de  $\text{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)$ . On note  $\rho : D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction nombre de rota-

tion qui est continue pour la  $C^0$ -topologie (cf. Herman [1,II]).

L'équation s'écrit, si  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$ ,

$$\boxed{\frac{1}{2}(g + g^{-1}) = h}$$

où  $\frac{g+g^{-1}}{2} \in D^0(\mathbb{T}^1)$  et

$$\boxed{h(\theta) = \theta + \frac{1}{2} \varphi(\theta)} \quad .$$

2.2.1 Remarque : Comme  $h \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ ,  $\varphi$  est à variation bornée et on a

$$\boxed{\text{Max } \frac{1}{2} \varphi - \text{Min } \frac{1}{2} \varphi < 1} \quad .$$

2.3.1 Pour étudier les cercles invariants, qui sont des graphes, par l'application  $(\theta, r) \rightarrow (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  on est ramené à étudier l'application continue pour la  $C^k$ -topologie (elle est continue si  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ )

$$\mathfrak{g} : D^k(\mathbb{T}^1) \longrightarrow D^k(\mathbb{T}^1)$$

$$g \longrightarrow \frac{g+g^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \quad .$$

2.3.2 Lemme : Si  $\text{Id} + \frac{1}{2} \varphi = \frac{g+g^{-1}}{2}$ , on a  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ .

Démonstration : Il suffit d'utiliser le fait que les graphes de  $g$  et  $g^{-1}$  sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice et, si

$$\ell(g) = \int_0^1 (g(\theta) - \theta) d\theta, \quad \ell(R_\lambda \circ g \circ R_{\lambda_1}) = \lambda + \lambda_1 + \ell(g), \quad \text{si } \lambda \text{ et } \lambda_1 \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2.3.3 Remarque : A tout difféomorphisme  $g = \text{Id} + \psi \in D^k(\mathbb{T}^1)$ , on peut associer un  $\varphi$  et un difféomorphisme "twist"  $f_\varphi$  de classe  $C^k$  ayant pour cercle  $C$  invariant le graphe de  $\psi$  et vérifiant :  $f_\varphi|_C$  est  $C^k$ -conjugué à  $g \pmod{1}$ .

#### 2.4 Inégalités.

2.4.1 On se donne  $f_\varphi(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ; on suppose que

$$\frac{g+g^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi$$

pour  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$ . Par [I, 2.2 et 2.3],  $g$  et  $g^{-1}$  sont des applications lipschitziennes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  pour la métrique standard. On dit que  $g$  est un homéomorphisme lipschitzien et on note

$D^{0,1}(\mathbb{T}^1) = \{g \in D^0(\mathbb{T}^1) \mid g \text{ et } g^{-1} \text{ sont lipschitziennes}\}$ . Si  $g \in D^{0,1}(\mathbb{T}^1)$ , alors  $g$  et  $g^{-1}$  sont presque partout dérivables et on a  $Dg, Dg^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T}^1, d\theta)$ .

On a

$$\text{Miness}(Dg^{-1}) = \|Dg\|_{L^\infty}^{-1}$$

et

$$\text{Lip}(g) = \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} = \|Dg\|_{L^\infty} .$$

2.4.2 On pose  $M = \sup(\|Dg\|_{L^\infty}, \|Dg^{-1}\|_{L^\infty})$ , on a

$\frac{1}{M} \leq \text{Min}(\text{Miness}(Dg), \text{Miness}(Dg^{-1}))$  et aussi  $M \geq 1$ .

Proposition : On a  $0 \leq M - 1 \leq \frac{1}{2} a + (a + \frac{1}{4} a^2)^{1/2}$ , où  $a = \text{Max}_{\theta \in \mathbb{T}^1} (D\varphi(\theta)) = \text{Max } D\varphi$ .

Démonstration : Soit  $A$  un ensemble de mesure de Lebesgue pleine de  $\mathbb{R}$ , invariant par  $g$  et tel que, pour  $x \in A$ ,  $Dg(x)$  existe et vérifie  $Dg(x) \leq \|Dg\|_{L^\infty}$ . Quitte à changer  $g$  en  $g^{-1}$ , on peut supposer que  $\|Dg\|_{L^\infty} = M$ .

On a, si  $x \in A$ ,

$$\frac{1}{2} (Dg(x) + Dg^{-1}(x)) = 1 + \frac{1}{2} D\varphi(x) \quad .$$

Or  $Dg^{-1}(x) = \frac{1}{Dg} \circ g^{-1}(x)$ , donc

$$\frac{1}{2} (Dg(x) + \frac{1}{Dg} \circ g^{-1}(x)) = 1 + \frac{1}{2} D\varphi(x) \quad .$$

Soient  $\varepsilon > 0$ , et  $y \in A$  tels que  $Dg(y) \geq M - \varepsilon$ . On a

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + M - \varepsilon \right) \leq \frac{1}{2} (Dg(y) + \frac{1}{Dg} \circ g^{-1}(y)) \leq 1 + \frac{1}{2} \text{Max } D\varphi \quad ;$$

$\varepsilon > 0$  étant arbitraire on a

$$\frac{1}{2} \left( M + \frac{1}{M} \right) \leq 1 + \frac{1}{2} \text{Max } D\varphi$$

soit  $M - 1 \leq \frac{1}{2} a + \sqrt{a} \left( 1 + \frac{1}{4} a \right)^{1/2} \quad . \quad \blacksquare$

2.4.3 On a

$$\text{Max} \left( \|Dg - 1\|_{L^\infty}, \|Dg^{-1} - 1\|_{L^\infty} \right) \leq \sup(M - 1, 1 - \frac{1}{M}) = M - 1$$

où  $M \leq 1 + \frac{1}{2} a + a^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{4} a \right)^{1/2} \quad .$

2.4.4 On a, si  $x \in A$ ,

$$\frac{1}{M} \leq 1 + \frac{1}{2} D\varphi(x)$$

et donc  $\frac{1}{M} \leq 1 + \frac{1}{2} \text{Min } D\varphi \quad (\leq 1) \quad ,$

où  $\text{Min } D\varphi = \text{Min}_{\theta \in \mathbb{T}^1} (D\varphi(\theta)) \quad (\leq 0) \quad .$

2.4.5 On a l'inégalité suivante (cf. aussi le Chap. III, § 2.1 à 2.3 et § 9)

$$-\frac{1}{2} \text{Min } D\varphi \leq 1 - \frac{1}{M} \leq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} a + (a + \frac{1}{4} a^2)^{1/2}}$$

donc, si  $\text{Max } D\varphi \rightarrow 0$ ,

$$\boxed{-\frac{1}{2} \text{Min } D\varphi \leq \sqrt{\text{Max } D\varphi} + O(\text{Max } D\varphi)} \quad .$$

2.4.6 Par 2.4.3, il existe une fonction  $\lambda$  telle que, si  $\|D\varphi\|_{C^0} = k$ ,

$$\text{Max}(\text{Lip}(g - \text{Id}), \text{Lip}(g^{-1} - \text{Id})) \leq \lambda(k)$$

et de plus, si  $k \rightarrow 0$ ,  $\lambda(k) \rightarrow 0$ , car  $\lambda(k) = \frac{1}{2} k + (k + \frac{1}{4} k^2)^{1/2}$  .

2.4.7 Comme  $g = \text{Id} + \psi \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , la fonction  $\psi - \rho(g)$  s'annule en au moins un point, d'où il résulte l'inégalité

$$\begin{aligned} \sup(\|\psi - \rho(g)\|_{C^0}, \|\psi - \rho(g^{-1})\|_{C^0}) &\leq \frac{1}{2} \text{Max}(\|Dg - 1\|_{L^\infty}, \|Dg^{-1} - 1\|_{L^\infty}) \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda(k) \quad . \end{aligned}$$

(Le facteur 1/2 s'explique : si  $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^1)$  s'annule en au moins un point, alors  $\|\varphi\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|D\varphi\|_{C^0}$  .)

2.4.8 De l'identité  $\psi - \psi \circ g^{-1} = \varphi$ , il suit que l'on a

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq \|D\psi\|_{L^\infty} \|g^{-1} - \text{Id}\|_{C^0} \leq \|D\psi\|_{L^\infty} \left( \frac{1}{2} \|D\psi\|_{L^\infty} + |\alpha| \right) ,$$

où  $\alpha = \rho(g)$  .

2.5

2.5.1 On pose  $H^k = \{g \in D^k(\mathbb{T}^1) \mid g = \text{Id} + \varphi, \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0\}$ .

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on considère l'ensemble fermé de  $D^k(\mathbb{T}^1)$  :

$$F_\alpha^k = \{h \in D^k(\mathbb{T}^1) \mid \rho(h) = \alpha\} .$$

On a  $H^k \subset F_0^k$ .

On désigne par  $R_\alpha$  la translation de  $\mathbb{R}$  par  $\alpha$  :  $R_\alpha(x) = x + \alpha$ .

On pose aussi  $O_\alpha^k \subset \{h^{-1} \circ R_\alpha \circ h \mid h \in D^k(\mathbb{T}^1)\}$ . On a  $O_0^k \subset F_0^k$ . Pour l'étude de  $F_\alpha^k$ , le lecteur se reportera à Herman [1,III].

2.5.2 On rappelle que si  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$  la fonction  $g - \text{Id} - \rho(g)$  s'annule en au moins un point, et on a  $\sup_\theta |g(\theta) - \theta - \rho(g)| < 1$  (cf. Herman [1,II]).

Si  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$  alors, pour  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $R_p$  commute avec  $g$  et  $\rho(R_p \circ g) = p + \rho(g)$ . Soient  $h$  et  $g$  dans  $D^0(\mathbb{T}^1)$  tels que  $\hat{\Phi}(g) \equiv \frac{1}{2}(g + g^{-1}) = h$ , alors, si  $p \in \mathbb{Z}$ , on a  $\frac{1}{2}((R_p \circ g) + (R_p \circ g)^{-1}) = h$ .

2.5.3 Proposition : Si  $k \geq 1$ , l'ensemble  $\hat{\Phi}(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap H^k$  est fermé dans  $H^k$  pour la  $C^1$ -topologie (et même fermé pour la  $C^0$ -topologie sur toute partie  $C^1$ -bornée de  $H^k$ ).

Démonstration : Elle est identique à celle de [I, 5.4] en utilisant

2.5.2, 2.4.6 et 1.3 puisque  $\hat{\Phi}(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap \{\text{Id} + \varphi \in H^k \mid \|\varphi\|_{C^1} \leq K\}$  est fermé

dans  $\{\text{Id} + \varphi \in H^k \mid \|\varphi\|_{C^1} \leq K\}$  pour la  $C^0$ -topologie et ceci pour tout  $K \in \mathbb{R}_+$ . ■

Pour simplifier les notations dans la suite, on note par  $\hat{\Phi}$  la restriction de  $\hat{\Phi}$  à un sous-ensemble de  $D^0(\mathbb{T}^1)$ .

2.5.4 Proposition : Si  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , l'application  $\Phi : F_\alpha^0 \rightarrow H^0$  est injective.

La démonstration est identique à celle de [I, 5.7.1] qui s'appuie sur le théorème de récurrence de Poincaré, ce qui est possible en utilisant 1.5. ■

Remarque : La proposition n'est pas correcte si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

Soit  $g \in F_0^\infty$  et donc  $g^{-1} \in F_0^\infty$ . On pose  $h = \frac{g+g^{-1}}{2}$ ,  $g$  et  $g^{-1}$  sont deux solutions de nombre de rotation = 0 de l'équation  $\Phi(f) = h$ . Il y aurait même une infinité de solutions dans  $F_0^0$  si  $g$  avait une infinité de points fixes sur  $[0,1]$ . Pour le cas  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on peut utiliser les revêtements finis d'ordre  $q$ , pour ceci voir 4.8.

2.5.5 Proposition : Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $k \geq 1$ ,  $\Phi(F_\alpha^0) \cap H^k$  est fermé dans  $H^k$  pour la  $C^1$ -topologie (et même fermé pour la  $C^0$ -topologie sur toute partie  $C^1$ -bornée de  $H^k$ ).

La démonstration est identique à celle de [I, 5.4] en utilisant 2.5.2, 2.4.6 et 1.3. ■

2.5.6 Proposition : Si  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et si  $k \geq 1$ , l'application inverse (qui est bien définie par 2.5.4)

$$\Phi^{-1} : \Phi(F_\alpha^0) \cap H^k \longrightarrow D^{0,1}(\mathbb{T}^1)$$

est continue si on munit  $\Phi(F_\alpha^0) \cap H^k$  de la  $C^1$ -topologie et  $D^{0,1}(\mathbb{T}^1) = \{f \in D^0(\mathbb{T}^1) \mid f \text{ et } f^{-1} \in \text{Lip}(\mathbb{R})\}$  de la  $C^0$ -topologie.

La démonstration est très simple en utilisant le théorème d'Ascoli (qu'on peut appliquer en utilisant 2.5.2, 2.4.6 et 1.3). ■

2.5.7 Proposition : Si  $k \geq 1$  et si  $h \in H^k$ ,  $\hat{\Phi}^{-1}(h) \cap \rho^{-1}[0,1]$  est un ensemble compact de  $D^0(\mathbb{T}^1)$  pour la  $C^0$ -topologie.

(Pour la démonstration, cf. [I, 5.5].) ■

2.5.8 Proposition : Soit  $k \geq 1$ . Il existe un  $G_\delta$  dense  $G^k$  de  $H^k$  (pour la  $C^k$ -topologie) tel que si  $h \in G^k$  et si  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\hat{\Phi}(g) = h$ , alors  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ .

Démonstration : Par le même raisonnement qu'en [I, 5.8], il suffit de montrer que les propriétés a) et b) de [I, 5.8.1] sont vraies sur un  $G_\delta$  dense de  $H^k$  ( $k \geq 1$ ) pour les orbites périodiques qui sont des graphes.

Ceci résulte du théorème de transversalité d'Abraham et Robbin [1] appliqué à  $H^k$ .

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on peut perturber  $\varphi$  en  $\varphi + \Delta\varphi$  avec  $\Delta\varphi \in C^\infty$  petite,  $\int_0^1 \Delta\varphi(\theta) d\theta = 0$ ,  $\Delta\varphi$  s'annule en des points ad hoc. ■

2.6 On se donne  $\alpha \in \mathbb{R}$  satisfaisant à une condition diophantienne : il existe  $C > 0$ ,  $\beta \geq 0$  tels que pour  $p/q \in \mathbb{Q}$ ,  $q \geq 1$ , on ait  $|\alpha - (p/q)| \geq C q^{-2-\beta}$ .

Nous allons esquisser la démonstration du théorème de J. Moser sur les courbes invariantes des difféomorphismes "twist" dans le cas particulier que nous considérons. La démonstration est presque la même que celle que nous avons donnée dans Herman [2]. Nous adoptons le formalisme de R. Hamilton tel qu'il est exposé dans Herman [2, 4]. La démonstration donne même un résultat un peu meilleur dans le cas particulier où nous nous plaçons, puisque  $\hat{\Phi}$  est un difféomorphisme de  $O_\alpha^\infty$  sur son image. On pose  $D^k(\mathbb{T}^1, 0) = \{g \in D^k(\mathbb{T}^1) \mid g(0) = 0\}$ .

2.6.1 Théorème : Si  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne, l'appli-

cation continue (pour la  $C^\infty$ -topologie) et injective  $\Phi: O_\alpha^\infty \rightarrow H^\infty$   
est un bon difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $O_\alpha^\infty$  sur  $\Phi(O_\alpha^\infty)$  qui est ouvert  
dans  $H^\infty$ .

Démonstration : Soit l'application  $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0) \xrightarrow{\Psi} h^{-1} \circ R_\alpha \circ h \in O_\alpha^\infty$  et  
 $F(h) = \Phi(\Psi(h)) = (h^{-1} \circ R_\alpha \circ h + h^{-1} \circ R_{-\alpha} \circ h)/2 \in H^\infty$ .  $F$  est un bon morphisme de  
 classe  $C^\infty$ .

La dérivée de  $F$  se calcule comme suit :

$$\textcircled{1} \quad \Delta\psi = D\Psi(h)\Delta h = (Dh^{-1} \circ R_\alpha \circ h)\Delta h - (Dh^{-1} \circ R_\alpha \circ h)\Delta h \circ h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$$

$$\text{et} \quad D\Phi(g)\Delta\psi = \Delta\psi - Dg^{-1} \cdot \Delta\psi \circ g^{-1}$$

où  $g = \Psi(h)$ .

On cherche un bon morphisme de classe  $C^0$ , linéaire en la 2ième variable  
 $(h, \eta) \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0) \times \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0\} \rightarrow L(h)\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  
 $DF(h) L(h)\eta = \eta$ , c'est-à-dire

$$\textcircled{2} \quad \Delta\psi - Dg^{-1} \cdot \Delta\psi \circ g^{-1} = \eta$$

Comme  $g = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$  et  $\int_0^1 \eta(\theta) d\theta = 0$  on peut, comme  $\alpha$  satisfait à une  
 condition diophantienne, résoudre  $\textcircled{1}$  et l'application  $\eta \rightarrow \Delta\psi$  (avec  
 $\int_0^1 \Delta\psi(\theta) d\theta = 0$ ) est un bon morphisme (on peut par exemple dériver  
 $\xi - \xi \circ g^{-1} = \eta_1$ ). La solution générale de  $\textcircled{2}$  est  $\Delta\psi + \mu Dh$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ .

On doit résoudre :

$$\textcircled{3} \quad \Delta\psi + \mu Dh = D\psi(h) \Delta h$$

où  $D\psi(h)\Delta h$  est donnée par  $\textcircled{1}$ .

Pour cela on raisonne comme en Herman [2, 5.10] en remarquant que  $Dh$  est une

fonction  $C^\infty > 0$  (on ne suppose pas ici que la fonction  $Dh$  est  $C^0$ -voisine de 1) :

On compose (3) à droite par  $h^{-1}$ , puis on divise (3) par  $Dh^{-1} \circ R_\alpha$ ,

(3) devient :

$$(4) \quad (Dh^{-1} \circ R_\alpha)^{-1}(\Delta\psi \circ h^{-1} + \mu Dh \circ h^{-1}) = \tilde{\Delta h} - \tilde{\Delta h} \circ R_\alpha$$

avec

$$(5) \quad \Delta\psi \circ h^{-1} = \mu Dh \circ h^{-1} \quad .$$

On détermine  $\mu$  par (c'est possible puisque  $Dh > 0$ )

$$\int_0^1 (Dh^{-1} \circ R_\alpha)^{-1}(\Delta\psi \circ h^{-1} + \mu Dh \circ h^{-1}) d\theta = 0 \quad ,$$

et  $\tilde{\Delta h}$  en résolvant l'équation aux différences (4) (c'est possible puisque  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne). Finalement on obtient  $\Delta h = \tilde{\Delta h} \circ h$  et si on impose que  $\Delta h(0) = 0$ ,  $\Delta h$  est unique (i.e.  $DF(h)$  est injective).  
que  $\Delta h(0) = 0$ ,  $\Delta h$  est unique (i.e.  $DF(h)$  est injective).

Il suit du théorème des fonctions implicites de R. Hamilton que pour tout  $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ ,  $F$  est un bon difféomorphisme d'un voisinage de  $h$  sur un voisinage ouvert de  $F(h)$  dans  $H^\infty$ . Comme  $\tilde{\Phi}$  est injective, le théorème est démontré. ■

2.6.2 Il suit du théorème fondamental de Herman [1, IX] que, si  $\alpha$  satisfait à une condition A, alors  $\tilde{\Phi}$  est un bon difféomorphisme de  $F_\alpha^\infty$  sur  $\tilde{\Phi}(F_\alpha^\infty)$  qui est ouvert dans  $H^\infty$ .

3. CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE  $C^{2-\epsilon}$  AUX THÉORÈMES DES COURBES INVARIANTES.

3.1 Topologie  $C^{k+\epsilon}$ .

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $0 < \epsilon < 1$ , une fonction  $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$   $\mathbb{Z}$ -périodique est de classe  $C^{k+\epsilon}$  si  $D^k\varphi$  est hildérienne d'exposant  $\epsilon$  :

$$|D^k\varphi|_{C^\epsilon} < +\infty ,$$

où  $D^0\varphi = \varphi$

et 
$$|\varphi|_{C^\epsilon} = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\epsilon} .$$

3.2 Inégalités de convexité.

Si  $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^1)$ , on a  $\|D\varphi\|_{C^0} \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_{C^0} \|D^2\varphi\|_{C^0}$ , et si  $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^1)$  et  $0 < \alpha < 1$ ,  $|\varphi|_{C^\epsilon} \leq 2 \|\varphi\|_{C^0}^{1-\epsilon} \|D\varphi\|_{C^0}^\epsilon$  (voir Herman [1, VIII, 3]).

Il en résulte que si  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $C^2(\mathbb{T}^1)$  vérifiant

$$\sup_i \|D^2\varphi_i\|_{C^0} < +\infty ; \lim_{i \rightarrow +\infty} \|\varphi_i\|_{C^0} = 0 ,$$

alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi_i \rightarrow 0$  dans la  $C^{2-\epsilon}$ -topologie.

3.3 Théorème : Il existe une suite de difféomorphismes de classe  $C^\infty$   $f_i(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_i(\theta + r))$ , vérifiant  $\int_0^1 \varphi_i(\theta) d\theta = 0$ , telle que pour tout  $\epsilon > 0$ , si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi_i \rightarrow 0$  dans la  $C^{2-\epsilon}$ -topologie, et de plus, pour tout  $i$ ,  $f_i$  ne laisse pas invariant de cercle plongé homotope à  $r = Cte$ .

Démonstration : Si  $f_i$  laisse invariant un cercle  $C_i$ , alors par 1.4,  $C_i$  est le graphe de  $\psi_i \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ . Si on pose  $h_i = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_i$  et  $g_i = \text{Id} + \psi_i$ , on a  $\Phi(g_i) = h_i$  (cf. 2).

Par 2.4 on a, pour  $i$  assez grand,

$$-\frac{1}{2} \text{Min } D\varphi_i \leq 3 \sqrt{\text{Max } D\varphi_i} .$$

Donc, pour démontrer le théorème, il suffit de construire une suite  $(\text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_i)_i$  de  $H^\infty$  vérifiant

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_i \|D^2\varphi_i\|_{C^0} < +\infty \quad , \quad \lim_i \|\varphi_i\|_{C^0} = 0 \\ \\ - \text{Min } D\varphi_i > 3 \sqrt{\text{Max } D\varphi_i} . \end{array} \right.$$

Soit  $\eta$  une fonction de classe  $C^\infty$ ,  $\eta \geq 0$ ,

$$\text{support}(\eta) \subset ]0, \frac{1}{2}[ \quad \text{et} \quad \text{Max}(\eta) = 1 .$$

On suppose que  $\varepsilon > 0$  est petit; soit

$$\begin{aligned} D\varphi_\varepsilon(x) &= \varepsilon \eta(x) && \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ D\varphi_\varepsilon(x) &= -10 \sqrt{\varepsilon} \eta\left(\frac{10}{\sqrt{\varepsilon}}(x - \frac{3}{4})\right) && \text{si } x \notin [0, \frac{1}{2}] . \end{aligned}$$

On a  $\text{support}(D\varphi_\varepsilon) \subset [0, 1]$  et  $\int_0^1 D\varphi_\varepsilon(\theta) d\theta = 0$  et en prolongeant  $D\varphi_\varepsilon$  de façon  $\mathbb{Z}$ -périodique, on définit  $D\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ . On pose, si  $0 \leq \theta \leq 1$ ,

$$\varphi_\varepsilon(\theta) = \int_0^\theta D\varphi_\varepsilon(t) dt - \int_0^1 D\varphi_\varepsilon(t) dt .$$

La suite  $\varphi_i = \varphi_{\varepsilon_i}$ ,  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_i > 0$ , vérifie toutes les conditions (\*). ■

3.4 Il suit que l'ensemble  $V^\infty - (\hat{\mathbb{Q}}(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap H^\infty)$  qui est ouvert pour la  $C^0$ -topologie par 2.5.3, est adhérent à  $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$  dans la  $C^{2-\varepsilon}$ -topo-

## CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE $C^{3-\epsilon}$

logie. De plus, tout difféomorphisme  $f$  dans cet ouvert vérifie

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\theta, r} |f_2^n(\theta, r) - r| = +\infty \quad (\text{cf. 1.4})$$

et donc est analogue à l'exemple de 1.5.

**3.5 Corollaire** : Dans tout voisinage  $C^{2-\epsilon}$  de  $t$  et pour tout  $\alpha$  satisfaisant à une condition A, il existe un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^\infty$ ,  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ , tel que  $f$  laisse invariant un cercle  $C$  plongé homotope à  $r = \text{Cte}$ ,  $\rho(f|_C) = \alpha$ ,  $C$  est le graphe de  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ , mais  $\psi$  n'est pas de classe  $C^\infty$ .

Démonstration : Soit  $U \subset V^\infty$  un voisinage  $C^{2-\epsilon}$  ouvert connexe de  $t$ . Par 2.6.2,  $W = \Phi(F_\alpha^\infty) \cap U$  est un ouvert pour la  $C^\infty$ -topologie. Soit  $\bar{W}$  l'adhérence de  $W$  dans  $U$  pour la  $C^\infty$ -topologie. Par 2.5.3,  $\bar{W} \subset \Phi(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap U$ ; si  $W = \bar{W}$ , comme  $U$  est connexe, on aurait  $W = U$ ; par 3.3, ceci est absurde. On a donc  $\bar{W} \neq W$ , et il suffit de choisir un élément dans  $\bar{W} - W$ . ■

### 4. CONTRE-EXEMPLE DE CLASSE $C^{3-\epsilon}$ À NOMBRE DE ROTATION FIXE AU THÉOREME DES COURBES INVARIANTES.

#### 4.1 Exemples de courbes lipschitziennes.

On se donne  $\lambda > 0$ . On considère l'homéomorphisme PL de  $[0, 1]$  défini par

$$\begin{cases} g_1(x) = (\lambda + 1)x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ g_1(x) = \frac{1}{\lambda + 1}(x - 1) + 1 & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$(\lambda + 1)a = \frac{1}{\lambda + 1}(a - 1) + 1.$$

Sur l'intervalle  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ ,  $a - \varepsilon < a + \varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon > 0$ , on peut lisser  $g_1$  en  $g \in \text{Diff}^\infty[0,1]$  tel que  $g(x) = g_1(x)$  si  $x \notin ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ .

$g$  définit seulement un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1$ . Soit  $h = (g + g^{-1})/2 = \text{Id} + \varphi$ , l'homéomorphisme  $h$  définit en fait un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}^1$ .

Si  $g = \text{Id} + \psi$ , le graphe  $C$  de  $\psi$  est un cercle plongé invariant par  $f_\varphi$ ,  $\rho(h) = 0$ . Bien que  $h$  soit un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ , la fonction  $\psi$  est seulement lipschitzienne.

**4.2 Proposition :** Pour  $\lambda > 0$  assez petit, il existe  $(g_\lambda)_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0}$  une famille de difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $[0,1]$  vérifiant

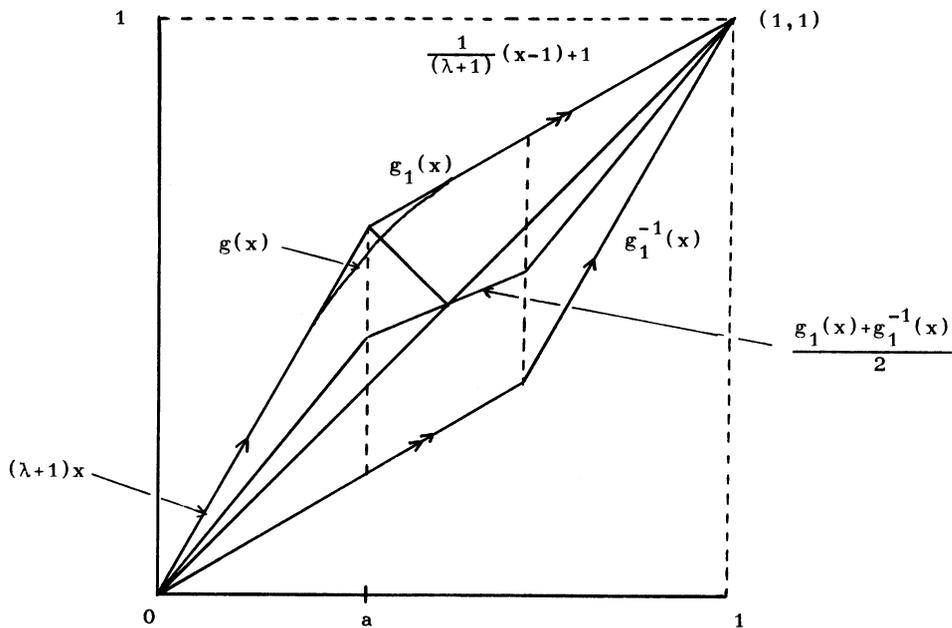
$$\begin{cases} g_\lambda(x) = (1 + \lambda)x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \\ g_\lambda(x) = \frac{1}{(\lambda+1)}(x-1) + 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \leq x \leq 1 \end{cases} ;$$

et de plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \|D^k(g_\lambda - \text{Id})\|_{C^0([0,1])} &= o(\lambda) \\ \|D^k(g_\lambda^{-1} - \text{Id})\|_{C^0([0,1])} &= o(\lambda) \end{aligned} .$$

Si  $0 < K < 1/2$  est donné, il existe  $C(K) > 0$ , tel que l'on ait de plus, si

$$\lambda \rightarrow 0, \quad \text{Min}_{x \in [K, 1-K]} (g_\lambda(x) - x) \geq C(K)\lambda .$$



Figure

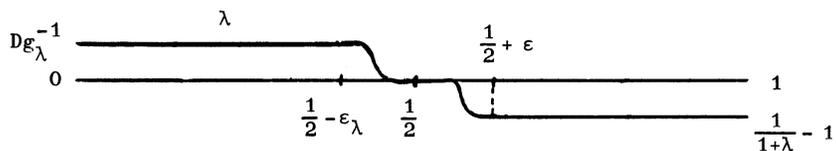
**Démonstration** : Il suffit de construire  $Dg_\lambda - 1$  et ensuite d'intégrer.

On choisit  $0 < \epsilon \ll 10^{-2}$  (mais fixé),

$$Dg_\lambda(x) - 1 = \lambda \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \epsilon_\lambda$$

$$Dg_\lambda(x) - 1 = \frac{1}{1+\lambda} - 1 \quad \text{si } \frac{1}{2} + \epsilon \leq x \leq 1$$

avec  $(\frac{1}{2} - \epsilon_\lambda)\lambda + (\frac{1}{1+\lambda} - 1)(\frac{1}{2} - \epsilon) = 0$ , et donc  $|\epsilon_\lambda - \epsilon| = o(\lambda)$ , si  $\lambda \rightarrow 0$ .



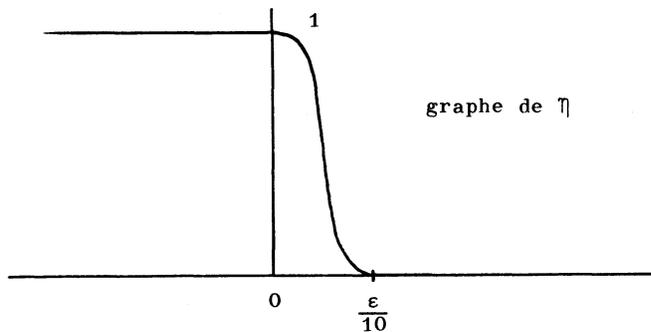
On prolonge ensuite  $Dg_\lambda - 1$  sur  $[\frac{1}{2} - \varepsilon_\lambda, \frac{1}{2} + \varepsilon]$  de façon que  $\int_0^1 (Dg_\lambda(t) - 1) dt = 0$  et pour  $k \in \mathbb{N}$ , si  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\|D^k g_\lambda - 1\|_{C^0} = o(\lambda) .$$

Pour construire un tel plongement, on considère une fonction  $C^\infty$ ,  $\eta \geq 0$ ,

$$\eta(x) = 1 \quad \text{si } x \leq 0$$

$$\eta(x) = 0 \quad \text{si } x \geq \frac{\varepsilon}{10} .$$



Figure

On complète  $Dg_\lambda - 1$  sur  $]\frac{1}{2} - \varepsilon_\lambda, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ , pour  $\lambda$  assez petit, par :

$$Dg_\lambda(x) - 1 = \left(\frac{1}{1+\lambda} - 1\right) \eta\left(-\left(x - \frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) , \quad \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$$

$$Dg_\lambda(x) - 1 = \lambda \eta\left(\left(1+\lambda\right)\left(x - \frac{1}{2} + \varepsilon_\lambda\right)\right) , \quad \text{si } x \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon_\lambda, \frac{1}{2}\right] .$$

On a 
$$\int_{\frac{1}{2} - \varepsilon_\lambda}^{\frac{1}{2} + \varepsilon} (Dg_\lambda(t) - 1) dt = 0 .$$

La minoration  $\text{Min}_{x \in [K, 1-K]} (g_\lambda(x) - x) \geq C(K)\lambda$  est vraie si  $K < 1/10$ , mais si

$\frac{1}{10} \leq K < \frac{1}{2}$  on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{-(1/10)^+(1/2)}^{(1/10)^+(1/2)} (Dg_\lambda(t) - 1) dt \right| &= \left| \lambda \left( \frac{1}{2} - \epsilon_\lambda - \frac{1}{10} \right) + \left( \frac{1}{1+\lambda} - 1 \right) \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{2} + \epsilon \right) \right| \\ &= o(\lambda^2) \quad . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3 On pose (cf. 2)

$$h_\lambda \equiv \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_\lambda = \frac{1}{2} (g_\lambda + g_\lambda^{-1}) \quad , \quad h_\lambda \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \quad .$$

Si  $\lambda$  est assez petit, alors

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \lambda + \frac{1}{1+\lambda} \right) x \quad , \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$$

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \lambda + \frac{1}{1+\lambda} \right) (x - 1) + 1 \quad , \quad \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \leq x \leq 1 \quad .$$

Si  $\lambda \rightarrow 0$ , alors  $\psi_\lambda \rightarrow 0$  dans la  $C^\infty$ -topologie (où  $g_\lambda = \text{Id} + \psi_\lambda$ ).

Proposition : Pour  $k$  entier il existe une constante  $C_k > 0$  telle que,  
si  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\|D^i \psi_\lambda\|_{C^0} \leq C_k \lambda^2 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k \quad .$$

Démonstration : Par 4.2, on a, pour  $k \in \mathbb{N}$ , si  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\|D^k \varphi_\lambda\|_{C^0} = o(\lambda) \quad .$$

On pose  $g_\lambda = \text{Id} + \psi_\lambda$ , on a

$$(*) \quad \psi_\lambda - \psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1} = \varphi_\lambda \quad ,$$

et donc, par la formule de la moyenne,

$$\|\varphi_\lambda\|_{C^0} \leq \|D\psi_\lambda\|_{C^0} \|g_\lambda^{-1} - \text{Id}\|_{C^0} = o(\lambda^2) \quad .$$

On dérive (+)

$$D\varphi_\lambda = D\psi_\lambda - D\psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1} Dg_\lambda^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} \|D\varphi_\lambda\|_{C^0} &\leq \|D\psi_\lambda - D\psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1}\|_{C^0} + \|D\psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1}\|_{C^0} \|Dg_\lambda^{-1} - 1\| \\ &\leq \|D^2\psi_\lambda\|_{C^0} \| \text{Id} - g_\lambda^{-1} \|_{C^0} + o(\lambda^2) = o(\lambda^2) \quad . \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} D^2\varphi_\lambda &= D^2\psi_\lambda - D^2\psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1} (Dg_\lambda^{-1})^2 + D\psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1} D^2(g_\lambda^{-1}) \\ D^k\varphi_\lambda &= D^k\psi_\lambda - D^k\psi_\lambda \circ g_\lambda^{-1} (Dg_\lambda^{-1})^k + o(\lambda^2) \quad , \end{aligned}$$

en utilisant la formule de la moyenne on obtient la proposition. ■

4.4 On associe à  $h_\lambda \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  le difféomorphisme  $f_\lambda(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_\lambda(\theta + r))$  où  $h_\lambda = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_\lambda \in H^\infty$ . Si  $0 < \lambda < \lambda_0$ , on a

$$f_\lambda(\theta, r) = A_\lambda \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix} \quad \text{pour } |\theta + r| < \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \quad ,$$

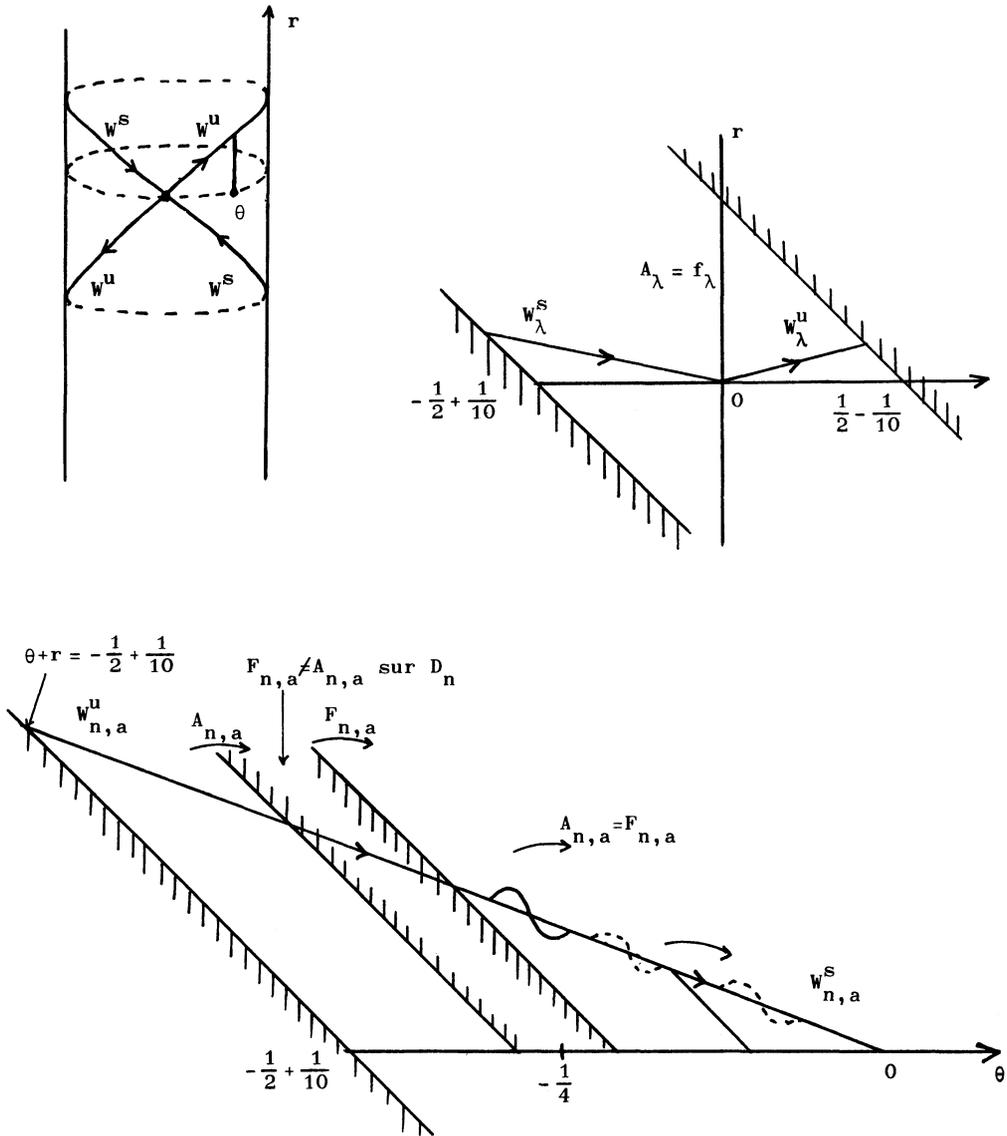
où  $A_\lambda$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2\mu_\lambda - 2 & 2\mu_\lambda - 1 \end{pmatrix}$  avec  $\mu_\lambda = \frac{1}{2}((1+\lambda) + \frac{1}{1+\lambda})$ . Les valeurs propres de  $A_\lambda$  sont  $1+\lambda$  et  $(1+\lambda)^{-1}$ , la direction propre associée à  $1+\lambda$  est  $(1, \lambda)$  et celle de  $(1+\lambda)^{-1}$  est  $(1, (1+\lambda)^{-1} - 1)$ . Soient  $g_\lambda = \text{Id} + \psi_\lambda$  et  $C_\lambda = \text{graphe}(\psi_\lambda)$ ,  $C$  est un cercle lipschitzien, invariant par  $f_\lambda$  et on a  $\rho(f_\lambda|_{C_\lambda}) = 0$ .

CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE  $C^{3-\epsilon}$

$C_\lambda$  = la variété stable de  $A_\lambda$ , pour  $\theta < 0$ ,  $|\theta + r| < \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ ,

$C_\lambda$  = la variété instable de  $A_\lambda$ , pour  $\theta > 0$ ,  $|\theta + r| < \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ , donc

$C_\lambda$  est la variété stable et instable du point fixe hyperbolique  $(0,0)$  de  $f_\lambda$ . Ce point fixe est non transversal.



Figures

4.5 On se donne

$$1 < a, \quad a_1 > 2a \quad \text{et} \quad k \text{ un entier} > 3$$

Pour  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ , on définit la suite de difféomorphismes de classe  $C^\infty$

$$f_{n,a} = f_{n-a/2}, \quad A_{n,a} = A_{n-a/2}.$$

On considère, pour  $n \geq 1$ , une suite  $\eta_n \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ , vérifiant  $\int_0^1 \eta_r(\theta) d\theta = 0$ ,  $\text{support}(\eta_n) \subset [-\frac{1}{4} - \frac{1}{a_1 n}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{a_1 n}]$ , et

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\theta} (\eta_n(\theta)) &= n^{-s_1} \\ \|\eta_n\|_{C^k} &\leq n^{-s_2} \end{aligned}$$

4.5.1

où  $s_1 > s_2 > a_1$ . On fixe  $s_1$  qu'on peut choisir égale à  $(k+2)a_1$ . Soit

$$F_{n,a}(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_{n-a/2}(\theta+r) + \eta_n(\theta+r)). \text{ On a } F_{n,a}(\theta, r) = f_{n,a}(\theta, r)$$

sauf si  $(\theta, r) \in D_n$  où  $D_n = \{(\theta, r) \mid |\theta + r + \frac{1}{4}| \leq n^{-a_1}\}$ .

Si  $n$  est assez grand,  $D_n \cap W_{n,a}^S \subset (\text{domaine fondamental de } f_{n,a}|_{W_{n,a}^S})$  où

$W_{n,a}^S$  est la variété stable de  $A_{n,a} = f_{n,a}$  sur  $|\theta + r| < \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ .

4.5.2 Le difféomorphisme  $F_{n,a}$  a le point  $(0,0)$  comme point fixe hyperbolique homoclinique (les variétés stable et instable ont une intersection non

transverse) pour  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{a_1 n} + \frac{C}{n a/2} < \theta < 0$ , les difféomorphismes  $f_{n,a}$  et  $F_{n,a}$  ont

la même variété stable, et, sur  $0 < \theta < \frac{3}{4} - \frac{1}{a_1 n} - \frac{C}{n a/2}$  la même variété instable

où  $C$  est une constante  $> 0$  indépendante de  $n$  (on utilise le fait que pour un point hyperbolique les variétés stable et instable sont localement uniques).

Pour  $a$  fixé,  $1 < a$ , la suite des difféomorphismes  $F_{n,a}$  tend vers le difféomorphisme  $t$ , si  $n \rightarrow +\infty$ , dans la  $C^k$ -topologie.

Par 4.2 on a, si  $n \rightarrow +\infty$ ,

4.5.3

$$\|F_{n,a} - t\|_{C^3} = O\left(\frac{1}{n^a}\right) .$$

4.5.4 Comme  $F_{n,a}$  a  $(0,0) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  comme point fixe hyperbolique homoclinique tel que la variété stable coupe transversalement la variété instable en au moins un point,  $F_{n,a}$  ne laisse pas de cercle plongé  $C$  (homotope à  $r = Cte$ ) invariant tel que  $\rho(F_{n,a}|_C) = 0$ .

4.6 Théorème : On fixe  $a > 1$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N_0$  (dépendant de  $\epsilon$ ) tel que, si  $n \geq N_0$ ,  $F_{n,a}$  ne laisse pas invariant de cercle  $C$  plongé homotope à  $r = Cte$  tel que  $\rho(F_{n,a}|_C) = \alpha$  vérifie  
 $|\alpha| < \frac{1}{n^{a/2 + \epsilon}}$ .

L'idée heuristique de la démonstration est la suivante : on se ramène au cas où  $\alpha > 0$  et on raisonne par l'absurde. Si  $F_{n,a}$  laissait invariante une courbe  $C_n$  graphe de  $\psi_n$ , avec  $0 < \alpha < \frac{1}{n^{a+\epsilon}}$ , pour les inégalités de 2.4, si  $u_n = (\theta_n, r_n) \in C_n$ ,  $\theta_n \sim -\frac{1}{4}$ , alors le cardinal de l'ensemble

$$\{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq [1/\alpha], F^i(u_n) = (\theta_n^i, r_n^i), \theta_n^i \leq \frac{1}{8}\}$$

est  $O(1/\alpha)$ , si  $n \rightarrow +\infty$ . Ceci force  $u_n$  à être proche comme  $O(e^{-1/n^\gamma})$  (si  $n \rightarrow +\infty$ , avec  $\gamma > 0$ ) de la variété stable locale du point fixe hyperbolique de  $F_{n,a}$  en  $(0,0)$ . Or, en 4.5, nous avons construit  $F_{n,a}$  avec une connexion homoclinique des variétés stable et instable, en un point  $(\theta_n, r_n) \sim (\frac{1}{4}, r_n)$ , de taille supérieure à  $O(e^{-1/n^\gamma})$ , si  $n \rightarrow +\infty$ . On aboutit ainsi à une absurdité.

Démonstration : Par 1.4 et 2.1, on suppose par l'absurde que si  $C_n$  existe pour  $n \geq N_0$  et  $|\alpha_n| < 1/n$ ,  $C_n$  est le graphe de  $\psi_n$ ; on a

$g_n = \text{Id} + \psi_n \in F_{\alpha_n}^0$ , pour un  $|\alpha_n| < n^{-a/2 - \varepsilon}$ , et  $\psi_n$  vérifie  $\psi_n - \psi_n \circ g_n^{-1} = \varphi_n$  où  $F_{n,a} = (\theta + r, r + \varphi_n(\theta + r))$ , ainsi que  $(g_n + g_n^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_n$ .

Par 4.5.4, on peut supposer que  $\alpha_n \neq 0$ , et quitte à remplacer  $g_n$  par  $g_n^{-1}$ , on peut supposer que  $\rho(g_n) = \alpha_n$  vérifie  $0 < \alpha_n < \frac{1}{n^{a/2 + \varepsilon}}$ . Par 4.5.3, 2.4.3 et 2.4.5, on a

$$\text{Max}(\|Dg_n - 1\|_{C^0}, \|Dg_n^{-1} - 1\|_{C^0}) \leq \text{Cte } n^{-a/2}$$

donc (cf. 2.4.7 et 2.4.8)

$$\|g_n - \text{Id} - \alpha_n\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|Dg_n - 1\|_{C^0} \leq \text{Cte } n^{-a/2}.$$

Il en résulte que

$$\|\psi_n\|_{C^0} = \|g_n - \text{Id}\|_{C^0} \leq \|g_n - \text{Id} - \alpha_n\|_{C^0} + |\alpha_n| \leq \text{Cte } n^{-a/2} + n^{-(a/2 + \varepsilon)}.$$

Il suit

①

$$\|\psi_n\|_{C^0} \leq C n^{-a/2}$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $n$ .

Comme  $\rho(g_n) = \alpha_n > 0$ , on a  $\psi_n > 0$ , et  $C_n$  qui est le graphe de  $\psi_n$  ne rencontre pas les variétés stable et instable du point fixe hyperbolique  $(0,0)$  de  $F_{n,a}$ . Si  $0 < K < 1/2$ , par 4.5.2 et 4.2, on a

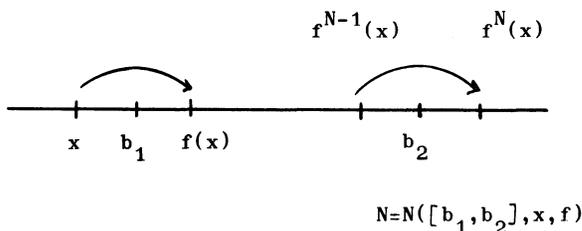
②

$$\psi_n(\theta) \geq C(K) n^{-a/2}, \text{ si } \theta \in ]K, 1-K[$$

pour  $n$  assez grand ( $C(K)$  est une constante dépendant seulement de  $K$  et  $a$ ). Soient  $[b_1, b_2] \subset \mathbb{R}$ , et  $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$  tel que  $0 < \rho(f) = \alpha < n^{-a/2 - \varepsilon}$ , on suppose que  $x \leq b_1 < b_2$  vérifie  $f(x) \geq b_1$ , on pose, si  $n \geq 2$ ,  $N([b_1, b_2], x, f) =$  le plus petit entier  $N \geq 0$  tel que  $f^N(x) > b_2$ ; puisque  $f$  préserve l'ordre, on a, si  $x_1 \neq x_2$ ,

CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE  $C^{3-\epsilon}$

$$|N([b_1, b_2], x_1, f) - N([b_1, b_2], x_2, f)| \leq 2 \quad .$$



Figure

On a l'inégalité :

③

$$N([b_1, b_1 + 1], x, f) \geq n^{a/2 + \epsilon} - 1$$

(car si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^1$ , invariante par l'homéomorphisme, induite sur  $\mathbb{T}^1$  par  $f$ , on a  $\mu([x, f(x)[) = \mu([f^i(x), f^{i+1}(x)[) = \alpha$  pour  $i \geq 0$ ).

Par ② on a

④

$$N([K, 1 - K], x, g_n) \leq C_1(K) n^{a/2}$$

où  $C_1(K)$  est une constante et  $n \gg 1$ .

On a

$$N([\frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \frac{1}{8}], x, g_n) \geq N([\frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \frac{3}{4} + \frac{1}{10}], x, g_n) - N([\frac{1}{8}, 1 - \frac{1}{8}], x_1, g_n) - 6 \quad ,$$

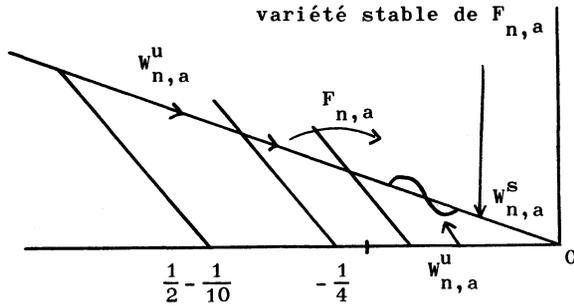
où  $x \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ , et  $x_1 \leq \frac{1}{8}$  et donc par ④ et ③ il suit que, si  $n \gg 1$ ,

⑤

$$N([\frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \frac{1}{8}], x, g_n) \geq C_2 n^{a/2 + \epsilon}$$

où  $0 < C_2 < 1$  est une constante indépendante de  $n$ .

Par la construction de 4.5, le difféomorphisme  $F_{n,a}$  a un point homoclinique en  $(0,0)$ .

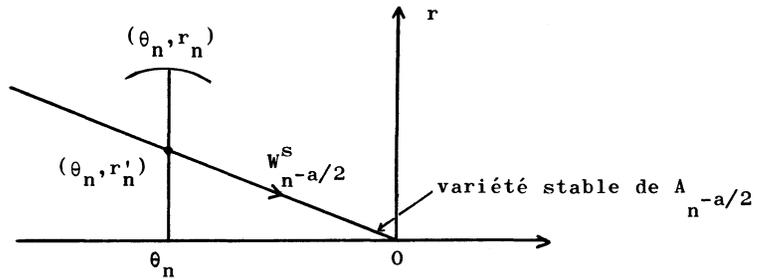


Figure

Par 4.5.1, il existe  $(\theta_n, r_n)$  appartenant à la variété instable de  $F_{n,a}$ , tel que, si  $(\theta_n, r'_n)$  appartient à la variété stable de  $A_{n^{-a/2}}$ , on ait :

$$r_n - r'_n \geq n^{-s_1},$$

$(\theta_n, r'_n)$  et  $(\theta_n, r_n) \in F_{n,a}(D_n)$ .



Figure

On se place dans les coordonnées  $(\vec{0x}_n, \vec{0y}_n)$ , où  $\vec{0x}_n$  = variété stable de  $A_{n^{-a/2}}$ ,  $\vec{0y}_n$  = variété instable de  $A_{n^{-a/2}}$ . Le point  $(\theta_n, r_n)$  devient  $(t_n, u_n)$  avec

⑥

$$u_n > C_3 n^{-s_1}$$

(où  $C_3$  est une constante  $> 0$  indépendante de  $n$ ).

Comme  $C_n$  est le graphe de  $\psi_n$ , la fonction  $\psi_n(\theta_n)$  est au-dessus de la

CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE  $C^{3-\epsilon}$

variété instable  $W_{a,n}^S$  et donc dans les coordonnées  $(0x_n, 0y_n)$

$b_n = (\theta_n, \psi(\theta_n)) = (w_n, z_n)$ , et par (6)

(7)

$$z_n > u_n > C_3 n^{-\epsilon_1}$$

De plus, on a

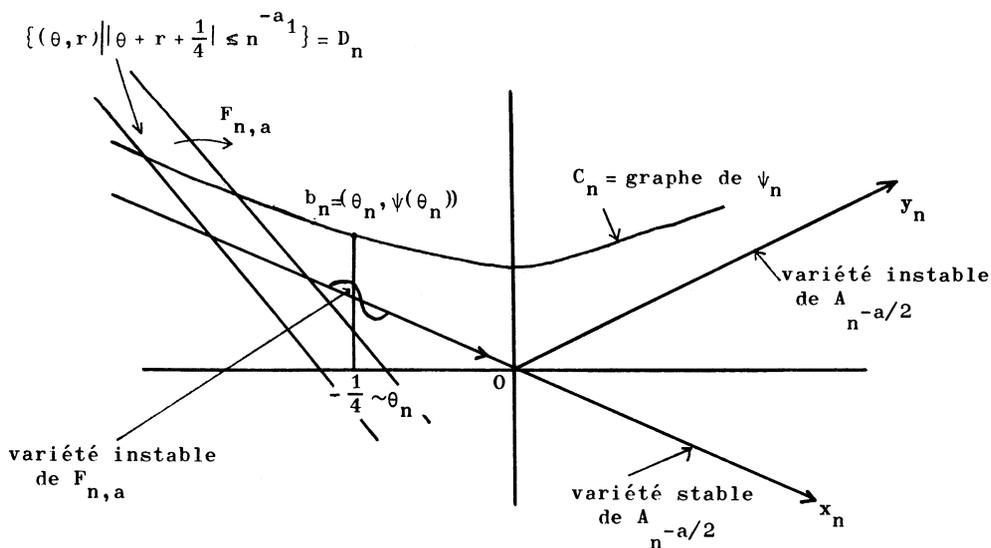
$$F_{n,a}(b_n) = A_{n,a}(b_n)$$

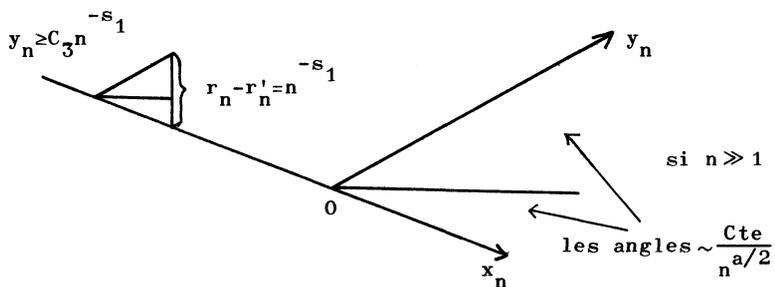
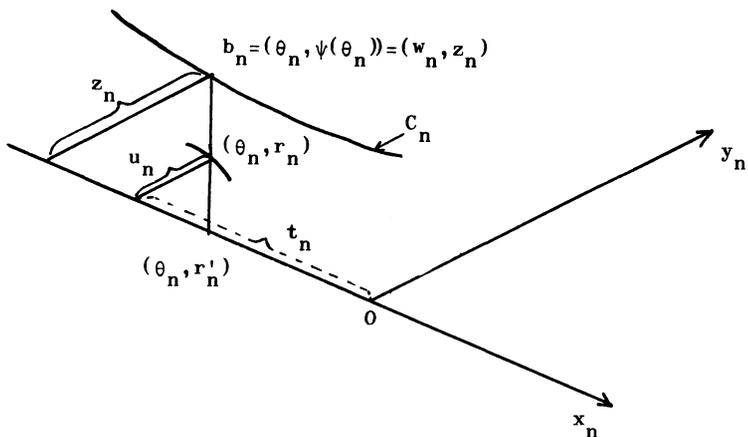
Par (5) on a

(8)

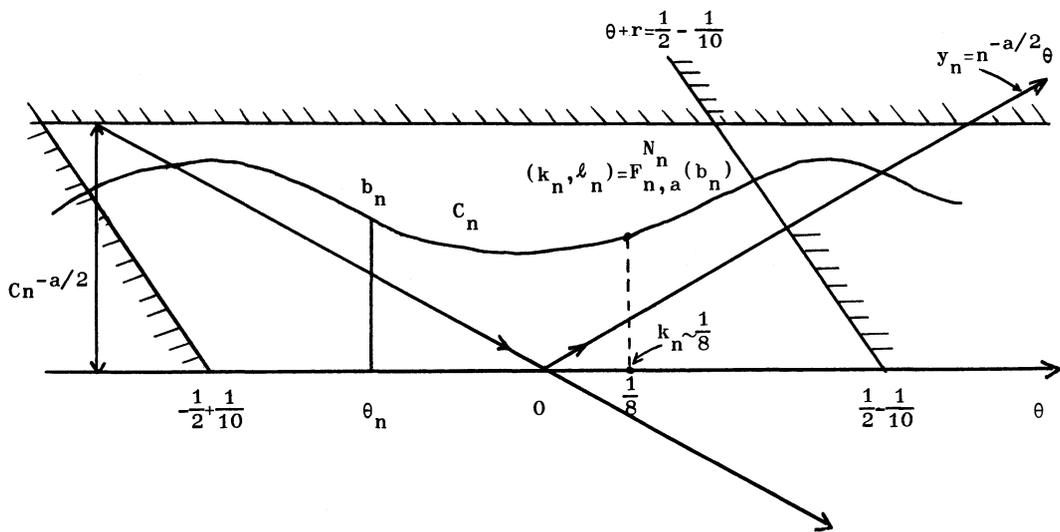
$$N_n = N([\theta_n, \frac{1}{8}], \theta_n, g_n) \geq C_2 n^{a/2 + \epsilon}$$

Par (1), on a, si  $n \gg 1$ , pour  $0 \leq i \leq N_n$ ,  $F_{n,a}^i(b_n) = A_{n,a}^i(b_n)$ , (puisque  $A_{n,a}^i(b_n) \notin D_n \pmod{1}$ , et  $A_{n,a}^i(b_n) \notin \{|\theta + r - \frac{1}{2}| < 1/10\}$ ).





Figures



Figure

$$k_n = g_n^{N_n}(\theta_n) \sim \frac{1}{8}$$

$$x_n = \left( \frac{1}{1+n^{-a/2}} - 1 \right) \theta$$

*CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE  $C^{3-\epsilon}$*

Dans les coordonnées  $(\vec{0x}_n, \vec{0y}_n)$  on a

$$A_n^{N_{n,a/2}}(b_n) = \left( \left( \frac{1}{1 + 1/n^{a/2}} \right)^{N_n} w_n, \left( 1 + \frac{1}{n^{a/2}} \right)^{N_n} z_n \right) .$$

On doit avoir (si  $n \gg 1$ )

⑨

$$\boxed{\left( 1 + \frac{1}{n^{a/2}} \right)^{N_n} z_n < 1}$$

(puisque  $F_{n,a}^{N_n}(b_n) = (k_n, \ell_n)$ , où  $\frac{1}{8} \leq k_n \leq \frac{1}{8} + \frac{Cte}{n^{a/2}}$  et  $0 < \ell_n < Cn^{-a/2}$  par ①).

Or, par ⑦ et ⑧, si  $n \rightarrow +\infty$ , comme  $0 < a/2$

$$C_3^{-s_1} \left( 1 + \frac{1}{n^{a/2}} \right)^{C_2 n^{a/2 + \epsilon}} \longrightarrow +\infty$$

( $s_1 > 0$  étant fixé).

Il suit que l'inégalité ⑨ est absurde et il ne peut donc pas exister de courbe  $C_n$  telle que  $\rho(F_{n,a}|_{C_n}) = \alpha_n$  vérifie  $0 < \alpha_n < n^{-a/2 - \epsilon}$ . Le théorème 4.6 est démontré. ■

**4.7 Remarques :** 1) Le théorème 4.6 est une évaluation précise : comme, pour  $n \gg 1$ ,  $F_{n,a}$  ne laisse pas invariant de cercle  $C$  plongé homotope à  $\{r = Cte\}$  vérifiant  $\rho(F_{n,a}|_C) = 0$ , par 2.5.1, il existe  $\epsilon_n > 0$  tel que  $F_{n,a}$  ne laisse pas invariant de cercle  $C$  plongé homotope à  $\{r = Cte\}$  et vérifiant  $\rho(F_{n,a}|_C) \in ]-\epsilon_n, \epsilon_n[$ . Ce que montre le théorème, c'est que  $\epsilon_n = n^{-a/2 - \epsilon}$  convient.

2) Comme le difféomorphisme  $F_{n,a}$  a la propriété d'intersection (1.2) et comme on peut supposer que, si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $F_{n,a} \rightarrow t$  dans la  $C^k$ -topologie, où  $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$  (4.5), par le théorème de J. Moser [1] (voir aussi Herman [2]) pour  $k \geq k_0$ , si  $n$  est assez grand,  $F_{n,a}$  laissera invariant une infinité de courbes plongées de classe  $C^\infty$

qui seront des graphes de fonctions de classe  $C^\infty$  du cercle  $\mathbb{T}^1$ .

3) C'est parce que je ne sais pas si le difféomorphisme  $f_{n,a}$  vérifie le Théorème de 4.6 (avec  $\alpha \neq 0$ ) qu'il a été nécessaire de perturber  $f_{n,a}$  en  $F_{n,a}$ . Ce que montre la démonstration de 4.6, c'est que si le difféomorphisme  $f_{n,a}$  laisse invariant une courbe  $C_\alpha$  vérifiant les conditions du théorème 4.6 (où  $C_\alpha$  vérifie  $\rho(f_{n,a}|_{C_\alpha}) = \alpha > 0$ ), alors si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $C_\alpha$  est "très proche" de  $C_0$  (i.e. comme  $O(e^{-1/n^\gamma})$ , si  $n \rightarrow +\infty$  avec  $\gamma > 0$ ).

#### 4.8 Revêtements finis.

4.8.1 On se donne  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  où  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ ,  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ . Par 2,  $f$  a un cercle invariant  $C$ , graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , et tel que  $\rho(f|_C) = \alpha$  si et seulement s'il existe  $g \in F_\alpha^0$  vérifiant  $(g + g^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \in D^0(\mathbb{T}^1)$ .

4.8.2 Soit pour  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$ , l'homothétie de  $\mathbb{R}$ ,  $h_q(x) = qx$ . L'application  $g \in D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \tilde{g} = h_q^{-1} \circ g \circ h_q \in D^0(\mathbb{T}^1)$  est un homomorphisme de groupe et on a

$$\tilde{g}(x) = x + \frac{1}{q} \psi(qx) \quad \text{si } g = \text{Id} + \psi \quad ;$$

$$\tilde{g} \circ R_{1/q} = R_{1/q} \circ \tilde{g} \quad ; \quad \rho(\tilde{g}) = \rho(g)/q$$

et si  $p \in \mathbb{Z}$  
$$\rho(R_p \circ \tilde{g}) = \rho(g)/q + \frac{p}{q}$$

(le lecteur pourra consulter Herman [1, XI.2]).

4.8.3 On suppose que  $(g + g^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi$  pour  $g \in F_\alpha^0$ . Soit  $\tilde{g} = h_q^{-1} \circ g \circ h_q$ , on a

$$(\tilde{g} + \tilde{g}^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}$$

où  $\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{q} \varphi(qx)$ .

4.8.4 Proposition : Soient  $\tilde{g} \in F_\beta^0$ ,  $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  vérifiant

$$\tilde{\Phi}(\tilde{g}) = \frac{\tilde{g} + \tilde{g}^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi} \circ R_{1/q} = \tilde{\varphi} \quad ,$$

alors, si  $p \in \mathbb{Z}$ , il existe  $g \in F_{q\beta-p}^0$  vérifiant

$$(g + g^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \quad , \quad \varphi = q \tilde{\varphi} \circ h_q^{-1} \quad .$$

Démonstration : Par 2.5,  $\tilde{g}$  est unique puisque  $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et comme  $R_{1/q}^{-1} \circ \tilde{h} \circ R_{1/q} = \tilde{h}$ ,  $\tilde{h} = \text{Id} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}$ , on a, puisque  $\tilde{\Phi}(R_{-1/q} \circ \tilde{g} \circ R_{1/q}) = \tilde{h}$ ,

$$R_{-1/q} \circ \tilde{g} \circ R_{1/q} = \tilde{g} \quad .$$

Soient  $g = h_q \circ \tilde{g} \circ h_q^{-1}$ ,  $h = h_q \circ \tilde{h} \circ h_q^{-1}$ , on a, si  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$(R_{-p} \circ g + (R_{-p} \circ g)^{-1})/2 = h \quad ,$$

mais  $R_p \circ g$  et  $h \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , et de plus  $\rho(R_{-p} \circ g) = q\beta - p$ . ■

4.8.5 Soient  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ ,  $\varphi \in V^k$ ,  $k \geq 1$ , et  $q \in \mathbb{N}^*$ , on associe à  $f$   $\tilde{f}(\theta + r) = (\theta + r, r + \tilde{\varphi}(\theta + r))$ ,  $\tilde{\varphi}(\theta) = \frac{1}{q} \varphi(q(\theta))$ .

Comme  $\|D\tilde{\varphi}\|_{C^0} = \|D\varphi\|_{C^0}$ ,  $\tilde{\varphi} \in V^k$ , il suit de 4.8.4 que  $\tilde{f}$  a un cercle  $\tilde{C}$  invariant (homotope à  $r = \text{Cte}$ ) et vérifiant  $\rho(\tilde{f}|_{\tilde{C}}) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  si et seulement si  $f$  laisse invariant un cercle plongé  $C$  (homotope à  $r = \text{Cte}$ ) et vérifiant  $\rho(f|_C) = q\alpha - p$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

4.9 Théorème : Soient  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et  $\epsilon > 0$ . Alors il existe une suite de difféomorphismes de classe  $C^\infty$ ,  $\tilde{f}_n(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_n(\theta + r))$  vérifiant  $\int_0^1 \varphi_n(\theta) d\theta = 0$ , telle que, si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\tilde{f}_n \rightarrow t$  dans la  $C^{3-\epsilon}$ -topologie

$(t(\theta, r) = (\theta + r, r))$ , et pour  $n$  assez grand,  $\bar{f}_n$  ne possède pas de cercle plongé  $C$  (homotope à  $r = \text{Cte}$ ) et tel que  $\rho(\bar{f}_n|_C) = \alpha$ .

Remarque : Par 2.5.8 le théorème reste vrai si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

Démonstration : Soit  $(F_{n,a})_{n \geq 1}$  la suite définie en 4.5. On se fixe  $1 < a < 2$ ,  $2-a < \varepsilon/2$ .

On pose, si  $i \geq 1$ ,

$$f_i(\theta, r) = (\theta + r, r + \frac{1}{i} \varphi_{i,a}(i(\theta+r))),$$

où  $F_{i,a}(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_{i,a}(\theta+r))$ .

Par l'analogie de 3.2, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $f_i - t \rightarrow 0$  de la  $C^{3-\varepsilon}$ -topologie

(on a  $\|f_i - t\|_{C^0} = O(\frac{1}{i^{a+1}})$ ,  $\|Df_i - Dt\|_{C^0} = O(\frac{1}{i^a})$ ,  $\|D^2 f_i - D^2 t\|_{C^0} = O(\frac{1}{i^{a-1}})$

et  $\|D^3 f_i - D^3 t\|_{C^0} = O(\frac{1}{i^{a-2}})$  et il suffit d'appliquer l'inégalité de convexité de 3.2).

Soit  $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des réduites de  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , on a  $|\alpha - (p_n/q_n)| < q_n^{-2}$

et donc  $|q_n \alpha - p_n| < q_n^{-1}$ .

La suite  $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la sous-suite de  $(f_i)$

$$\bar{f}_n = f_{q_n}, \quad \text{si } n \in \mathbb{N},$$

en effet, par 4.8.5 et 4.6, la suite  $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie toutes les conditions de 4.9. ■

4.10 Remarques : - Pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , la suite  $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une sous-suite de la suite  $(f_i)$ .

- En général, la suite  $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une infinité de courbes invariantes de classe  $C^\infty$  (pour voir ceci, il suffit d'appliquer 4.7.2 et 4.8).

4.11 Théorème : Soient  $\epsilon > 0$ ,  $\beta \geq 1$ , ( $\beta \in \mathbb{R}$ ) et  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  tel qu'il existe une infinité de nombre  $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ ,  $q_n \geq 1$ ,  $(p_n, q_n) = 1$  vérifiant

$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{\beta+1}}$  . Alors il existe une suite de difféomorphismes de classe

$C^\infty$ ,  $\bar{f}_n(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_n(\theta + r))$ ,  $\int_0^1 \varphi_n(\theta) d\theta = 0$ , telle que, si  $n \rightarrow +\infty$ ,

$\bar{f}_n \rightarrow t$  dans la  $C^{2\beta+1-\epsilon}$ -topologie et, pour  $n$  assez grand,  $\bar{f}_n$  ne laisse pas invariant de cercle plongé  $C$  (homotope à  $\{r = Cte\}$ ) tel que l'on ait

$$\rho(\bar{f}_n|C) = \alpha \quad .$$

Démonstration : On choisit le nombre  $k$  de 4.5 tel que  $k > 2\beta + 1$ , et le nombre  $a$ ,  $1 < a < 2\beta$  vérifiant  $2\beta - a > \frac{\epsilon}{2}$ . On définit la suite  $(F_{n,a})_{n \geq 1}$  comme en 4.5. On définit la suite de difféomorphismes  $f_i$  comme en 4.10. Par les inégalités d'interpolation de 3.2, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $f_i \rightarrow t$  dans la  $C^{2\beta-\epsilon+1}$ -topologie. Comme  $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{\beta+1}}$ , on a  $|q_n \alpha - p_n| < q_n^{-\beta}$ . La suite cherchée est la sous-suite de  $(f_i)_{i \geq 1}$  définie par  $\bar{f}_n = f_{q_n}$ ,  $n \geq 1$ . Le reste de la démonstration est analogue à 4.9. ■

4.12 Par le théorème de Rüssmann [1], si le nombre  $\alpha$  de 4.11 satisfait à une condition diophantienne : il existe  $\gamma > 0$  tel que pour  $p/q \in \mathbb{Q}$ , on ait  $|\alpha - (p/q)| \geq \gamma q^{-\beta-1}$ , et si la suite  $(f_n)$  tend vers le difféomorphisme  $t$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , dans la  $C^{2\beta+1+\epsilon}$ -topologie (pour un  $\epsilon > 0$ ), alors pour  $n$  assez grand  $f_n$  laisse invariant un cercle  $C_n$  (homotope à  $\{r = Cte\}$ ) tel que l'on ait

$$\rho(f_n|C_n) = \alpha \quad .$$

On a ceci pour  $\|f_n - t\|_{C^{2\beta+1+\epsilon}} \leq C(\gamma)$ , où  $C(\gamma)$  est une constante dépendant seulement de  $\gamma$ . (Si le nombre  $\alpha$  est de type constant, le lecteur peut consulter le chapitre IV.)

La démonstration montre que la constante  $C(\gamma)$  est majorée par  $\gamma^2 C_1(\beta)$  où  $C_1(\beta)$  est une constante ne dépendant que de  $\beta$ . Une constante ayant une majoration de la forme  $\gamma^{2-\varepsilon} C_2(\beta)$  ne conviendrait pas. Pour voir ceci il suffit de considérer des nombres  $\alpha_N$  qui vérifient : étant donné un entier  $N$  les réduites  $p_n/q_n$  de  $\alpha_N$  satisfont

$$|\alpha_N - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{\beta+1+\varepsilon}} \quad , \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N$$

$$|\alpha_N - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{1}{3q_n} \quad , \quad \text{si } n > N \quad .$$

On construit facilement de tels nombres  $\alpha_N$  par leurs développements en fractions continues  $\alpha_N = [a_0, a_{-1}, \dots]$  en supposant que  $a_n = 1$ , si  $n > N+1$ .

On a  $|\alpha_N - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma_N}{q^{\beta+1}}$  où  $\gamma_N \leq \frac{1}{q_N^\varepsilon}$  (cf. Herman [1, Chap. V, § 7]). Il suffit d'appliquer 4.11 en supposant que l'entier  $N$  est beaucoup plus grand que l'entier à partir duquel le théorème 4.11 est vrai.

**4.13 Remarque :** On vérifie que le théorème de 4.6 reste valable si  $\alpha$  vérifie  $|\alpha| < 1/(n^{a/2} \text{Log } n(\text{Log } \text{Log } n))$  (le point important étant que, si  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$C_3 n^{-s} \left(1 + \frac{1}{n^{a/2}}\right)^{n^{a/2} \text{Log } n (\text{Log } \text{Log } n)} \longrightarrow +\infty \quad .$$

Soit  $0 < \varepsilon < 1$ , alors pour Lebesgue presque tout  $\alpha$  l'inéquation

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2 \text{Log } q (\text{Log } \text{Log } q)^{1-\varepsilon}}$$

a une infinité de solutions  $p/q \in \mathbb{Q}$  puisque la série

$$\sum_{q \gg 1} \frac{1}{q \text{Log } q (\text{Log } \text{Log } q)^{1-\varepsilon}}$$

diverge (c'est un cas particulier du théorème de Borel-Bernstein).

Soit  $\alpha$  un tel nombre ( $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ) et  $p_n/q_n$ ,  $(p_n, q_n) = 1$ , vérifiant l'inéquation.

Alors il existe une suite de difféomorphismes  $\bar{f}_n$  comme en 4.9 telle que  $\bar{f}_n \rightarrow t$  dans la  $C^3$ -topologie et pour  $n$  assez grand  $\bar{f}_n$  ne laisse pas invariant de cercle plongé  $C$  (homotope à  $\{r = Cte\}$ ) et tel que l'on ait  $\rho(f_n|C) = \alpha$ .

(Il suffit de faire la même démonstration qu'en 4.9 en considérant  $F_{n,a}$ , où  $n$  est la partie entière de  $q(\text{Log Log } q)^{\epsilon/2}$  pour  $q \gg 1$  et entier.)

**4.14 Remarque** : En utilisant 4.13, le théorème 4.9 reste valable si  $f_n \rightarrow t$  dans la  $C^{2+w}$ -topologie, où  $w$  est le module de continuité de la fonction  $x \rightarrow x(\text{Log } \frac{1}{x})(\text{Log Log } \frac{1}{x})^a$  pour  $x \rightarrow 0$  et  $a > 0$ .

Nous retrouverons au chapitre III un résultat analogue.

\*  
\*  
\*



## CHAPITRE III

### CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY ET CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE $C^{3-\varepsilon}$ AU THÉORÈME DES COURBES INVARIANTES AYANT UN NOMBRE DE ROTATION FIXÉ

#### 0. NOTATIONS.

Pour  $r = 0$ , ou  $r \in \mathbb{R}_+$ , ou  $r = +\infty$ , on note

$$D^r(\mathbb{T}^1) = \{f \in \text{Diff}_+^r(\mathbb{R}) \mid f - \text{Id} \text{ est } \mathbb{Z}\text{-périodique}\} ,$$

où  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{R})$  est le groupe des difféomorphismes de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}$  préservant l'orientation.  $D^r(\mathbb{T}^1)$  est le groupe revêtement universel du groupe des difféomorphismes de classe  $C^r$  de  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  qui préservent l'orientation, groupe noté par  $\text{Diff}_+^r(\mathbb{T}^1)$ . On note aussi  $\text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1) = \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1)$ .

Si  $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ ,  $\rho(f) \in \mathbb{R}$  est son nombre de rotation. On note par  $R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha$  les translations de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{T}^1$ . On identifie  $C^r(\mathbb{T}^1)$  et  $\{\varphi \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \varphi \text{ est } \mathbb{Z}\text{-périodique}\}$ . Avec la  $C^r$ -topologie,  $C^r(\mathbb{T}^1)$  est une algèbre de Banach.

Dans l'annexe ( $A_1$  à  $A_{16}$ ) nous en définissons les espaces  $C^{r+w}$ , avec  $r \in \mathbb{N}$ , et  $w$  un module de continuité, et nous en rappelons les principales propriétés. On définit les groupes  $D^{r+w}(\mathbb{T}^1)$  ( $r \geq 1$ ) et la  $C^{r+w}$ -topologie en  $A_9$  et  $A_{10}$ . Si  $r \in \mathbb{N}$  et  $\varphi \in C^r$ ,  $D^r\varphi$  désigne la dérivée  $r$ -ième de  $\varphi$ . On note aussi, si  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ ,

$$\|\varphi\|_{C^0} = \sup_x |\varphi(x)| .$$

On note les fonctions lipschitziennes  $\mathbb{Z}$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\text{Lip}(\mathbb{T}^1) = \{ \varphi \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}) \mid \text{Lip}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} < +\infty \} .$$

Pour la norme  $\| \cdot \|_{C^0} + \text{Lip}(\cdot)$ , l'espace  $\text{Lip}(\mathbb{T}^1)$  est une algèbre de Banach. Sur un sous-espace de  $C^0(\mathbb{T}^1)$  la topologie induite par la  $C^0$ -topologie est aussi appelée la  $C^0$ -topologie.

### 1. INTRODUCTION.

On se propose en 5 de donner une nouvelle démonstration d'un résultat du chapitre II : soient  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe une suite  $(\varphi_i)_i \in C^{3-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  $\int_0^1 \varphi_i(\theta) d\theta = 0$ , si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $\| \varphi_i \|_{C^{3-\varepsilon}} \rightarrow 0$  ; telle que la suite de difféomorphismes  $f_i(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_i(\theta + r))$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  vérifie pour tout  $i$  :  $f_i$  ne laisse pas de courbe invariante  $C_i$  homotope à  $\{r = \text{Cte}\}$  vérifiant  $\rho(f_i | C_i) = \alpha$ .

En fait, nous obtenons un peu mieux puisque  $\varphi_i \in C^{2+w_1}$  et  $\| \varphi_i \|_{C^{2+w_1}} \rightarrow 0$

avec  $i \rightarrow +\infty$ , où  $w_1$  est le module de continuité de la fonction  $x(\text{Log } \frac{1}{x})^{2+2\delta}$ , si  $x \rightarrow 0$ , ( $\delta > 0$ ).

Par [I] et [II.2] il suffit de voir que

$$h_i = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_i \circ \xi \circ \hat{\varphi}_\alpha^0$$

où  $\hat{\varphi} : g \in D^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \frac{g+g^{-1}}{2} \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , et  $F_\alpha^r = \{f \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$ .

Le plan est le suivant :

Au § 2, on montre que si  $g \in F_\alpha^0$  est un contre-exemple de Denjoy ( $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ) et si  $h = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi = \hat{\varphi}(g)$  est tel que  $\text{Lip}(\frac{1}{2} \varphi)$  est assez petit, on peut perturber  $\frac{1}{2} \varphi$  en  $\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} (\varphi + \Delta\varphi)$  (avec  $\Delta\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$ ,  $\int_0^1 \Delta\varphi(\theta) d\theta = 0$ ,  $\Delta\varphi$  est aussi  $C^\infty$ -voisin de 0 que l'on veut) pour que l'on ait  $h + \frac{1}{2} \Delta\varphi \circ \xi \circ \hat{\varphi}_\alpha^0$ .

CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY

Ceci donne un exemple très simple d'un ensemble de Cantor invariant par un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  qui est l'unique ensemble de Cantor minimal associé à celui de  $g$ , mais néanmoins le difféomorphisme  $(f + \Delta f)(\theta, r) = (\theta + r, r + (\varphi + \Delta\varphi)(\theta + r))$  ne laisse pas de courbe invariante  $C$  homotope à  $\{r = \text{Cte}\}$  vérifiant  $\rho(f|C) = \alpha$ . Voir à ce propos l'article de J. Mather [M].

Au § 3, nous rappelons la construction d'un contre-exemple de Denjoy  $g$ ,  $\rho(g) = \alpha$ , obtenu en perturbant la rotation  $R_\alpha$  et tel que  $Dg|_K = 1$  où  $K$  est l'unique ensemble minimal non vide invariant par  $g$ .

Le lecteur se rapportera à [H, X.3] pour plus de détails. On peut supposer en construisant  $K$  et  $g$  de façon ad hoc que  $g \in D^{1+w}(\mathbb{T}^1)$  où  $w(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta}$  si  $x \rightarrow 0$ , où  $\delta > 0$  et tel que  $g$  soit  $C^{1+w}$ -voisin de  $R_\alpha$ . On a de plus

$$Dg - 1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n \psi_n,$$

où  $k_n \in \mathbb{R}^*$ , et les  $\psi_n$  sont de classe  $C^\infty$  et ont leurs supports deux à deux disjoints.

Au § 4, on montre que si  $g$  est un contre-exemple de Denjoy construit en 3 alors

$$\Phi(g) \in D^{2+w_1}(\mathbb{T}_1),$$

où  $w_1$  est le module de continuité de la fonction  $x(\text{Log } \frac{1}{x})^{2+2\delta}$ ,  $\delta > 0$ .

On gagne une unité et on a  $\Phi(g) \in D^{2+w_1}(\mathbb{T}^1) \subset D^{3-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$  (pour tout  $\varepsilon > 0$ ).

On peut faire dépendre  $g$  d'un paramètre  $k \gg 1$  et s'assurer que  $\Phi(g)(k)$  est  $C^{2+w_1}$ -borné et, si  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\Phi(g)(k) \rightarrow \text{Id}$  dans la  $C^0$ -topologie. Toute la démonstration se ramène, en utilisant 3.5.1, à estimer

$$\|k_n \psi_n - k_{n+1} \psi_{n+1} \circ g^{-1}\|_{C^{1+w_1}}.$$

Au § 5, on démontre le résultat cité au début (qui suit immédiatement du § 2 et du § 5).

Pour étudier les difféomorphismes  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  qui ont une courbe invariante de nombre de rotation  $\alpha$ , tout revient par [II, 2] à étudier  $\Phi(F_\alpha^0)$ .

Soit  $V_\delta^r = \{h = \text{Id} + \varphi \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0, \|\varphi\|_{C^r} \leq \delta\}$ ,  $\delta > 0$ .

On rappelle que, pour tout  $\delta > 0$ , si le difféomorphisme  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  vérifie  $\text{Id} + \varphi \in V_\delta^1$ , alors la théorie de Birkhoff [I] s'applique.

On montre par exemple en 6 que, si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et si  $0 < \delta$ ,  $\Phi(F_\alpha^1) \cap V_\delta^1$  est nulle part dense dans  $V_\delta^1$  pour la  $C^1$ -topologie.

Au § 7, on montre que si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et  $0 < \delta$ ,  $\Phi(F_\alpha^0) \cap V_\delta^{2+\beta}$  n'est pas convexe ( $0 < \beta < 1$ ) et  $\Phi(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap V_\delta^1$  ne l'est pas non plus.

Au § 8, on montre que  $\Phi(F_\alpha^0) \cap V_\delta^1$  n'est pas étoilé par rapport à l'identité.

La remarque 2 de 8.9 montre que  $\Phi(F_\alpha^\infty) \cap V_\delta^1$  peut devenir grand pour la  $C^{1+\varepsilon}$ -topologie ( $\varepsilon > 0$ ) dans certaines directions.

L'exemple 8.2 suggère qu'il n'y a pas de critère simple pour savoir si  $h \in \Phi(F_\alpha^0)$ . On peut même conjecturer que  $\Phi(F_\alpha^0) \cap D^\infty(\mathbb{T}^1) \cap V_\delta^1$  a des propriétés topologiques ténues (cf. 7.4).

Le § 9 contient des remarques sur les chemins  $t \geq 0$ ,  $g_t = \text{Id} + \frac{t}{2} \varphi$ . Dans un contexte différent de R. Hall [HA] a obtenu l'existence d'un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ ,  $F$  laissant invariante une courbe lipschitzienne  $C$  telle que  $F|_C$  soit un contre-exemple de Denjoy. J. Harrisson [HS] a obtenu un résultat analogue,  $F$  étant seulement de classe  $C^2$  et la courbe  $C$  seulement de classe  $C^0$ .

## 2. MODIFICATIONS DES CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY.

2.1 On se donne  $\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ , vérifiant  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ . A la fonction  $\varphi$  on associe l'homéomorphisme "twist" de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  qui préserve la mesure

CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY

de Lebesgue  $d\theta \otimes dr$  :

$$f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r)) \quad .$$

On suppose que  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  est telle que le graphe de  $\psi$  est invariant par  $f$ .

Soit  $g(\theta) = \theta + \psi(\theta) \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1)$ . On a

$$\mathfrak{g}(g) = \frac{1}{2} (g + g^{-1}) = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \in H^0 \subset D^0(\mathbb{T}^1)$$

(i.e. on a par [II, 2.3.2]  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$ ).

2.2 Lemme : Soit  $M_0 = 1 + \frac{1}{2} a_+ + (a_+ + \frac{1}{4} a_+^2)^{1/2}$ , où  $a_+ = \sup_{y-x \neq 0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x}$

( $a_+ \leq a = \text{Lip}(\varphi)$ ), alors on a, pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{M_0} |x - y| \leq |g(x) - g(y)| \leq M_0 |x - y| \quad .$$

Démonstration : Soit  $M = \sup_{x \neq y} (\text{Max}(\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}, \frac{|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|}{|x - y|}))$  ,

$M \in [1, +\infty]$ .

Si  $x < y$ , on a

$$\frac{1}{2} \left( \frac{-g(x) + g(y)}{y-x} + \frac{g^{-1}(y) - g^{-1}(x)}{y-x} \right) \leq 1 + \frac{a_+}{2} \quad ,$$

et donc  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + M \right) \leq 1 + \frac{a_+}{2}$ , d'où il résulte

$$M \leq M_0 \quad . \quad \blacksquare$$

2.3 Corollaire : Il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que, si  $a = \text{Lip}(\varphi) < \varepsilon_1$ ,

$$\sup (\text{Lip}(g - \text{Id}), \text{Lip}(g^{-1} - \text{Id})) < \frac{1}{4} \quad .$$

Démonstration : Elle est semblable à [II, 2.4.7].  $\blacksquare$

2.4 Modifications des contre-exemples de Denjoy.

Soit  $\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$  et  $\text{Lip}(\varphi) < \varepsilon_1 < 1$ . On perturbe  $\varphi$  par  $\Delta\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ ,  $\int_0^1 \Delta\varphi(\theta) d\theta = 0$ ,  $\text{Lip}(\varphi + \Delta\varphi) < \varepsilon_1$  et  $\text{support}(\Delta\varphi) \subset ]\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta[$ ,  $\eta > 0$ .

Soient  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$ , et  $\tilde{f}(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r) + \Delta\varphi(\theta + r))$ .

On a :

$$f(\theta, r) = \tilde{f}(\theta, r)$$

si  $(\theta, r) \in \{(\theta, r) \mid |\theta + r - \theta_0| \leq \eta\} = A_{\theta_0, \eta}$ .

Si  $C$  est le graphe de  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ , et si  $C$  est un cercle invariant par  $f$ , on a

(a)  $I = C \cap A_{\theta_0, \eta}$  est un intervalle de  $C$  (les droites  $\theta + r - \theta_0 = \pm\eta$  coupent  $C$  en un seul point car  $C$  est un graphe et  $f(A_{\theta_0, \eta}) = \{(\theta, r) \mid |\theta - \theta_0| \leq \eta\}$ );

(b)  $f|_C(x) = \tilde{f}|_C(x)$  si  $x \in I$  ;

$$f^{-1}|_C(x) = \tilde{f}^{-1}|_C(x) \text{ si } x \in f(I) .$$

On suppose que  $g = \text{Id} + \psi$  est un contre-exemple de Denjoy,  $\rho(g) = \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , et que  $\bar{K}$  est l'unique ensemble de Cantor qui soit minimal et invariant pour l'action de  $g$  sur  $\mathbb{T}^1$ . Soit  $I_0$  une composante connexe de  $(\text{Id} \times \psi)(\mathbb{T}^1 - \bar{K})$  dans  $(\text{Id} \times \psi)(\mathbb{T}^1)$  où  $(\text{Id} \times \psi)(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$ . On note  $K = (\text{Id} \times \psi)(\bar{K})$ .

2.5 Théorème : On suppose que  $\varepsilon_1 > 0$  est donné par 2.3. On se donne  $g$ , un contre-exemple de Denjoy et  $\varphi$  tels que  $\frac{g + g^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi$  avec  $\text{Lip}(\varphi) < \varepsilon_1$ .

On perturbe  $f(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$  en  $\tilde{f}$  par  $\Delta\varphi \neq 0$ , avec  $\Delta\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ ,  $\int_0^1 \Delta\varphi(\theta) d\theta = 0$  ;  $\text{Lip}(\varphi + \Delta\varphi) < \varepsilon_1$ .

On suppose que  $I \subset I_0 \subset (C = \text{graphe } \psi) - K$ . Alors  $\tilde{f}$  n'a pas de courbe invariante  $C_1$  qui soit le graphe  $\psi_1 \in C^0(\mathbb{T}^1)$  tel que l'on ait

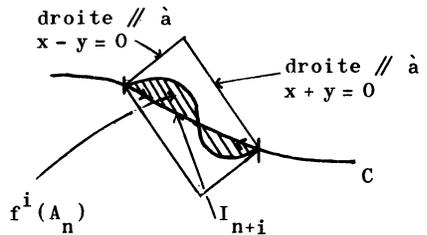
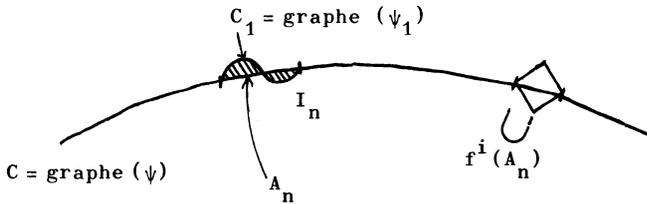
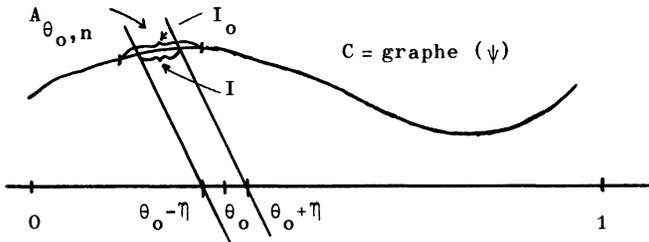
$$\rho(\tilde{f}|_{C_1}) = \alpha .$$

CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY

**Démonstration** : Par [II, 2] on a  $f(\theta, \psi(\theta)) = (g(\theta), \psi(g(\theta)))$  puisque la courbe  $C$  est invariante. Ceci s'écrit :

$$g(\theta) = \theta + \psi(\theta) \quad , \quad \psi(g(\theta)) = \psi(\theta) + \varphi(g(\theta))$$

ou encore  $\frac{g+\psi}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi$ . Il suit que l'ensemble de Cantor  $K = (\text{Id} \times \psi)(\bar{K})$  est invariant par  $f$ .



Figures

(Noter que les extrémités de  $I_n$  sont dans  $K$ ,  $\tilde{f}|_K = f|_K$ .  
 $K = (\text{Id} \times \psi)(\bar{K})$  ensemble de Cantor invariant par  $f$  et  $\tilde{f}$ .)

Supposons par l'absurde que  $\psi_1$  existe. Alors

$$g_1(\theta) = \theta + \psi_1(\theta) \in \text{Homéo}_+(\mathbb{T}^1) \quad , \quad \rho(g_1) = \alpha \quad .$$

Soit  $\tilde{K}$  l'unique ensemble de Cantor invariant et minimal pour l'action de  $g$  sur  $\mathbb{T}^1$  ;  $f$  et  $\tilde{f}$  laissent invariant l'ensemble de Cantor  $K = (\text{Id} \times \psi)(\tilde{K})$ .

2.6 Lemme : On a  $C_1 \cap C \supset K$ , avec

$$C = \text{graphe } \psi \quad \text{et} \quad C_1 = \text{graphe } \psi_1 \quad .$$

Démonstration : Il existe par [H, II 4.15] un  $\theta_1 \in \mathbb{T}^1$  tel que l'on ait

$$\psi(\theta_1) = \psi_1(\theta_1) \quad \text{puisque} \quad \rho(g) = \rho(g_1) = \alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad .$$

Si  $(\theta_1, \psi(\theta_1)) \in K$ , le lemme est démontré.

Soient  $I_n = f^n(I_0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; ces intervalles sont deux-à-deux disjoints.

On a aussi, pour tout  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $\alpha_g(x) = \bar{K}$  et  $\omega_g(x) = \bar{K}$ , où  $\alpha_g(x)$  (resp.  $\omega_g(x)$ ) désigne l'ensemble  $\alpha$ -limite (resp.  $\omega$ -limite) par l'action de  $g$  sur  $x$ . Comme

$$f|_C(x) = \tilde{f}|_C(x) \quad \text{si} \quad x \notin I_0$$

$$f^{-1}|_C(x) = \tilde{f}^{-1}|_C(x) \quad \text{si} \quad x \notin f(I_0) \quad ,$$

si  $(\theta_1, \psi_1(\theta_1)) \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ , comme  $f(C) = C$ ,  $\tilde{f}(C_1) = C_1$ , alors

$f^n(\theta_1, \psi_1(\theta_1)) \in C_1 \cap C$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  et donc  $C \cap C_1 \supset K$  ( $f|_K = \tilde{f}|_K$  est un homéomorphisme minimal). Si  $(\theta_1, \psi_1(\theta_1)) \in \bigcup_{n \geq 1} I_n$ , on a, pour  $n \geq 1$ ,

$f^n(\theta_1, \psi_1(\theta_1)) \in C_1 \cap C$ , et donc  $C_1 \cap C \supset K$  (car  $f|_{I_n} = \tilde{f}|_{I_n}$  pour  $n \geq 1$ ).

Si  $(\theta_1, \psi_1(\theta_1)) \in \bigcup_{n \leq 0} I_n$ , alors, si  $n \leq 0$ ,  $f^n(\theta_1, \psi_1(\theta_1)) \in C_1 \cap C$ , et donc

$C_1 \cap C \supset K$ , (car  $f|_{I_n} = \tilde{f}|_{I_n}$  pour  $n \leq 0$ ). ■

Fin de la démonstration du théorème 2.5 : Comme

$$f|_C(x) = \tilde{f}|_C(x) \quad \text{si } x \in I_0$$

$$f|_C^{-1}(x) = \tilde{f}|_C^{-1}(x) \quad \text{si } x \in f(I_0) \quad ,$$

et que  $\Delta\varphi \neq 0$ , il existe  $\theta \in \mathbb{T}^1$  tel que l'on ait  $(\theta, \psi(\theta)) \in I$  et vérifiant  $\psi_1(\theta) \neq \psi(\theta)$  ; car sinon, puisque  $\tilde{f}$  possède une unique courbe  $C_1$ , graphe de  $\psi_1 \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , invariante telle que  $\rho(\tilde{f}|_{C_1}) = \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , on aurait  $\psi_1 \equiv \psi$  et donc  $\Delta\varphi = 0$ .

Si  $(\theta, \psi(\theta)) \in I_n$ ,  $n \geq 1$ , les graphes de  $\psi$  et  $\psi_1$  limitent une région  $A_n$  d'aire finie non nulle et comme  $\psi(\theta) = \psi_1(\theta)$ , si  $\theta \in K$ , on peut supposer par le lemme 2.6 que  $A_n$  s'appuie sur  $I$ . Comme les extrémités de  $I_{n+i}$  sont dans  $K$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\text{si } i \rightarrow \pm\infty, \quad \text{longueur}(I_{n+i}) \rightarrow 0 \quad .$$

Puisque  $\psi$  et  $\psi_1$  vérifient  $\text{Lip}(\psi) < 1$  et  $\text{Lip}(\psi_1) < 1$ , il suit que la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $f^i(A_n)$  tend vers 0 si  $i \rightarrow +\infty$ . Ceci n'est pas possible,  $\tilde{f}$  préservant la mesure de Lebesgue, et donc par l'absurde la fonction  $\psi$ , ne peut exister. (On utilise  $\text{Lip}(\psi) < 1$  et  $\text{Lip}(\psi_1) < 1$  pour s'assurer que l'ensemble  $f^k(A_n)$  ne recoupe pas  $A_{\theta_0, \eta}$ , si  $k \geq 0$ ).

Le cas  $\psi(\theta) \in I_n$ ,  $n \leq 0$  est analogue en remplaçant  $\tilde{f}$  par  $\tilde{f}^{-1}$ . ■

**2.7 Remarque** : Le Théorème 2.5 reste valable sans supposer que  $\varphi$  et  $\Delta\varphi$  vérifient  $\text{Lip}(\varphi) < \varepsilon_1$  et  $\text{Lip}(\varphi + \Delta\varphi) < \varepsilon_1$ , mais seulement  $\varphi$  et  $\Delta\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ .

La démonstration est la même que celle de 2.5, à cette différence-près

qu'il faut voir que l'ensemble  $\tilde{f}^k(A_n)$  n'intersecte l'ensemble  $A_{\theta_0, \eta}$  que si  $n+k=0$ . Pour voir ceci, il suffit de remarquer que si l'homéomorphisme  $g_1 = \text{Id} + \psi_1$  existe, alors par 2.2, on a pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y > x$ ,

$$(M_0 - 1)(y - x) \geq \psi_1(y) - \psi_1(x) \geq \left(\frac{1}{M_0} - 1\right)(y - x) > -(y - x) \quad ,$$

avec  $M_0 = 1 + \frac{b}{2} + \left(b + \frac{b^2}{4}\right)^{1/2}$  où  $b = \text{Lip}(\varphi + \Delta\varphi)$ .

### 3. CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY.

Pour ce paragraphe, le lecteur se rapportera à [H, X.3].

3.1 On se donne  $R_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $\delta > 0$ , et  $k \gg 1$  ( $k \gg 1$  veut dire  $k \in \mathbb{R}_+$  est grand). On pose

$$\textcircled{1} \quad \ell_n = \frac{a_k}{(|n| + |k|)(\text{Log}(|n| + |k|))^{1+\delta}}$$

le nombre  $a_k$  étant choisi tel que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$ , et donc

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{a_k} < 1 \quad , \quad \text{pour } k \gg 1 \quad .$$

On pose

$$\textcircled{3} \quad k_n = \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \quad .$$

On a, si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\textcircled{4} \quad k_{\pm n} = \pm \frac{-1}{|n|+k} + \frac{\varepsilon(\pm n, k)}{(|n|+k)^2} \pm \frac{-(1+\delta)}{(|n|+k)(\text{Log}(|n|+k))}$$

avec  $\sup_{n, k \geq 1} |\varepsilon(\pm n, k)| = c < +\infty$ .

Il en résulte que, si  $n \rightarrow \pm \infty$ ,

$$\textcircled{5} \quad |k_n - k_{n-1}| \leq \frac{C_1}{(|n|+k)^2}$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $k$ .

3.2 On considère  $\tilde{\psi}$  une fonction sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , vérifiant :  $\tilde{\psi} \geq 0$ , support( $\tilde{\psi}$ )  $\subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ , et  $\int_0^1 \tilde{\psi}(t) dt = 1$ .

On pose 
$$\psi_n(x) = \tilde{\psi}\left(\frac{x}{\ell_n}\right) .$$

On a 
$$\int_0^1 \psi_n(t) dt = \ell_n ;$$

$$C_1 \leq \|\psi_n\|_{C^0} \leq C ;$$

$$\frac{C_1}{\ell_n} \leq \|D\psi_n\|_{C^0} \leq \frac{C}{\ell_n} ;$$

$$\frac{C_1}{\ell_n^2} \leq \|D^2\psi_n\|_{C^0} \leq \frac{C}{\ell_n^2} ,$$

$$\frac{C_1}{\ell_n^3} \leq \|D^3\psi_n\|_{C^0} \leq \frac{C}{\ell_n^3} ;$$

où  $C = \|\varphi\|_{C^3}$  et  $C_1 > 0$  sont des constantes dépendant seulement de  $\tilde{\psi}$ .

On désigne par  $w(x)$  le module de continuité de la fonction  $x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Si  $x \rightarrow 0$ , on a  $w(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta}$ . On pose, si  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ ,

$$\sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x - y|)} = |\varphi|_{C^w} .$$

On a (voir l'inégalité de convexité de l'annexe A<sub>7</sub>),  $C_2$  étant une constante

$$|D\psi_n|_{C^w} \leq \frac{2C}{\ell_n w(C_2 \ell_n)}$$

$$\textcircled{+} \quad |\psi_n|_{C^w} \leq \frac{2C}{w(C_2^{\ell_n})} \leq 2C / w\left(\frac{C_2}{(|n|+k)(\text{Log}(|n|+k))^{1+\delta}}\right)$$

(puisque  $\ell_n \geq \frac{1}{(|n|+k)(\text{Log}(|n|+k))^{1+\delta}}$ , ceci résultant de ce que, si  $k \gg 1$ ,

alors  $a_k \geq 1$  et de ce que la fonction  $w$  est croissante sur  $[0,1]$ ).

3.3 On suppose que  $k \gg 1$  est choisi assez grand pour que l'on ait

$$k_n C < 1.$$

Soit  $h_n : [0, \ell_n] \rightarrow [0, \ell_{n+1}]$ ,

$$h_n(x) = \int_0^x (1 + k_n \psi_n(t)) dt \quad .$$

$h_n$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ , et on a  $h_n(\ell_n) = \ell_{n+1}$  puisque

$$\textcircled{1} \quad \ell_n + k_n \ell_n = \ell_{n+1} \quad .$$

On a (en utilisant 3.1  $\textcircled{4}$  et 3.2  $\textcircled{+}$ )

$$\textcircled{2} \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}, k \gg 1} |k_n \psi_n|_{C^w} < +\infty \quad .$$

#### 3.4 Construction des contre-exemples de Denjoy.

Etant donné la suite  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , on construit, comme en [H, X.3], un ensemble de Cantor  $K \subset [0,1]$  modulo 1, de mesure de Lebesgue 0, tel que les composantes connexes de  $\mathbb{T}^1 - K$  sont notées  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ordonnées sur  $\mathbb{T}^1$  comme la suite  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , et vérifient : longueur  $(I_n) = \ell_n$ . On construit d'abord la semi-conjugaison  $\tilde{h} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  du contre-exemple de Denjoy  $g$ , que nous allons construire, à la translation  $R_\alpha$ .

On définit  $h^{-1}(x)$ , si  $x \in \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , par la formule :

$$\tilde{h}^{-1}(x) = \int_0^x d\mu(t) \quad ,$$

où  $\mu$  est la mesure de probabilité  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \delta_{n\alpha}$ ,  $\delta_{n\alpha}$  étant la masse de Dirac au point  $n\alpha$ .

L'application continue  $\tilde{h}: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  est de degré 1 et préserve l'ordre de  $\mathbb{T}^1$  et on a  $h(I_n) = n\alpha$ , (voir [H, X.3]).

3.5 On construit ensuite, comme en [H, X.3], un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1$ ,  $g$ , de classe  $C^{1+W}$  qui laisse invariant  $K$ , tel que  $K$  soit l'unique ensemble minimal de  $g$ , vérifiant  $\rho(g) = \alpha$  et  $\tilde{h} \circ g = R_\alpha \circ \tilde{h}$ . On pose, si  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$g|_{I_n} = g_n$ , on a nécessairement  $g_n(I_n) = I_{n+1}$ .

Pour cela on suppose que

$$Dg_n = Dg|_{I_n} = (1 + k_n \psi_n) \circ R_{-\lambda_n},$$

où  $R_{\lambda_n}(I_n) = [0, \ell_n]$ , et que le difféomorphisme  $g_n: I_n \rightarrow I_{n+1}$  est défini par

$$g_n = R_{\lambda_{n+1}} \circ h_n \circ R_{-\lambda_n}.$$

On pose

$$\ell - 1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (k_n \psi_n) \circ R_{-\lambda_n},$$

où  $\psi_n$  et  $k_n$  sont définis en 3.1 et 3.2, voir aussi [H, X.3].

Pour voir que  $\ell$  est de classe  $C^W$ , on utilise le lemme suivant :

3.5.1 Lemme : Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite d'intervalles de  $\mathbb{T}^1$  deux-à-deux disjoints et  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de fonction de classe  $C^W(\mathbb{T}^1)$  vérifiant

pour tout  $n$ ,  $\text{support}(\psi_n) \subset I_n$ ,  $\|\psi_n\|_{C^0} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \pm\infty$ ,  $C = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\psi_n|_{C^W} < +\infty$ .

Alors  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n$  converge uniformément vers  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , et on a

$$|\psi|_{C^W} \leq 2C.$$

Démonstration : On vérifie sans peine que, si  $N \rightarrow +\infty$ ,  $S_N = \sum_{|n| \leq N} \psi_n$  converge uniformément vers  $\psi = \sum_n \psi_n$  et on a, pour tout entier  $N$ ,  $|S_N|_{C^w} \leq 2C$  (puisque les supports de fonctions sont deux-à-deux disjoints). ■

Remarque : La condition  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\psi_n|_{C^w} \leq C < +\infty$  implique que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|\psi_n\|_{C^0} = 0$  (puisque la longueur de l'intervalle  $I_n$  tend vers 0, si  $n \rightarrow \pm\infty$ ).

Pour voir que  $g$  est bien de classe  $C^1$  et que  $Dg = \ell$ , il suffit de remarquer que l'homéomorphisme  $g$  est absolument continu et de raisonner comme en [H, X.3.13]. Il résulte alors du lemme que le difféomorphisme  $g$  est de classe  $C^{1+w}$ .

Dans [H, X.3.14 et 3.17] nous avons montré que, si  $k \gg 1$  varie, comme tout dépend de  $k$ , l'ensemble de Cantor  $K_k$ , les difféomorphismes  $g(k)$  de classe  $C^{1+w}$  (construit en 3.5). La famille de difféomorphismes  $g(k)$  vérifie : pour tout  $k \gg 1$ ,  $g(k)$  est un contre-exemple de Denjoy ( $g(k)$  est construit comme en 3.4), et si  $k \rightarrow +\infty$ ,  $g(k) \rightarrow R_\alpha$  dans la  $C^1$ -topologie.

Par 3.3 (2), on a

$$\sup_{k \gg 1} |g(k) - R_\alpha|_{C^w} < +\infty .$$

4.1 On considère les difféomorphismes  $g(k)$  de classe  $C^{1+w}$ ,  $k \gg 1$ , construits en 3.5 :  $\rho(g(k)) = \alpha$ ,  $g(k)$  est un contre-exemple de Denjoy obtenu en perturbant la rotation  $R_\alpha$  en explosant  $\{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$  en des intervalles  $(I_n(k))_{n \in \mathbb{Z}}$  et sur l'ensemble de Cantor minimal  $K(k)$  invariant par  $g(k)$  on a

$$Dg(k)(x) = 1 \quad \text{si } x \in K(k) .$$

Soit le module de continuité  $w_1(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{2+2\delta}$ , pour  $x \rightarrow 0$ ,  $\delta > 0$  étant choisi comme en 3.2.

On pose

$$\frac{g(k) + g^{-1}(k)}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi(k) \quad .$$

4.2 Théorème : On a  $\varphi(k) \in C^{2+w}_1(\mathbb{T}^1)$ , et la fonction  $\varphi(k)$  vérifie, si  $k \rightarrow +\infty$ ,

4.3 
$$\|\varphi(k)\|_{C^0} \longrightarrow 0 \quad ,$$

4.4 
$$\sup_{k \gg 1} |D^2 \varphi(k)|_{C^1}^{w_1} < +\infty \quad .$$

4.5 Démonstration : Pour alléger l'écriture nous allons supprimer l'indice  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $k \gg 1$ , le seul indice que l'on garde est l'indice  $n \in \mathbb{Z}$  pour désigner la restriction d'une fonction à l'intervalle  $I_n$  ou à l'intervalle  $[0, \ell_n]$ .

On écrit  $g = \text{Id} + \psi$  et on a

$$\psi - \psi \circ g^{-1} = \varphi$$

avec  $\varphi \in C^{1+w}(\mathbb{T}^1)$  et  $w(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta}$ ,  $\delta > 0$ . On a

$$D\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (Dg - 1)|_{I_n} \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} (Dg_n - 1)$$

où  $Dg_n - 1 \equiv (Dg - 1)|_{I_n}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  à support dans  $I_n$  (et  $= 0$  dans un voisinage de  $\partial I_n = \{a_n, b_n\}$  dans  $I_n = [a_n, b_n]$ , cf. 3.2).

Comme  $g(K) = K$  et que  $D\psi|_K = 0$ , on a  $D\varphi|_K = 0$  (où  $K$  est l'unique ensemble de Cantor invariant par  $g$ ).

4.6 Pour voir que  $\varphi$  est de classe  $C^{2+w}_1$ , par 3.5.1, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition : On a

$$4.7 \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|D^2\varphi|_{I_n}\|_{C^0} = 0 \quad ,$$

$$4.8 \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|D^2\varphi|_{I_n}\|_{C^{w_1}} = C_1 < +\infty \quad ,$$

où la constante  $C_1$  est indépendante de  $k \in \mathbb{R}_+$  ,  $k \gg 1$  .

Remarque : C'est ici qu'on "gagne en gros une unité" de dérivée. L'idée en est très simple : il faut évaluer  $(\psi - \psi \circ g^{-1})|_{I_n}$  en norme  $C^{2+w_1}$ . Pour cela on amène, par la translation  $R_{\lambda_n}$  ,  $I_n$  sur  $[0, \ell_n]$ . On dérive deux fois et on évalue les termes en utilisant  $A_3$  et la formule de moyenne (i.e. pour évaluer  $V_n$ ). Ce qui est important, c'est que  $(\psi - \psi \circ g^{-1})|_{I_n}$  est une différence. La démonstration qui suit est complètement élémentaire, mais un peu pénible à cause du nombre de termes.

Bien que l'inégalité 4.7 résulte de 4.8, nous incluons aussi la démonstration de 4.7.

Démonstration de 4.7 et 4.8 :

4.9 Changement de coordonnées.

Pour faire des évaluations, on se ramène à l'intervalle  $[0, \ell_n]$ . Soit  $R_{\lambda_n}$  la translation telle que l'on ait  $R_{\lambda_n}(I_n) = [0, \ell_n]$ . On a

$$(D\psi - D\psi \circ g^{-1} Dg^{-1})|_{I_n} \circ R_{-\lambda_n} = k_n \psi_n - k_{n-1} \psi_{n-1} \circ h_{n-1}^{-1} Dh_{n-1}^{-1} \quad ,$$

où  $h_{n-1} : [0, \ell_{n-1}] \rightarrow [0, \ell_n]$  est le difféomorphisme défini par :

$$h_{n-1}(x) = \int_0^x (1 + k_{n-1} \psi_{n-1}(t)) dt \quad .$$

On pose  $f_n(x) = h_{n-1} \left( \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n}(x) \right)$  et  $h_{n-1}^{-1}(x) = \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n} f_n^{-1}(x)$  .

Alors  $f_n : [0, \ell_n] \rightarrow [0, \ell_n]$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  et on a

$$\begin{aligned} \psi_{n-1} \circ h_{n-1}^{-1} Dh_{n-1}^{-1} &= \frac{\psi_n \circ f_n^{-1}}{(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})} \\ Df_n(x) &= \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n} (1 + k_{n-1} \psi_n(x)) \quad ; \\ Df_n^{-1} &= \frac{\ell_n}{\ell_{n-1}} (1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-1} . \end{aligned}$$

4.10 Calcul de  $D^2\varphi|_{I_n} \circ R_{-\lambda_n} = B_n$  sur  $[0, \ell_n]$  .

On a

$$\begin{aligned} B_n &= k_n D\psi_n - k_{n-1} D\psi_n \circ f_n^{-1} Df_n^{-1} (1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-1} + \\ &\quad + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1} k_{n-1} D\psi_n \circ f_n^{-1} (1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-2} Df_n^{-1} . \end{aligned}$$

On pose  $B_n = II_n + III_n + IV_n + V_n$  , avec

$$\begin{aligned} II_n &= (k_n - k_{n-1}) D\psi_n \\ III_n &= -k_{n-1} D\psi_n \circ f_n^{-1} (Df_n^{-1} (1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-1} - 1) \\ IV_n &= k_{n-1}^2 D\psi_n \circ f_n^{-1} (1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-2} \psi_n \circ f_n^{-1} Df_n^{-1} \\ V_n &= k_{n-1} D\psi_n - k_{n-1} D\psi_n \circ f_n^{-1} . \end{aligned}$$

4.11 Dans la suite,  $C > 0$ ,  $C_1 > 0$ ,  $C' > 0$  désignent des constantes indépendantes de  $k \gg 1$  et de  $n \in \mathbb{Z}$  .

On note par les mêmes lettres  $C$ ,  $C_1$ ,  $C'$  des constantes différentes.

4.12 Inégalités sur  $\psi_n$  .

Par 3.1 et 3.2, on a  $\psi_n(x) = \tilde{\psi}(\frac{x}{\ell_n})$  , pour  $0 \leq x \leq \ell_n$  , ainsi que les inégalités :

$$\textcircled{1} \quad \|\psi_n\|_{C^0} \leq C \quad , \quad C_1 \leq \|\psi_n\|_{C^0} \quad ;$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{C_1}{\ell_n} \leq \|D\psi_n\|_{C^0} \leq \frac{C}{\ell_n} ;$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{C_1}{\ell_n^2} \leq \|D^2\psi_n\|_{C^0} \leq \frac{C}{\ell_n^2} ;$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{C_1}{\ell_n^3} \leq \|D^3\psi_n\|_{C^0} \leq \frac{C}{\ell_n^3} .$$

Par  $A_7$  on a

$$\textcircled{5} \quad |\psi_n|_{C^{w_1}} \leq \frac{C}{w_1(C_1\ell_n)} , \quad |D\psi_n|_{C^{w_1}} \leq \frac{C}{\ell_n w_1(C_1\ell_n)}$$

4.13 Inégalités sur  $k_n$  et  $\ell_n$ .

On a

$$\ell_n = \frac{a_k}{(|n| + k)(\text{Log}(|n| + k))^{1+\delta}} ,$$

$$\text{avec } \frac{1}{a_k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|n| + k)^{-1} (\text{Log}(|n| + k))^{-1-\delta}$$

$$\text{et donc } C'(\text{Log } k)^\delta \geq a_k \geq C$$

d'où

$$\textcircled{6} \quad \ell_n \geq \frac{C}{(|n| + k)(\text{Log}(|n| + k))^{1+\delta}} ,$$

$$\textcircled{6'} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (\sup_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n) = 0 .$$

On a aussi

$$\textcircled{7} \quad |k_n| = \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| \leq \frac{C}{(|n| + k)} \quad \text{et} \quad \frac{k_{n+1}}{k_n} \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \pm\infty ;$$

$$\textcircled{8} \quad |k_n - k_{n-1}| \leq \frac{C}{(|n| + k)^2} \quad \text{et} \quad |k_n - k_{n-1}| \leq C_1 k_n^2 .$$

On a, en utilisant (6)

$$(9) \quad \frac{k_{n-1}^2}{l_n w_1(C_1 l_n)} \leq C \quad \frac{k_n^2}{l_n} < C' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{k_{n-1}^2}{l_n} = 0 .$$

(En effet

$$\frac{k_{n-1}^2}{l_n w_1(C_1 l_n)} \leq \frac{1}{(|n|+k)^2} \frac{(|n|+k)^2 (\text{Log}(|n|+k))^{2+2\delta}}{(\text{Log}(C_1(|n|+k))(\text{Log}(|n|+k))^{1+\delta})^{2+2\delta}} \leq C .)$$

4.14 Inégalités sur  $f_n$ .

Des inégalités sur  $\psi_n$  il suit les inégalités suivantes :

$$(10) \quad \text{Max}(\|Df_n - 1\|_{C^0}, \|Df_n^{-1} - 1\|_{C^0}) \leq C k_{n-1}$$

$$(11) \quad \text{Max}(\text{Lip}(f_n), \text{Lip}(f_n^{-1})) \leq C \quad \text{et} \quad \|Df_n^{-1}\|_{C^0} \leq C .$$

Par  $A_7$  et (5) on en déduit

$$(12) \quad |Df_n^{-1}|_{C^0 w_1} \leq \frac{C k_n}{w_1(C_1 l_n)} .$$

L'inégalité (10) implique

$$(13) \quad \text{Max}(\|(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-2}\|_{C^0}, \|(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-1}\|_{C^0}) \leq C .$$

Les inégalités (10) et (13) impliquent

$$(14) \quad \|Df_n^{-1}(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-1} - 1\|_{C^0} \leq C k_{n-1} .$$

L'inégalité (14) et  $A_7$  impliquent :

$$(15) \quad |Df_n^{-1}(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-1} - 1|_{C^0 w_1} \leq \frac{C k_{n-1}}{w_1(C_1 l_n)} .$$

Par (11) et (13), on a

$$(16) \quad \|Df_n^{-1}(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-2}\|_{C^0} \leq C$$

et par une démonstration analogue à celle de l'inégalité (15)

$$(17) \quad |Df_n^{-1}(1 + k_{n-1} \psi_n \circ f_n^{-1})^{-2}|_{C^1} \leq \frac{C k_{n-1}}{w_1(C_1 \ell_n)} .$$

4.15 Démonstration de  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|II_n + III_n + IV_n\|_{C^0} = 0$ .

Par (8), (2), (1), (14) et (16), on a

$$\|II_n + III_n + IV_n\|_{C^0} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n} ,$$

et il suffit d'appliquer (9) pour démontrer 4.15. ■

4.16 Démonstration de  $\sup_{k \gg 1} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |II_n + III_n + IV_n|_{C^1} = C < +\infty$ .

Par (8) et (5), on a :

$$|(k_n - k_{n-1})D\psi_n|_{C^1} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n w_1(C_1 \ell_n)}$$

et par les inégalités en annexe,  $A_3, A_4, A_6$  en utilisant (5), (12), (14)

(15), (16) et (17)

$$|III_n + IV_n|_{C^1} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n w_1(C_1 \ell_n)}$$

et il suffit d'appliquer (9) pour voir 4.16. ■

4.17 Démonstration de  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|V_n\|_{C^0} = 0$ .

On a  $f_n^{-1} : [0, \ell_n] \rightarrow [0, \ell_n]$  et par (10)

$$(18) \quad \|f_n^{-1} - \text{Id}\|_{C^0(I_n)} \leq \int_0^{\ell_n} \|Df_n^{-1} - 1\|_{C^0} dt \leq C k_{n-1} \ell_n .$$

Par la formule de la moyenne, (18) et (3), on a

$$(19) \quad \|V_n\|_{C^0} \leq k_{n-1} \|D^2 \psi_n\|_{C^0} \|f_n^{-1} - \text{Id}\|_{C^0} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n^2} ,$$

et il suffit d'appliquer (9) pour voir 4.16. ■

4.18 Démonstration de  $\sup_{k \gg 1} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |V_n|_{C^1} < +\infty$ .

On a

$$D(V_n) = k_{n-1} (D^2 \psi_n - D^2 \psi_n \circ f_n^{-1}) + k_{n-1} D^2 \psi_n \circ f_n^{-1} (Df_n^{-1} - 1) .$$

Par la formule de la moyenne, (4) et (18), on a :

$$k_{n-1} \|D^2 \psi_n - D^2 \psi_n \circ f_n^{-1}\|_{C^0} \leq k_{n-1} \|D^3 \psi_n\|_{C^0} \|f_n^{-1} - \text{Id}\|_{C^0} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n^2} .$$

Par (4) et (10), on a :

$$\|k_{n-1} D^2 \psi_n \circ f_n^{-1} (Df_n^{-1} - 1)\|_{C^0} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n^2} .$$

Il en résulte que

$$(20) \quad \|D(V_n)\|_{C^0} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n^2} .$$

Par (19) on a :

$$(21) \quad \frac{\ell_n^2}{k_{n-1}^2} \|V_n\|_{C^0} \leq C \ell_n .$$

Par l'inégalité de convexité  $A_7$  on a

$$|V_n|_{C^1} \leq \frac{2 \|V_n\|_{C^0}}{w_1(2 \|V_n\|_{C^0} \|DV_n\|_{C^0}^{-1})} .$$

Par (20) , en utilisant que  $w_1$  est une fonction croissante, on a

$$|V_n|_{C^1} \leq \frac{2 \|V_n\|_{C^0}}{w_1(2 \|V_n\|_{C^0} \ell_n^2 k_{n-1}^{-2} C^{-1})} .$$

Pour  $k \gg 1$  , par (6') on peut écrire

$$w_1(2 \ell_n^2 k_{n-1}^{-2} C^{-1} \|V_n\|_{C^0}) = 2 \|V_n\|_{C^0} \ell_n^2 k_{n-1}^{-2} C^{-1} (\text{Log}(C \frac{k_{n-1}^2}{\ell_n^2} \|V_n\|_{C^0}^{-1}))^{2+2\delta}$$

( $w(x) = x(\text{Log} \frac{1}{x})^{2+2\delta}$  seulement si  $x$  est assez petit).

Par (21) , on a en utilisant que la fonction  $x \rightarrow (\text{Log} \frac{2}{x})^{-2-2\delta}$  est croissante

$$|V_n|_{C^1} \leq \frac{C k_{n-1}^2}{\ell_n^2 (\text{Log}(C_1 \ell_n^{-1}))^{2+2\delta}} .$$

Pour  $x$  assez petit, la fonction  $x \rightarrow x^2 (\text{Log}(C_1 x^{-1}))^{2+2\delta}$  est croissante, et comme  $\ell_n \geq 1/(|n| + k) (\text{Log}(|n| + k))^{1+\delta}$ , par (7) pour  $k \gg 1$ , on a

$$|V_n|_{C^1} \leq \frac{C (\text{Log}(|n| + k))^{2+2\delta}}{(\text{Log}(C(|n| + k) (\text{Log}(|n| + k))^{1+\delta}))^{2+2\delta}} .$$

On a finalement

$$\sup_{k \gg 1} (\sup_{n \in \mathbb{Z}} |V_n|_{C^1}) < +\infty$$

ce qui démontre 4.18. ■

En mettant ensemble 4.10 et 4.15 à 4.18 nous avons démontré 4.7 et 4.8. ■

Fin de la démonstration de 4.2 : Par la Proposition de 4.6,  $\varphi \in C^{2+w_1}$  et l'inégalité 4.4 est satisfaite. 4.3 résulte de : si  $k \rightarrow +\infty$ ,  $g(k) \rightarrow R_\alpha$  dans la  $C^0$ -topologie (cf. 3.5). ■

5. CONTRE-EXEMPLES DE CLASSE  $C^{3-\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ) AU THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES.

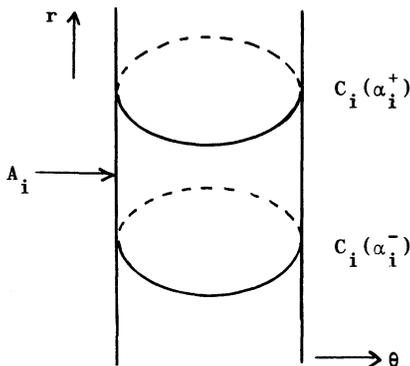
5.1 Le théorème suivant donne une nouvelle démonstration d'un cas particulier d'un résultat obtenu dans [II]. En fait on a mieux, on peut remplacer la classe  $C^{3-\varepsilon}$  par la classe  $C^{2+w_1}$ , où  $w_1$  est le module de continuité défini en 4.1 (cf.  $A_9$  à  $A_{13}$ ).

Théorème : On se fixe  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Il existe une suite  $(f_i)_i$  de difféomorphismes de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de la forme  $f_i(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi_i(\theta + r))$ , où les  $\varphi_i$  sont de classe  $C^{3-\varepsilon}$  et vérifient  $\int_0^1 \varphi_i(\theta) d\theta = 0$  telle que, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi_i \rightarrow 0$  dans la  $C^{3-\varepsilon}$ -topologie et pour chaque  $i$ ,  $f_i$  ne possède pas de courbe invariante  $C_i$  homotope à  $\{r = Cte\}$  telle que l'on ait  $\rho(f_i | C_i) = \alpha$ .

5.2 Remarque : 1) Il suit de la théorie de Birkhoff [I, 5.9] et [II, 1.4 et 1.5] que, si  $f_i$  possède au moins une courbe invariante homotope à  $\{r = Cte\}$ , alors il existe un anneau  $A_i$  invariant par  $f_i$  bordé par des cercles invariants  $C_i(\alpha_i^+)$  et  $C_i(\alpha_i^-)$  et vérifiant  $\rho(f_i | C_i(\alpha_i^\pm)) = \alpha_i^\pm$ ,  $\alpha_i^- < \alpha < \alpha_i^+$  et si  $\alpha_i^- < \tilde{\alpha} < \alpha_i^+$ , alors  $f$  ne laisse pas invariant un cercle  $C_i(\tilde{\alpha})$  (homotope à  $\{r = Cte\}$ ) vérifiant  $\rho(f_i | C_i(\tilde{\alpha})) = \tilde{\alpha}$ .

2) Les difféomorphismes  $f_i$  sont seulement de classe

$C^{3-\varepsilon}$ , mais on peut supposer que les difféomorphismes  $f_i$  sont  $\mathbb{R}$ -analytiques (puisque'en appliquant la théorie de Birkhoff [II, 2.5.5], l'ensemble  $\Phi(F_\alpha^0) \cap D^{3-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$  est fermé dans  $H^{3-\varepsilon}$  pour la  $C^1$ -topologie et de plus l'ensemble  $H^\infty$  est dense dans  $H^{3-\varepsilon}$  pour la  $C^{3-\varepsilon'}$ -topologie si  $\varepsilon' > \varepsilon$ ).



Figure

Démonstration de 5.1 : Soit  $(g(k))_{k \geq 1}$  la famille de difféomorphismes construits en 4.2. Soit  $\frac{g(k) + g(k)^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi(k) \in D^{2+w_1}(\mathbb{T}^1)$ . Par 4.2,  $A_{11}$  et les inégalités d'interpolations  $A_{12}$  et  $A_{13}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi(k) \rightarrow 0$  dans la  $C^{3-\varepsilon}$ -topologie. Au difféomorphisme  $g$ , on associe le difféomorphisme de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  :

$$\tilde{f}_k(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(k)(\theta + r)) .$$

On perturbe  $\tilde{f}_k$ , comme en 2.5, en

$$f_k(\theta, r) = (\theta + r, r + (\varphi(k) + \Delta\varphi(k))(\theta + r))$$

tel que  $f_k \rightarrow t$  dans la  $C^{3-\varepsilon}$ -topologie (où  $t(\theta, r) = (\theta + r, r)$ ) et le difféomorphisme  $f_k$  ne possède pas de courbe invariante  $C_k$  qui soit un graphe de

$\psi_k \in C^0(\mathbb{T}^1)$  et vérifiant

$$\rho(f_k | C_k) = \alpha \quad .$$

Le fait qu'on suppose que la courbe  $C_k$  est un graphe n'est pas une restriction par la théorie de Birkhoff [I] . ■

## 6. QUESTIONS DE DENSITÉS.

6.1 Dans ce paragraphe, on suppose que  $0 < \beta < 1$ . On définit en  $A_{14}$  à  $A_{17}$  le groupe  $D^{1+\beta}_+(\mathbb{T}^1)$  qui est un groupe topologique pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie. De plus  $D^{1+\beta}_+(\mathbb{T}^1)$  est l'adhérence de  $D^\infty(\mathbb{T}^1)$  dans  $D^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

$\bigcup D^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  n'est un groupe topologique que pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie !

6.2 Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit l'ensemble

$$F_\alpha^{1+\beta}_+ = \{f \in D^{1+\beta}_+(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\} \quad ,$$

qui est un sous-ensemble  $C^0$ -fermé de  $D^{1+\beta}_+(\mathbb{T}^1)$  [H, II.4] .

Par 6.1 et [H, III 4.4],  $F_\alpha^\infty$  est dense dans  $F_\alpha^{1+\beta}_+$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

On définit aussi

$$O_\alpha^{1+\beta}_+ = \{g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \mid g \in D^{1+\beta}_+(\mathbb{T}^1)\} \quad .$$

Par [H, II], on a  $O_\alpha^{1+\beta}_+ \subset F_\alpha^{1+\beta}_+$  . On définit

$$CD^{1+\beta}_+ = \{f \in D^{1+\beta}_+(\mathbb{T}^1) \mid f \text{ est un contre-exemple de Denjoy}\}$$

$$CD_\alpha^{1+\beta}_+ = CD^{1+\beta}_+ \cap F_\alpha^{1+\beta}_+ \quad .$$

6.3 Par [H, X.3], pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , on a

a)  $CD_{\alpha}^{1+\beta+}$  est non vide (voir aussi 3).

b)  $CD_{\alpha}^1$  est dense dans  $F_{\alpha}^1$  pour la  $C^1$ -topologie.

c) Si  $\alpha$  satisfait à une condition A, alors  $CD_{\alpha}^{1+\beta+}$  est dense dans  $F_{\alpha}^{1+\beta+}$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

Démonstration de c) : i) Par [H, X.3], pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , il existe une suite  $(g_i)_i \subset CD_{\alpha}^{1+\beta+}$  telle que, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $g_i \rightarrow R_{\alpha}$  dans la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

ii) Par 6.1 et 6.2,  $F_{\alpha}^{\infty}$  est dense dans  $F_{\alpha}^{1+\beta+}$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie et donc, par le théorème fondamental de [H] et en utilisant 6.1, il suit que

$$O_{\alpha}^{1+\beta+}(\mathbb{T}^1) \text{ est dense dans } F_{\alpha}^{1+\beta+}$$

pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

iii) c) résulte de ii) et de i) par conjugaison. ■

d) L'ensemble  $CD^{1+\beta+}$  est dense dans  $F_I^{1+\beta+} = \{f \in D^{1+\beta+}(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) \in \mathbb{Q}\}$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

Démonstration de d) : Par la même démonstration que [H, III.6.3], en utilisant 6.1, il suit que l'ensemble  $\bigcup_{\alpha \in A} F_{\alpha}^{1+\beta+}$  est dense dans  $F_I^{1+\beta+}$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie, où  $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ satisfait à une condition A}\}$ , qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . L'affirmation d) résulte alors de l'affirmation c). ■

6.4 On définit

$$\Phi : g \in D^0(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \frac{g + g^{-1}}{2} \in D^0(\mathbb{T}^1) .$$

On choisit  $0 < \delta$ , et on définit, si  $r \geq 0$ ,

CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY

$$H^r = \{f \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 (f - \text{Id})(\theta) d\theta = 0\}$$

et

$$V_\delta^r = \{f \in H^r \mid \|f - \text{Id}\|_{C^r} \leq \delta\} .$$

On rappelle que pour tout  $\delta > 0$ , si au difféomorphisme  $h = \text{Id} + \frac{1}{2}\varphi \in V_\delta^1$  on associe

$$F : (\theta, r) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow (\theta + r), r + \varphi(\theta + r) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} ,$$

F vérifie les conclusions de la théorie de Birkhoff (i.e. si F laisse invariant un cercle C (de classe  $C^0$ ), plongé, homotope à  $\{r = \text{Cte}\}$ , alors C est le graphe de  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  et donc  $\psi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$  par 2.2), voir [I] et [II].

6.5 On rappelle que  $\mathfrak{F}(D^0(\mathbb{T}^1)) \subset H^0$  [II, 2.3.2].

Proposition : Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathfrak{F}(F_\alpha^1) \cap V_\delta^1$  ( $0 < \delta$ ) est nulle part dense dans  $V_\delta^1$  pour la  $C^1$ -topologie.

Démonstration : Si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , cela vient de [II, 2.5.8]. Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , soit  $G_\alpha^1$  l'adhérence de  $\mathfrak{F}(F_\alpha^1)$  dans  $V_\delta^1$  pour la  $C^1$ -topologie. Si  $G_\alpha^1$  contenait un ouvert  $U \neq \emptyset$  pour la  $C^1$ -topologie, par 6.3 b) il existerait  $g \in CD_\alpha^1$  tel que  $h = \mathfrak{F}(g) \in U$ . Or en utilisant 2.5 et 2.7, on peut perturber h en  $\tilde{h}$  tel que  $\tilde{h} \in \mathfrak{F}(F_\alpha^0)$  et  $\tilde{h} \in U$ .

Par la théorie de Birkhoff [I, 5.4],  $V_\delta^1 - \mathfrak{F}(F_\alpha^0)$  est un ouvert induit par la  $C^0$ -topologie et donc  $U \neq \emptyset$  est absurde. ■

6.6 Par la même démonstration, en utilisant 6.3 c), on a la proposition :

**Proposition** : Soit  $\alpha$  satisfaisant à une condition A. Pour tout  $0 < \delta$  et  $0 < \beta < 1$  l'ensemble  $\Phi(F_\alpha^{1+\beta}) \cap V_\delta^{1+\beta}$  est nulle part dense dans  $V_\delta^{1+\beta}$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

6.7 **Remarque** : Il suit du théorème des courbes invariantes que pour Lebesgue-presque-tout  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , l'adhérence de  $\Phi(F_\alpha^\infty)$  pour la  $C^{3+\beta}$ -topologie contient un ouvert dans  $H^{3+\beta}$  pour la  $C^{3+\beta}$ -topologie.

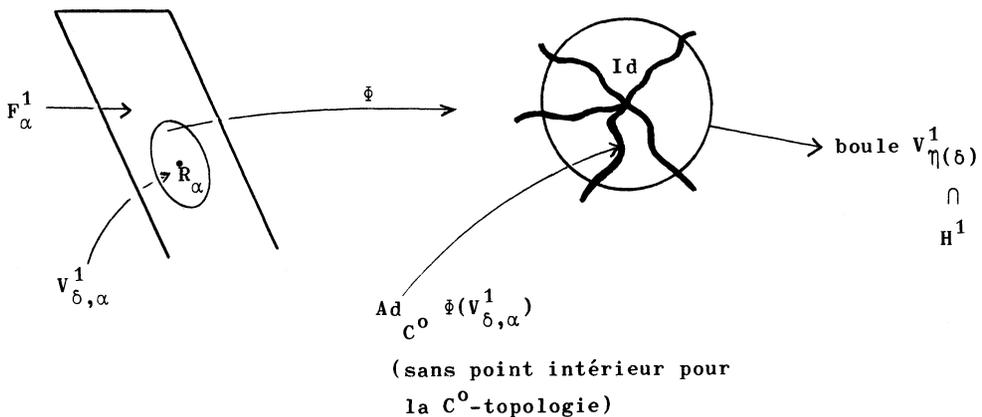
6.8 Si  $\delta > 0$ , on pose  $V_{\delta,\alpha}^1 = \{g \in F_\alpha^1 \mid (1 + \delta)^{-1} \leq Dg \leq 1 + \delta\}$ .

Si  $\delta > 0$ , soit  $\eta(\delta) > 0$  le plus petit nombre tel que l'adhérence pour la  $C^0$ -topologie de  $\Phi(V_{\delta,\alpha}^1)$  dans  $H^1$  (que l'on note  $Ad_{C^0}(\Phi(V_{\delta,\alpha}^1))$ ) vérifie  $Ad_{C^0}(\Phi(V_{\delta,\alpha}^1)) \subseteq V_{\eta(\delta)}^1$ . Par 2.2 et 2.3, il existe  $\ell(\delta) > 0$  tel que  $\Phi^{-1}(V_{\eta(\delta)}^1) \cap F_\alpha^1 \subseteq V_{\ell(\delta),\alpha}^1$ .

Par la même démonstration que 6.5, on a

**Proposition** : Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et si  $\delta > 0$ ,  $Ad_{C^0}(V_{\delta,\alpha}^1)$  est nulle part dense dans  $V_{\eta(\delta)}^1$  pour la  $C^0$ -topologie.

Rappelons que par [I, 5.4], si  $h \in Ad_{C^0}(V_{\delta,\alpha}^1)$ ,  $h = \Phi(g)$  avec  $g \in F_\alpha^0$ .



Figure

6.9 Remarque : Si  $f \in F_\alpha^0$  vérifie  $\sup(\text{Lip}(f), \text{Lip}(f^{-1})) \leq \delta < +\infty$ , on peut approximer  $f$  par une suite  $(f_i)_i \subset F_\alpha^\infty$  vérifiant : si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $f_i \rightarrow f$  dans la  $C^0$ -topologie, et pour tout  $i$ ,  $\sup(\text{Lip}(f_i), \text{Lip}(f_i^{-1})) \leq \delta$ . (Il suffit d'approximer  $f$  dans la  $C^0$ -topologie par des homéomorphismes P.L. (vérifiant la condition sur les rapports de Lipschitz), ensuite de lisser ces homéomorphismes et d'appliquer [H, III.4.4].)

6.10 Par [II, 2.6], si  $\alpha \in A$ , alors l'ensemble  $\mathfrak{F}(F_\alpha^\infty)$  est ouvert dans  $H^\infty$  pour la  $C^\infty$ -topologie.

Par 5.1, pour tout  $0 < \beta < 1$  et tout  $\delta > 0$ ,  $\mathfrak{F}(F_\alpha^\infty) \cap V_\delta^{3-\beta}$  n'est pas fermé pour la  $C^\infty$ -topologie (s'il était fermé dans  $V_\delta^{3-\beta} \cap H^\infty$ , cet ensemble serait ouvert et fermé pour la topologie induite par la  $C^\infty$ -topologie sur l'ensemble connexe  $V_\delta^{3-\beta} \cap H^\infty$ . On aurait donc  $\mathfrak{F}(F_\alpha^\infty) \cap V_\delta^{3-\beta} = V_\delta^{3-\beta} \cap H^\infty$ , ce qui est contraire à 5.1).

Comme  $F_\alpha^\infty$  est dense dans  $F_\alpha^{1+\beta}$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie ( $0 < \beta < 1$ ), par 6.6, il en résulte que  $\mathfrak{F}(F_\alpha^\infty)$  est sans point intérieur pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie.

6.11 Proposition : Il existe un  $G_\delta$  dense de  $[0,1]$ ,  $G$ , tel que, si  $\alpha \in G$ , alors l'ensemble  $\mathfrak{F}(F_\alpha^0) \cap H^\infty$  est sans point intérieur pour la  $C^\infty$ -topologie.

Démonstration : Par [II, 2.5.7 et 2.5.8], il existe une suite  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $H^\infty$ , dense dans  $H^\infty$  pour la  $C^\infty$ -topologie, telle que, pour tout  $i$ , l'ensemble compact

$$K_i = \rho(\mathfrak{F}^{-1}(h_i)) \cap [0,1]$$

vérifie  $K_i \subset [0,1] - \mathbb{Q}$ .

Soit  $U_i = [0,1] - K_i$  qui est un ouvert dense de  $[0,1]$ . Si  $\alpha \in U_i$ , alors il n'existe pas de  $f \in F_\alpha^0$  tel que l'on ait  $\mathfrak{F}(f) = h_i$ .

Il suffit de considérer  $G = \bigcap_i U_i$ . ■

7. GÉOMÉTRIE DE L'IMAGE DE  $\Phi$ .

7.1 Si  $\delta > 0$ , on considère  $V_\delta^1 = \{ \text{Id} + \psi \in H^1 \mid \|\psi\|_{C^1} \leq \delta \}$ . On a  $V_\delta^1 \subset H^1 \subset D^1(\mathbb{T}^1)$ .

On dit que  $B \subset V_\delta^1$  est convexe si pour tout  $x$  et  $y \in B$  et tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in B$$

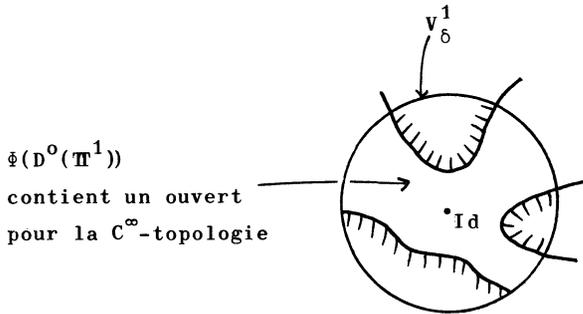


Figure heuristique dans l'espace des  $h \in V_\delta^1 \cap D^\infty(\mathbb{T}^1)$   
(heuristique = c'est plus compliqué).

7.2 Théorème : Pour tout  $\delta > 0$ , l'ensemble  $\Phi(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap V_\delta^1$  n'est pas convexe.

Démonstration : Si  $\Phi(g) = h = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \in V_\delta^1$ , avec  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$  et si  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

on a

$$h_\lambda = R_\lambda \circ h \circ R_{-\lambda} = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi \circ R_{-\lambda} \in V_\delta^1$$

et

$$h_\lambda = \Phi(R_\lambda \circ g \circ R_{-\lambda}) \in \Phi(D^0(\mathbb{T}^1)) \quad .$$

Si  $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , on définit  $\ell_q(\theta) = q\theta$  et alors

$$\ell_q^{-1} \circ h \circ \ell_q(x) = \text{Id} + \frac{1}{2q} \varphi(qx) \in V_\delta^1$$

et

$$\mathfrak{F}(\ell_q^{-1} \circ g \circ \ell_q) = \ell_q^{-1} \circ h \circ \ell_q \quad .$$

on en conclut que, si  $h(x) = x + a \sin 2\pi x$  et  $h \in V_\delta^1 \cap \mathfrak{F}(D^0(\mathbb{T}^1))$  pour un  $a > 0$  (ce qui sera le cas si  $|a|$  est assez petit par le théorème des courbes invariantes [II, 2.6]), il en est de même pour les difféomorphismes suivants si  $-1 \leq t \leq 1$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  :

$$x \longrightarrow x + \frac{ta}{q} \sin 2\pi qx$$

$$x \longrightarrow x + \frac{ta}{q} \cos 2\pi qx \quad .$$

Il suit que, si  $\mathfrak{F}(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap V_\delta^1$  est convexe,

$$\text{Id} + \varphi \in \mathfrak{F}(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap V_\delta^1$$

pour tout  $\varphi(x) = a \sum_{q=1}^N \left( \frac{a}{q} \sin 2\pi qx + \frac{b}{q} \cos 2\pi qx \right)$

vérifiant 
$$\sum_{q=1}^N |a| + |b| \leq 1 \quad .$$

Soit  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ , il existe une suite  $(h_i)_i \subset V_\delta^1$ , avec  $h_i = \text{Id} + \varphi_i$  où  $\varphi_i$  est un polynôme trigonométrique et vérifiant  $h_i \in \mathfrak{F}(D^0(\mathbb{T}^1))$  et, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi_i \rightarrow 0$  dans la  $C^{1+\beta}$ -topologie. (Il suffit d'appliquer [II, 3].)

Or, par un théorème de S. Bernstein [Z, VI.3.1] on a, si

$$\varphi_i(x) = \sum_{q=1}^{N_i} \left( \frac{a(\varphi_i)}{q} \sin 2\pi qx + \frac{b(\varphi_i)}{q} \cos 2\pi qx \right) \quad ,$$

$$\sum_{q=1}^{N_i} |a_q(\varphi_i)| + |b_q(\varphi_i)| \leq C_\beta \|\mathcal{D}\varphi_i\|_{C^\beta},$$

où  $C_\beta$  est une constante ne dépendant que de  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ .

Donc, si  $\Phi(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap V_\delta^1$  est convexe, on a, pour  $i$  assez grand,  $h_i \in \Phi(D^0(\mathbb{T}^1))$ , or  $h_i \notin \Phi(D^0(\mathbb{T}^1))$  et donc par l'absurde le théorème suit. ■

Remarque : La démonstration montre que l'ensemble  $D^\infty(\mathbb{T}^1) \cap V_\delta^1 \cap \Phi(D^0(\mathbb{T}^1))$  n'est pas convexe, bien qu'il contienne un ouvert par la topologie  $C^\infty$  (il suffit d'appliquer le théorème des courbes invariantes [II, 2.6]).

7.3 On fixe  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $0 < \beta < 1$ , on définit, si  $0 < \delta$ ,  $V_\delta^{2+\beta}$  comme en 6.4.

Théorème : Pour tout  $\delta > 0$ , l'ensemble  $\Phi(F_\alpha^0) \cap V_\delta^{2+\beta}$  n'est pas convexe.

Démonstration : On suppose que les difféomorphismes  $g_i$ , pour  $i = 1, 2$ , sont des contre-exemples de Denjoy construits en 4.2, tels que  $\rho(g_i) = \alpha$  et  $\Phi(g_i) \in V_\delta^{2+\beta}$  pour  $i = 0, 1$ . On suppose de plus que

$$g_i = \text{Id} + \psi_i \quad \text{pour } i = 0, 1,$$

et que  $g_0$  et  $g_1$  laissent invariant le même ensemble de Cantor  $K$  (qui est l'unique ensemble minimal invariant par  $g_i$ ); de plus il existe une composante connexe  $I$  de  $\mathbb{T}^1 - K$  telle que

$$g_1(x) \neq g_0(x) \quad \text{pour un } x \in I$$

mais 
$$g_1(x) = g_0(x) \quad \text{si } x \in I.$$

(Ayant construit  $g_0$  comme en 4.2, on choisit  $g_1 = g_0 \circ f$ , où  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  ayant son support  $\subset I$  et  $C^\infty$ -voisin de l'identité.)

CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY

Soient  $h_1 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_1 = \frac{g_1 + g_1^{-1}}{2}$ , et si  $0 < t < 1$ ,

$$h_t = th_1 + (1-t)h_0 = \text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_t .$$

On a

$$h_1(x) = h_2(x) = h_t(x)$$

sauf si  $x \in I$  ou  $x \in I_1 = g_1(I) = g_0(I)$ .

Soit  $g_t = tg_1 + (1-t)g_0$  et  $\tilde{h}_t = \text{Id} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_t = \frac{g_t + g_t^{-1}}{2}$ . On a

$$\varphi_t(x) = \tilde{\varphi}_t(x) \quad \text{si } x \notin I_1$$

et

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \psi(x) - (t\psi_1 + (1-t)\psi_0) \circ g_t^{-1}(x) \quad \text{si } x \in I_1$$

$$\varphi_t(x) = t(\psi - \psi_1 \circ g_1^{-1}) + (1-t)(\psi - \psi_0 \circ g_0^{-1})(x) \quad \text{si } x \in I_1$$

où  $\psi(x) = \psi_1(x) = \psi_0(x)$ , si  $x \notin I$ .

Lemme : Si  $h_t \in \mathfrak{F}(F_\alpha^0) \cap V_\delta^1$ , alors  $\tilde{\varphi}_t \equiv \varphi_t$  sur  $I_1$ .

Démonstration : Cela résulte de 2.5 et 2.7 en utilisant que  $g_t(K) = K$ ,  $\tilde{h}_t = \mathfrak{F}(g_t)$  et  $\tilde{\varphi}_t = \varphi_t$  sauf sur  $I_1$ . ■

Fin de la démonstration du Théorème 7.3 : En général pour tout  $0 < t < 1$

$\varphi_t \neq \tilde{\varphi}_t$ , d'où il résulte que l'ensemble  $\mathfrak{F}(F_\alpha^0) \cap V_\delta^{2+\beta}$  est non convexe puisque le segment  $h_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , est tel que  $h_0$  et  $h_1 \in \mathfrak{F}(F_\alpha^0)$ , mais  $h_t \notin \mathfrak{F}(F_\alpha^0)$  si  $0 < t < 1$ . Tout revient à voir qu'en général

$$g_t^{-1} \neq tg_1^{-1} + (1-t)g_0^{-1} ,$$

Pour cela on choisit  $g_1 = g_0 \circ f$  avec  $g_1 : I \rightarrow I_1$  et  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  à support contenu dans  $I$   $C^\infty$ -voisin de l'identité et vérifiant  $f \neq \text{Id}$  pour un  $x_0 \in \text{Int}(I)$ ,  $f(x_0) = x_0$ ,  $Df(x_0) \neq 1$  ; alors, on a

$$Dg_t^{-1}(g_t(x_0)) = \frac{1}{tDg_1(x_0) + (1-t)Dg_0(x_0)} \quad , \quad g_t(x_0) = g_1(x_0) = g_2(x_1)$$

qui est pour  $Dg_1(x_0) \neq Dg_0(x_0)$  et  $0 < t < 1$ , différent de

$$\frac{t}{Dg_1(x_0)} + \frac{(1-t)}{Dg_0(x_0)} \quad . \quad \blacksquare$$

7.4 Si  $\alpha$  satisfait à une condition A, alors par [II, 2.6.2],  $\Phi(F_\alpha^\infty)$  est ouvert pour la  $C^\infty$ -topologie dans  $H^\infty = \{h \in D^\infty(\mathbb{T}^1) \mid \int_0^1 (h - \text{Id})d\theta = 0\}$ . Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et si  $0 < \beta < 1$ , alors  $\Phi(F_\alpha^\infty)$  est dense dans  $\Phi(F_\alpha^{1+\beta})$  pour la  $C^{1+\beta}$ -topologie (cf. 6.2).

Proposition : Pour tout  $\delta > 0$  et tout  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , l'ensemble  $\Phi(F_\alpha^\infty) \cap V_\delta^{1+\beta}$  n'est pas convexe.

Démonstration : Soit  $\text{Id} + \frac{1}{2} \varphi_t = h_t$  construit en 7.3, où les  $h_i = \Phi(g_i)$ , pour  $i = 0, 1$  sont choisis pour qu'il existe  $0 < t < 1$  vérifiant  $h_t \notin \Phi(F_\alpha^0)$ . Par [I, 5.4] il existe un voisinage ( $C^0$ -ouvert)  $U$  de  $h_t$  dans  $V_\delta^{1+\beta}$  tel que si  $h \in U$ , alors  $h \notin \Phi(F_\alpha^0)$ . On suppose de plus que  $g_1 \in F_\alpha^{1+\beta'} \subset F_\alpha^{1+\beta}$  pour un  $\beta < \beta' < 1$ . Il suffit alors d'approximer dans la  $C^{1+\beta}$ -topologie  $g_0$  et  $g_1$  par des difféomorphismes de classe  $C^\infty \in F_\alpha^\infty$ .  $\blacksquare$

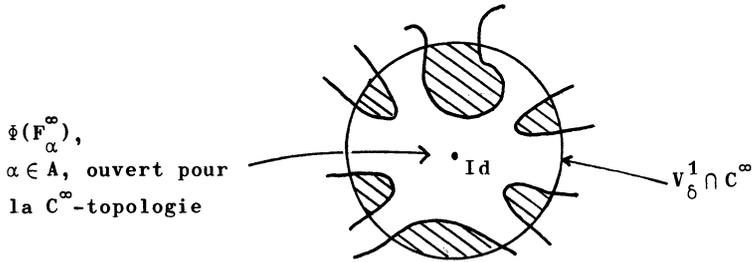


Figure heuristique dans l'espace de  $h \in C^\infty \cap V_\delta^1$ .

8. CARACTÈRE NON ÉTOILÉ PAR RAPPORT À L'IDENTITÉ.

8.1 On dit que l'ensemble  $B \subset H^\infty$  est étoilé par rapport à l'identité si,  $h \in B$ ,  $(1-t)Id + th \in B$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

8.2 Théorème : Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  et tout  $\delta > 0$ , l'ensemble  $\phi(F_\alpha^0) \cap V_\delta^1 \cap D^\infty(\mathbb{T}^1)$  n'est pas étoilé par rapport à l'identité.

Remarque : Si  $\delta < \delta_0$ , où  $\delta_0$  est le nombre défini en 6.4, la théorie de Birkhoff s'applique. On supposera dans la suite que  $\delta < 1$ .

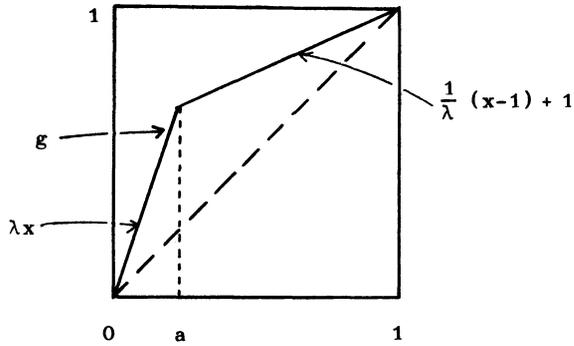
8.3 Pour démontrer 8.2, nous allons commencer par une construction d'un homéomorphisme PL similaire à celui de [II, 4.1].

On suppose que  $\lambda > 1$ , et que  $\lambda - 1 < \delta/4$ , est aussi petit qu'on veut mais est fixé.

Soit  $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$  l'homéomorphisme défini par

$$g(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } 1 \leq x \leq a \\ \frac{1}{\lambda} (x-1) + 1 & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec  $a = \frac{1}{\lambda + 1} < \frac{1}{2}$  .



Figure

On a

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} x & \text{si } 0 \leq x \leq a' \\ \lambda(x-1) + 1 & \text{si } a' \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec  $a' = \frac{\lambda}{\lambda + 1} > \frac{1}{2}$  .

Soient  $\psi = g - \text{Id}$  et  $C$  = graphe de  $\psi$  on définit

$$A = (a, \psi(a)) \quad , \quad A' = (a', \psi(a')) \quad .$$

On pose

$$\frac{g + g^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{\varphi}{2} = h_1$$

et

$$h_t = \text{Id} + \frac{t\varphi}{2} \quad , \quad \text{si } 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

On pose

$$F_t : (\theta, r) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow (\theta + r, r + t\varphi(\theta + r)) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$$

$$F_t^{-1}(\theta, t) = (\theta - r + t\varphi(\theta) , r - t\varphi(\theta)) \quad .$$

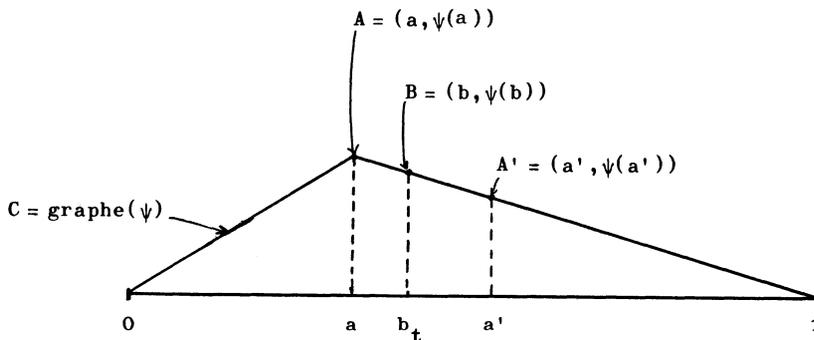
Par [II, 2],  $F_1^{-1}$  laisse invariant  $C$  de  $F_1^{-1}|C$  est conjugué à  $g^{-1}$ .

On a  $F^{-1}(A') = A$  et si  $(\theta, r)$  vérifie  $a'-1 \leq \theta \leq a$

$$F_t^{-1}(\theta, r) = A_t \begin{pmatrix} \theta \\ r \end{pmatrix}$$

où 
$$A_t = \begin{pmatrix} 1 + t(\frac{1}{\lambda} + \lambda - 2) & -1 \\ -t(\frac{1}{\lambda} + \lambda - 2) & 1 \end{pmatrix},$$

et si  $(\theta, r)$  vérifie  $a' - 1 \leq \theta + r \leq a$ , on a  $F_t = A_t^{-1}$ .



(Noter que  $\psi(a) = \text{longueur}(a, a')$ .)

Figure

Soit  $\mu_t$  la valeur propre de  $A_t$  vérifiant  $\mu_t \leq 1$ ,  $\mu_t$  est solution de l'équation :

$$(*) \quad \mu_t^2 - (t(\frac{1}{\lambda} + \lambda - 2) + 2)\mu_t + 1 = 0 ;$$

la pente de la direction propre associée à  $\mu_t$  vaut  $\frac{1}{\mu_t} - 1$  et celle associée à  $\frac{1}{\mu_t}$  vaut  $\mu_t - 1$ .

8.4 Proposition : L'ensemble  $\{t \mid 1 - \varepsilon \leq t \leq 1\}$  tel que  $F_t$  laisse

invariante un cercle  $C_t$  qui est le graphe de  $\psi_t \in C^0(\mathbb{T}^1)$  tel que  
 $\rho(F_t|C_t) = 0$  est réduit à  $\{t = 1\}$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit.

8.5 Démonstration : Si  $F_t^{-1}$  laisse invariant  $C_t$ , comme 0 est l'unique point fixe hyperbolique de  $F_t^{-1}$  (l'autre étant elliptique),  $C_t$  est une réunion de variétés stable et instable de  $F_t^{-1}$  en 0.

On vérifie que nécessairement l'ensemble

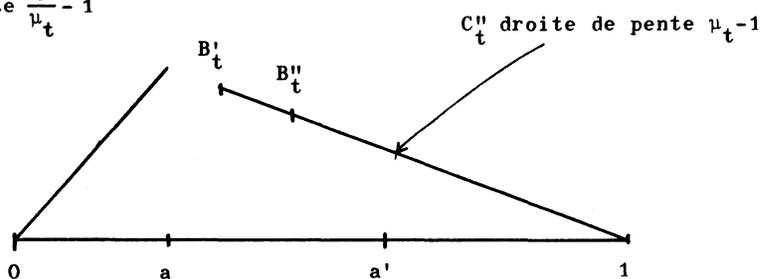
$$C'_t = \{(\theta, r) \mid 0 \leq \theta \leq a, r = (\frac{1}{\mu_t} - 1)\theta\} \pmod{1}$$

est contenu dans la variété stable en 0 de  $F_t^{-1}$  (puisque  $F_t^{-1}(\theta, r) = A_t(\frac{\theta}{r})$ , si  $a' - 1 < \theta < a$ ) et que l'ensemble

$$C''_t = \{(\theta, r) \mid b_t \leq \theta \leq 0, r = (\mu_t - 1)\theta\} \pmod{1}$$

où  $B_t = (b_t, d_t)$  est le point d'intersection mod 1 de la droite d'équation  $\theta + r - (-1 + a') = 0$  et de la droite d'équation  $r = (\mu_t - 1)\theta$ , est contenu dans la variété instable en 0 de  $F_t^{-1}$  (puisque  $F_t(\theta, r) = A_t^{-1}(\frac{\theta}{r})$ , si  $a > \theta + r > a' - 1$ ).  
 Si  $t \rightarrow 1$ , alors  $B_t \rightarrow A = (a, \psi(a))$ . On doit avoir  $C'_t \subset C_t$ , et  $C''_t \subset C_t$ . Donc, si  $t \rightarrow 1$ ,  $F_t^{-1}(B_t)$  doit appartenir à  $C'_t \pmod{1}$ .

$C'_t$  droite de pente  $\frac{1}{\mu_t} - 1$



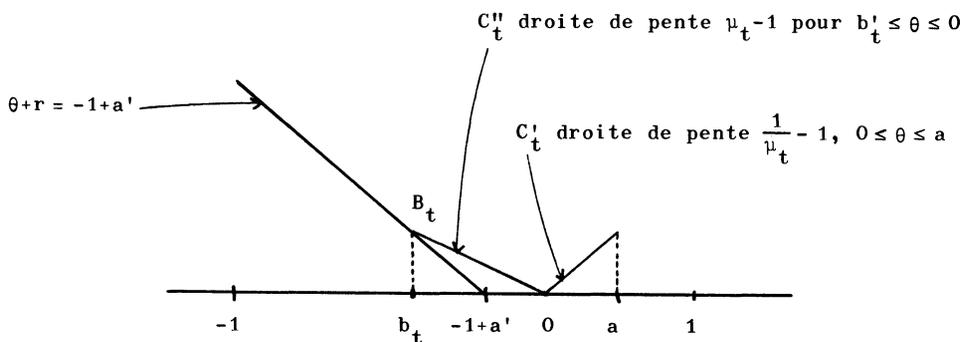
Figure

Soit  $B_t''$  un point voisin de  $B_t$ ,  $B_t'' \in C_t'' \pmod{1}$ .

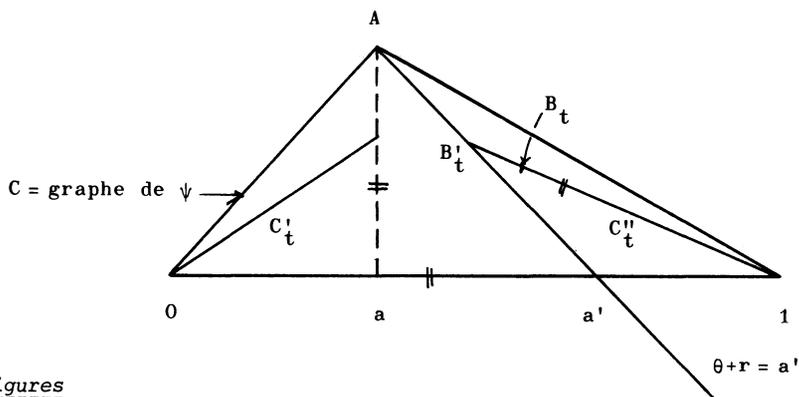
(\*)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Par l'unicité de la variété stable on doit avoir, si } t \geq 1-\varepsilon \\ (\varepsilon > 0 \text{ petit}), F_t^{-1}(B_t, B_t'') \subset C_t'. \text{ (Puisque, si } t \rightarrow 1, B_t \rightarrow A \text{ et} \\ F_1^{-1}(A) \in C_1'.) \end{array} \right.$

Si  $a < \theta < a'$

$$DF_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + 2t(\frac{1}{\lambda} - 1) & -1 \\ -2t(\frac{1}{\lambda} - 1) & 1 \end{pmatrix} .$$



$$B_t = (b_t, d_t)$$



Figures

La pente de  $DF_t^{-1}(B_t)(\mu_t^{-1})$  doit être égale à  $\frac{1}{\mu_t} - 1$ , soit

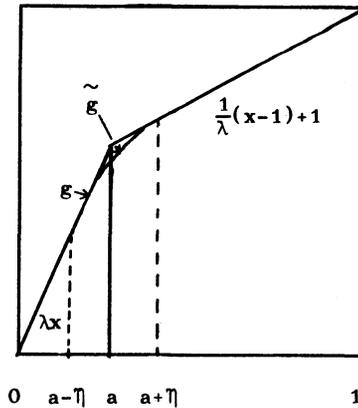
$$\frac{1 + 2t(\frac{1}{\lambda} - 1) + 1 - \mu_t}{\mu_t - 1 - 2t(\frac{1}{\lambda} - 1)} = \frac{1}{\mu_t - 1}$$

d'où

$$\mu_t = t(\frac{1}{\lambda} - 1) + 1$$

et en remplaçant  $\mu_t$  dans l'équation (+) on obtient  $t = 0$  ou  $1$ . Il en résulte que, si  $t \geq 1 - \varepsilon$ ,  $t \neq 1$ , alors (\*) n'est pas vérifiée et donc, par l'absurde,  $F_t$  n'a pas de courbe invariante  $C_t$ . ■

8.6 On lisse  $g$  sur  $[0,1]$  en  $\tilde{g}$  en modifiant seulement  $g$  sur  $[a-\eta, a+\eta]$ , où  $\eta > 0$  est petit tel que  $\tilde{g}$  soit de classe  $C^\infty$  sur  $[0,1]$  et  $\frac{1}{\lambda} - \eta \leq D\tilde{g}(x) \leq \lambda + \eta$ .



Figure

Soient  $\frac{\tilde{g} + \tilde{g}^{-1}}{2} = \tilde{h} = \text{Id} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}$  et  $\tilde{h}_t = \text{Id} + \frac{t}{2} \tilde{\varphi}$ ; alors  $\tilde{h}_t \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  (bien que l'on ait  $\tilde{g} \in D^0(\mathbb{T}^1)$  seulement). Si  $\delta > 0$  est donné et si  $\lambda - 1 < \delta/4$ , et si  $\eta > 0$  est assez petit, on peut supposer que  $\|\tilde{\varphi}\|_{C^1} \leq \frac{\delta}{2}$ .

On fixe les nombres  $\lambda, \delta$ , où  $0 < \delta < 1$  et on détermine le nombre  $\varepsilon > 0$  de 8.4. On fixe  $t$  vérifiant  $1 > t \geq 1 - \varepsilon$ , si  $\eta > 0$  est très petit par rapport à  $t$ , par le même raisonnement que 8.5 on peut supposer que

$$\tilde{h}_t \notin \tilde{\Phi}(F_0^0) \quad \text{et} \quad \tilde{h}_t \in V_{\delta/2}^1 .$$

**8.7 Proposition :** Pour  $\lambda, t, \eta, \delta, \tilde{h}_t$  fixés comme ci-dessus, il existe un  $C^0$ -voisinage fermé  $U$  (i.e. induit par la  $C^0$ -topologie) de  $\tilde{h}_t$  dans  $D^\infty(\mathbb{T}^1) \cap V_{\delta/2}^1$  et  $\gamma > 0$  tel que, si  $f \in U$ ,

$$f \notin \bigcup_{\alpha \in ]-\gamma, \gamma[} \tilde{\Phi}(F_\alpha^0) .$$

**Démonstration :** On suppose que  $0 < \delta < 1$ . On désigne par  $\bar{V}_{\delta/2}^1$  l'adhérence de  $V_{\delta/2}^1$  dans  $H^0$  pour la  $C^0$ -topologie. Par le théorème d'Ascoli  $\bar{V}_{\delta/2}^1$  est compact pour la  $C^0$ -topologie et  $V_{\delta/2} - \text{Id} = \{ \frac{1}{2} \varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1) \mid \text{Lip}(\frac{1}{2} \varphi) \leq \delta/2 \}$ .

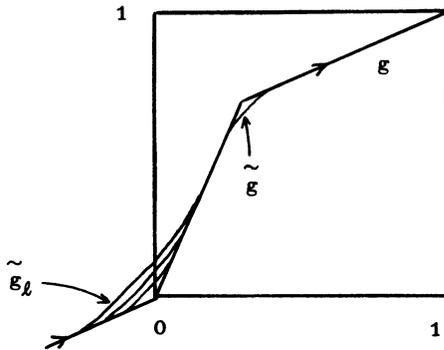
On peut supposer (par une démonstration analogue à celle de I.5.4 en utilisant 2.2) que, puisque  $\tilde{h}_t \notin \tilde{\Phi}(F_0^0)$ , il existe un voisinage  $\bar{U}$  (induit par la  $C^0$ -topologie) de  $\tilde{h}_t$  dans  $\bar{V}_{\delta/2}^1$   $C^0$ -fermé, et tel que, pour tout  $f \in \bar{U}$ ,  $f \notin \tilde{\Phi}(F_0^0)$ .

Ceci implique qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que l'on ait la conclusion de 8.7. Pour cela raisonnons par l'absurde. Comme  $\tilde{\Phi}(D^0(\mathbb{T}^1)) \cap \bar{U}$  est fermé pour la  $C^0$ -topologie (cf. I.5.4), et donc compact ; si pour tout  $\gamma > 0$  il existe  $|\theta| < \gamma$  et  $f_\theta \in \tilde{\Phi}(F_\theta^0) \cap \bar{U}$ , alors on peut, par compacité, choisir une suite  $\theta_i \rightarrow 0$  et  $f_{\theta_i} \rightarrow f_0$  dans la  $C^0$ -topologie, or par la continuité de la fonction nombre de rotation  $\rho$  dans la  $C^0$ -topologie, on a  $f_0 \in \tilde{\Phi}(F_0^0) \cap \bar{U}$ . Par l'absurde ceci démontre l'existence du nombre  $\gamma > 0$ . Il suffit alors de poser  $U = \bar{U} \cap V_{\delta/2}^1 \cap D^\infty(\mathbb{T}^1)$ . ■

8.8 Démonstration de 8.2 : On se fixe  $0 < \delta$ , on construit  $\tilde{h}_t$  comme en 8.6 et on détermine le voisinage  $U$  et le nombre  $\gamma$  de 8.7.

A) Cas où  $\alpha$  est petit ( $0 \leq |\alpha| \leq \gamma_1$ ).

Soit  $\tilde{g}$  défini en 8.6,  $\Phi(\tilde{g}) = \tilde{h}$ . Comme  $\tilde{g}$  est semi-stable en avant [H, III.2.4], on peut approximer  $\tilde{g}$  par une famille continue  $(\tilde{g}_\ell)_{0 < \ell < 1}$ ,  $\tilde{g}_\ell \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ , pour  $\ell_1 \geq \ell_2$ ,  $\tilde{g}_{\ell_1} \geq \tilde{g}_{\ell_2}$ ,  $\rho(\tilde{g}_\ell) > 0$ ,  $\ell \rightarrow \rho(\tilde{g}_\ell)$  est continue, et si  $\ell \rightarrow 0$ ,  $\tilde{g}_\ell \rightarrow \tilde{g}$  dans la  $C^0$ -topologie. On peut supposer de plus que  $\Phi(\tilde{g}_\ell) \in V_{3\delta/4}^1 \cap D^\infty(\mathbb{T}^1)$ . (Par ceci on lisse  $\tilde{g}$  dans un petit voisinage de 0 et on peut s'assurer que  $\Phi(\tilde{g}_\ell) \in V_{3\delta/4}^1$ , si  $\lambda-1$  est assez petit en lissant de façon ad hoc).



Figure

Soit  $t$  fixé comme en 8.6 et 8.7, et on pose  $\Phi(\tilde{g}_\ell)_t = (1-t)\text{Id} + t\Phi(\tilde{g}_\ell)$ , pour  $0 \leq t \leq 1$ . Pour  $\ell$  assez petit,  $\Phi(\tilde{g}_\ell)_t \in U$  (puisque, si  $\ell \rightarrow 0$ ,  $\tilde{g}_\ell \rightarrow \tilde{g}$  dans la  $C^0$ -topologie et que  $U$  est un voisinage de  $\tilde{h}_t = \Phi(\tilde{g})_t$  induit par la  $C^0$ -topologie) ; de plus, si  $\ell \rightarrow 0$ ,  $\Phi(\tilde{g}_\ell)_t \rightarrow \tilde{h}_t$  et donc pour  $\ell$  assez petit,  $0 < \rho(\Phi(\tilde{g}_\ell)_t) < \gamma$ .

On obtient finalement en utilisant 8.7 qu'il existe  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_1 < \gamma$  (dépendant de  $\delta > 0$ ) tel que pour tout  $0 \leq \alpha < \gamma_1$  il existe  $h_\alpha \in \Phi(F_\alpha^\infty)$  mais

$$(h_\alpha)_t = (1-t)\text{Id} + th_\alpha \xi \Phi(F_\alpha^\infty) .$$

On a de plus  $h_\alpha \in V_\delta^1 \cap D^\infty(\mathbb{T}^1)$ , et  $(h_\alpha)_t \in \mathfrak{F}(F_\alpha^0) \iff (h_\alpha)_t \in \mathfrak{F}(F_{-\alpha}^0)$ . ■

B) Le cas général.

On utilise les revêtements finis [II, 4.8]. On suppose que  $r = 0$  ou  $r \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , ou  $r = +\infty$ . Si  $q \in \mathbb{Z}^*$  soit  $l_q(\theta) = q\theta$  et

$$g \in D^r(\mathbb{T}^1) \longrightarrow g_q = l_q^{-1} \circ g \circ l_q \in D^r(\mathbb{T}^1) \quad .$$

Si  $g = \text{Id} + \psi$ ,  $g_q(\theta) = \text{Id} + \frac{1}{q} \psi(\theta)$ . On a :

- a)  $g_q \circ R_{1/q} = R_{1/q} \circ g_q$  .
- b)  $\rho((R_p \circ g)_q) = \frac{\rho(g)}{q} + \frac{p}{q}$  si  $p \in \mathbb{Z}$  .
- c) Si  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $h_q \in \mathfrak{F}(F_{\frac{\alpha}{q} + \frac{p}{q}}^r) \iff h \in \mathfrak{F}(F_{\alpha+p}^r)$  voir [II, 4.8] .
- d)  $\|Dg_q - 1\|_{C^0} = \|Dg - 1\|_{C^0}$  si  $g \in D^1(\mathbb{T}^1)$  .
- e) Soient  $h_t(\theta) = \text{Id} + \frac{t}{2} \varphi(\theta)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$h_t \in \mathfrak{F}(F_\alpha^0) \iff h_t \in \mathfrak{F}(F_{\alpha+p}^0) \iff (h_t)_q \in \mathfrak{F}(F_{\frac{\alpha}{q} + \frac{p}{q}}^0) \quad .$$

Les démonstrations sont immédiates (voir [II, 4.8] et [H, XI.2]). Soient  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $\delta > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  le nombre déterminé en A). On choisit  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , tels que  $\alpha_1 = q\alpha - p$  vérifie  $|\alpha_1| < \gamma_1$  et on construit  $h_{\alpha_1}$  comme en A). Le difféomorphisme  $(h_{\alpha_1})_q = h_\alpha \in \mathfrak{F}(F_\alpha^\infty)$  par c) et e),  $h_\alpha \in V_\delta^1$  par d), mais  $(h_\alpha)_t = (1-t)\text{Id} + th_\alpha \in \mathfrak{F}(F_\alpha^0)$  par A) et e). ■

8.9 Remarques : 1) La construction des revêtements finis permet de construire  $g_q$  loin dans la  $C^{1+\varepsilon}$ -topologie car  $\|Dg_q - 1\|_{C^\varepsilon} = |q|^\varepsilon \|Dg - 1\|_{C^\varepsilon}$ , mais  $C^1$ -proche de l'identité par 8.8 B) d). Ceci permet aussi de construire des  $h \in \mathfrak{F}(F_\alpha^\infty)$  tels que  $\|Dh\|_{C^\varepsilon}$  soit grand (on utilise 8.8 B) e) et c) si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ).

Ceci montre que dans certaines directions  $\Phi(F_\alpha^\infty)$  peut devenir grand dans la  $C^{1+\varepsilon}$ -topologie. (Certaines directions veut dire si  $h \in \Phi(F_\alpha^\infty)$ , alors  $(1-t)Id + th \in \Phi(F_\alpha^\infty)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .)

2) Par le théorème des courbes invariantes [II, 2.6] pour presque tout  $\alpha$ , si  $h \in H^\infty$ , alors si  $|t|$  est assez petit,  $h_t = (1-t)Id + th \in \Phi(F_\alpha^\infty)$ . De plus si  $\alpha$  satisfait à une condition A,  $\Phi(F_\alpha^\infty)$  est ouvert dans  $H^\infty$  pour la  $C^\infty$ -topologie [II, 2.6.2].

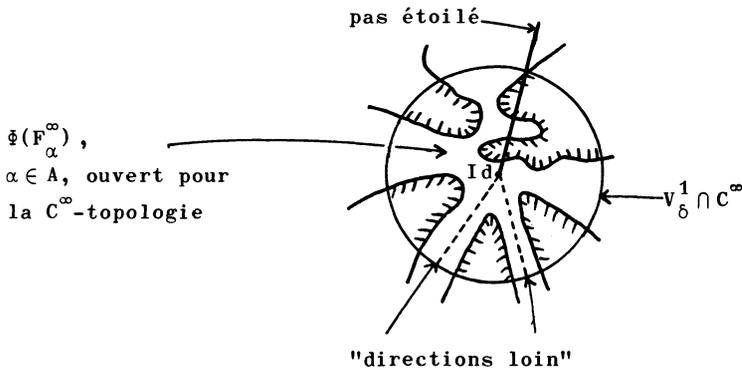


Figure heuristique de  $h \in C^\infty \cap V_\delta^1$ .

## 9. REMARQUES SUR L'IMAGE GLOBALE DE $\Phi$ .

9.1 Soit  $\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ ,  $\varphi \neq 0$ . Il existe  $t_0 > 0$  (dépendant de  $\varphi$ ) tel que l'on ait, si on pose pour  $t \geq 0$ ,  $g_t = Id + \frac{t}{2}\varphi$ ,

$$g_t \notin H^0 \quad \text{si } t > t_0$$

$$g_t \in H^0 \quad \text{si } t < t_0 \quad .$$

Proposition : Il existe un nombre  $t_1 > 0$  dépendant de  $\varphi$  tel que l'on ait  $t_1 < t_0$  et, si  $t > t_1$ ,  $g_t \notin \Phi(D^0(\mathbb{T}^1))$ .

Démonstration : On pose  $a_+ = \sup_{x \neq y} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}$  et  $a_- = -\inf_{x \neq y} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}$ , alors par 2.2, s'il existe un homéomorphisme  $h_t$  tel que  $\Phi(h_t) = g_t$ , on a nécessairement, pour  $t \leq t_0$ ,

$$M_t \leq 1 + \frac{a_+ t}{2} + (a_+ t + (\frac{a_+ t}{2})^2)^{1/2}$$

où  $M_t = \text{Max}(\text{Lip}(h_t), \text{Lip}(h_t^{-1}))$ .

On a, d'autre part, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $x \geq y$ ,

$$h_t(x) - h_t(y) \geq \frac{1}{M_t} (x - y) \quad , \quad h_t^{-1}(x) - h_t^{-1}(y) \geq \frac{1}{M_t} (x - y)$$

et donc (voir aussi [II, 2.4.5])

$$\frac{1}{1 - \frac{a_- t}{2}} \leq M_t \quad .$$

On doit avoir l'inégalité a priori pour  $t^\varphi$  :

$$(+)\quad \frac{1}{1 - \frac{a_- t}{2}} \leq 1 + \frac{a_+ t}{2} + (a_+ t + (\frac{a_+ t}{2})^2)^{1/2} \quad .$$

Si  $g_t$  est un homéomorphisme alors

$$1 - \frac{a_- t}{2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad t_0 = \frac{2}{a_-} \quad ,$$

or, si  $t \rightarrow t_0$ ,  $1/(1 - a_- t/2) \rightarrow +\infty$  et donc l'inégalité (+) n'est pas vérifiée.

Ceci montre l'existence du nombre  $t_1 < t_0$ . ■

9.2 Il existe un unique nombre  $t_1 > 0$  tel que dans (+) on ait l'égalité.

En effet, si  $x \geq 1$ , la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$  est croissante, (+) équivaut à

$$\frac{1}{2}(m_t + m_t^{-1}) \leq 1 + \frac{a_+ t}{2} \quad \text{avec} \quad m_t = 1 - \frac{a_- t}{2} \quad .$$

Comme  $m_t > 0$  et  $t > 0$ , ceci équivaut à  $t \leq t_1$  avec

$$t_1 = \frac{4a_+}{a_-(2a_+ + a_-)} \quad .$$

9.3 L'inégalité (+) est optimale ainsi que le montre l'exemple PL g de 8.3 :

$$t_1 = 1, a_+ = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) - 1, \lambda > 1, M_{t_1} = \lambda \text{ et (+) est une égalité.}$$

9.4 Si  $a_+ = a_- = 1$ , on obtient  $t_1 = 4/3$  <sup>\*</sup> et l'exemple PL g de 8.3 avec  $\lambda = 3$  montre que  $t_1 = 4/3$  est optimal.

9.5 Le lecteur se rapportera à II.2.4 et II.3.

\*  
\*  
\*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [HA] R. Hall, Bifurcation of an attracting invariant circle : a Denjoy attractor, à paraître dans Erg. Th. and Dynamical Systems.
- [HS] J. Harrison, Denjoy fractals in the plane, à paraître.
- [H] M.R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. Math. I.H.E.S. No 49, pp. 5-233, (1979).
- [I] M.R. Herman, La théorie de Birkhoff, Chap. I de ce travail.
- [II] M.R. Herman, Contre-exemples de classe  $C^{3-\varepsilon}$  et à nombre de rotation fixé, au théorème des courbes invariantes, Chap. II de ce travail.
- [H8] L. Hörmander, The boundary problems of physical geodesy, Arch. for Rat. Mech. and Analysis, 62 (1976), pp. 1-52.
- [K] Y. Katznelson, Introduction to harmonic analysis, Dover, New York (1976).

---

\* Ce résultat numérique précis est dû à J. Mather et m'a été communiqué par A.B. Katok (voir [M<sub>1</sub>]) ; néanmoins 9.1 et 9.3 étaient connus de l'auteur de ces lignes depuis 1979.

*CONTRE-EXEMPLES DE DENJOY*

- [M] J. Mather, Existence of quasi-periodic orbits of twist homeomorphisms of the Annulus, *Topology*, 21 (1982), 457-467.
- [M<sub>1</sub>] J. Mather, Non existence of invariant circles, preprint (1982).
- [Z] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, New York (1968).

---

ANNEXE SUR LES MODULES DE CONTINUITÉ (voir aussi [H, IV.3])

A<sub>1</sub>/ Soit  $\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On définit le module de continuité de  $\varphi$  par

$$w(\delta) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x) - \varphi(x+\delta)|, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

La fonction  $w(\delta)$  est monotone non décroissante et continue en 0 (par l'uniforme continuité de  $\varphi$ ).  $w$  est une fonction continue et uniformément continue (cela résulte de  $w(\delta_1 + \delta_2) \leq w(\delta_1) + w(\delta_2)$ ). Si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction uniformément continue, on définit son module de continuité  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec les mêmes propriétés que ci-dessus.

Soit  $\delta > 0$  est la fonction définie sur  $[0,1]$ ,  $\varphi(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta}$ . Si  $w$  est son module de continuité, on a, si  $x$  est assez petit,  $w(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta}$ .

A<sub>2</sub>/ Soit  $w$  un module de continuité, on dit que  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  est de classe  $C^w$  (i.e.  $\varphi \in C^w(\mathbb{T}^1)$ ) si

$$|\varphi|_{C^w} = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x - y|)} < +\infty.$$

On vérifie que l'espace  $C^w(\mathbb{T}^1)$  est un espace de Banach pour la norme  $\|\varphi\|_{C^w} = \|\varphi\|_{C^0} + |\varphi|_{C^w}$ . Cette topologie s'appelle la  $C^w$ -topologie. Si  $w(\delta) = \delta$ , on obtient l'espace des fonctions périodiques lipschitziennes, espace noté  $\text{Lip}(\mathbb{T}^1)$  (ou aussi  $\text{Lip}_1(\mathbb{T}^1)$ ). On pose alors  $\text{Lip}(\varphi) \equiv |\varphi|_{C^w}$ .

A<sub>3</sub>/ L'espace  $C^w(\mathbb{T}^1)$  est une algèbre de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_{C^w}$ . On a, si  $\varphi, \psi \in C^w(\mathbb{T}^1)$ ,

$$|\varphi\psi|_{C^W} \leq |\varphi|_{C^W} \|\psi\|_{C^0} + \|\varphi\|_{C^0} |\psi|_{C^W} .$$

A<sub>4</sub>/ Si  $f: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  est une application lipschitzienne (i.e. Lip) et si  $\varphi \in C^W(\mathbb{T}^1)$ , alors  $\varphi \circ f \in C^W$  et on a

$$|\varphi \circ f|_{C^W} \leq |\varphi|_{C^W} ([k] + 1)$$

où  $k = \sup_{x \neq y} \left( \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \right) \equiv \text{Lip}(f) \equiv \text{Lip}_1(f)$ .

A<sub>5</sub>/ Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipchitzienne. Alors, si  $\varphi \in C^W$ ,  $f \circ \varphi \in C^W$  et on a

$$|f \circ \varphi|_{C^W} \leq \text{Lip}(f) |\varphi|_{C^W} .$$

A<sub>6</sub>/ Il en résulte que, si  $\varphi \in C^W$  vérifie  $\|\varphi\|_{C^0} \leq \frac{1}{2}$ , alors

$$\left| \frac{1}{1+\varphi} \right|_{C^W} \leq 4 |\varphi|_{C^W}$$

$$\left| \frac{1}{(1+\varphi)^2} \right|_{C^W} \leq 16 |\varphi|_{C^W} .$$

A<sub>7</sub>/ Soit  $w$  le module de continuité d'une fonction de  $C^0(\mathbb{T}^1)$ , tel que la fonction  $x/w(x)$  soit croissante.

Si  $\varphi \in \text{Lip}(\mathbb{T}^1)$ , on a

$$|\varphi|_{C^W} \leq \frac{2 \|\varphi\|_{C^0}}{w(2 \|\varphi\|_{C^0} / \text{Lip}(\varphi))} .$$

Démonstration : En effet, soit  $\delta > 0$ , on a

$$|\varphi|_{C^w} \leq \text{Max} \left( \sup_{t \geq \delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{w(t)}, \sup_{t < \delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{w(t)} \right) \\ \leq \text{Max} \left( \frac{2 \|\varphi\|_{C^0}}{w(\delta)}, \text{Lip}(\varphi) \frac{\delta}{w(\delta)} \right) .$$

On choisit  $\delta = 2 \|\varphi\|_{C^0} / \text{lip}(\varphi)$  (si  $\text{Lip}(\varphi) \neq 0$ , car si  $\text{Lip}(\varphi) = 0$  on a  $|\varphi|_{C^w} = 0$  et l'inégalité est trivialement vérifiée) ; et on remplace. ■

A<sub>8</sub>/ Soient  $w_1$  et  $w_2$  deux modules de continuité de fonctions de  $C^0(\mathbb{T}^1)$ .

On suppose que la fonction  $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$  est croissante et que, si  $x \rightarrow 0$ ,  $\frac{w_1(x)}{w_2(x)} \rightarrow 0$ .

Proposition : Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C^w(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  
si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\|\varphi_n\|_{C^0} \rightarrow 0$ ,

$$\sup_n |\varphi_n|_{C^{w_1}} < +\infty ,$$

alors, si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $|\varphi_n|_{C^{w_2}} \rightarrow 0$ .

Démonstration : Il suffit de démontrer une inégalité de convexité analogue à A<sub>7</sub>. ■

Exemples : Si  $w_1(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta_1}$  si  $x \rightarrow 0$  ( $\delta_1 > 0$ ), on peut choisir

$$w_2(x) = x(\text{Log } \frac{1}{x})^{1+\delta_2} \quad \text{si } x \rightarrow 0 \quad (\delta_2 > \delta_1)$$

$$w_2(x) = x^\beta \quad , \quad 0 < \beta < 1 .$$

A<sub>9</sub>/ Si  $r \in \mathbb{N}$  et si  $w$  est un module de continuité, alors on définit  $C^{r+w}(\mathbb{T}^1) = \{\varphi \in C^r(\mathbb{T}^1) \mid D^r \varphi \in C^w\}$ . Avec la norme  $\|\varphi\|_{C^{r+w}} = \|\varphi\|_{C^r} + |D^r \varphi|_{C^w}$ ,

où  $\|\varphi\|_{C^r} = \sup_{0 \leq i \leq r} \|D^i \varphi\|_{C^0}$ , l'espace  $C^{r+w}(\mathbb{T}^1)$  est un espace de Banach et une algèbre topologique et sa topologie s'appelle la  $C^{r+w}$ -topologie.

A<sub>10</sub>/ On définit pour  $r \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $D^{r+w}(\mathbb{T}^1) = \{f = \text{Id} + \psi \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid \psi \in C^{r+w}\}$  qui est un sous-groupe de  $D^r(\mathbb{T}^1)$ . (On utilise pour ceci A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub> et la formule de Faa-di-Bruno.)

A<sub>11</sub>/ Si on choisit comme module de continuité höldérien  $w(w) = x^\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , alors on utilise la notation (si  $r \in \mathbb{N}$ )  $C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ ,  $D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  pour respectivement  $C^{r+w}(\mathbb{T}^1)$  et  $D^{r+w}(\mathbb{T}^1)$ . On a, si  $\beta' < \beta$ ,  $C^{r+\beta} \subset C^{r+\beta'}$  et  $\|\cdot\|_{C^{r+\beta'}} \leq \|\cdot\|_{C^{r+\beta}}$ . Les éléments de  $C^\beta(\mathbb{T}^1)$ ,  $0 < \beta < 1$ , sont appelés fonctions höldériennes d'exposant  $\beta$ .

Pour  $\delta > 0$ , on note par  $w_1^\delta(x)$  le module de continuité de la fonction  $x(\text{Log } \frac{1}{x})^{2+2\delta}$ .  
On a, si  $r \in \mathbb{N}$  et

$$C^{r+w_1^\delta}(\mathbb{T}^1) \subset C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) ;$$

si  $r \geq 1$ ,

$$D^{r+w_1^\delta}(\mathbb{T}^1) \subset D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) ,$$

et si  $0 < \delta < \delta'$ ,

$$C^{r+w_1^\delta}(\mathbb{T}^1) \subset C^{r+w_1^{\delta'}}(\mathbb{T}^1) ,$$

les injections étant continues puisque  $\|\cdot\|_{C^{r+\beta}} \leq \|\cdot\|_{C^{r+w_1^{\delta'}}} \leq \|\cdot\|_{C^{r+w_1^\delta}}$ .

A<sub>12</sub>/ On rappelle que si  $0 \leq a \leq b$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $\varphi \in C^b(\mathbb{T}^1)$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on ait :

$$\|\varphi\|_{C^{\lambda a + (1-\lambda)b}} \leq C \|\varphi\|_{C^a}^\lambda \|\varphi\|_{C^b}^{1-\lambda} \quad (\text{voir [H8, p. 40]}).$$

A<sub>13</sub>/ On se place sous les mêmes hypothèses que A<sub>8</sub> et on suppose que  $w_2(x) = x^\beta$  pour un  $0 < \beta < 1$ .

Proposition : Soient  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $C^{r+w_1}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant, si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\|\varphi_n\|_{C^0} \rightarrow 0$ ,  $\sup_n |D^r \varphi_n|_{C^1} < +\infty$ , alors si  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\|\varphi_n\|_{C^{r+w_2}} \longrightarrow 0 .$$

Démonstration : Par A<sub>12</sub> on a  $\|D^r \varphi_n\|_{C^0} \rightarrow 0$  avec  $n \rightarrow +\infty$  et il suffit d'appliquer A<sub>8</sub>. ■

A<sub>14</sub>/ Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $w$  un module de continuité . On note par

$$C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1) = \{ \varphi \in C^{r+w}(\mathbb{T}^1) \mid \text{si } |x-y| \rightarrow 0, \text{ alors } \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)} \rightarrow 0 \text{ uniformément} \} .$$

Avec la  $C^{r+w}$ -topologie,  $C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$  est un sous-espace fermé de  $C^{r+w}(\mathbb{T}^1)$

et  $C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$  est une algèbre de Banach. Si  $\varphi \in C^{r+w_1}(\mathbb{T}^1)$ , la fonction de

$\mathbb{T}^2 - \Delta$ ,  $(x,y) \rightarrow \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{w(|x-y|)}$  se prolonge par continuité par 0 sur la diagonale  $\Delta$  de  $\mathbb{T}^2$ .

Si  $w_1$  et  $w_2$  vérifient la condition de A<sub>8</sub>, alors  $C^{r+w_1} \subset C^{r+w_2+}$ .

A<sub>15</sub>/ Si  $r \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , on définit

$$D^{r+w}_+(\mathbb{T}^1) = \{ f = \text{Id} + \varphi \in D^r(\mathbb{T}^1) \mid D^r \varphi \in C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1) \} .$$

On vérifie que  $D^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$  est un groupe topologique avec la  $C^{r+w}$ -topologie .

$D^{r+w}(\mathbb{T}^1)$  n'est pas un groupe topologique avec la  $C^{r+w}$ -topologie .

Si  $r \in \mathbb{N}$ , on rappelle qu'avec la  $C^r$ -topologie le groupe  $D^r(\mathbb{T}^1)$  est un groupe topologique.

A<sub>16</sub>/ On suppose que le module de continuité  $w$  vérifie, si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\delta/w(\delta) \rightarrow 0$ .  
 Par A<sub>14</sub>, on a  $C^\infty(\mathbb{T}^1) \subset C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$ .

Proposition : L'espace  $C^\infty(\mathbb{T}^1)$  est dense dans  $C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$  pour la  $C^{r+w}$ -topologie.

Démonstration : On peut supposer que  $r = 0$ . Comme  $\alpha \in \mathbb{T}^1 \rightarrow \varphi \circ R_\alpha \in C^w_+(\mathbb{T}^1)$  est continue si  $\varphi \in C^w_+$ , il suffit d'appliquer [K, 2.12]. ■

Corollaire : Si  $r > 1$ , le groupe  $D^\infty(\mathbb{T}^1)$  est dense dans  $D^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$  pour la  $C^{r+w}$ -topologie.

A<sub>17</sub>/ Si  $w(x) = x^\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , on note  $C^{r+w}_+(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $D^{r+\beta}_+(\mathbb{T}^1)$ ) par  $C^{r+\beta}_+(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $D^{r+\beta}_+(\mathbb{T}^1)$ ).

\*\*\*



## CHAPITRE IV

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES DE NOMBRE DE ROTATION DE TYPE CONSTANT

#### 1. INTRODUCTION.

Nous nous proposons de démontrer le théorème des courbes translattées de Rüssmann [11] en classe  $C^{3+\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ . Ceci implique le théorème des courbes invariantes de J. Moser [8] (voir aussi les annonces [9] et [10]). De plus le théorème 5.4 tel que nous l'énonçons implique la stabilité des points fixes elliptiques des difféomorphismes de classe  $C^r$ ,  $r \geq r_0$ , du plan qui préservent les aires ( $f(z) = \alpha z(1 + ib|z|^2 + ic|z|^4 + o(|z|^6))$ ,  $|\alpha| = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ; ceci en utilisant 3.6 et on peut remplacer  $o(|z|^6)$  par  $o(|z|^4)$  si on s'inspire de 5.9). Pour la stabilité des points fixes elliptiques, nous renvoyons à [15].

Notre méthode, qui est très simple, nous permet seulement d'obtenir les courbes sur lesquelles le nombre de rotation est de type constant :  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il existe  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $p/q \in \mathbb{Q}$  on ait  $|\alpha - (p/q)| \geq \gamma q^{-2}$ . Pour les conclusions qualitatives : un ensemble de courbes invariantes paramétré par un ensemble de Cantor, stabilité des points fixes elliptiques, etc., c'est amplement suffisant (il faut donc exclure les questions de mesure de Lebesgue des courbes, etc.).

Comme la perte sur l'équation linéarisée est seulement d'une unité sur les espaces  $C^{r+\beta}$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \beta < 1$  (ceci est impliqué par le résultat de Rüssmann [12]), nous pouvons appliquer le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff ; ce qui est infiniment plus simple que les

méthodes d'itérations rapides. De plus la méthode est (assez) générale chaque fois que des nombres  $\alpha \in \mathbf{R}$  de type constant interviennent, mais nous l'avons surtout illustrée avec le théorème local de conjugaison des difféomorphismes du cercle, § 4, et le théorème des courbes translatées, § 5, (mais on peut aussi traiter d'autres équations non-linéaires par la même méthode).

Il reste néanmoins que les principes sont les mêmes que pour la démonstration "abstraite" que nous avons donnée du théorème des courbes translatées et le théorème des tores invariants [3].

A l'exclusion de l'appendice de [5], la version que nous proposons (avec probablement beaucoup trop de détails) est (je l'espère) presque entièrement "self contained".

Le plan est le suivant :

- 2) Notations et rappels. (Ce § contient des rappels sur les fonctions  $C^{r+\beta}$ .)
- 3) Equation linéarisée. (Ce § contient le miracle.)
- 4) Théorèmes locaux de conjugaison des difféomorphismes du cercle.
- 5) Théorèmes des courbes translatées.

Un autre chapitre sera inclus au volume 2 et portera sur les courbes translatées des difféomorphismes en classe de Sobolev ou Besov.

Nous obtenons une amélioration sur [9] et [10] : pour un difféomorphisme de classe  $C^{r+\beta}$ ,  $r \in \mathbf{N}$ ,  $r \geq 3$ ,  $0 < \beta < 1$ , la courbe est de classe  $C^{r-1+\beta}$  (ce qui n'est pas tout-à-fait évident par les méthodes de [9] et [10]). Nous pensons que cela explique plusieurs choses.

On peut montrer que ces résultats sont en un certain sens optimaux :

- a) Le théorème 5.4 est faux en classe  $C^{3-\beta}$ ,  $\beta > 0$  (voir Chap. II et III).
- b) La perte de dérivabilité des courbes est en général  $\geq 1-\beta$ ,  $\beta > 0$ .

## THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES

### 2. NOTATIONS ET RAPPELS.

2.1 On désigne le tore de dimension  $n$  par  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Les translations (à droite) de  $\mathbb{T}^n$  sont notées  $R_\alpha : \theta \in \mathbb{T}^n \rightarrow \theta + \alpha \in \mathbb{T}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{T}^n$ .

Si  $\theta \in \mathbb{T}^1$ , on a la métrique de groupe

$$\|\theta\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{\theta} + p| \quad ,$$

où  $\tilde{\theta}$  est un relèvement de  $\theta$  à  $\mathbb{R}$ .

Sur  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta]$ ,  $\delta > 0$ , on met la métrique, si  $x_i = (\theta_i, r_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$d(x_1, x_2) = \sup(\|\theta_1 - \theta_2\|, |r_1 - r_2|) \quad .$$

2.2.1 Soit  $X$  un espace compact métrique avec la métrique  $d$  et  $E$  un espace de Banach avec la norme  $\|\cdot\|$ .

On désigne par  $C^0(X, E)$  l'espace de Banach des fonctions continues de  $X$  dans  $E$  avec la norme  $\|\varphi\| = \sup_{x \in X} \|\varphi(x)\|$ . On écrit aussi  $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{C^0}$ .

On utilise aussi la notation  $C^0(X)$  pour  $C^0(X, \mathbb{R})$  ainsi que pour les sous-espaces de  $C^0(X)$  : on écrit  $C^\beta(X)$ ,  $C^{r+\beta}(X)$  au lieu de  $C^\beta(X, \mathbb{R})$ ,  $C^{r+\beta}(X, \mathbb{R})$  quand ces espaces ont un sens.

2.2.2 Si  $0 < \beta < 1$ , on désigne par  $C^\beta(X, E)$  ou encore  $C^\beta(X, E, d)$  (si  $\beta = 1$   $\text{Lip}(X, E)$ ) l'espace des fonctions  $\varphi : X \rightarrow E$  höldériennes d'exposant  $\beta$  :

$$|\varphi|_{C^\beta} \equiv |\varphi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{(d(x, y))^\beta} < +\infty \quad .$$

Pour la norme  $\|\varphi\|_{C^\beta} = \|\varphi\| + |\varphi|_\beta$  (si  $\beta = 1$ , on note cette norme  $\|\varphi\|_{\text{Lip}_1} \equiv \|\varphi\|_{\text{Lip}}$ )

$C^\beta(X, E)$  est un espace de Banach. Si  $\beta_1 \leq \beta_2$ ,  $C^{\beta_2} \subset C^{\beta_1}$  et on a

---

\* Nous utilisons dans les autres chapitres plutôt la notation  $|\varphi|_{C^\beta}$ .

$$|\varphi|_{\beta_1} \leq a^{\beta_2 - \beta_1} |\varphi|_{\beta_2}, \quad a = \text{diamètre de } X = \sup_{x \neq y} d(x, y).$$

2.2.3 Si  $E = \mathbf{R}$  avec la norme standard,  $C^\beta(X, \mathbf{R})$  est une algèbre de Banach et on a

$$|\varphi\psi|_\beta \leq (\|\varphi\| |\psi|_\beta + |\varphi|_\beta \|\psi\|).$$

2.2.4 On suppose que le diamètre de  $X$  est  $\geq 1$ . On a les inégalités de convexité (voir [2, VIII.3]) si  $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$  et  $\beta = (1-\lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2$  avec  $0 \leq \lambda \leq 1$ , alors si  $\varphi \in C^\beta(X, E)$  on a

$$|\varphi|_\beta \leq |\varphi|_{\beta_1}^{1-\lambda} |\varphi|_{\beta_2}^\lambda$$

avec 
$$|\varphi|_0 = \sup_{x \neq y} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq 2 \|\varphi\|.$$

(Si  $\beta_1 = 0$ , on n'a pas besoin de supposer que le diamètre de  $X$  est  $\geq 1$ .)

2.2.5 Si  $(X_1, d_1)$  sont deux espaces compacts métriques et si  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est  $\text{Lip}_1$  :

$$\sup_{x \neq y} \frac{d_2(f(x), f(y))}{d_1(x, y)} = \text{Lip}_1(f) < +\infty,$$

alors, si  $\varphi \in C^\beta(X_2, E, d_2)$ ,  $\varphi \circ f \in C^\beta$ , et on a

$$|\varphi \circ f|_\beta \leq |\varphi|_\beta (\text{Lip}_1(f))^\beta.$$

Si  $X_1 = X_2$ ,  $d_1 = d_2$  et si  $f$  est un homéomorphisme lipschitizien (i.e.  $f \in \text{Lip}_1$  et  $f^{-1} \in \text{Lip}_1$ ), alors

$$\varphi \in C^\beta \iff \varphi \circ f \in C^\beta.$$

## THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES

Il en résulte que l'espace  $C^\beta(X, E, d)$  reste le même si on remplace la métrique par une métrique  $d_1$  lipschitziennement équivalente à  $d$  :  
il existe  $C \geq 1$  tel que l'on ait

$$\frac{1}{C} d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C d(x, y) .$$

Si  $\varphi \in C^\beta(X, \mathbf{R})$ , avec  $\varphi(X) \subset [a, b]$ ,  $-\infty < a \leq b < +\infty$ , si  $f \in \text{Lip}_1([a, b], E)$ , alors  $f \circ \varphi \in C^\beta(X, E)$ , et on a

$$|f \circ \varphi|_\beta \leq \text{Lip}_1(f) |\varphi|_\beta .$$

Si  $E = E_1 \times E_2$ , avec  $(E_i, \|\cdot\|_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sont deux espaces de Banach, et si sur  $E$  on met, par exemple, la norme  $\|\cdot\| = \sup(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ , alors

$$C^\beta(X, E, d) \cong C^\beta(X, E_1, d) \times C^\beta(X, E_2, d) .$$

**2.2.6 Remarque** : Si le diamètre de  $(X, d)$  est  $\leq 1$  et si  $\varphi \in C^\beta(X, \mathbf{R}, d)$  est tel que  $\varphi(x_0) = 0$  pour  $x_0 \in X$ , alors

$$\|\varphi\| \leq |\varphi|_\beta .$$

**2.2.7** Si  $(X_1, d_1)$  est un espace compact métrique et  $(X_2, d_2)$  un espace métrique, on définit

$$C^\beta(X_1, X_2, d_1, d_2)$$

comme l'ensemble des applications  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  tel que l'on ait

$$\sup_{x \neq y} \frac{d_2(\varphi(x), \varphi(y))}{(d_1(x, y))^\beta} < +\infty .$$

L'espace  $C^\beta(X_1, X_2, d_1, d_2)$  ne change pas si on remplace  $d_1$  et  $d_2$  par des métriques Lipschitz-équivalentes.

Remarque : Si  $(X, d)$  est un espace métrique localement compact (non compact) il est plus naturel de définir  $C^\beta(X, E, d)$  comme les fonctions localement  $C^\beta$ .

2.3 Dans la suite  $(M_i, d_i)$  sont des variétés de classe  $C^\infty$  avec une métrique  $d_i$  induite d'une métrique riemannienne de classe  $C^\infty$ . Les variétés  $M_i$  peuvent avoir un bord. Si  $M_1$  est compact, on définit pour  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $C^{r+\beta}(M_1, M_2)$  comme l'ensemble des applications  $f$  de  $M_1$  dans  $M_2$  de classe  $C^r$  tel que dans chaque carte la dérivée  $r$ -ième de  $f$ ,  $D^r f$ , soit localement de classe  $C^\beta$  (un ouvert  $\mathbb{R}^n$  étant muni d'une métrique induite par une norme de  $\mathbb{R}^n$  (ou Lipschitz-équivalente)). On définit la  $C^{r+\beta}$ -topologie. On dit que  $f$  est de classe  $C^{r+\beta}$ .

On vérifie que  $C^{r+\beta}(M_1, \mathbb{R})$  est une algèbre banachisable et  $C^{r+\beta}(M_1, E)$  où  $E = \mathbb{R}^p$  est un espace banachisable.

Si  $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$ , et  $f_2 : M_2 \rightarrow M_3$  sont de classe  $C^{r+\beta}$  ( $r \geq 1$ ), alors  $f_2 \circ f_1$  est de classe  $C^{r+\beta}$ . On vérifie que si  $f \in \text{Diff}^r(M_1)$  (i.e. le groupe des difféomorphismes de classe  $C^r$ ) et si  $f \in C^{r+\beta}$  ( $r \geq 1$ ,  $0 < \beta < 1$ ) alors  $f^{-1} \in C^{r+\beta}$ . Bien que pour  $r \in \mathbb{N}$  l'application  $(f_2, f_1) \rightarrow f_2 \circ f_1$  est continue pour la  $C^r$ -topologie, elle ne l'est pas pour la  $C^{r+\beta}$ -topologie ( $r \geq 1$ ).

On suppose que la variété  $M_1$  est compacte et que  $E$  est un espace de Banach. Si  $0 < \beta' < \beta < 1$ , par 2.2.3 la  $C^r$ -topologie sur les parties bornées de  $C^{r+\beta}(M_1, E)$  pour la  $C^{r+\beta}$ -topologie est équivalente à la  $C^{r+\beta'}$ -topologie. Pour  $r \geq 1$ , il en résulte que sur les parties  $C^{r+\beta}$ -bornées avec la  $C^{r+\beta'}$ -topologie, la composition est continue.

On définit de façon analogue à 2.6.2.1 la classe  $C^{r+\beta'}(M_1, E)$ ,

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

$C^{r+\beta}(M_1, M_2) \dots$  On a  $C^{r+\beta} \subset C^{r+\beta'}$  si  $\beta' < \beta$ . Si  $r \in \mathbb{N}^*$ , on vérifie que la composition est continue sur les espaces  $C^{r+\beta}$  avec la  $C^{r+\beta}$ -topologie et que  $\text{Diff}^{r+\beta}(M_1)$  est un groupe topologique avec la  $C^{r+\beta}$ -topologie. Il suit que sur les espaces  $C^{r+\beta}$  ( $r \geq 1$ ) avec la  $C^{r+\beta}$ -topologie ( $\beta' < \beta$ ) la composition est continue et que le groupe  $\text{Diff}^{r+\beta}(M_1)$  avec la  $C^{r+\beta}$ -topologie est un groupe topologique.

Finalement, on montre que si  $M_1$  est une variété compacte sans bord et si  $E = \mathbb{R}^p$ , alors l'adhérence de  $C^\infty(M_1, E)$  dans  $C^{r+\beta}(M_1, E)$  pour la  $C^{r+\beta}$ -topologie est le sous-espace fermé  $C^{r+\beta}(M_1, E)$ . (Si  $M_1 = \mathbb{T}^1$  ou  $\mathbb{T}^n$  on utilise des opérateurs de convolutions cf. [14, III.13], et on se ramène à ce cas en utilisant des partitions de l'unité de classe  $C^\infty$  de  $M_1$ ).

Notations : On écrit dans la suite indifféremment  $C^{r+\beta}(M, \mathbb{R})$  ou  $C^{r+\beta}(M_1)$ .

Si  $M_1 = \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi \in C^r(\mathbb{T}^1, E)$  où  $E$  est un espace de Banach et si  $i \in \mathbb{N}$ , on note par  $D^i\varphi$  la dérivée  $i$ -ème de  $\varphi$  avec  $D^0\varphi = \varphi$ .

2.4.1 Nous allons préciser les normes et les inégalités dans le cas où  $M_1 = \mathbb{T}^1$ ,  $[-\delta, \delta]$ ,  $\mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta]$  et on suppose que sur  $M_1$  on met la métrique  $d_1$  définie en 2.1. On pose, si  $\varphi \in C^{r+\beta}(M_1, E)$ ,  $E$  étant un espace de Banach avec la norme  $\| \cdot \|$ ,

$$\|\varphi\|_{C^r} = \sup_{0 \leq i \leq r} \|D^i\varphi\|_{C^0}$$

où on note par  $\|D^r\varphi(x)\|$  la norme induite par celle de  $E$  et la norme du sup sur  $\mathbb{R}^p$  sur l'espace  $\mathcal{L}_S((\mathbb{R}^p)^r, E)$  des applications  $r$ -linéaires symétriques de  $\mathbb{R}^p$  dans  $E$  avec  $p =$  dimension de  $M_1$ . On a, si  $0 < \beta_1 < \beta_2$ ,

$$|D^r\varphi|_{\beta_1} \leq a^{2^{-\beta_1}} |D^r\varphi|_{\beta_2} \quad \text{où } a = \text{diamètre de } M_1.$$

Pour  $r \geq 1$ , on définit

$$\|\varphi\|_{C^{r+\beta}} = \|\varphi\|_{C^r} + |D^r \varphi|_{\beta}$$

et on a

**2.4.2 Proposition :** Il existe des constantes ne dépendant que de  $r \in \mathbb{N}$  et de  $M_1$  telles que l'on ait, pour tout  $\varphi, \psi \in C^{r+\beta}(M_1, \mathbb{R})$  et  $0 < \beta < 1$ ,

$$\|\varphi\psi\|_{C^{r+\beta}} \leq C_r (\|\varphi\|_{C^0} \|\psi\|_{C^{r+\beta}} + \|\psi\|_{C^0} \|\varphi\|_{C^{r+\beta}})$$

Démonstration : Voir [5]. ■

**2.4.3 Proposition :** Soient  $\delta_1$  et  $\delta_2 > 0$ . Alors il existe des constantes

$C_r$  dépendant de  $\delta_1, \delta_2$  et  $r$  telles que l'on ait,

si  $f \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1 \times [-\delta_1, \delta_1], \mathbb{T}^1 \times [-\delta_2, \delta_2])$  et

si  $\varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1 \times [-\delta_2, \delta_2], \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$  alors

pour  $r \geq 1$ ,

$$\|\varphi \circ f\|_{C^{r+\beta}} \leq C_r (\|\varphi\|_{C^{r+\beta}} \|f\|_{C^1}^{r+\beta} + \|\varphi\|_{C^1} \|f\|_{C^{r+\beta}} + \|\varphi \circ f\|_{C^0})$$

pour  $r = 0$ , et  $\varphi$  ou  $f \in C^1$ ,

$$\|\varphi \circ f\|_{C^\beta} \leq \text{Min}(\|\varphi\|_{C^1} \|f\|_{C^\beta}, \|\varphi\|_{C^\beta} \|f\|_{C^1}^\beta) + \|\varphi \circ f\|_{C^0} .$$

Démonstration : Voir [5]. ■

**2.4.4 Proposition :** Soient  $C > 1, \delta > 0$  et  $r \geq 1$ . Alors il existe des constantes  $C_r$  dépendant de  $C, \delta$  et  $r$  telles que si  $f \in \text{Diff}^r(\mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta])$

vérifie  $\|f\|_{C^1} + \|f^{-1}\|_{C^1} \leq C$ , alors  $\|f^{-1}\|_{C^{r+\beta}} \leq C_r \|f\|_{C^{r+\beta}}$ .

Démonstration : Voir [5]. ■

2.5 Opérateurs d'approximation.

2.5.1 Nous allons nous placer sur  $\mathbb{T}^1$  (le seul cas que nous utiliserons dans la suite), mais le cas de  $\mathbb{T}^n$  serait identique.

Soit  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\text{supp}(\eta) \subset [-1, +1]$$

$$\eta(-x) = \eta(x)$$

$$\eta(x) = 1 \quad \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \quad .$$

2.5.2 Soit  $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \eta(\xi) d\xi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  ; on pose, si  $t \geq 1$ ,  $\varphi_t(x) = t\varphi(tx)$ . On définit, si  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$  (qu'on identifie aux fonctions de  $C^0(\mathbb{R})$   $\mathbb{Z}$ -périodiques)

$$S_t \psi = \psi * \varphi_t = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \varphi_t(y) dy \in C^\infty(\mathbb{T}^1) \quad .$$

2.5.3 Par la formule d'inversion de Fourier, on a

$$S_t e^{2\pi i n \theta} = \eta\left(-\frac{n}{t}\right) e^{2\pi i n \theta} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad ,$$

$S_t \psi$  est donc un polynôme trigonométrique de degré  $\leq |t|$ .

2.5.4 Proposition : Si a, b sont des réels  $\geq 0$ , il existe des constantes C ne dépendant que de  $\text{sup}([a], [b])$  (où [a] est la partie entière de a) telles que l'on ait pour  $t \geq 1$  et  $\psi \in C^a$

$$(i) \quad \|S_t \psi\|_{C^b} \leq C \|\psi\|_{C^a} \quad b \leq a \quad .$$

- (ii)  $\|S_t \psi\|_{C^b} \leq C t^{b-a} \|\psi\|_{C^a} \quad a \leq b .$   
 (iii)  $\|\psi - S_t \psi\|_{C^b} \leq C t^{b-a} \|\psi\|_{C^a} \quad b \leq a .$

Démonstration : Voir [5]. [(i) suit de  $\|\varphi_t * \psi\|_{C^b} \leq \|\varphi\|_{L^1} \|\psi\|_{C^a}$ , (ii) et (iii) sont évidents si  $b = a$ , et standard si  $b$  et  $a \in \mathbb{N}$  ainsi que (iii) pour  $b = 0$  et  $a \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $b \in \mathbb{R}_+$ , (iii) suit par interpolation de  $\|\psi - S_t \psi\|_{C^b}$  (entre  $[b]$  et  $\inf([b] + 1, a)$ ) en utilisant 2.2.3. (ii) si  $b = a + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , suit de (i) par dérivation. Si  $a + k \leq b \leq a + k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on interpole la norme  $C^b$  entre  $C^{a+k}$  et  $C^{a+k+1}$  en utilisant 2.5.5. Le fait que les constantes  $C$  ne dépendent que de  $[a+b]$  vient de ce que c'est vrai pour  $a$  et  $b \in \mathbb{N}$  et pour (iii)  $b = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  et que les constantes d'interpolation sur un intervalle  $[a, b]$  sont majorées par une constante ne dépendant que la partie entière de  $b$ .] ■

2.5.5 Inégalités d'interpolation (ou inégalités d'Hadamard).

Proposition : Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ ,  $a < b$ , alors il existe une constante ne dépendant que de  $[b]$  et telle que si  $\psi \in C^b(\mathbb{T}^1)$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , alors

$$\|\psi\|_{C^{(1-\lambda)a+\lambda b}} \leq C \|\psi\|_{C^a}^{1-\lambda} \|\psi\|_{C^b}^\lambda .$$

Démonstration : Voir [5]. ■

2.6 Décomposition de  $\psi \in C^a(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ ,  $a > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

2.6.1 On définit, si  $k \geq 0$ ,  $S_t$  étant les opérateurs définis en 2.5,

$$\Delta \psi_k = (S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) \psi \quad \text{si } k \geq 2$$

$$\Delta \psi_1 = S_1 \psi - \Delta \psi_0$$

$$\Delta \psi_0 = \int_0^1 \psi(\theta) d\theta .$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

Si  $N \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\psi_N = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta\psi_k \quad (= S_{2^{N-1}} \psi, \text{ si } N > 1) \quad .$$

On a, si  $k \geq 1$ , par 2.5.3

$$\textcircled{1} \quad \text{supp } \widehat{\Delta\psi}_k \subset \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{2^k}{4} \leq |n| \leq 2^k\} \quad .$$

On a, si  $k \geq 1$ ,

$$\textcircled{2} \quad \Delta\psi_k \text{ ne dépend que de } \psi - \Delta\psi_0 \text{ (puisque } S_t c = c \text{ si } c \in \mathbb{R} \text{)} .$$

$$\textcircled{3} \quad D(\Delta\psi_k) = \Delta(D\psi)_k \quad .$$

En appliquant 2.5.4 (iii) on a, en écrivant

$$\Delta\psi_k = S_{2^k} \psi - \psi + \psi - S_{2^{k-1}} \psi \quad ,$$

si  $a = r + \beta$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta < 1$ ,  $0 \leq \beta' \leq \beta$  et  $k \geq 1$

$$\textcircled{4} \quad \|\Delta\psi_k\|_{C^{\beta'}} \leq C |D^r \psi|_{\beta} 2^{-(r+\beta-\beta')k} \quad ,$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $r$ .

On a aussi (en utilisant 2.5.4 (iii) ou (ii))

$$\textcircled{5} \quad \|D(\Delta\psi_k)\|_{C^{\beta'}} \leq C |D^r \psi|_{\beta} 2^{k(1-(r+\beta-\beta'))} \quad .$$

**2.6.2 Remarques** : 1. Si  $\psi \in C^{\beta}$  pour tout  $\beta' < \beta$ , si  $N \rightarrow +\infty$ ,  $\psi_N \rightarrow \psi$  dans la  $C^{\beta'}$ -topologie. De plus on a

$$\sup_N |\psi_N|_\beta \leq C \|\psi\|_{C^\beta},$$

mais en général, si  $N \rightarrow +\infty$ ,  $\psi_N$  ne tend pas vers  $\psi$  dans la  $C^\beta$ -topologie. En effet, si  $0 < \beta < 1$ , l'adhérence des polynômes trigonométriques dans  $C^\beta$  est l'espace  $C^{\beta+}$ ,

$$C^{\beta+}(\mathbb{T}^1) = \left\{ \psi \in C^\beta(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}) \mid \lim_{|x-y| \rightarrow 0} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x-y|^\beta} = 0 \right\},$$

lim voulant dire que la limite est uniforme par rapport à  $x$  et  $y$ .

Si  $\psi \in C^{\beta+}(\mathbb{T}^1)$ , on a, si  $k \rightarrow +\infty$

$$\|\Delta \psi_k\|_{C^0} = o(2^{-k\beta})$$

et réciproquement (cf. [14, III.13]. Zygmund adopte la notation  $\lambda_\beta$  pour  $C^{\beta+}$ ). De plus si  $\beta' < \beta$  on a  $C^\beta \subset C^{\beta+}$ .

2. La théorie que nous avons exposée dépend d'un choix d'opérateurs d'approximation. Classiquement on utilise plutôt une version intrinsèque : la théorie de la meilleure approximation par les polynômes trigonométriques.

2.6.3 On se propose de voir la réciproque de (4) et (5) pour  $r = 0$ ,  $0 \leq \beta' < \beta < 1$  et on pose  $\theta = \beta - \beta'$ .

Proposition : Soit  $(\Delta f_k)_{k \geq 0}$  une suite de  $C^{1+\beta'}(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$  et on suppose que l'on ait

- (i)  $\sup_k 2^{k\theta} \|\Delta f_k\|_{C^{\beta'}} = \ell < +\infty$
- (ii)  $\sup_k 2^{-k(1-\theta)} \|\Delta f_k\|_{C^{1+\beta'}} = \ell$

alors on a

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

$$f = \sum_{k \geq 0} \Delta f_k \in C^\beta$$

$$\|f\|_{C^\beta} \leq K\ell \quad , \quad K = C(2^{1-\beta}-1)^{-1} + 2^{\theta+1}(1-2^{-\theta})^{-1} \quad ,$$

où C est une constante indépendante de  $\beta$  et  $\beta'$  .

**2.6.4 Remarque** : Si  $\Delta f_k$  est un polynôme trigonométrique de degré  $\leq 2^k$ , alors (ii) est une conséquence de (i) (il suffit d'appliquer 2.5.4 (ii) et de remarquer par 2.5.3 que  $S_{2^{k+1}}(\Delta f_k) = \Delta f_k$ ).

Démonstration de 2.6.3 : Par 2.5.5, on a

$$(iii) \quad \sup_k 2^{-k(1-\beta)} \|\Delta f_k\|_{C^1} \leq C\ell \quad (C \text{ étant une constante}).$$

On se donne  $h$  avec  $|h| \leq 1$ . On peut supposer que  $2^{-(N+1)} \leq |h| \leq 2^{-N}$  pour un  $N \in \mathbb{N}$ . On écrit

$$|f(x+h) - f(x)| \leq I + II$$

avec

$$|I| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |\Delta f_k(x+h) - \Delta f_k(x)|$$

$$|II| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |\Delta f_k(x+h) - \Delta f_k(x)| \quad .$$

On a

$$|I| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|D\Delta f_k\|_{C^0} |h| \leq \frac{|h| C\ell 2^{N(1-\beta)}}{2^{(1-\beta)} - 1}$$

$$|II| \leq \sum_{k \geq N} \|\Delta f_k\|_{C^{\beta'}} |h|^{\beta'} \leq \frac{|h|^{\beta'} \ell 2^{-N\theta}}{1 - 2^{-\theta}}$$

et

$$|I| + |II| \leq |h|^\beta \left( \frac{C}{2^{(1-\beta)} - 1} + \frac{2^\theta}{1 - 2^{-\theta}} \right) \ell$$

d'où 
$$|f|_{\beta} \leq K_1 \ell$$

et de plus 
$$\|f\|_{C^0} \leq \ell \sum_{k \geq 0} 2^{-k\theta} = \frac{\ell}{1 - 2^{-\theta}} \quad . \quad \blacksquare$$

2.6.4 Remarque : Si  $\beta' = 0$  et  $\beta = 1$ ,  $f$  n'est pas en général de classe  $C^1$ .

Par la même démonstration (voir [14]),  $f$  est "smooth" au sens de Zygmund :

- i)  $f \in C^0(\mathbb{T}^1)$
- ii)  $\sup_{x, |t| \neq 0} (|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|/|t|) < +\infty$  ;

et réciproquement si  $f$  est smooth au sens de Zygmund, et si on décompose  $f$  comme 2.6.1, on peut prendre alors  $\beta = 1$  dans (4) et (5) .

2.7 Inégalités pour la composition.

2.7.1 Proposition : Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$ , alors il existe des constantes  $C_{r,p}$  telles que, si  $2 \geq \delta > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta < 1$ ,

$$\varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta], \mathbb{R}^p)$$

$$g \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta])$$

alors, si  $r \geq 1$ ,

$$\|\varphi \circ g\|_{C^{r+\beta}} \leq C_{r,p} \|\varphi\|_{C^{r+\beta}} (\|g\|_{C^{r+\beta}} + \|g\|_{C^1}^{r+\beta}) + \|\varphi \circ g\|_{C^0} \quad ,$$

si  $r = 0$  et  $\varphi \in C^1$  ou  $g \in C^1$ ,

$$\|\varphi \circ g\|_{C^{\beta}} \leq \text{Min}(\|\varphi\|_{C^1} \|g\|_{C^{\beta}}, \|\varphi\|_{C^{\beta}} \|g\|_{C^1}^{\beta}) + \|\varphi \circ g\|_{C^0} \quad .$$

Démonstration : Le cas  $r = 0$  résulte de 2.2.4. Pour  $r \geq 1$ , on écrit

$$D(\varphi \circ g) = D\varphi \circ g \, Dg \quad ,$$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

et le cas  $r = 1$  suit du cas  $r = 0$  et de 2.2.3. On démontre la proposition par récurrence sur la partie entière de  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \geq 1$ . On applique 2.4.2 à  $M_1 = \mathbb{T}^1$ ,  $E = \mathbf{R}^p$  d'où

$$\|D(\varphi \circ g)\|_{C^{a-1}} \leq C(\|D\varphi \circ g\|_{C^{a-1}} \|Dg\|_{C^0} + \|D\varphi \circ g\|_{C^0} \|Dg\|_{C^{a-1}}) .$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$\|D\varphi \circ g\|_{C^{a-1}} \leq C \|D\varphi\|_{C^{a-1}} (\|g\|_{C^{a-1}} + \|Dg\|_{C^0}^{a-1}) + \|D\varphi\|_{C^0} .$$

On applique l'inégalité 2.5.5

$$\|g\|_{C^{a-1}} \|g\|_{C^1} \leq C_{[a]} (\|g\|_{C^a}^{(a-2)/(a-1)} (\|g\|_{C^1}^a)^{1/(a-1)})$$

et en remplaçant la moyenne géométrique par la moyenne arithmétique on a (en utilisant, si  $a_1 < a_2$  et  $\delta > 0$ ,  $\|\varphi\|_{C^{a_1}} \leq 4\|\varphi\|_{C^{a_2}}$ ) l'inégalité cherchée. Le point important est que  $\delta < 2$  n'intervient pas dans les constantes. ■

**2.7.2 Proposition :** Soient  $\delta > 0$ ,  $r \in \mathbf{N}$ , alors il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  dépendant de  $r$  et où  $C_2$  est indépendante de  $\delta$  (si  $0 < \delta \leq 2$ ) et telles que si  $\varphi \in C^{r+\beta}([-\delta, \delta], \mathbf{R})$ ,  $g \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, [-\delta, \delta])$  l'on ait  
si  $r \geq 1$ ,

$$\|\varphi \circ g\|_{C^{r+\beta}} \leq C_1 (\|\varphi\|_{C^{r+\beta}} \|g\|_{C^1}^{r+\beta} + \|\varphi\|_{C^1} \|g\|_{C^{r+\beta}}) + \|\varphi \circ g\|_{C^0} ,$$

$$\|\varphi \circ g\|_{C^{r+\beta}} \leq C_2 \|\varphi\|_{C^{r+\beta}} (\|g\|_{C^1}^{r+\beta} + \|g\|_{C^{r+\beta}}) + \|\varphi \circ g\|_{C^0} ,$$

si  $r = 0$  et si  $\varphi \in C^1$  ou  $g \in C^1$ ,

$$\|\varphi \circ g\| \leq \text{Min}(\|\varphi\|_{C^1} \|g\|_{C^\beta}, \|\varphi\|_{C^\beta} \|g\|_{C^1}^\beta) + \|\varphi \circ g\|_{C^0} .$$

Démonstration : Identique à celle de 2.7.1, voir aussi [5]. ■

2.7.3 Corollaire : On se place sous les mêmes hypothèses et on suppose que  $\varphi \in C^\infty([- \delta, \delta], \mathbb{R})$ ,  $\varphi(0) = 0$ , alors il existe une constante  $C_3$  dépendant de  $r$ ,  $\delta$  et  $\varphi$  telle que, si  $r \geq 1$ ,

$$\|\varphi \circ g\|_{C^{r+\beta}} \leq C_3 (\|g\|_{C^{r+\beta}} + \|g\|_{C^1}^{r+\beta}) \quad ;$$

si  $r = 0$

$$\|\varphi \circ g\|_{C^\beta} \leq C_3 \|g\|_{C^\beta} .$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que  $\|\varphi \circ g\|_{C^1} \leq \|D\varphi\|_{C^0} \|g\|_{C^0}$  (puisque  $\varphi(0) = 0$ ) et d'appliquer la proposition précédente. ■

## 2.8 Une remarque importante.

Soient  $r \geq 0$  et  $0 \leq \beta < 1$ , si  $\varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$  s'annule en un point, on a

$$\|\varphi\|_{C^{r+\beta}} \leq 2 \|D^r \varphi\|_{C^\beta} \leq \|\varphi\|_{C^{r+\beta}} .$$

En effet,

$$\|\varphi\|_{C^0} \leq |\varphi|_{C^\beta} \leq \|D\varphi\|_{C^0}$$

et donc

$$\|\varphi\|_{C^\beta} \leq 2 |\varphi|_{C^\beta} ,$$

ensuite on utilise le fait que, si  $r \geq 1$ ,  $D^r \varphi$  s'annule puisque  $\int_0^1 D^r \varphi(\theta) d\theta = 0$ , et en utilisant :

$$\|\varphi\|_{C^{r+\beta}} = \sup_{0 \leq i < r} \|D^i \varphi\|_{C^0} + \|D^r \varphi\|_{C^\beta} .$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

Puisque le diamètre de  $\mathbb{T}^1$  est  $= \frac{1}{2}$  on a, si  $0 < a_1 < a_2$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$

$$\|\varphi\|_{C^{a_1}} \leq \|\varphi\|_{C^{a_2}} .$$

Il suit que sur les espaces

$$C_0^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) = \{\varphi \in C^{r+\beta} \mid \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0\} ,$$

$\{\varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid \varphi(0)\}$  la semi-norme  $|D^r \varphi|_\beta$  est une norme définissant la  $C^{r-\beta}$ -topologie.

2.9 Difféomorphismes de cercles (Rappels).

1. Pour  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  et  $0 \leq \beta < 1$ , on définit

$$D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) = \{\text{Id} + \varphi \in \text{Diff}_+^{r+\beta}(\mathbb{R}) \mid \varphi \text{ est } \mathbb{Z}\text{-périodique et } \varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)\} .$$

$D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  est le groupe revêtement universel du groupe de difféomorphismes de classe  $C^{r+\beta}$  du cercle  $\mathbb{T}^1$  préservant l'orientation (noté  $\text{Diff}_+^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ ). On définit la  $C^{r+\beta}$ -topologie sur  $D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  et pour  $r \in \mathbb{N}$  c'est un groupe topologique.

2. On définit les translations par

$$R_\alpha(x) = x + \alpha$$

et, si  $p \in \mathbb{Z}$  et si  $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , on a  $f \circ R_p = R_p \circ f$ .

3. On définit le nombre de rotation

$$\rho : D^0(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

par  $p(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f^n - \text{Id}}{n} \right)$ , et on a

- $\rho$  est continue pour la  $C^0$ -topologie,
- $\rho(R_\alpha) = \alpha$ ,
- $\rho(h^{-1} \circ R_\alpha \circ h) = \rho(R_\alpha) = \alpha$ ,
- si  $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$  alors  $\rho(R_\lambda \circ f) = \alpha \iff \lambda = 0$ ,
- si  $f = \text{Id} + \varphi \in D^0(\mathbb{T}^1)$  et  $\rho(f) = \alpha$ ,  $\varphi - \alpha$  s'annule en au moins un point.

Pour les démonstrations, voir [2, I et II].

4. Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , alors il existe une fonction continue

$$\lambda_\alpha : D^0(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $\lambda_\alpha(f)$  soit l'unique nombre réel tel que  $\rho(f + \lambda_\alpha) = \alpha$  ([2, III.4]).

Si  $f = \text{Id} + \varphi$  on écrit aussi  $\lambda_\alpha(f) \equiv \lambda_\alpha(\varphi)$ .

5. Soit  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  on définit

$$F_\alpha^{r+\beta} = \{f \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha\}$$

$F_\alpha^{r+\beta}$  est un ensemble  $C^0$ -fermé de  $D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ .

On pose  $D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, 0) = \{h \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid h(0) = 0\}$  et

$D_0^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) = \{h \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid (h - \text{Id}) \in C^{r+\beta}, \int_0^1 (h - \text{Id}) d\theta = 0\}$ ;  $D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$  est homéomorphe à  $F_\alpha^{r+\beta}$  pour la  $C^{r+\beta}$ -topologie par l'application (on peut remplacer  $D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$  par  $D_0^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ )

$$h = \text{Id} + \varphi \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, 0) \xrightarrow{\Phi} f = \text{Id} + \varphi + \lambda_\alpha \in F_\alpha^{r+\beta}$$

et

$$\Phi^{-1}(f) = R_{-f(0)} \circ f .$$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

On a  $\Phi(\text{Id}) = R_\alpha$

et

$$Dh = D(\Phi(h)) \quad .$$

Comme  $\rho(f) = \alpha$ , la fonction  $f - R_\alpha$  s'annule en au moins un point et on a,

$$\text{si } \Phi(h) = \text{Id} + \varphi + \lambda_\alpha(\varphi)$$

$$|\lambda_\alpha(\varphi) - \alpha| \leq \|\varphi\|_{C^0} \quad .$$

6. Comme la fonction  $(f - R_\alpha)$  s'annule en au moins un point, on a

$$\|f - R_\alpha\|_{C^0} \leq \|Df - 1\|_{C^0}$$

et donc, si  $f \in F_\alpha^{r+\beta}$ , on a

$$\|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \leq 2 \|D^r f\|_\beta \quad (\text{voir 2.8}) \quad .$$

On a aussi, si  $f = \text{Id} + \varphi + \alpha \in D^0(\mathbb{T}^1)$  et si  $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$|\lambda_\alpha(f) - \alpha| \leq \|\varphi\|_{C^0} \quad .$$

7. On se donne  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \beta < 1$  et  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , et on définit :

$$K^{r+\beta} = \{h \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid h(0) = 0, \|h - \text{Id}\|_{C^{r+\beta}} \leq \frac{1}{2}\}$$

$$\text{resp. } \tilde{K}_\varepsilon^{r+\beta} = \{\varphi \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid 0 = \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta, \|D^r \varphi\|_\beta \leq \varepsilon\} \quad .$$

Les ensembles  $K^{r+\beta}$ ,  $\tilde{K}_\varepsilon^{r+\beta}$  sont convexes métrisables pour la  $C^r$ -topologie.

Il sont de plus des ensembles compacts pour la  $C^r$ -topologie par le théo-

rème d'Ascoli (ils sont fermés pour la  $C^r$ -topologie car une limite simple

de fonctions vérifiant  $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq C |x - y|^\beta$  vérifie la même inégalité).

8. Finalement, si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et si  $f = h_1^{-1} \circ R_\alpha \circ h_1 = h_2^{-1} \circ R_\alpha \circ h_2$  où  $h_i$  et  $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ , alors on a  $h_2 = R_{\lambda_1} \circ h_1$  où  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  (i.e. le centralisateur d'une translation irrationnelle est une translation). Il suit que  $h_1$  est unique si on impose que  $h_1 \in D^0(\mathbb{T}^1, 0)$  où  $h_1 \in D^0_o(\mathbb{T}^1)$ .

### 3. ÉQUATIONS LINÉAIRES.

3.1 On pose  $L^1_o = \{\varphi \in L^1(\mathbb{T}^1, d\theta, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0\}$  et on définit

$$C^r_o(\mathbb{T}^1) = C^r(\mathbb{T}^1) \cap L^1_o, \quad W^{r,p}_o(\mathbb{T}^1) = W^{r,p}(\mathbb{T}^1) \cap L^1_o, \quad \text{etc.}$$

Si  $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^1, d\theta, \mathbb{R})$ , on note sa norme par  $\|\varphi\|_{L^p} = (\int_0^1 |\varphi|^p d\theta)^{1/p}$ .

3.2 On se donne  $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  et on veut étudier l'application linéaire

$$L_\alpha : \eta \in C^\infty_o(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \eta - \eta \circ R_\alpha \in C^\infty_o(\mathbb{T}^1) \quad .$$

Par l'ergodicité de la rotation  $R_\alpha$ , l'application  $L_\alpha$  est injective.

L'application  $L_\alpha$  est surjective si et seulement si  $\alpha$  satisfait à une condition diophantienne : il existe  $\gamma > 0$ ,  $\delta \geq 0$  tel que pour tout  $p/q \in \mathbb{Q}$ ,  $q \geq 1$ , on ait  $|\alpha - (p/q)| \geq \gamma q^{-2-\delta}$ . Voir [2, XIII] pour une discussion plus complète.

3.3 Soit  $B$  un espace de Banach qui est un sous-espace vectoriel de  $L^1$ .

On suppose que  $B$  est invariant, par les translations  $R_t$  ( $t \in \mathbb{T}^1$ ) et de plus que, si  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ ,

$$\eta \in B \longrightarrow \eta \circ R_\alpha \in B$$

est une isométrie de  $B$ . Par exemple  $\beta = L^p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ),  $B = C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

$$B = W^{r,p}(\mathbb{T}^1) .$$

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ , on définit l'opérateur linéaire continu

$$L_{\alpha,\lambda} : \eta \in B \longrightarrow \eta - \lambda \eta \circ R_{\alpha} \in B .$$

On a  $L_{\alpha,\lambda}(B_0) \subset B_0$ , où  $B_0 = B \cap L_0^1$ .

**Proposition** : Si  $|\lambda| \neq 1$ , l'opérateur  $L_{\alpha,\lambda}$  est un isomorphisme de l'espace de Banach  $B$  (i.e.  $L_{\alpha,\lambda}^{-1}$  est linéaire continu).

**Démonstration** : Si  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ , le spectre de l'opérateur  $\eta \rightarrow \eta \circ R_{\alpha}$  (qui est une isométrie de  $B$ ) est contenu dans  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . ■

3.4 On suppose que les hypothèses de 3.3 sont vérifiées.

On se donne  $\lambda \neq 1$  et  $b \in B$ , soit  $e_{\lambda}$  vérifiant

$$L_{\alpha,\lambda}(e_{\lambda}) = e_{\lambda} - \lambda e_{\lambda} \circ R_{\alpha} = b .$$

On a

$$e_{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i b \circ R_{i\alpha} \quad 0 < \lambda < 1$$

$$e_{\lambda} = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} b \circ R_{-(i+1)\alpha} \quad \lambda > 1 ,$$

d'où la proposition :

**Proposition** : On a  $\sup_{\lambda > 0} |1 - \lambda| \|e_{\lambda}\|_B \leq \|b\|_B$ .

Si  $a \in \mathbb{R}$  est une fonction constante, on a

$$L_{\alpha, \lambda}^{-1}(a) = a(1 - \lambda)^{-1} .$$

### 3.5 Nombres de type constant.

Nous allons étudier l'opérateur inverse de  $L_{\alpha}$  dans le cas particulier où  $\alpha$  est un nombre de type constant.

Définition : Un nombre  $\alpha \in \mathbb{R}$  est de type constant s'il existe  $\gamma > 0$  tel que pour  $p/q \in \mathbb{Q}$  on ait  $|\alpha - (p/q)| \geq \gamma q^{-2}$ .

On supposera dans la suite que  $\gamma$  est la constante de Markoff<sup>\*</sup> de  $\alpha$  :

$$\gamma = \inf_{p/q \in \mathbb{Q}, q \geq 1} q^2 |\alpha - (p/q)| .$$

On a par le principe de Dirichlet  $\gamma < 1$ .

On dit que  $\alpha \in \mathbb{T}^1$  est un nombre de type constant si un relevé de  $\alpha$ ,  $\tilde{\alpha}$ , à  $\mathbb{R}$  est un nombre de type constant. Cela ne dépend pas du choix de  $\tilde{\alpha}$ . Il en est de même de la constante de Markov de  $\tilde{\alpha}$ .

On note par  $TC = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ est un nombre de type constant}\}$ .

On a : la mesure de Lebesgue de  $TC$  est nulle [7].

Pour tout intervalle  $[a, b]$ ,  $a \neq b$ , la dimension de Hausdorff de  $[a, b] \cap TC$  est égale à 1 [6] et [13].

---

\* Souvent dans la littérature, la constante de Markoff de  $\alpha$  est plutôt prise égale à  $\gamma^* = \liminf_{q \rightarrow +\infty} q^2 |\alpha - (p/q)|$ . Mais ce qui intervient dans les constantes pour les questions de petits dénominateurs est le nombre  $\gamma$ .

*THÉOREME DES COURBES TRANSLATÉES*

Tout nombre algébrique de degré 2 est de type constant.

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel, si  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ , où les  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont les quotients partiels du développement en fractions continues de  $\alpha$ , alors  $\alpha$  est nombre de type constant si et seulement si

$$\sup_{i \geq 1} a_i = C < +\infty \quad (\text{si } i \leq 1, a_i \in \mathbb{N}^*)$$

et on a  $C^{-1} \geq \gamma \geq (C+2)^{-1}$  [2, V.7.8] .

Si  $\beta$  est un nombre équivalent à  $\alpha$  (i.e.  $\beta = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$  avec  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ ), alors si  $\alpha$  est un nombre de type constant, il en est de même de  $\beta$  et on a

$$\liminf_{q \geq 1} q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \liminf_{q \geq 1} q^2 \left| \beta - \frac{p}{q} \right| .$$

Par exemple  $\beta = -\alpha$  et on a  $\gamma(-\alpha) = \gamma(\alpha)$  .

3.6 On se donne  $\gamma > 0$  et considère l'ensemble compact

$$K_\gamma = \left\{ \alpha \in [0, 1] \mid \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \gamma q^{-2} \right\} .$$

On a  $K_\gamma \subset [0, 1] - \mathbb{Q}$  .

Proposition : Il existe  $\ell > 0$ , tel que pour tout  $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ , si  $[a, b] \subset [0, 1]$  vérifie  $|b - a| \geq \varepsilon$  alors  $[a, b] \cap K_{\ell \varepsilon}$  a la puissance du continu.

Démonstration : Soit  $\alpha$  le nombre d'or  $\diamond$  et  $q_n$  les dénominateurs des réduites de  $\alpha$ . Il existe  $1 < \lambda_1 < \lambda_2$  tels que l'on ait  $\lambda_1^n \leq q_n \leq \lambda_2^n$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a, pour tout  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

---

$\diamond \alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, 1, \dots]$  .

$$|\{k\alpha\} - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{kq^2} ,$$

où  $\gamma$  est la constante de Markoff de  $\alpha$  et  $\{k\alpha\}$  désigne la partie fractionnaire de  $k\alpha$ .

Soit  $n_0$  la plus petit entier  $\geq 2$  tel que l'on ait  $\varepsilon > \frac{4}{q_{n_0}}$ . Il existe donc un entier  $i$  tel que l'intervalle  $[\frac{i}{q_{n_0}}, \frac{i+1}{q_{n_0}}] \subset [a, b]$ . Par [2, V.8.1] il existe  $0 < k \leq q_{n_0}$  tel que

$$\{k\alpha\} \in ]a, b[ .$$

On a, pour tout  $p/q \in \mathbb{Q}$ ,

$$|k\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q_{n_0} q^2} \geq \frac{C\varepsilon}{q} ,$$

où  $C$  est une constante.

On écrit  $k\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ .

Pour  $i \geq i_0$  (très grand) soit

$$\beta = [b_0, b_1, \dots]$$

$$b_i = a_i \quad \text{si } i \leq i_0$$

$$b_i = \begin{cases} a_i \\ \text{ou} \\ a_i + 1 \end{cases} \quad \text{aléatoirement si } i \geq i_0 .$$

Alors les nombres  $\beta$  ainsi construits ont la puissance du continu. Si  $i_0$  est très grand tous les  $\beta \in ]a, b[$ . De plus tous les  $\beta$  vérifient, d'après [2, V.7], pour  $p/q \in \mathbb{Q}$ ,

$$|\beta - \frac{p}{q}| \geq \frac{C\varepsilon}{1 + 3C\varepsilon} \frac{1}{q} .$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

On choisit  $l = \sup_{0 < \epsilon < 1/2} \frac{C}{1 + 3C\epsilon}$  . ■

3.7 Des inégalités semblables à la proposition qui suit ont été remarquées par Rüssmann [11, § 9] et [12].

Proposition : Soient  $\alpha$  un nombre de type constant de constante de Markoff  $\gamma$  et  $p > 1$ . Il existe une constante  $C_p$  dépendant seulement de  $p$  (et indépendante de  $\alpha$ ) telle que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left( \sum_{N \leq |n| \leq 4N} \frac{1}{|n(1 - \lambda e^{2\pi i n \alpha})|^p} \right)^{1/p} \leq C_p \gamma^{-1} .$$

Démonstration : Si  $x \in \mathbb{R}$ , on désigne par  $\|x\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x + p|$  . On a

$$\sum_{0 < n \leq N} \frac{1}{\|n\alpha\|^p} \leq C \gamma^{-p} N^p ,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $N$  et  $\alpha$  et dépendant seulement de  $p > 1$ .

En effet, comme pour  $0 < k < n \leq N$ , on a

$$\|n\alpha\| - \|k\alpha\| \geq \frac{\gamma}{2N} ,$$

il suit qu'il y a au plus un nombre  $\|n\alpha\|$ ,  $0 < n \leq N$ , dans chaque intervalle  $[\frac{i\gamma}{2N}, \frac{(i+1)\gamma}{2N}[$ ,  $1 \leq i \leq N$  et aucun dans l'intervalle  $[0, \frac{\gamma}{2N}[$  . Il en résulte que :

$$\sum_{0 < n \leq N} \frac{1}{\|n\alpha\|^p} \leq \gamma^{-p} (2N)^p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = C \gamma^{-p} N^p .$$

On a  $\sum_{N \leq |n| \leq 4N} \frac{1}{|n(1 - e^{2\pi i n \alpha})|^p} \leq N^{-p} \sum_{0 < |n| \leq 4N} \frac{1}{|1 - e^{2\pi i n \alpha}|^p}$

$$(*) \leq C' N^{-p} 2 \sum_{0 < 4 \leq 4N} \|n\alpha\|^{-p} \leq 2 C C' \gamma^{-p} 4^p$$

avec  $C' > 0$  une constante telle que pour tout  $x \in \mathbf{R}$  on ait

$$|1 - e^{2\pi i x}| \geq (1/C') \|x\| \quad (\text{on utilise aussi } \|x\| = \|-x\|).$$

La proposition résulte de l'inégalité (\*) et de l'inégalité suivante :

$$|1 - \lambda e^{2\pi i n \alpha}| = ((1 - \lambda)^2 (\cos \pi n \alpha)^2 + (1 + \lambda)^2 (\sin \pi n \alpha)^2)^{1/2}$$

$$\geq \begin{cases} (1 + \lambda) 2\|n\alpha\| \geq 2 \gamma |n|^{-1} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ (1 - \lambda) 2\|n\alpha + \frac{1}{2}\| \geq \frac{\gamma}{2} |n|^{-1} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} .$$

3.8 Le théorème suivant est essentiel pour la suite. Le point important est que par un nombre  $\alpha$  de type constant la perte de différentiabilité de l'opérateur  $L_\alpha^{-1}$  sur les espaces  $C_0^{r+\beta}$  ( $r \in \mathbf{N}^*$ ,  $0 < \beta < 1$ ) vaut exactement 1.

3.8.1 Théorème : Soient  $\alpha$  un nombre de type constant de constante de Markoff  $\gamma$ ,  $r \in \mathbf{N}^*$  et  $0 < \beta < 1$ . Il existe une constante  $C_\beta > 0$  dépendant seulement de  $\beta$  (et pas de  $\alpha$ ) telle que, pour  $\eta \in C_0^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ , il existe une unique fonction,  $L_\alpha^{-1}\eta = \varphi \in C_0^{r+\beta-1}(\mathbb{T}^1)$  solution de  $\varphi - \varphi \circ R_\alpha = \eta$

et de plus on a  $|D^{r-1}\varphi|_\beta \leq C_\beta \gamma^{-1} |D^r\eta|_\beta$  ,

où si  $\psi \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $|\psi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\beta}$  . Si l'intervalle

$[\beta_1, \beta_2] \subset ]0, 1[$  , on a

$$\sup_{\beta' \in [\beta_1, \beta_2]} C_{\beta'} < +\infty .$$

3.8.2 Remarques : 1. Si  $k \in \mathbf{N}$  et  $0 < \beta < 1$ ,  $\varphi \in C_0^{k+\beta}(\mathbb{T}^1) \rightarrow |D^k\varphi|_\beta$  est une norme définissant la  $C^{k+\beta}$ -topologie, voir 2.8 .

2. Si on veut considérer  $\beta = 0$ ,  $r \geq 2$ , il faut remplacer les espaces  $C_0^r$  par  $C_0^{r*} = \{\varphi \in C_0^{r-1} \mid D^{r-1}\varphi \text{ est "smooth" au sens de Zygmund}\}$ .

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

Dans le théorème 1, si  $\eta \in C_0^{r*}$ ,  $r \geq 2$ , alors  $L_\alpha^{-1}\eta \in C_0^{(r-1)*}$ . Pour ceci voir 2.6.4.

Démonstration de 3.8.1 : Il suffit par dérivation de démontrer le théorème pour  $r = 1$ .

On désigne par  $S_t$  les opérateurs d'approximation définis en 2.5.

On pose comme en 2.6

$$\Delta\eta_k = (S_{2^k} - S_{2^{k-1}})\eta \quad k \geq 2$$

$$\Delta\eta_0 = 0 = \int_0^1 \eta(\theta) d\theta, \quad \Delta\eta_1 = S_1 \eta.$$

On a

$$\text{supp } \widehat{\Delta\eta}_k \subset \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{2^{k-1}}{2} \leq |n| \leq 2 \cdot 2^{k-1}\}$$

$$\eta = \sum_{k \geq 1} \Delta\eta_k$$

$$\|D\Delta\eta_k\|_{L^\infty} \leq C |D\eta|_\beta 2^{-k\beta},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\beta$ .

On considère la distribution

$$\mu = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi i n (1 - e^{2\pi i n \alpha})} e^{2\pi i n \theta}.$$

On a

$$\varphi = \mu * D\eta = \sum_{k \geq 1} \mu * D\Delta\eta_k$$

et on a au sens des distributions :

$$\varphi - \varphi \circ R_\alpha = \eta, \quad \widehat{\varphi}(0) = 0;$$

la distribution étant unique.

Soit 
$$\mu_k = \sum_{2^{k-2} \leq |n| \leq 2^k} \frac{1}{2\pi i n (1 - e^{2\pi i n \alpha})} .$$

On a 
$$\mu * D\Delta\eta_k = \mu_k * D\Delta\eta_k .$$

Par 3.7, on a 
$$\sup_k \|\mu_k\|_{L^2} \leq C_2 \gamma^{-1} \quad (C_2 \text{ \u00e9tant une constante})$$

et donc par l'in\u00e9galit\u00e9 de Young

$$\|\mu_k * D\Delta\eta_k\|_{L^\infty} \leq \|\mu_k\|_{L^2} \|D\Delta\eta_k\|_{L^2} \leq C_2 \gamma^{-1} |D\eta|_\beta 2^{-\beta k} .$$

Par 2.6.3 ou [14, III.13.20], ceci implique, si  $0 < \beta < 1$ , que  $\varphi \in C_0^\beta(\mathbb{T}^1)$  et

on a 
$$|\varphi|_\beta \leq C_2 C'_\beta \gamma^{-1} |D\eta|_\beta ,$$

o\u00f9  $C'_\beta$  est une constante d\u00e9pendant seulement de  $\beta$  et v\u00e9rifiant

$$\sup_{\beta' \in [\beta_1, \beta_2]} C'_{\beta'} < +\infty \quad \text{si } [\beta_1, \beta_2] \subset ]0, 1[ . \quad \blacksquare$$

**3.8.3 Remarques** : 1. On peut remplacer  $\eta \in C_0^{r+\beta}$  par

$$\sup_{k \geq 1} \|D^r \Delta\eta_k\|_{L^p} 2^{k\beta} < +\infty \quad (p > 1)$$

et ceci implique que  $\varphi = \mu * D\eta \in C_0^{r-1+\beta}$ .

En effet, par la d\u00e9monstration de 3.8.1 on peut supposer que  $1 < p \leq 2$ . Par l'in\u00e9galit\u00e9 de Young on a

$$\|\mu_k * D\Delta\eta_k\|_{L^\infty} \leq \|\mu_k\|_{L^p} \|D\Delta\eta_k\|_{L^p} , \quad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

Par le th\u00e9or\u00e8me de Hausdorff-Young [14, XII, 2.3], si  $1 < p \leq 2$ , on a

$$\|\mu_k\|_{L^{p'}} \leq \left( \sum_{2^{k-2} \leq |n| \leq 2^k} \frac{1}{|n(1 - e^{2\pi i n \alpha})|^p} \right)^{1/p} .$$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

Ensuite, en utilisant 3.7, on conclut exactement comme dans la démonstration de 3.8.1.

2. Par 2.6, si  $0 < \beta' < \beta$ , alors, pour  $r = 1$ , on a

$$\sup_{k \geq 1} |\mu * D\Delta \eta_k|_{\beta'} \leq C_{\beta'} |D\eta|_{\beta} 2^{-k(\beta-\beta')},$$

où  $C_{\beta'}$  est une constante dépendant seulement de  $\beta'$  et donc

$$\eta \in C_0^{1+\beta} \longrightarrow \varphi \in C_0^{\beta'}$$

est une application linéaire continue si on munit  $C_0^{1+\beta}$  de la  $C^{1+\beta}$ -topologie et  $C_0^{\beta'}$  de la  $C^{\beta'}$ -topologie.

On peut aussi remplacer  $C_0^{1+\beta}$  par  $C_0^{r+\beta}$  et  $C_0^{\beta'}$  par  $C_0^{r-1+\beta'}$  pour cette remarque.

**3.9 Proposition :** Soient  $\alpha, r, \beta$  comme en 3.8. On suppose que  $\lambda \in \mathbf{R}_+$ .

Pour tout  $\eta \in C_0^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  il existe un unique  $L_{\alpha, \lambda}^{-1} \eta = \varphi_{\lambda} \in C_0^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant

$$\varphi_{\lambda} - \lambda \varphi_{\lambda} \circ R_{\alpha} = \eta$$

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}_+} |D^{r-1} \varphi_{\lambda}|_{\beta} \leq C'_{\beta} \gamma^{-1} |D^r \eta|_{\beta},$$

où  $C'_{\beta} > 0$  est une constante indépendante de  $\alpha$  et  $\lambda$  et vérifiant

$\sup_{\beta' \in [\beta_1, \beta_2]} C'_{\beta'} < +\infty$  si  $[\beta_1, \beta_2] \subset ]0, 1[$ . On a de plus, si  $0 < \beta' < \beta$ ,

$$(\eta, \lambda) \in C_0^{r+\beta} \times \mathbf{R} \longrightarrow \varphi_{\lambda} \in C_0^{r-1+\beta'}$$

est continue si on munit  $C_0^{r+\beta}$  (resp.  $C_0^{r-1+\beta'}$ ) de la  $C^{r+\beta}$ - (resp.  $C^{r-1+\beta'}$ -) topologie.

Démonstration : Elle est identique à celle de 3.8.1 en utilisant 3.7.

La continuité résulte facilement de la remarque 2, 3.8.3. ■

3.10 Proposition : Soient  $\alpha$  un nombre de type constant de constante de Markoff  $\gamma$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \beta < 1$ . On suppose que  $a \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \frac{1}{2} \gamma .$$

On peut écrire  $a$  de façon unique

$$a = \lambda b \circ R_\alpha / b$$

où  $b \in C^{r-1+\beta}$ ,  $b > 0$ ,  $\int_0^1 b(\theta) d\theta = 1$  ;  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (on a  $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta$ ).

Il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$|\lambda - 1| \leq C \|a - 1\|_{C^0} ;$$

$$\|b - 1\|_{C^\beta} + \left\|1 - \frac{1}{b}\right\|_{C^\beta} \leq C \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{1+\beta}}$$

$$\|b - 1\|_{C^{1+\beta}} + \left\|1 - \frac{1}{b}\right\|_{C^{1+\beta}} \leq C \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}}$$

et une constante  $C_{r+\beta}$  ne dépendant que de  $r$  et  $\beta$  et telle que l'on ait, si  $r \geq 3$ ,

$$\|b - 1\|_{C^{r-1+\beta}} \leq C_{r+\beta} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{\beta+r}} + (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}})^{r-1+\beta}) .$$

Démonstration : Par 3.8.1, on écrit

$$\text{Log } a = \text{Log } \lambda + \text{Log } b_1 \circ R_\alpha - \text{Log } b_1 ,$$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

avec  $\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta$  et  $\text{Log } b_1 \in C_0^{r-1+\beta}$  .

La solution générale est  $\text{Log } b_1 + C$  ( $C \in \mathbf{R}$ ) . Si on impose la normalisation

$$\int_0^1 b(\theta) d\theta = 1, \text{ alors on a } \|\text{Log } b\|_{C_0} \leq 2 \|\text{Log } b_1\|_{C_0} .$$

Pour voir les inégalités, on applique 2.7.3 avec  $\varphi(x) = \text{Log}(1+x)$ ,  $g = a - 1$ ,  $\delta = 1/2$  (on a  $\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \frac{1}{2} \gamma \leq \frac{1}{2}$ ) d'où il suit

$$\|\text{Log } a - \text{Log } \lambda\|_{C^{1+\beta}} \leq C' \gamma ,$$

où  $C' > 0$  est une constante.

Par 3.8, on a donc

$$\|\text{Log } b\|_{C^\beta} \leq C''_\beta$$

où  $C''_\beta$  est une constante.

On a aussi

$$\|\text{Log } a - \text{Log } \lambda\|_{C^{r+\beta}} \leq C'_{r+\beta} \|a - 1\|_{C^{r+\beta}} ,$$

et donc par 3.8.1

$$\|\text{Log } b\|_{C^{r-1+\beta}} \leq C'_{r+\beta} \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{r+\beta}} .$$

On applique à nouveau 2.7.3 avec  $\varphi(x) = e^x - 1$ ,  $g = \text{Log } b$ ,  $\delta = C''_\beta$  (puisque  $\text{Log } b: \mathbb{T}^1 \rightarrow [-C''_\beta, C''_\beta]$ ) et nous avons ainsi démontré l'inégalité de 3.10 pour  $r \geq 3$ . On a

$$b^{\pm 1} - 1 = e^{\pm \text{Log } b} - 1$$

et donc comme la fonction  $e^x$  est lipschitzienne sur l'intervalle

$$[-C'_{1+\beta}, C'_{1+\beta}]$$

$$|b^{\pm 1} - 1|_{\beta} \leq C' \|\text{Log } b\|_{\beta} \leq C' C'_{1+\beta} \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{1+\beta}}$$

$$\|b^{\pm 1} - 1\|_{C^0} \leq C' \|\text{Log } b\|_{C^0} \leq C' C'_{1+\beta} \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} .$$

On a de plus

$$|De^{\pm \text{Log } b}|_{\beta} \leq |e^{\pm \text{Log } b}|_{\beta} \|D \text{Log } b\|_{C^0} + \|e^{\pm b}\|_{C^0} |D \text{Log } b|_{\beta}$$

et il en résulte que l'on a :

$$\|b^{\pm 1} - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq C \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} . \quad \blacksquare$$

3.11 On donne un nombre de type constant  $\alpha$ , de constante de Markoff  $\gamma$  ;  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$  et  $0 < \beta < 1$ . Soient  $a \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$ ,  $a > 0$  et  $\eta \in C^{k+\beta}(\mathbb{T}^1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq r-1$ . On pose

$$\text{Log } \lambda = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta .$$

On veut résoudre

$$\textcircled{1} \quad \psi - a(\psi \circ R_{\alpha}) = \eta + (1 - \lambda)\mu + \mu_1$$

avec  $\mu_1$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\psi \in C^{k-1+\beta}$ . Dans la suite on écrira aussi  $a(\psi \circ R_{\alpha}) = a\psi \circ R_{\alpha}$ .

La constante sera choisie pour que

$$\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0 ,$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

où  $d\sigma$  est une mesure de probabilité de  $\mathbb{T}^1$ .

Pour résoudre (1) on écrit par 3.10

$$(2) \quad a = \lambda b \circ R_\alpha / b ,$$

avec  $b \in C^{r-1+\beta}$ ,  $b > 0$ ,  $\int_0^1 b(\theta) d\theta = 1$  (la solution générale de (2) est  $cb$ ,  $c \in \mathbb{R}^*$ ).

En remplaçant (2) dans (1) et en multipliant par  $b$  on doit résoudre

$$(3) \quad b\psi - \lambda(b\psi) \circ R_\alpha = b(\eta + (1-\lambda)\mu + \mu_1) .$$

On choisit  $\mu_1$  pour avoir

$$\int_0^1 (b\eta + \mu_1 b) d\theta = 0 .$$

Soit

$$(4) \quad \mu_1 = -\int_0^1 (b\eta)(\theta) d\theta$$

et donc

$$(5) \quad |\mu_1| \leq \|b\eta\|_{C^0} \leq \|b\|_{C^0} \|\eta\|_{C^0} .$$

(4) ne dépend pas du choix  $\int_0^1 b(\theta) d\theta = 1$ .

En utilisant, si  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \neq 1$ ,

$$L_{\alpha,\lambda}^{-1}((1-\lambda)\mu b) = \mu + L_{\alpha,\lambda}^{-1}((1-\lambda)(b-1))$$

et comme  $\int_0^1 b(\theta) d\theta = 1$ , on a

$$(6) \quad \int_0^1 (b\eta + (1-\lambda)\mu(b-1) + \mu_1 b) d\theta = 0 .$$

Mais, si  $\lambda = 1$ , on a aussi  $\mu \in \text{Ker}(L_{\alpha, \lambda})$ .

Par 3.9, on peut résoudre (3) (pour  $\lambda \geq 0$ ), la solution générale de (3) dépend d'un paramètre  $\mu \in \mathbf{R}$  et elle s'écrit

$$(7) \quad \psi_{\mu} = \frac{1}{b} (L_{\alpha, \lambda}^{-1} (b\eta + (1 - \lambda)\mu(b - 1) + \mu_1 b) + \mu) .$$

Si on remplace  $b$  par  $cb$ ,  $c \in \mathbf{R}^*$ , on obtient le même  $\psi_{\mu}$  :

$$\psi_{\mu} = \frac{1}{bc} L_{\alpha, \lambda}^{-1} (cb\eta + (1 - \lambda)\mu c(b - 1) + \mu_1 bc + \mu c) .$$

Par 3.9, on a  $\psi_{\mu} \in C^{k-1+\beta}$ . Si la fonction

$$A(\theta) = b^{-1} + b^{-1} L_{\alpha, \lambda}^{-1} ((1 - \lambda)(b - 1))$$

vérifie

$$(8) \quad A > 0 ,$$

alors si  $\sigma$  est une mesure de probabilité de  $\mathbb{T}^1$  il existe un unique  $\mu_0 \in \mathbf{R}$  tel que

$$(9) \quad \int_{\mathbb{T}^1} \psi_{\mu_0}(\theta) d\sigma(\theta) = 0$$

$$(10) \quad \mu_0 = -(\int_{\mathbb{T}^1} A d\sigma)^{-1} \int_{\mathbb{T}^1} b^{-1} L_{\alpha, \lambda}^{-1} (b\eta + \mu_1 b) d\sigma .$$

**Proposition :** Avec les hypothèses ci-dessus, si la condition (8) est vérifiée, il existe un unique  $\mu_0$ , un unique  $\nu$  donné par :

$$\nu = (1 - \lambda)\mu_0 + \mu_1$$

et un unique  $\psi_{\mu_0} \in C^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}^1} \psi_{\mu_0}(\theta) d\sigma(\theta) = 0$$

tels que l'on ait

$$\psi_{\mu_0} - a \psi_{\mu_0} \circ R_\alpha = \eta + \nu .$$

Démonstration : La proposition vient de l'existence (on suppose ici que  $r \geq 2$ ) et de ce que la solution (7) ne dépend pas du choix de  $b$  et qu'on peut inverser les raisonnements. ■

### 3.12 Unicité plus faible.

On se donne  $[\beta_1, \beta_2] \subset ]0, 1[$ ,  $0 < \beta_1 < 1$  et  $0 < \beta_2 < 1$ .

On suppose que  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ , et  $a > 0$  vérifie

$$(11) \quad \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta \gamma \quad , \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad ,$$

alors par 3.10, on a

$$(12) \quad \sup(\|b - 1\|_{C^\beta}, \|\frac{1}{b} - 1\|_{C^\beta}, |\lambda - 1|) \leq C \gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \quad ,$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

Par 3.4 on a

$$(13) \quad \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}((\lambda - 1)(b - 1))\|_{C^\beta} \leq \|b - 1\|_{C^\beta} \quad .$$

On a la proposition 3.12.1 qui est immédiate en utilisant (12) et (13) .

3.12.1 Proposition : Il existe  $\delta_0 > 0$  (dépendant de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ ) tel que

si  $\delta \leq \delta_0$  et  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$

$$\|a - 1\|_{C^{\beta+1}} \leq \delta \gamma$$

alors la fonction  $A$  de (8) (pour  $\lambda \geq 0$ ) vérifie

$$\|A - 1\|_{C^\beta} \leq \frac{1}{4}$$

et donc

$$\frac{1}{3} \leq A \leq 1 + \frac{1}{4} .$$

**3.12.2 Proposition :** Sous les mêmes hypothèses que 3.12.1 étant donné une mesure de probabilité  $\sigma$  de  $\mathbb{T}^1$  et  $\eta \in C^0(\mathbb{T}^1)$ , il existe un unique  $\nu \in \mathbf{R}$  et un unique  $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$  vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0$$

et

$$\psi - a\psi \circ R_\alpha = \eta + \nu .$$

Démonstration : Il faut voir que l'équation

$$\psi - a\psi \circ R_\alpha = \nu$$

a seulement la solution  $\nu = 0$  et  $\psi = 0$  si  $\int \psi \, d\sigma = 0$ . On écrit

$$a = \lambda \, b \circ R_\alpha / b \quad (\lambda \geq 0)$$

et donc

$$b\psi - \lambda(b\psi) \circ R_\alpha = \nu b .$$

Si  $\lambda = 1$ , on a  $\int_0^1 \nu b \, d\theta = 0$  et donc  $\nu = 0$  et  $b\psi = \text{Cte}$  :

$$\int \psi \, d\sigma = 0 \text{ implique } \psi = 0 \text{ .}$$

Si  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ , alors par (3), on a

$$\psi = \frac{1}{b} L_{\alpha, \lambda}^{-1}(vb) = \frac{1}{1-\lambda} (b^{-1} L_{\alpha, \lambda}^{-1}((1-\lambda)v(b-1)) + b^{-1} v) \text{ .}$$

Or, par 3.12.1,  $\frac{1}{3} < A < 1 + \frac{1}{4}$  et  $\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0$ , d'où  $v = 0$  et  $\psi = 0$ . ■

### 3.13 Inégalités.

On se fixe  $[\beta_1, \beta_2] \subset ]0, 1[$ , on suppose que  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ . On suppose que  $a \in C^{r+\beta}$ ,  $r \geq 2$ ,  $\eta \in C^{k+\beta}$ ,  $r \geq k+1$ . On suppose que  $a$  vérifie

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta \text{ ,}$$

avec  $\delta \leq \delta_0$ , où  $\delta_0$  est choisi comme en 3.12.1.

Dans la suite de ce paragraphe, toutes les constantes ne dépendent que de  $k$  et de l'intervalle  $[\beta_1, \beta_2]$  mais pas de  $\alpha$ ,  $\gamma$  ni de  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ .

Par (5), 3.8, 3.9, 3.10, (12) et 2.4.2, on a

$$\begin{aligned} (14) \quad & \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}((b\eta) + \mu_1 b)\|_{C^\beta} \leq C \gamma^{-1} (\|b\eta\|_{C^{\beta+1}} + \mu_1 \|b\|_{C^{1+\beta}}) \\ & \leq C_1 \gamma^{-1} (\|b\|_{C^{1+\beta}} \|\eta\|_{C^0} + \|\eta\|_{C^{1+\beta}} \|b\|_{C^0}) \\ & \leq C_2 \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} \|\eta\|_{C^0} + \|\eta\|_{C^{1+\beta}}) \text{ ,} \end{aligned}$$

où  $C$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes.

On a de même, si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$

$$(15) \quad \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}(b\eta + \mu_1 b)\|_{C^{k-1+\beta}} \leq C_k \gamma^{-1} (\|b\|_{C^{k+\beta}} \|\eta\|_{C^0} + \|\eta\|_{C^{k+\beta}} \|b\|_{C^0}) \quad ,$$

où  $C_k$  est une constante dépendant de  $k$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

Par 3.4 on a, si  $k \geq 1$ ,

$$(16) \quad \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}((1-\lambda)\mu_0)\|_{C^{k-1+\beta}} \leq |\mu_0| \|b-1\|_{C^{k-1+\beta}} \quad .$$

Comme  $\frac{1}{3} \leq A \leq 1 + \frac{1}{4}$  par (10) on a l'inégalité (qui ne pas du choix de mesure de probabilité  $\sigma$ )

$$(17) \quad \begin{aligned} |\mu_0| &\leq 3 \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}(b\eta + \mu_1 b)\|_{C^0} \\ &\leq 3 \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}(b\eta + \mu_1 b)\|_{C^\beta} \end{aligned}$$

et donc, par (12) , (14) et 3.12.1

$$|\mu_0| \leq 3 C_2 \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a-1\|_{C^{2+\beta}} \|\eta\|_{C^0} + \|\eta\|_{C^{1+\beta}}) \quad .$$

Par (16) et (17)

$$(18) \quad \|L_{\alpha, \lambda}^{-1}((1-\lambda)\mu_0(b-1))\|_{C^\beta} + \|\mu_0 \frac{1}{b}\|_{C^\beta} \leq C_3 |\mu_0| \quad ,$$

où  $C_3$  est une constante (dépendant de  $\delta$ ).

On a aussi ( $C_4$  étant une constante) en utilisant (5)

$$(19) \quad |v| = |\mu_1 + (1-\lambda)\mu_0| \leq C_4 (\|\eta\|_{C^0} + |\mu_0|) \quad .$$

Sous les hypothèses ci-dessus en utilisant 2.4.2, 2.7.2 et 2.7.3 et en remplaçant on obtient les propositions suivantes et les constantes sont

indépendantes de la mesure de probabilité  $\sigma$  choisie sur  $\mathbb{T}^1$ .

**3.14 Proposition :** On suppose que  $k \geq 1$ ,  $r = k+1$  et  $a \in C^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta_0$$

$$\|a - 1\|_{C^{k+1+\beta}} \leq \gamma \delta_k$$

alors il existe une constante  $C$  dépendant de  $\delta_k$ ,  $\beta$  et  $k$  tel que si  $\eta \in C^{k+\beta}(\mathbb{T}^1)$  il existe un unique  $\psi \in C^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  ( $\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0$ ) et  $v \in \mathbf{R}$  vérifiant

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + v$$

et on a

$$\|\psi\|_{C^{k-1+\beta}} + |v| \leq C \gamma^{-1} \|\eta\|_{C^{k+\beta}} .$$

**3.15 Proposition :** On suppose que  $k \geq 1$ ,  $r \geq k+1$  et que 3.12.1 est vérifiée. Il existe une constante  $C$  (dépendant de  $\delta_0$  et  $\beta$ ) telle que si  $\eta \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ , alors il existe un unique  $\psi \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$  et  $v \in \mathbf{R}$  vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0 .$$

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + v$$

et on a

$$\|\psi\|_{C^\beta} + |v| \leq C \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} \|\eta\|_{C^0} + \|\eta\|_{C^{1+\beta}}) .$$

**3.16 Proposition :** On se place sous les mêmes hypothèses qu'en 3.15, et on suppose que  $k = +\infty$ . Il existe  $\delta_1 > 0$  et  $C_1$  indépendant de  $\alpha$  et  $\gamma$  (mais dépendant de  $\beta$ ) tel que si

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta \gamma \quad \text{avec} \quad \delta \leq \sup(\delta_0, \delta_1) \quad ,$$

la fonction  $\psi$  de 3.15 vérifie

$$\begin{aligned} \|D\psi\|_{C^\beta} \leq C_1 \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} (\|D\eta\|_{C^0} + \delta \gamma \|\psi\|_{C^0}) + \\ + \|Da\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{C^0} + \|\eta\|_{C^{2+\beta}}) \quad . \end{aligned}$$

Démonstration : On a évidemment  $\psi \in C^\infty$  et

$$D\psi - a D\psi \circ R_\alpha = D\eta - Da \psi \circ R_\alpha \quad .$$

On pose  $\eta_1 = D\eta - Da \psi \circ R_\alpha$ , par 3.15 il existe un unique  $\psi_1 \in C^\infty$ ,  $\int_0^1 \psi_1(\theta) d\theta = 0$  et  $\nu_1 \in \mathbf{R}$  vérifiant

$$\psi_1 - a \psi_1 \circ R_\alpha = \eta_1 + \nu_1 \quad .$$

Par unicité  $\psi_1 = D\psi$  et  $\nu_1 = 0$  et par 3.15 on a

$$\|D\psi\|_{C^\beta} \leq C_1 \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a - 1\|_{C^{2+\beta}} \|\eta_1\|_{C^0} + \|\eta_1\|_{C^{1+\beta}}) \quad .$$

Par 2.4.2, on a

$$\|\eta_1\|_{C^{1+\beta}} \leq \|\eta\|_{C^{2+\beta}} + C_3 (\|Da\|_{C^{1+\beta}} \|\psi\|_{C^0} + \|Da\|_{C^0} \|\psi\|_{C^{1+\beta}}) \quad ,$$

où  $C_3$  est une constante.

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

Or,  $\|Da\|_{C^0} \leq C_4 \gamma \delta$ , et comme  $\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0$ ,  $\psi$  s'annule et par 2.8 on obtient

$$\|\psi\|_{C^{1+\beta}} \leq 2 \|D\psi\|_{C^\beta} .$$

Si  $\delta_1$  vérifie  $2C_1 C_3 C_4 \delta_1 < 1/2$ , on peut passer le terme

$C_1 C_3 \gamma^{-1} \|Da\|_{C^0} \|\psi\|_{C^{1+\beta}}$  dans l'autre membre et on obtient l'inégalité

cherchée. ■

**3.17 Théorème** : On se donne  $0 < \beta < 1$ , alors il existe des constantes  $\delta_2 > 0$  et  $C_2 > 0$  ne dépendant que de  $\beta$  et telles que si  $a \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta \gamma$$

avec  $\delta = \sup(\delta_0, \delta_1, \delta_2, 1)$  où  $\delta_0$  est défini en 3.12.1 et  $\delta_1$  en 3.16, si  $\sigma$  est une mesure de probabilité de  $\mathbb{T}^1$ , si  $\eta \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ , alors il existe un unique  $\psi \in C^\beta(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  $\int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0$ , et  $v \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait

$$\psi - a \psi \circ R_\alpha = \eta + v$$

et de plus on a

$$\|\psi\|_{C^\beta} + |v| \leq C_2 \gamma^{-1} \|\eta\|_{C^{1+\beta}} .$$

**Démonstration** : Soit  $0 < \beta' < \beta$  et on pose  $\beta - \beta' = \theta$ . Il suffit de démontrer l'existence, l'unicité découlant de 3.12. On peut supposer que  $\|\eta\|_{C^{1+\beta}} = \gamma$ .

Par 2.6, on écrit

$$\eta = \sum_{k \geq 0} \Delta \eta_k , \quad \text{Log } a = \sum_{k \geq 0} \Delta e_k ,$$

avec  $\Delta \eta_0 = \int_0^1 \eta(\theta) d\theta$ ,  $\Delta e_0 = \int_0^1 \text{Log } a(\theta) d\theta = \text{Log } \lambda$ . On pose, si  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\eta_N = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \eta_k, \quad e_N = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta e_k, \quad a_N = e^{e_N}.$$

Par 2.5, on a si  $k \geq 0, N \geq 1,$

$$\|\Delta \eta_k\|_{C^0} \leq C' 2^{-k(1+\beta)} \gamma$$

$$\|\Delta \eta_k\|_{C^{1+\beta}} \leq C' 2^{-k\theta} \gamma$$

$$\textcircled{1} \quad \|\Delta \eta_k\|_{C^{2+\beta}} \leq C' 2^{k(1-\theta)} \gamma$$

$$\|\eta_N\|_{C^{1+\beta}} \leq C' \gamma$$

$$\|\eta_N\|_{C^{2+\beta}} \leq C' 2^{N(1-\theta)} \gamma$$

et de même en appliquant 2.5 et 2.6 à la fonction  $a$  :

$$\|\Delta e_k\|_{C^0} \leq C' 2^{-k(1+\beta)} \delta \gamma$$

$$\|\Delta e_k\|_{C^{1+\beta}} \leq C' 2^{-k\theta} \delta \gamma$$

$$\textcircled{2} \quad \|\Delta e_k\|_{C^{2+\beta}} \leq C' 2^{k(1-\theta)} \delta \gamma$$

$$\|e_N\|_{C^{1+\beta}} \leq C' \delta \gamma$$

$$\|e_N\|_{C^{2+\beta}} \leq C' 2^{N(1-\theta)} \delta \gamma.$$

On a donc

$$\|a_N - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq C' \gamma \delta$$

$$\textcircled{3} \quad \|a_N - 1\|_{C^{2+\beta}} \leq C' \gamma \delta 2^{N(1-\theta)}.$$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

On pose 
$$\Delta a_N = a_{N+1} - a_N = e^{e_N} (e^{\Delta e_N} - 1) .$$

On a

④ 
$$\|\Delta a_N\|_{C^0} \leq C' \gamma \delta 2^{-(N+1)(1+\beta)}$$

$$\|\Delta a_N\|_{C^{1+\beta}} \leq C' \gamma \delta 2^{-(N+1)\theta} ,$$

où  $C'$  désigne des constantes indépendantes de  $k$ ,  $N$ ,  $\gamma$  et de  $\delta$  (si  $\delta \leq 1$ ).

On suppose dans la suite que

$$C' \delta \leq \sup(\delta_0, \delta_1) .$$

Par 3.15, pour  $N \geq 1$ , on peut résoudre

⑤ 
$$\psi_N - a_N \psi_N \circ R_\alpha = \eta_N + v_N$$

avec un unique  $v_N \in \mathbf{R}$ ,  $\psi_N \in C^\infty$  vérifiant

$$\int_{\mathbf{T}^1} \psi_N d\sigma = 0 , \quad \Delta \psi_0 = \psi_1 = 0 , \quad \Delta v_0 = v_1 = -\int_0^1 \eta(\theta) d\theta .$$

On écrit, si  $N > 0$ ,

⑥ 
$$\psi_N - \psi_{N-1} = \Delta \psi_{N-1}$$

$$v_N - v_{N-1} = \Delta v_{N-1}$$

et donc

⑦ 
$$\Delta \psi_N - a_{N+1} \Delta \psi_N \circ R_\alpha = \Delta \eta_N + \Delta v_N + (a_{N+1} - a_N) \psi_N .$$

On se propose de démontrer par récurrence, pour  $N \geq 1$ ,

$$(8) \quad \|\Delta\psi_{N-1}\|_{C^{\beta'}} + |\Delta v_{N-1}| \leq C'_{N-1} 2^{-(N-1)\theta}$$

avec  $C'_{N-1} \geq C'_{N-2}$

$$(9) \quad \sup_N C'_N = C'_\infty < +\infty ,$$

avec  $C'_\infty$  indépendant de  $\gamma$ . Pour  $N=1$  c'est immédiat avec  $C'_0 = \gamma$ .

(7) implique :

$$(10) \quad \|\psi_N\|_{C^0} \leq C''_2 C'_{N-1} ,$$

où  $C''_2$  est une constante.

On applique 3.16 à (5) en utilisant (1), (3) et (10) et en supposant que  $\delta \leq 1$ , d'où

$$(11) \quad \|\psi_N\|_{C^{1+\beta'}} \leq C''_3 2^{N(1-\theta)} (1 + \delta C'_{N-1}) ,$$

où  $C''_3$  est une constante.

On applique maintenant 3.15 à (7) en utilisant (11), (1), (3) et (4), et en posant  $f_N = \Delta\eta_N + (a_{N+1} - a_N)\psi_N$ , et donc (en utilisant 2.4.2)

$$\begin{aligned} \|f_N\|_{C^0} &\leq \|\Delta\eta_N\|_{C^0} + \|a_{N+1} - a_N\|_{C^0} \|\psi_N\|_{C^0} \\ \|f_N\|_{C^{1+\beta'}} &\leq \|\Delta\eta_N\|_{C^{1+\beta'}} + C' (\|a_{N+1} - a_N\|_{C^{1+\beta'}} \|\psi_N\|_{C^0} + \\ &\quad + \|a_{N+1} - a_N\|_{C^0} \|\psi_N\|_{C^{1+\beta'}}) , \end{aligned}$$

où  $C'$  est une constante ; et

$$\|\Delta\psi_N\|_{C^{\beta'}} + |\Delta v_N| \leq C \gamma^{-1} (\gamma^{-1} \|a_{N+1} - 1\|_{C^{2+\beta'}} \|f_N\|_{C^0} + \|f_N\|_{C^{1+\beta'}}) ,$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

et donc en supposant que  $0 < \delta \leq 1$

$$|\Delta v_N| + \|\Delta \psi_N\|_{C^{\beta'}} \leq 2^{-N\theta} (C_4'' + C_4'' \delta C_{N-1}^{\prime}) ,$$

où  $C_4''$  est une constante.

On a donc

$$C_N^{\prime} \leq \sup(C_4'' + C_4'' \delta C_{N-1}^{\prime}, C_{N-1}^{\prime}) .$$

On choisit  $C_4'' \delta < \frac{1}{2}$  ,

et donc  $C_{\infty}^{\prime} = \sup_N C_N^{\prime} = \sup(C_0^{\prime}, 2C_4'')$

et nous avons ainsi démontré (8) et (9) .

L'inégalité (11) implique

$$(12) \quad \|\Delta \psi_N\|_{C^{1+\beta'}} \leq C_5'' 2^{N(1-\theta)} ,$$

où  $C_5''$  est une constante.

Il suffit maintenant d'appliquer 2.6.3 en utilisant (8) et (12) pour conclure que

$$\psi = \sum_{k \geq 0} \Delta \psi_k \in C^{\beta}$$

$$v = \sum_{k \geq 0} \Delta v_k \in \mathbf{R} .$$

Or si  $N \rightarrow +\infty$ ,  $\psi_N \rightarrow \psi$ ,  $\eta_N \rightarrow \eta$  et  $a_N \rightarrow a$  dans la  $C^0$ -topologie, donc en utilisant

(5) , si  $N \rightarrow +\infty$ , on a

$$\psi - a \psi \circ R_{\alpha} = \eta + v$$

et 
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^1} \psi_N \, d\sigma = \int_{\mathbb{T}^1} \psi \, d\sigma = 0 \quad .$$

Or, si  $\|\eta\|_{C^{1+\beta}} = \gamma$ , on a

$$\|\psi\|_{C^\beta} + |\nu| \leq C''_6 \quad ,$$

où  $C''_6$  est une constante. ■

#### 4. THÉORÈME LOCAUX DE CONJUGAISON DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE.

4.1 Dans ce paragraphe, on suppose que  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$ ,  $0 < \beta < 1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un nombre de type constant de constante de Markoff  $\gamma$ .

Nous avons montré [2, IX et A] que si  $f \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\rho(f) = \alpha$  et si  $\|f - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}}$  est assez petit, alors

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad ,$$

avec un unique  $h \in D^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$ . (Le fait que  $h \in C^{r-1+\beta}$  si  $0 < \beta < 1$  résulte de la démonstration [2, A] et de [12].)

De plus, si  $r \geq 3$ , sans condition de proximité

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad , \quad h \in D^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0) \quad .$$

Nous allons démontrer d'abord ce théorème sous l'hypothèse que  $\|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}}$  est petit. Ceci va nous permettre de préciser les constantes. Cette démonstration est infiniment plus simple que celles de [2].

Nous allons ensuite utiliser le théorème fondamental de [2] : Si  $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  vérifie :  $\rho(f) = \alpha$  est de type constant, alors  $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$  avec  $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$ .

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

Ce résultat nous permettra de donner de meilleures inégalités.

4.2 Théorème : Il existe  $1 \geq \varepsilon_{r+\beta} > 0$  (dépendant de  $r$  et  $\beta$ ) tel que si  
 $f \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie

$$\|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \leq \varepsilon_{r+\beta} \gamma$$

et  $\rho(f) = \alpha$ , alors

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} \quad \text{avec } h \in D^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0) \quad .$$

On a de plus l'inégalité ( $C_{r+\beta} > 0$  est une constante)

$$\|h - \text{Id}\|_{C^{r-1+\beta}} \leq C_{r+\beta} \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \quad .$$

4.3 Démonstration : Soit l'ensemble convexe

$$K^{r+\beta-1} = \{h \in D^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0) \mid \|h - \text{Id}\|_{C^{r-1+\beta}} \leq \frac{1}{2}\} \quad .$$

Pour la  $C^{r-1}$ -topologie,  $K^{r-1+\beta}$  est convexe, compacte et métrisable.

Nous allons construire une application

$$\tilde{\varphi} : K^{r-1+\beta} \longrightarrow D^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0) \quad .$$

Si  $h \in K^{r-1+\beta}$  soit

$$\lambda(f, h) = -\int_0^1 \text{Log } Df \circ h d\theta \quad .$$

L'application  $(f, h) \rightarrow \lambda(f, h) \in \mathbb{R}$  est continue pour la  $C^{r-1}$ -topologie.

Comme  $\text{Log Df} \circ h \in C^{r-1+\beta}$ , par 3.8 il existe un unique  $\varphi \in C_0^{r-2+\beta}$  vérifiant

$$(+)$$

$\text{Log Df} \circ h + \lambda(f, h) = \varphi \circ R_\alpha - \varphi$

Si  $\varphi$  vérifie (+), il en est de même de  $\varphi + C$  ( $C \in \mathbf{R}$ ). On choisit  $C$  tel que l'on ait

$$\int_0^1 e^{\varphi+C} d\theta = 1 \quad ,$$

on pose  $\Phi(h) = g$  où  $Dg = \left( \int_0^1 e^\varphi d\theta \right)^{-1} e^\varphi$

$$g(\theta) = \int_0^\theta e^{\varphi+C} d\theta \quad .$$

Ceci détermine uniquement  $g$  qui vérifie

\*

$Dg \circ R_\alpha = e^{\lambda(f, h)} Df \circ h Dg$

4.4 Lemme 1 : Si  $\|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \leq \varepsilon_{r+\beta} \gamma^{-1}$ , alors  $\Phi(h) \in K^{r-1+\beta}$  .

Remarque : C'est ici qu'on ne pouvait se permettre de perdre plus d'une "unité de" dérivée en inversant en 3.8.1 l'opérateur  $L_\alpha$ . Si  $\alpha$  n'est pas un nombre de type constant on perdrait plus "d'une unité" de dérivée, (cf. [H, IX.4]) et la méthode de démonstration ne s'applique pas. De plus on est obligé de considérer les espaces  $C^{r+\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ , avec  $\beta \neq 0$  à cause de [H, IX.4.6].

Démonstration : En effet, par 2.7.3, on a :

$$\|\text{Log Df}\|_{C^{r-1+\beta}} \leq C_r \|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \quad (C_r \text{ est une constante})$$

donc, puisque  $h \in K^{r-1+\beta}$  et par 2.7.2 et 2.7.3,

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

$$\|\text{Log Df} \circ h\|_{\mathbb{C}^{r-1+\beta}} \leq C'_{r+\beta} \|f - R_\alpha\|_{\mathbb{C}^{r+\beta}} \quad (C'_{r+\beta} \text{ est une constante})$$

donc, par 3.8,

$$\|\varphi\|_{\mathbb{C}^{r-2+\beta}} \leq C''_{r+\beta} \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{\mathbb{C}^{r+\beta}} \quad ,$$

Comme  $\|f - R_\alpha\|_{\mathbb{C}^{r+\beta}} \leq \varepsilon_{r+\beta} \gamma$ , par 2.7.3 et comme  $r-1 \geq 1$ , on a, si  $r \geq 3$ ,

$$\|e^\varphi - 1\|_{\mathbb{C}^{r-2+\beta}} \leq C'''_{r+\beta} (\varepsilon_{r+\beta} + (\varepsilon_{r+\beta})^{r-2+\beta})$$

et si  $r = 2$ ,

$$\|e^\varphi - 1\|_{\mathbb{C}^\beta} \leq C'''' \varepsilon_{2+\beta}$$

et si on suppose que  $\varepsilon_{r+\beta} \leq 1$ , on a

$$\|e^\varphi - 1\|_{\mathbb{C}^{r-2+\beta}} \leq C''''_{r+\beta} \varepsilon_{r+\beta}$$

donc

$$\left| \int_0^1 (e^\varphi - 1) d\theta \right| \leq C''''_{r+\beta} \varepsilon_{r+\beta} \quad .$$

Comme on a, si  $\tilde{\phi}(h) = g$ ,

$$Dg = \left( \int_0^1 e^\varphi d\theta \right)^{-1} e^\varphi \quad .$$

Si  $\varepsilon_{r+\beta}$  est assez petit, on a  $g \in K^{r-1+\beta}$  (i.e.  $\|g - \text{Id}\|_{\mathbb{C}^{r-1+\beta}} \leq \frac{1}{2}$ ) . ■

4.5 On a de plus l'inégalité

$$\|\tilde{\phi}(h) - \text{Id}\|_{\mathbb{C}^{r-1+\beta}} \leq C_{r+\beta} \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{\mathbb{C}^{r+\beta}}$$

si  $f$  vérifie  $\|f - R_\alpha\|_{\mathbb{C}^{r+\beta}} \leq \varepsilon_{\beta+r} \gamma$ .

4.6 Lemme 2 : Sous l'hypothèse  $\|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \leq \varepsilon_{r+\beta} \gamma$ , l'application  
 $\Phi : K^{r-1+\beta} \rightarrow K^{r-1+\beta}$  est continue pour la  $C^{r-1}$ -topologie.

Démonstration : Cela résulte de l'unicité de la solution de \*,  $g$  (unicité si  $g \in D^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$ ). En effet, si la suite  $(h_i)_i$  tend vers  $h \in K^{r-1+\beta}$  dans la  $C^{r-1}$ -topologie, il faut montrer que la suite  $(\Phi(h_i))_i$  tend vers  $\Phi(h)$ .

Puisque  $(\Phi(h_i))_i \subset K^{r-1+\beta}$  et que  $K^{r-1+\beta}$  est un espace compact et métrisable, il suffit de montrer que toute valeur d'adhérence de la suite  $(\Phi(h_i))_i$  est égale à  $\Phi(h)$ , ou ce qui revient au même si  $h_i \rightarrow h$  et  $\Phi(h_i) \rightarrow \tilde{g}$ , que l'on a  $\tilde{g} = \Phi(h)$ .

Or par \*, si  $\Phi(h_i) = g_i$ , on a

$$Dg_i \circ R_\alpha = e^{\lambda(f, h_i)} Df \circ h_i Dg_i$$

si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $g_i \rightarrow \tilde{g}$  dans la  $C^{r-1}$ -topologie, et on a donc

$$\tilde{g} \circ R_\alpha = e^{\lambda(f, h)} Df \circ h D\tilde{g} .$$

Ceci implique, par l'unicité de la solution de l'équation \*, que  $\tilde{g} = \Phi(h)$ . ■

4.7 Fin de la démonstration de 4.2 : Par le théorème de Schauder-Tychonoff, l'application continue  $\Phi$  de  $K^{r-1+\beta}$  a un point fixe  $h$  (cf. [D]).

Par \* on a

$$Dh \circ R_\alpha = e^{\lambda(f, h)} Df \circ h Dh .$$

En intégrant, on a

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

$$\int_0^1 Dh \circ R_\alpha \, d\theta = 1 = \int_0^1 e^{\lambda(f,h)} Df \circ h \, Dh \, d\theta = e^{\lambda(f,\lambda)} .$$

Il en résulte  $Dh \circ R_\alpha = Df \circ h \, Dh$  ,

d'où il suit  $h \circ R_\alpha = f \circ h + \lambda$  ,  $(\lambda \in \mathbb{R})$  ,

d'où  $f = R_{-\lambda} \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$  .

Comme  $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  , il suit de [2, III.4] que  $\lambda = 0$  et donc

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1} .$$

L'inégalité de 4.2 résulte de 4.5. ■

4.8 On se donne  $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$  vérifiant  $\rho(f) = \alpha$ , par le théorème fondamental de [2, IX] il existe un unique  $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$  vérifiant  $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ . On suppose que  $f$  vérifie de plus

$$\textcircled{1} \quad \|f - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon_{2+\beta} \gamma ,$$

où  $\varepsilon_{2+\beta}$  est la constante de 5.2. Par 5.2 on a

$$\textcircled{2} \quad \|h - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq C_{2+\beta} \varepsilon_{2+\beta} \leq \frac{1}{2} .$$

Sous les hypothèses ci-dessus, on a la :

**Proposition** : Il existe  $\varepsilon_\beta > 0$  et des constantes  $C'_\beta$  et  $C''_\beta$  ne dépendant que de  $\beta$  telles que si  $f$  vérifie en plus  $\|\text{Log Df}\|_{C^\beta} \leq \varepsilon_0 \gamma$  , alors

$$\|D^2 h\|_{C^\beta} \leq \gamma^{-1} C'_\beta \|D^3 f\|_{C^\beta}$$

$$\|D^3 h\|_{C^\beta} \leq \gamma^{-1} C_\beta'' \|D^4 f\|_{C^\beta} .$$

Démonstration : On a

$$\text{Log Dh} \circ R_\alpha - \text{Log Dh} = \text{Log Df} \circ h .$$

Par 3.8, on a, si  $r \geq 1$ ,

$$\textcircled{3} \quad |D^r \text{Log Dh}|_\beta \leq C_\beta \gamma^{-1} |D^{r+1} \text{Log Df} \circ h|_\beta .$$

On a

$$D^2(\text{Log Df} \circ h) = (D^2 \text{Log Df}) \circ h \cdot (\text{Dh})^2 + \text{Log Df} \circ h D^2 h$$

$$D^3(\text{Log Df} \circ h) = (D^3 \text{Log Df}) \circ h \cdot (\text{Dh})^3 + 3(D^2 \text{Log Df}) \circ h \cdot \text{Dh} D^2 h + (\text{Log Df} \circ h) D^3 h .$$

Par  $\textcircled{1}$  ,  $\textcircled{2}$  et  $\textcircled{3}$  en utilisant le fait suivant que si  $h \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$  ( $r \geq 2$ ), il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$C^{-1} \|h - \text{Id}\|_{C^{r+\beta}} < |D^r h|_\beta \leq C \|h - \text{Id}\|_{C^{r+\beta}} \quad (\text{cf. 2.8}) ,$$

on obtient

$$|D \text{Log Dh}|_\beta \leq C_\beta''' \gamma^{-1} \|D^3 f\|_{C^\beta} + C_\beta''' \gamma^{-1} \|\text{Log Df}\|_{C^\beta} |D^2 h|_\beta ,$$

où  $C_\beta'''$  est une constante.

On a, (en utilisant  $\textcircled{2}$  )

$$|D^2 h|_\beta \leq 2 |D \text{Log Dh}|_\beta \|Dh\|_{C^\beta} \leq 3 |D \text{Log Dh}|_\beta .$$

On obtient finalement

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

$$\left(\frac{1}{3} - C_\beta''' \gamma^{-1} \|\text{Log Df}\|_{C^\beta}\right) |D^2 h|_\beta \leq C_\beta''' \gamma^{-1} \|D^3 f\|_{C^\beta} \quad .$$

Si 
$$C_\beta''' \gamma^{-1} \|\text{Log Df}\|_{C^\beta} \leq C_\beta''' \varepsilon_0 \frac{1}{6} \quad ,$$

on a l'inégalité

$$\textcircled{4} \quad |D^2 h|_\beta \leq 6 C_\beta''' \gamma^{-1} \|D^3 f\|_{C^\beta} \quad .$$

On obtient aussi en utilisant  $\textcircled{4}$  ,  $\textcircled{2}$  ,  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{3}$

$$|D^2 \text{Log Dh}|_\beta \leq C_4 \gamma^{-1} \|D^4 f\|_{C^\beta} + C_4 \gamma^{-1} \|\text{Log Df}\|_{C^\beta} |D^3 h|_\beta \quad ,$$

où  $C_4$  est une constante.

Par 2.7.3 il existe une constante  $C_5 > 0$  telle que l'on ait

$$|D^3 h|_\beta \leq C \|e^{\text{Log Dh}} - 1\|_{C^{2+\beta}} \leq C_5 (|D^2 \text{Log Dh}|_\beta + |D \text{Log Dh}|_\beta^2) \quad .$$

Par l'inégalité d'Hadamard et  $\textcircled{2}$  on a

$$|D \text{Log Dh}|_\beta^2 \leq C_6 |D^2 \text{Log Dh}|_\beta$$

et finalement

$$|D^3 h|_\beta \leq C_7 |D^2 \text{Log Dh}|_\beta$$

où  $C_6 > 0$  et  $C_7$  sont des constantes.

On obtient

$$|D^3 h|_\beta (C_7 - C_4 \gamma^{-1} \|\text{Log Df}\|_{C^\beta}) \leq C_4 \gamma^{-1} \|D^4 f\|_{C^\beta} \quad ,$$

et on en déduit facilement la 2ème inégalité de 4.8 si  $\varepsilon_0$  est assez petit. ■

Remarque : Ce qui est vraiment intéressant dans 4.8, c'est qu'on ne suppose pas que  $\|D^3 f\|_{C^\beta}$  est petit.

4.9 Corollaire : Il existe des constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  dépendant seulement de  $\beta$  telles que si  $f \in D^{3+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\rho(f) = \alpha$  et  $\|f - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}} \leq C_1 \varepsilon_{2+\beta} \gamma^{-1}$ , alors il existe  $h \in D^{2+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$  vérifiant

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$$

$$\|h - \text{Id}\|_{C^{2+\beta}} \leq C_2 \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{C^{3+\beta}} .$$

Démonstration : Par 2.5 et 2.9 (voir aussi [2, III.4]), on peut approximer  $f$  par une suite  $(f_i)_i \subset D^\infty(\mathbb{T}^1)$ , vérifiant,  $\rho(f_i) = \alpha$ ,

$$\|f_i - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon_{2+\beta} \gamma^{-1} ,$$

$\sup_i \|f_i\|_{C^{3+\beta}} < +\infty$  et de plus si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $f_i \rightarrow f$  dans la  $C^3$ -topologie.

Par le théorème fondamental de [2] et par 4.8 il existe  $h_i \in D^\infty(\mathbb{T}^1, 0)$

$$f_i = h_i \circ R_\alpha \circ h_i^{-1}$$

$$\|h_i - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\|h_i - \text{Id}\|_{C^{2+\beta}} \leq C'_\beta \gamma^{-1} \|D^3 f_i\|_{C^\beta}$$

et donc

$$\sup_i \|h_i - \text{Id}\|_{C^{2+\beta}} < +\infty .$$

Par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite  $(h_i)_i$  telle que, si  $i \rightarrow +\infty$ ,  $h_i \rightarrow h$  dans la  $C^2$ -topologie, et  $h \in D^{2+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$ . Par passage

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

à la limite de l'égalité  $f_i = h_i \circ R_\alpha \circ h_i^{-1}$ , on a  $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ . ■

4.10 Inégalités.

On suppose que  $r \geq 2$  et  $0 < \beta < 1$  sont fixés. Les constantes  $C_1, C_2, \dots$  dépendent de ce choix.

On suppose que  $f \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifie  $\rho(f) = \alpha$ ,

$$\|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}} \leq \varepsilon_{r+\beta} \gamma,$$

où  $\varepsilon_{r+\beta} > 0$  est définie en 4.2.

On a

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$$

avec

$$\textcircled{1} \quad \|h - \text{Id}\|_{C^{r-1+\beta}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \|h - \text{Id}\|_{C^{r-1+\beta}} \leq C_1 \gamma^{-1} \|f - R_\alpha\|_{C^{r+\beta}}.$$

Si  $\varphi \in C^{k+\beta}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq r-1$ , on a par  $\textcircled{1}$  et 2.7

$$\textcircled{3} \quad \|\varphi \circ h^{\pm 1}\|_{C^{k+\beta}} \leq C_2 \|\varphi\|_{C^{k+\beta}}.$$

On se donne  $a \in C^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ ,  $a > 0$ , vérifiant

$$\textcircled{4} \quad \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma^{-1} \delta_\beta, \quad 0 < \delta_\beta \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{5} \quad \|a - 1\|_{C^{r-1+\beta}} \leq \gamma^{-1} \delta,$$

où  $\delta > 0$  est fixé et  $\delta_\beta$  est choisi pour que  $\|a \circ h - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq C' \delta_\beta \gamma$  vérifie

$C' \delta_\beta \leq \sup(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$  (cf. 3.14 à 3.17),  $C'$  étant une constante universelle.

Proposition : On suppose que  $r \geq 3$ . On se donne  $f \in D^{r+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant (1) et  $a \in C^{r-1+\beta}$  vérifiant (4) et (5). Soit  $\eta \in C^{r-2+\beta}(\mathbb{T}^1)$ , il existe un unique  $v \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in C_0^{r-3+\beta}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant

$$(+) \quad \varphi - a\varphi \circ f = \eta + v \quad .$$

De plus il existe une constante  $C_3 > 0$  dépendant de  $\delta > 0$ ,  $r$ ,  $\beta$  telle que l'on ait

$$\|\varphi\|_{C^{r-3+\beta}} \leq \gamma^{-1} C_3 \|\eta\|_{C^{r-2+\beta}}$$

$$|v| \leq C_3 \gamma^{-1} \|\eta\|_{C^{r-2+\beta}} \quad .$$

Démonstration : On écrit  $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ . On compose à droite l'égalité par  $h$ . On doit résoudre

$$\varphi \circ h - a \circ h \varphi \circ h \circ R_\alpha = \eta \circ h + v$$

en imposant

$$\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}^1} \varphi \circ h d\sigma \quad ,$$

où  $\sigma$  est la mesure de probabilité de  $\mathbb{T}^1$  égale à  $h_*^{-1}(d\theta) = Dh(\theta) d\theta$  .

C'est possible par 3.14.

Pour obtenir les inégalités, il suffit d'utiliser (3) et 3.14. ■

4.11 On se place sous les mêmes hypothèses que 4.10. On suppose ici que  $r = 2$ . On se donne  $f \in D^{2+\beta}(\mathbb{T}^1)$  qui vérifie les inégalités de 3.10 avec  $r = 2$ , et  $a \in C^{1+\beta}$  qui vérifie (4) avec  $\delta_\beta$  assez petit.

## THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES

Proposition : Il existe une constante  $C_4 > 0$  ne dépendant que de  $\beta$  et telle que, si  $\eta \in C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)$ , il existe un unique  $\varphi \in C_0^\beta(\mathbb{T}^1)$  et  $v \in \mathbb{R}$  vérifiant

$$\varphi - a\varphi \circ f = \eta + v$$

et on a 
$$\|\varphi\|_{C^\beta} + |v| \leq C_4 \gamma^{-1} \|\eta\|_{C^{1+\beta}} .$$

Démonstration : Elle est identique à celle de la Proposition de 4.10 en utilisant 3.17. ■

4.12 Remarque : Si on écrit  $a = (1 + \ell)E$  avec  $|\ell| < \frac{1}{2}$ , on peut écrire la condition de 4.10 :

$$\|E - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta'_\beta \gamma ,$$

avec  $\delta'_\beta$  assez petit. Ce qui intervient dans la démonstration de 4.10, 4.11, et de 3.15 à 3.17 c'est le fait que  $\delta'_\beta$  est petit, et on peut majorer les constantes indépendamment de  $|\ell| \leq \frac{1}{2}$ .

### 5. THÉORÈMES DES COURBES TRANSLATÉES.

#### 5.1 Courbes translattées.

On se donne  $\delta > 0$ , et on pose  $A_\delta = \mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta]$ . On considère les plongements  $F$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de la forme :

$$F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r)) ,$$

où  $\varphi \in C^{k+\beta}(A_\delta)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ , et  $\|\varphi\|_{C^1(A_\delta)} < \frac{1}{4}$ .

On cherche une courbe  $C$  graphe de  $\psi \in C^{\ell}(\mathbb{T}^1)$ ,  $\ell \geq 0$  translatée par  $F$  de  $\lambda$  :  
il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait

$$f = \text{Id} + \psi + \alpha \in \text{Diff}_+^{\ell}(\mathbb{T}^1) \quad , \quad \rho(f) = \alpha$$

et

$$(+)$$

$$\psi + \varphi(\cdot, \psi) = \psi \circ f + \lambda$$

(i.e. pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ ,  $\psi(\theta) + \varphi(\theta, \psi(\theta)) = \psi(f(\theta)) + \lambda$ ).

Le cercle  $C$  est plongé de classe  $C^{\ell}$  et homotope à  $r = \text{Cte}$ . L'équation (+) est équivalente à

$$L_{-\lambda} \circ F(C) = C$$

où  $L_{-\lambda}(\theta, r) = (\theta, r - \lambda)$  et  $L_{-\lambda} \circ F|_C$  est conjugué par lère projection à  $f$  ( $\rho(f) = \alpha$ ) et donc  $\rho(L_{-\lambda} \circ F|_C) = \alpha$  (on dit que le nombre de rotation de la courbe translatée est  $\alpha$ ).

5.2 On se donne  $k$  entier  $\geq 1$ ,  $0 < \beta < \beta' < 1$ ,  $\delta > 0$ . Soient  $t : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{k+\beta'}$  vérifiant  $\frac{dt(r)}{dr} > 0$ ,  $t(0) = 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On définit  $T_1(\theta, r) = (\theta + t(r) + \alpha, r)$ , qui est un difféomorphisme complètement intégrable et "twist" de classe  $C^{k+\beta'}$ .

Soit un plongement de classe  $C^{k+\beta'}$

$$F_1 : \mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta] \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$$

$$(\theta, r) \longrightarrow (\theta + t(r) + \alpha + \varphi_1(\theta, r), r + \varphi_2(\theta, r)) \quad .$$

On suppose que  $F_1$  est isotope à  $T_1$ , ce qui est impliqué si

$\|F - T\|_{C^1}$  est assez petit.

$F_1$  a la propriété d'intersection sur  $A_{\delta}$  si tout cercle  $C \subset A_{\delta}$ , de

## THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES

classe  $C^0$  plongé et homotope à  $\{r = \text{Cte}\}$  vérifie  $F_1(C) \cap C \neq \emptyset$ .

5.3 Scolie : On fixe  $\alpha \in \mathbb{T}^1$ . L'affirmation a) implique l'affirmation b) .

a) Il existe  $k \geq 1$ ,  $0 < \beta < 1$  tel que pour tout  $\delta > 0$ , si le plongement  $F$  défini en 5.1 vérifie :

$$\|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_\delta)} < c_1 \quad ,$$

où  $0 < c_1$  est une constante dépendant de  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $r$  et  $\beta$ , alors  $F$  translate de  $\lambda$  une courbe de graphe de  $\psi$  de classe  $C^\ell$ , ( $\ell \leq k + \beta$ ) de nombre de rotation  $\alpha$ , et de plus, si  $\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} \rightarrow 0$ , alors  $\|\psi\|_{C^0} + |\lambda| \rightarrow 0$ .

b) On suppose que  $\beta' > \beta$  et que  $\delta > 0$  est fixé. Si le plongement  $F_1$  de classe  $C^{k+\beta'}$  vérifie :

$$\cdot \quad \|F_1 - T_1\|_{C^{k+\beta'}(A_\delta)} \leq c_2, \text{ où } c_2 > 0 \text{ est une constante,}$$

$\cdot \quad F_1$  a la propriété d'intersection,

alors  $F_1$  laisse invariant un cercle  $C_1$  graphe de  $\psi_1 \in C^\ell(\mathbb{T}^1)$  et tel que l'on ait  $\rho(F_1|_{C_1}) = \alpha$ .

Esquisse de démonstration : La démonstration est donnée dans [3]. Nous allons seulement donner les grandes lignes. Comme la propriété d'intersection est "essentiellement" invariante par conjugaison, on peut supposer que l'on remplace  $T_1$  par  $T(\theta, r) = (\theta + r, r)$  puisque  $T_1 = H \circ T \circ H^{-1}$ , où  $H(\theta, r) = (\theta, t(r))$ .

$F_1$  s'écrit sur  $A_\delta$ , avec  $\delta' > 0$  :

$$F_1(\theta, r) = (\theta + r + \alpha + \varphi_1(\theta, r), r + \varphi_2(\theta, r)) \quad .$$

On écrit  $\tilde{F} = \tilde{H} \circ F_1 \circ \tilde{H}^{-1}$ , où  $\tilde{H}(\theta, r) = (r + \varphi_1(\theta, r), r)$ .  $\tilde{F}$  est un plongement de  $A_{\delta'}$  dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  si  $\|\varphi_2\|_{C^1} + \|\varphi_1\|_{C^2}$  est assez petit.  $\tilde{F}$  est de la même forme

qu'en 5.1, et de plus si  $\|\tilde{F} - T\|_{C^{k+\beta}}$  est petit,  $\|F_1 - T_1\|_{C^{k+\beta}}$  l'est puisque la "conjugaison" est continue pour la  $C^{k+\beta}$ -topologie sur les difféomorphismes ou plongements de classe  $C^{k+\beta'}$  ( $\beta' > \beta$ ) (cf. 2.4).  $\tilde{F}$  a la propriété d'intersection sur  $A_{\delta_1}$ , où  $\delta_1$  est petit mais fixé si  $\|F_1 - T_1\|_{C^{1+\beta'}}$  est assez petit.  $\tilde{F}$  a alors par a) une courbe translaturée  $C$  de classe  $C^{\ell}$ ,  $C^0$ -petite et donc invariante (i.e.  $\lambda = 0$  résulte de la propriété d'intersection) et il en sera de même par conjugaison pour  $F_1$ . On a de plus  $\rho(F|C) = \alpha$ . De plus la courbe  $C$  est un graphe puisque la conjugaison par  $\tilde{H}$  préserve le fait qu'une courbe est un graphe. ■

#### 5.4 Théorème des courbes translaturées.

Nous nous proposons de démontrer le théorème des courbes translaturées sous les hypothèses suivantes :

$$k \geq 4 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad 0 < \beta < 1 \quad ,$$

$\alpha$  est un nombre de type constant de constante de Markoff  $\gamma$ .

Les courbes que nous obtiendrons auront seulement une unité de différentiabilité de moins que les plongements considérés.

Théorème : Il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2 \leq 1$  ne dépendant que de

$k + \beta$  telles que, si  $2 \geq \delta \geq \gamma$  et  $F : \mathbb{T}^1 \times [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ ,

$F(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \varphi(\theta, r))$  où  $F$  est de classe  $C^{k+\beta}$  et vérifie

$$\|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_\delta)} \leq C_1 \gamma^2 \quad , \quad \text{alors il existe un cercle } C, \text{ graphe de } \psi \in C^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$$

translaté par  $F$  de  $\lambda \in \mathbb{R}$  et telle que l'on ait :

$$\|\psi\|_{C^{k-1+\beta}} + |\lambda| \leq C_2 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{k+\beta}}$$

et

$$\rho(L_{-\lambda} \circ F|C) = \alpha \quad .$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

5.5 Démonstration : 1) On suppose que dans la suite

$$\|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_\delta)} \leq \varepsilon' \gamma^2, \quad 0 < \varepsilon' \leq \frac{1}{2},$$

et choisi ultérieurement.

2) Dans la suite, le difféomorphisme

$$f \in K_\varepsilon^{k-1+\beta} = \{f = \text{Id} + \alpha + \psi \in D^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid \rho(f) = \alpha, \ |D^{k-1}\psi|_\beta \leq \varepsilon \gamma\},$$

où  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  sera choisi ultérieurement.

L'ensemble  $K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  est compact métrisable pour la  $C^{k-1}$ -topologie, car il est homéomorphe à l'ensemble convexe  $\{\psi \in C_0^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid |D^{k-1}\psi|_\beta \leq \varepsilon \gamma\}$  qui est compact métrisable pour la  $C^{k-1}$ -topologie (cf. 2.9).

L'ensemble  $K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  a la propriété du point fixe pour les applications continues : toute application continue  $\Phi : K_\varepsilon^{k-1+\beta} \rightarrow K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  a un point fixe par le théorème de Schauder-Tychonoff [1].

3) On suppose que  $0 < \varepsilon < \varepsilon_{k-1+\beta}$ , où  $\varepsilon_{k-1+\beta}$  est la constante définie en 4.2. On peut donc écrire

$$f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}, \quad h \in D^{k-2+\beta}(\mathbb{T}^1, 0),$$

avec  $\|h - \text{Id}\|_{C^{k-2+\beta}} \leq \frac{1}{2}$ .

4) Par 5.1, on cherche  $f \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$ ,  $f = \text{Id} + \psi + \alpha$  vérifiant

$$\psi \circ f - \psi = \varphi(\cdot, \psi) - \lambda$$

soit pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$

①

$$\psi(f(\theta)) - \psi(\theta) = \varphi(\theta, \psi(\theta)) - \lambda.$$

On dérive et on a

$$D\psi \circ f Df - D\psi = \varphi_{\theta} \circ G + \varphi_r \circ G D\psi$$

où  $\varphi_{\theta}(\theta, r) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, r)$ ,  $\varphi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ,  $G(\theta) = (\theta, \psi(\theta))$  et  $\varphi_r \circ G = (\varphi_r) \circ G$ .

On a aussi  $Df = 1 + D\psi$ . Pour alléger l'écriture, si  $k \in \mathbb{N}$ , on écrit  $D^k \psi \circ f$  pour  $(D^k \psi) \circ f$ . On dérive à nouveau

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad D^2 \psi \circ f (Df)^2 - D^2 \psi (1 - D\psi \circ f) &= \\ &= \varphi_{\theta\theta} \circ G + 2 \varphi_{\theta r} \circ G D\psi + \varphi_{rr} \circ G (D\psi)^2 + \varphi_r \circ G D^2 \psi \quad . \end{aligned}$$

Puis une troisième fois :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad D^3 \psi \circ f (Df)^3 - D^3 \psi (1 - D\psi \circ f) + 3 D^2 \psi \circ f D^2 \psi Df &= B + \varphi_r \circ G D^3 \psi \\ B &= \varphi_{\theta\theta r} \circ G + 3\varphi_{\theta\theta r} \circ G D\psi + 3\varphi_{\theta rr} \circ G (D\psi)^2 + \varphi_{rrr} \circ G (D\psi)^3 \\ &\quad + 3\varphi_{\theta r} \circ G D^2 \psi + 3\varphi_{rr} \circ G D\psi D^2 \psi \quad . \end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire, si  $1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G$  est inversible,

$$a(\varphi, \psi) D^3 \psi \circ f - D^3 \psi = H(\varphi, \psi)$$

où  $a = (Df)^3 A$ ,  $A = (1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G)^{-1}$ ,  $H(\varphi, \psi) = A(B - 3D^2 \psi \circ f D^2 \psi Df)$ .

De plus l'application  $K_{\varepsilon}^{k-1+\beta} \rightarrow (H(\varphi, \psi), a(\varphi, \psi)) \in C^{k-3+\beta} \times C^{k-2+\beta}$  est continue si on munit  $K_{\varepsilon}^{k-1+\beta}$  de la  $C^{k-1}$ -topologie et l'espace d'arrivée de la  $C^{k-2}$ -topologie. L'application est bien définie puisque  $\delta > \gamma$  et que

$$\|\psi\|_{C^0} \leq \varepsilon \gamma < \delta \quad .$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

5) On suppose que  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon$  sont assez petits pour que l'on ait

$$\|a - 1\|_{C^{1+\beta}(\mathbb{T}^1)} \leq \gamma \delta_\beta ,$$

où  $\delta_\beta$  est définie en 4.10 .

On a alors

$$\|(a)^{\pm 1} - 1\|_{C^{k-2+\beta}} \leq C_3 \gamma ,$$

où  $C_3$  est une constante.

6) Par 1), 2), 5), 2.7.2 et 2.4.2 comme

$$\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} \leq \varepsilon' \gamma^2 < \frac{1}{2}, \quad \|D^3 \psi\|_{C^{k-4+\beta}} \leq \varepsilon \gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \text{on a}$$

$$\|H(\varphi, \psi)\|_{C^{k-3+\beta}(\mathbb{T}^1)} \leq C_4 (\|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_\delta)} + \|D^3 \psi\|_{C^{k-4+\beta}}^2) ,$$

où  $C_4$  est une constante (indépendante de  $\gamma < 1$ ) et ne dépendant que de  $\delta_\beta$  et de  $k + \beta$  .

7) On suppose  $\varphi$  fixé et on suppose que 5) est vérifiée. Au difféomorphisme  $f = \text{Id} + \alpha + \psi \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  on associe par 4.10 un unique  $\tilde{\psi} \in C_o^{k-4+\beta}(\mathbb{T}^1)$  et  $\nu \in \mathbf{R}$  tel que l'on ait

$$a(\varphi, \psi) \tilde{\psi} \circ f - \tilde{\psi} = H(\varphi, \psi) + \nu ,$$

8) Par l'inégalité de 6) et par 4.10 on a

$$\|\tilde{\psi}\|_{C^{k-4+\beta}} \leq C_5 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + \|D^3 \psi\|_{C^{k-4+\beta}}^2) ,$$

où  $C_5$  est une constante.

9) Soit  $\psi_1$  l'unique fonction de  $C_o^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  telle l'on ait

$$D^3 \psi_1 = \tilde{\psi} .$$

C'est possible puisque  $\int_0^1 \tilde{\psi}(\theta) d\theta = 0$ .

10) Par 8), si  $\varepsilon^2 + \varepsilon'$  est assez petit, on a

$$\|D\psi_1\|_{C^0} \leq \frac{1}{2}$$

et donc

$$\text{Id} + \psi_1 \in D^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1) .$$

11) On note par  $\tilde{f} = \mathfrak{F}(\varphi, \psi)$  l'unique  $\tilde{f} \in F_\alpha^{k-1+\beta}$  tel que

$$\tilde{f} = \text{Id} + \psi_1 + (\lambda_\alpha(\psi_1) - \alpha) + \alpha ,$$

où  $\lambda_\alpha(\psi_1) \in \mathbb{R}$  est l'unique nombre tel que l'on ait

$$\rho(\text{Id} + \psi_1 + \lambda_\alpha(\psi_1)) = \alpha \quad (\text{cf. 2.9}).$$

12) Par 8) et 2.9 on a

$$|D^{k-1}\tilde{f}|_\beta \leq C_5 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + |D^{k-1}f|_\beta^2) ,$$

où  $f = \text{Id} + \psi + \alpha$ .

13) On suppose que 1), 3), 5) et 10) sont vérifiées dans la suite. Pour cela on doit avoir  $\varepsilon' \leq \varepsilon'_0 \leq \frac{1}{2}$  et  $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}$ .

De l'inégalité 12), par l'unicité de  $\tilde{\psi}$  et  $\nu$  (cf. 7) et en suivant le même raisonnement qu'en 4.6, on a pour  $\varphi$  fixé comme ci-dessus le :

14) Lemme 1 : L'application  $\mathfrak{F}$  qui à  $f = \text{Id} + \psi + \alpha \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  associe  $\mathfrak{F}(\varphi, f) = \tilde{f} \in F_\alpha^{k-1+\beta}$  est continue pour la  $C^{k-1}$ -topologie.

15) Lemme 2 : Pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  assez petit, il existe une constante  $C_1 > 0$ ,  $\varepsilon'_0 \geq C_1$ , telle que si la fonction  $\varphi$  vérifie

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

$$\|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_0)} \leq C_1 \gamma^2 ,$$

alors  $\phi$  envoie  $K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  dans  $K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  .

Démonstration : On doit avoir  $C_1 \leq \varepsilon'_0$  et

$$|D^{k-1} \tilde{f}|_\beta \leq \varepsilon \gamma , \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 ,$$

où  $\varepsilon'_0$  et  $\varepsilon_0$  sont définies en 13).

Par 12) on a

$$|D^{k-1} \tilde{f}|_\beta \leq C_5 \gamma^{-1} (C_1 \gamma^2 + \varepsilon^2 \gamma^2) ,$$

si  $C_5 \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  et  $C_1 C_5 \leq \varepsilon/2$ , on a

$$|D^{k-1} \tilde{f}|_\beta \leq \varepsilon \gamma \quad . \quad \blacksquare$$

16) On suppose que  $\varphi$  vérifie la condition de 15). Par le théorème de Schauder-Tychonoff l'application  $\phi : K_\varepsilon^{k-1+\beta} \rightarrow K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  a un point fixe  $f \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  (cf. 2.9). On pose  $f = \text{Id} + \alpha + \psi$ . On dérive trois fois  $\psi \circ f - \psi - \varphi(\psi)$ . On a, par 7) et 4)

$$D^3(\psi \circ f - \psi - \varphi(\psi)) = \nu A^{-1} ,$$

où  $A = 1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G$  et  $A > 0$  par 5). Comme pour  $\eta \in C^3(\mathbb{T}^1)$  on a

$\int_0^1 D^3 \eta(t) dt = 0$ , on a finalement, en intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue,  $\nu = 0$  et donc

$$\psi \circ f - \psi - \varphi(\psi) = -\lambda \in \mathbf{R} ,$$

où  $\lambda$  est une constante.

17) Il nous reste à démontrer les inégalités.

On suppose que les conditions de 13) sont vérifiées, ainsi que  $C_5 \varepsilon < 1/2$ .

Par 12) on a

$$|D^{k-1}f|_{\beta} \leq C_5 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + |D^{k-1}f|_{\beta}^2) ,$$

or 
$$\gamma^{-1} C_5 |D^{k-1}f|_{\beta} \leq \gamma^{-1} C_5 \varepsilon \gamma < \frac{1}{2} ,$$

d'où 
$$|D^{k-1}f|_{\beta} \leq C_5 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + \frac{1}{2} |D^{k-1}f|_{\beta}$$

et donc 
$$|D^{k-1}f|_{\beta} \leq 2 C_5 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{k+\beta}} .$$

18) Puisque  $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ ,  $f \pmod{1}$  laisse invariant une unique mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{T}^1$ . On intègre sur  $\mathbb{T}^1$  par rapport à la mesure  $\mu$

$$\psi \circ f - \psi - \varphi(\cdot, \psi) = -\lambda ,$$

on a 
$$\lambda = \int_{\mathbb{T}^1} \varphi(\theta, \psi(\theta)) d\mu(\theta)$$

et donc 
$$|\lambda| \leq \|\varphi\|_{C^0(A_{\delta})} . \quad \blacksquare$$

Remarque : Comme  $r \geq 4$ , en utilisant 4.10 en 7), on s'appuie seulement sur 4.2 et sur 3.14 qui est relativement simple. Pour le théorème suivant, nous avons besoin de 4.11 et donc de 3.17 qui est moins simple.

5.6 Théorème : Le théorème 5.4 reste valable si on suppose que  $k = 3$  et  $0 < \beta < 1$ .

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

**Démonstration** : Elle est presque identique à celle de 5.4. On définit  $K_\varepsilon^{2+\beta}$  comme en 5.5 1) et 2). Si  $f \in K_\varepsilon^{2+\beta}$  on a

$$\|f - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon \gamma \leq \varepsilon_{2+\beta} \gamma ,$$

on suppose que

$$\|\varphi\|_{C^{3+\beta}(A_\delta)} \leq \varepsilon' \gamma^2 .$$

On a,  $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ ,  $h \in D^{1+\beta}(\mathbb{T}^1, 0)$ ,

$$\|h - \text{Id}\|_{C^{1+\beta}} \leq \frac{1}{2} .$$

Si on dérive 2 fois 5.5 ① on a par 5.5 ②

$$D^2_\psi \circ f (Df)^2 - D^2_\psi A^{-1} = B_2$$

avec  $A = (1 - D\psi \circ f + \varphi_r \circ G)^{-1}$  qu'on suppose inversible,

$$B_2 = \varphi_{\theta\theta} \circ G + 2 \varphi_{\theta r} \circ G D\psi + \varphi_{rr} \circ G (D\psi)^2 ;$$

on a donc

$$a D^2_\psi \circ f - D^2_\psi = H_2(\varphi, \psi)$$

avec

$$H_2(\varphi, \psi) = AB_2$$

$$a = (Df)^2 A .$$

Si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont assez petits, on peut supposer

$$\textcircled{1} \quad \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta_\beta \leq \frac{1}{2} ,$$

où  $\delta_\beta$  est défini en 4.10. La fonction A est donc inversible.

Par 4.11, si  $f \in K_\varepsilon^{2+\beta}$ , il existe un unique  $\tilde{\psi} \in C_0^{2+\beta}$  et  $v \in \mathbf{R}$  vérifiant

$$\textcircled{2} \quad a D^{\tilde{\psi}} \circ f - D^{\tilde{\psi}} = H_2(\varphi, \psi) + v \quad ,$$

où  $f = \text{Id} + \alpha + \psi$ , et on a

$$\textcircled{3} \quad \|D^{\tilde{\psi}}\|_{C^\beta} \leq C_4 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{3+\beta}} \quad ,$$

où  $C_4$  est une constante.

Si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont assez petits ( $\varepsilon$  doit vérifier  $\textcircled{1}$  et  $\varepsilon \leq \varepsilon_{2+\beta}$ ), on définit

$$\Phi : K_\varepsilon^{2+\beta} \longrightarrow K_\varepsilon^{2+\beta}$$

qui est continue pour la  $C^2$ -topologie sur  $K_\varepsilon^{2+\beta}$  telle que si  $f = \text{Id} + \alpha + \psi$ , on ait  $\Phi(f) = \tilde{\psi} + \text{Id} + \alpha + (\lambda_\alpha(\tilde{\psi}) - \alpha)$ , où  $\tilde{\psi}$  vérifie  $\textcircled{2}$ . L'application  $\Phi$  a un point fixe  $f$  par le théorème de Schauder-Tychonoff, d'où :

$$D^2(\psi \circ f - \varphi(\cdot, \psi)) = A^{-1} v \quad .$$

En intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue on a  $v = 0$ . D'où

$$\psi \circ f - \psi = \varphi(\cdot, \psi) - \lambda \quad .$$

Par le même raisonnement qu'en 5.5, 18) on a

$$|\lambda| \leq \|\varphi\|_{C^0}$$

et l'autre inégalité résulte de  $\textcircled{3}$ . ■

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

Remarque : Si  $0 < \delta \leq 2$  ne vérifie pas nécessairement  $\gamma \leq \delta$ , alors par des démonstrations presque identiques, les théorèmes de 5.4 et 5.6 restent valables si on suppose que la fonction  $\varphi$  vérifie  $\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} \leq C_1 \text{Inf}(\gamma^2, \gamma\delta)$ .

5.7 Courbes translâtées pour les difféomorphismes qui ont une petite torsion.

5.7.1 On considère  $2 > \delta > 0$  et des plongements de  $A_1 = \mathbb{T}^1 \times [-1, 1]$  dans  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de la forme

$$F(\theta, r) = (\theta + \delta r + \alpha, r + \delta\varphi(\theta, r)) \quad ,$$

où  $\alpha$  est un nombre de type constant de constante de Markoff  $\gamma$ ,  $\varphi \in C^{k+\beta}$  avec  $r \geq 4$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \beta < 1$ .

On suppose qu'il existe un nombre  $b$  fixé dans la suite tel que l'on ait

$$\gamma \leq \delta \leq b\gamma \quad .$$

Proposition : Pour  $k, \beta$  et  $b$  fixés, il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  (ne dépendant ni de  $\gamma$  ni de  $\alpha$ ) telles que si

$$\|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_1)} \leq C_1 \quad ,$$

alors il existe une courbe translâtée  $C$  qui est le graphe de  $\psi \in C^{k-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  translâtée par  $F$  et  $\lambda$  et vérifiant

$$\rho(L_{-\lambda} \circ F|_C) = \alpha$$

$$\|\psi\|_{C^{k-1+\beta}} + |\lambda| \leq C_2 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{k+\beta}} \quad (< \delta) \quad .$$

Esquisse de démonstration : On conjugue  $F$  par  $H(\theta, r) = (\theta, r\delta)$ ,

$$H \circ F \circ H^{-1}(\theta, r) = (\theta + r + \alpha, r + \delta^2 \varphi(\theta, \frac{r}{\delta})) \quad .$$

La démonstration est presque identique à celle de 5.4. On suppose que

$$\textcircled{1} \quad \|\varphi\|_{C^{k+\beta}(A_1)} \leq \varepsilon' < \frac{1}{2}$$

$$f = \text{Id} + \alpha + \psi \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$$

avec  $|D^{k-1}\psi|_\beta \leq \varepsilon \gamma \leq \frac{1}{2} \gamma \quad .$

On a (cf. 2.8 et 2.9)

$$\textcircled{2} \quad \|\psi\|_{C^0} \leq |D^{k-1}\psi|_\beta \leq \delta \quad .$$

Comme en 5.5 on cherche  $f \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  et  $\lambda$  vérifiant

$$f = \text{Id} + \alpha + \psi$$

$$\psi \circ f - \psi = \delta^2 \varphi(\theta, \frac{\psi}{\delta}) - \lambda \quad .$$

On dérive trois fois et obtient

$$a_\delta(\varphi, \psi) D^3 \psi \circ f - D^3 \psi = H_\delta(\varphi, \psi)$$

$$a_\delta(\varphi, \psi) = (Df)^3 (1 - D\psi \circ f + \delta \varphi_r \circ G_\delta)^{-1}$$

$$G_\delta(\theta) = (\theta, \psi(\theta)/\delta)$$

$$H_\delta(\varphi, \psi) = (Df)^{-3} a_\delta(\varphi, \psi) (B_\delta - 3D^2 \psi \circ f D^2 \psi Df)$$

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

$$B_\delta(\varphi, \psi) = \delta^2 \left[ \varphi_{\theta\theta\theta} \circ G_\delta + 3 \varphi_{\theta rr} \circ G_\delta \left(\frac{D\psi}{\delta}\right) + 3 \varphi_{\theta rr} \circ G_\delta \left(\frac{D\psi}{\delta}\right)^2 \right. \\ \left. + \varphi_{rrr} \circ G_\delta \left(\frac{D\psi}{\delta}\right)^3 + 3 \varphi_{\theta r} \circ G_\delta \left(\frac{D^2\psi}{\delta}\right) + 3 \varphi_{rr} \circ G_\delta \frac{D\psi D^2\psi}{\delta^2} \right] .$$

En utilisant (1) , (2) , et  $\delta \leq b\gamma$ , on a, si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont assez petits

$$\|H_\delta(\varphi, \psi)\|_{C^{k-3+\beta}} \leq C_4 (\gamma^2 \|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + \|D^3\psi\|_{C^{k-4+\beta}}^2) ,$$

où  $C_4 > 0$  est une constante ne dépendant seulement que de  $k+\beta$  et  $b$ , et

$$\|a_\delta - 1\|_{C^{k-2+\beta}} \leq \delta_\beta \gamma ,$$

où  $\delta_\beta$  est la constante définie en 4.10 .

Le reste du raisonnement est identique à 5.5 : on construit une application continue pour la  $C^{k-1}$ -topologie

$$f \in K_\varepsilon^{k-1+\beta} \xrightarrow{\Phi} \tilde{f} \in F_\alpha^{k-1+\beta}$$

vérifiant ( $C_5$  est une constante)

$$|D^{k-1} \tilde{f}|_\beta \leq C_5 \gamma^{-1} (\|\varphi\|_{C^{k+\beta}} + \|D^3 f\|_{C^{k-4+\beta}}) \\ \leq C_5 \gamma^{-1} (b^2 \gamma^2 \varepsilon' + \gamma^2 \varepsilon^2) ;$$

qui est bien définie si

$$C_5 (b^2 \gamma \varepsilon' + \gamma \varepsilon^2) < \frac{1}{2}$$

et envoie  $K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  dans lui-même si

$$C_5 (b^2 \gamma \varepsilon' + \gamma \varepsilon^2) \leq \gamma \varepsilon .$$

Soit par exemple pour  $\varepsilon C_5 \leq \frac{1}{2}$  et  $b^2 \varepsilon' C_5 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . ■

5.8 On se place sous les mêmes hypothèses qu'en 5.4. On suppose que

$F: A_\delta \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  ( $\gamma < \delta \leq 2$ ) s'écrit

$$F(\theta, r) = \tilde{\varphi} + \mu r + \eta(r)$$

où

$$\tilde{\varphi} \in C^{k+\beta}(A_\delta)$$

$$\eta \in C^{k+1+\beta}([- \delta, \delta])$$

$$\eta(0) = \frac{d\eta}{dr}(0) = 0$$

$$|\mu| \leq \frac{1}{2}$$

$$\|\eta\|_{C^{k+\beta+1}} \leq e ,$$

où  $e$  est un nombre fixé (mais pouvant être grand).

Proposition : Il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  ne dépendant que de  $k+\beta$  et  $e$  (mais pas de  $\alpha, \gamma, \delta \geq \gamma$ ) telles que si  $F(\theta, r) = (\theta+r\alpha, r+\varphi(\theta, r))$ ,

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \eta$$

$$\|\tilde{\varphi}\|_{C^{k+\beta}(A_\delta)} \leq C_1 \gamma^2 ,$$

il existe un cercle  $C$ , graphe de  $\psi \in C^{r-1+\beta}(\mathbb{T}^1)$  translaté par  $F$  de  $\lambda \in \mathbb{R}$  et satisfaisant aux conditions du théorème de 5.4.

Esquisse de démonstration : Elle est presque la même que celle de 5.4.

On cherche  $f = \text{Id} + \alpha + \psi \in K_\varepsilon^{k-1+\beta}$  vérifiant

$$\psi \circ f - \psi = \varphi(\cdot, \psi) - \lambda ,$$

*THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES*

en dérivant on obtient par 5.5, 4),

$$a(\varphi, \psi) D^3 \psi - D^3 \psi = H(\varphi, \psi)$$

où les fonctions  $a(\varphi, \psi)$  et  $H(\varphi, \psi)$  sont définies en 5.5, 4).

On écrit

$$a(\varphi, \psi) = (1 + \mu)^{-1} (Df)^3 E(\varphi, \psi)$$

où  $E(\varphi, \psi) = (1 + (1 + \mu)^{-1} [-D\psi \circ f + \tilde{\varphi}_r \circ G + \eta_r \circ \psi])^{-1}$

et  $A^{-1} H(\varphi, \psi) = A^{-1} H(\tilde{\varphi}, \psi) + \eta_{rrr} \circ G(D\psi)^3 + 3 \eta_{rr} \circ G D\psi D^2 \psi$  .

Comme  $\frac{1}{2} \leq (1 + \mu) \leq \frac{3}{2}$  ,  $\eta_r(0) = 0$  ,

on a, par 2.7.3 et en supposant que  $\|\psi\|_{C^1} \leq \|\psi\|_{C^{k-1+\beta}} \leq \varepsilon \gamma < 1$ ,

$$\|\eta_r \circ \psi\|_{C^{k-1+\beta}} \leq C \|\psi\|_{C^{k-1+\beta}} ;$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\varepsilon$  et  $k+\beta$  .

Si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont assez petits, on a

$$\|E - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \gamma \delta_\beta$$

et  $\|E - 1\|_{C^{k-2+\beta}} \leq C_3 \gamma$  ,

où  $C_3$  est une constante.

On a aussi

$$\|H(\varphi, \psi)\|_{C^{k-3+\beta}(\mathbb{T}^1)} \leq C_4 (\|\tilde{\varphi}\|_{C^{k+\beta}(\mathbb{T}^1)} + \|D^3 \psi\|_{C^{k-4+\beta}}^2) ,$$

où  $C_4$  est une constante, en utilisant 2.7.2 et 2.7.3

$$\|\eta_{rr} \circ G\|_{C^{k-3+\beta}} \leq C_6 \quad ,$$

$$\|\eta_{rrr} \circ G\|_{C^{k-3+\beta}} \leq C_6 \quad ,$$

où  $C_6$  est une constante.

On raisonne alors comme en 5.5, 7) ; pour cela on doit appliquer 4.10 et 4.12.

La suite du raisonnement est exactement analogue à 5.5. ■

Remarques : 1) On ne suppose rien sur  $\mu$  (sauf  $|\mu| \leq \frac{1}{2}$ ), et la constante  $C_1$  ne dépend pas de  $\mu$ , ni d'ailleurs de  $C_2$ .

2) Si on suppose que  $|\mu| \geq \varepsilon > 0$  et si  $\|\tilde{\varphi}\|_{Lip} + \|\eta\|_{Lip} \leq C(\varepsilon)$ , alors  $F$  laisse invariante une courbe invariante lipschitzienne. Il suffit de trouver  $\psi$  vérifiant

$$\psi \circ f - (1 + \mu)\psi = \tilde{\varphi}(\cdot, \psi) + \eta(\psi)$$

ce qui est aisé par le théorème du point fixe de Schauder-Tychonov :

Si  $B_{\varepsilon_1} = \{\psi; \psi \in Lip(\mathbb{T}^1), \|\psi\|_{Lip} \leq \varepsilon_1\}$  avec  $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{4}$  et vérifiant  $\frac{1}{1-\varepsilon_1} < 1 + |\mu|$ , alors pour tout  $\psi \in B_{\varepsilon_1}$ , si  $f = Id + \psi + \alpha$ , il existe un unique  $\tilde{\psi} \in Lip(\mathbb{T}^1)$  vérifiant :

$$\tilde{\psi} \circ f - (1 + \mu)\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}(\cdot, \psi) + \eta(\psi) \quad .$$

Si la constante  $C(\varepsilon) > 0$  est assez petite,  $\tilde{\psi} \in B_{\varepsilon_1}$  et l'application  $\psi \rightarrow \tilde{\psi}$  est continue pour la  $C^0$ -topologie sur  $B_{\varepsilon_1}$  (qui est compact convexe) et possède donc un point fixe appelé  $\psi$ .

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

Si les fonctions  $\tilde{\varphi}$  et  $\eta$  sont de classe  $C^1$  et  $C^1$ -voisine de 0, alors par la stabilité des variétés normalement hyperbolique alors  $\psi$  est de classe  $C^1$  (voir, par exemple, [4]).

5.9 On suppose que  $0 < \beta < 1$  et  $\alpha$  vérifient les hypothèses précédentes.

On se donne  $F: A_\delta \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  de la forme

$$F(\theta, r) = (\theta + \alpha + \varphi_1(\theta, r), r + \varphi_2(\theta, r))$$

et on suppose que  $\|\varphi\|_{C^{3+\beta}} = \|\varphi_1\|_{C^{3+\beta}} + \|\varphi_2\|_{C^{3+\beta}} \leq \varepsilon' \gamma$ ,

avec  $0 < \varepsilon'$  petit. On pose

$$R_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\theta, r) = (\theta_1 + \lambda_1, r + \lambda_2),$$

où  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ . On suppose que  $\gamma \leq \delta \leq 2$ .

**Proposition** : Il existe  $C_1$  et  $C_2$ , deux constantes telles que, si  $\|\varphi\|_{C^{3+\beta}} \leq C_1 \gamma$ , alors il existe  $(\lambda_1, \lambda_2)$  tel que  $R_{(\lambda_1, \lambda_2)} \circ F$  laisse invariant une courbe  $C$  graphe de  $\psi \in C^{2+\beta}(\mathbb{T}^1)$ , et on a

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + \|\psi\|_{C^{2+\beta}} \leq C_2 \gamma^{-1} \|\varphi\|_{C^{3+\beta}}.$$

$$\rho(R_{(\lambda_1, \lambda_2)} \circ F|_C) = \alpha.$$

**Démonstration** : On pose

$$\tilde{K}_\varepsilon^{2+\beta} = \{\psi \in C_o^{2+\beta}(\mathbb{T}^1) \mid \|\psi\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon \gamma\}$$

et on suppose que  $\|\varphi\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon' \gamma$ ,

où  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont choisis assez petits.

A la fonction  $\psi \in \widetilde{K}_\varepsilon^{2+\beta}$ , on associe  $g \in F_\alpha^{2+\beta}$

$$\textcircled{1} \quad g = \text{Id} + \alpha + \varphi_1(\cdot, \psi) + (\lambda_\alpha(\psi) - \alpha) \quad ,$$

où  $\lambda_\alpha(\psi)$  est l'unique nombre réel tel que  $\rho(g) = \alpha$  (cf. 2.9).

Par 2.9, on a

$$\textcircled{2} \quad |\lambda_\alpha(\psi) - \alpha| \leq \|\varphi_1\|_{C^0} \quad .$$

Si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont données, on a

$$\|g - R_\alpha\|_{C^{2+\beta}} \leq \varepsilon'' \quad ,$$

et on peut supposer que  $\varepsilon'' \leq \varepsilon_{r+\beta}$  et de plus pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que si  $|\varepsilon| + |\varepsilon'| < \eta \Rightarrow |\varepsilon''| < \delta$ . L'équation de la courbe invariante cherchée s'écrit

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} g = \text{Id} + \alpha + \varphi_1(\cdot, \psi) + (\lambda_\alpha(\psi) - \alpha) \\ \psi \circ g = \lambda_2 + \varphi_2(\cdot, \psi) + \psi \quad . \end{cases}$$

On dérive deux fois, d'où

$$\textcircled{4} \quad D^2\psi \circ g(Dg)^2 - D^2\psi \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{B}$$

avec

$$\widetilde{A} = (1 - (\varphi_2)_{rr} \circ G + D\psi \circ g(\varphi_1)_{rr} \circ G)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B} = & (\varphi_1)_{\theta\theta} \circ G + 2(\varphi_2)_{\theta r} \circ G D\psi + (\varphi_2)_{rr} \circ G(D\psi)^2 - \\ & - D\psi \circ g((\varphi_1)_{\theta\theta} \circ G + 2(\varphi_1)_{\theta r} \circ G D\psi + (\varphi_1)_{rr} \circ G(D\psi)^2) \quad . \end{aligned}$$

THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES

On écrit

$$\textcircled{5} \quad a D^2 \psi \circ g - D^2 \psi = \tilde{H}(\varphi, \psi)$$

avec 
$$a = (Dg)^2 \tilde{A}$$

$$\tilde{H}(\varphi, \psi) = \tilde{B} \tilde{A} \quad .$$

Si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont assez petits, on a

$$\textcircled{6} \quad \|a - 1\|_{C^{1+\beta}} \leq \delta_{\beta} \gamma \quad (\text{cf. 4.10}) \quad ,$$

et par 4.11, il existe un unique couple  $\tilde{\psi} \in C_o^{2+\beta}$ ,  $v \in \mathbf{R}$  tel que l'on ait

$$\textcircled{7} \quad a D^2 \tilde{\psi} \circ g - D^2 \tilde{\psi} = \tilde{H}(\varphi, \psi) + v$$

et de plus

$$\textcircled{8} \quad \|\tilde{\psi}\|_{C^{2+\beta}} \leq C_Y^{-1} \|\varphi\|_{C^{3+\beta}} \quad ,$$

avec  $C$  est une constante.

On construit donc

$$\Phi : \tilde{K}_{\varepsilon}^{2+\beta} \longrightarrow \tilde{K}_{\varepsilon}^{2+\beta} \quad ,$$

si  $\varepsilon'$  est assez petit,  $\Phi$  est continue pour la  $C^2$ -topologie sur  $\tilde{K}_{\varepsilon}^{2+\beta}$  et possède donc un point fixe  $\psi$  pour le théorème de Schauder-Tychonoff. Par le même raisonnement qu'en 5.6 on a  $v = 0$  et donc

$$\psi \circ g = \lambda_2 + \varphi_2(\cdot, \psi) + \psi \quad .$$

Le graphe de  $\psi$  est la courbe  $C$  cherchée ; et

$$\lambda_1 = \lambda_\alpha(\psi) - \alpha .$$

Les inégalités résultent de (2) , (8) et 5.5, 18). ■

Remarque : Les § 5.7 à 5.9 ne sont là que pour illustrer les méthodes de 5.4 à 5.6. Par la même démonstration que celle de 5.6, les théorèmes 5.7 et 5.8 restent valables si  $k=3$ , et 5.9 pour  $k \geq 4$ .

5.10 Question d'unicité des courbes translitées.

5.10.1 On suppose que  $F: \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  est un homéomorphisme (homotope à l'identité) de la forme

$$F(\theta, r) = (\theta + r + b, r + \varphi(\theta, r))$$

où  $b \in \mathbb{T}^1$ ,  $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ .

On se place dans le revêtement universel  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  et on suppose que  $\tilde{F}$  possède deux courbes  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$ , où  $\tilde{C}_i$  est le graphe de  $\psi_i \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$  et que la courbe  $\tilde{C}_i$  est translitée par  $\tilde{F}$  de  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  :

$$L_{-\lambda_i} \circ \tilde{F}(\tilde{C}_i) = \tilde{C}_i$$

et de plus

$$\rho(L_{-\lambda_i} \circ \tilde{F}|_{\tilde{C}_i}) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} .$$

(On se place dans le revêtement universel pour éviter des exemples comme  $(\theta, r) \rightarrow (\theta+r, r)$  puisque les courbes invariantes  $\{r=a\}$  et  $\{r=a+1\}$  ont le même nombre de rotation mod 1.)

On désigne par  $C_i$  la projection de  $\tilde{C}_i$  sur  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ . On suppose de plus que  $L_{-\lambda_1} \circ F|_{C_1}$  est  $C^0$ -conjugué à  $R_\alpha: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ .

**THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES**

**Proposition** : On a alors  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $C_1 = C_2$ .

**Démonstration** : Par l'absurde si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et si on pose

$$\tilde{F}_1 = L_{-\lambda_1} \circ \tilde{F} \quad , \quad \tilde{F}_2 = L_{-\lambda_2 + \lambda_1} \circ \tilde{F} \quad ,$$

chaque homéomorphisme  $\tilde{F}_i$  laisse invariant  $\tilde{C}_i$  et  $\tilde{F}_i|_{\tilde{C}_i}$  est conjugué par la 1ère projection à  $\tilde{f}_i = \text{Id} + \psi_i + \tilde{b} \in D^0(\mathbb{T}^1)$ .

Comme par [2, III.4]  $\rho(\tilde{f}_1) = \rho(\tilde{f}_2) \notin \mathbb{Q}$ ,  $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2^{-1}$  a un point fixe, et donc  $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \neq \emptyset$ , or si  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ,  $\tilde{F}_1(\tilde{C}_2) \cap \tilde{C}_2 = \emptyset$ . Il suit que l'anneau ouvert  $A$  bordé dans  $A$  par les cercles plongés  $C_2$  et  $F_1(C_2)$  est errant par  $F_1$  (i.e. pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $F_1^n(A) \cap A = \emptyset$ ). Comme  $F_1(C_1) = C_1$  et que  $F_1|_{C_1}$  est un homéomorphisme minimal, on a  $F_1(C_2) \cap C_1 = \emptyset$  car sinon il existerait un entier  $n \geq 1$  tel que l'on ait  $F_1^n(A \cap C_1) \cap A = \emptyset$ . On a aussi  $F_1(C_1 \cap C_2) \cap C_1 \neq \emptyset$  et donc  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  est absurde. Comme  $F_1|_{C_1}$  est un homéomorphisme minimal de  $C_1$  et que  $F_1(C_1) = C_1$ ,  $F_1(C_2) = C_2$  et  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , on a  $C_1 = C_2$ . ■

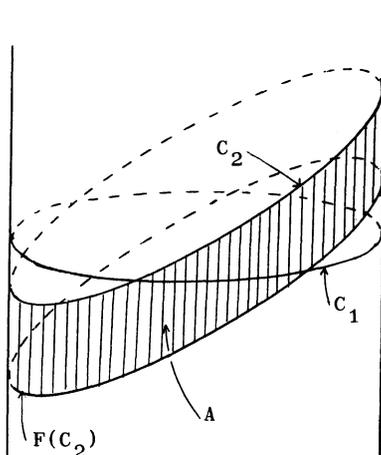


Figure si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

5.10.2 On se donne une courbe  $C_1$  graphe de  $\psi_1$ , courbe invariante d'un homéomorphisme  $F_1$  de la même forme qu'en 5.10.1, et on suppose que  $C_2$  est un cercle tel qu'il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$$F_1(C_2) = G_{\lambda_0}(C_2) \quad ,$$

où  $G_\lambda(\theta, r) = (\theta, r + \varphi_\lambda(\theta, r))$  est un homéomorphisme dépendant continuellement de  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tel que, pour tout  $\lambda \neq 0$ ,  $\varphi_\lambda(\theta, r) \neq 0$  et  $\varphi_0 \equiv 0$ .

On suppose que

$$\rho(\tilde{F}_1(\tilde{C}_1)) = \rho(G_\lambda^{-1} \circ \tilde{F}|_{\tilde{C}_2}) = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad ,$$

alors on a, par la même démonstration que 5.10.1,  $\lambda = 0$ , et si  $F_1|_{C_1}$  est  $C^0$ -conjugué à  $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ , alors  $C_1 = C_2$ .

5.10.3 Un exemple : Soit  $H(\theta, r) = (\theta + \varphi_1(\theta, r), r + \varphi_2(\theta, r))$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  vérifiant  $\|\varphi_1\|_{C^1} + \|\varphi_2\|_{C^1} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$  avec  $\varepsilon > 0$ .

On pose

$$\tilde{G}_\lambda(\theta, r) = H \circ L_\lambda \circ H^{-1}(\theta, r) = L_\lambda(\theta, r) + (\varphi_{1,\lambda}(\theta, r), \varphi_{2,\lambda}(\theta, r)) \quad .$$

Si  $\varepsilon$  est assez petit, on a, si  $\lambda \rightarrow 0$ ,

$$\|\varphi_{1,\lambda}\|_{C^0} + \|\varphi_{2,\lambda}\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} |\lambda| \quad ,$$

et donc

$$G_\lambda(\theta, r) = (\theta, r + \lambda + \varphi_{2,\lambda}(\theta, r))$$

vérifie la condition de 5.10.2 (si  $\lambda \rightarrow 0$ ).

## THÉORÈME DES COURBES TRANSLATÉES

5.10.4 La courbe translaturée pour un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  dépend d'un choix de coordonnées et d'une paramétrisation de la direction de translation (i.e. le choix d'une fonction  $G_\lambda$  vérifiant les propriétés de 5.10.3).

\*  
\*  
\*

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear operators, part I, John Wiley and Sons, New York, 1957, p. 456.
- [2] M.R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Pub. I.H.E.S. 49 (1979), 5-233.
- [3] M.R. Herman, Démonstration du théorème des courbes invariantes pour les difféomorphismes de l'anneau ; démonstrations du théorème des tores invariants, Manuscrit 1980.
- [4] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, M. Shub, Invariant manifolds, Lect. Notes in Math. n° 583, Springer Verlag, Berlin (1977).
- [5] L. Hörmander, The boundary problems of physical geodesy, Arch. for Rational Mech. Analysis 62 (1976), 1-52.
- [6] V. Jarnik, Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Z. 33 (1931), 505-543.
- [7] A. Khintchine, Zur metrischen theorie diophantischen Approximationen, Math. Z. 24 (1926), 706-714.
- [8] J. Moser, On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen Math. Phys. Kl II (1962), 1-20.
- [9] J. Moser, Stable and random motions in dynamical systems, Annals Math. Studies 77, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. (1973).

- [10] J. Moser, On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations, Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, (1969), 60-67.
- [11] H. Rüssmann, "Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisrings, Nachr. Aka. Wiss., Göttingen II, Math. Phys. Kl II (1970), 67-105.
- [12] H. Rüssmann, "On optimal estimates for the solutions of linear difference equations on the circle, Celestial Mech. 14 (1976), 33-37.
- [13] W.M. Schmidt, Badly approximable systems of linear forms, J. Number Theory, 1 (1969), 139-154.
- [14] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge Univ. Press, New York, 1968.
- [15] R. Douady, Applications du théorème des tores invariants, thèse 3ème cycle, Université Paris VII, 1982.

---

Centre de Mathématiques  
de l'Ecole Polytechnique  
91128 PALAISEAU Cedex (France)  
L.A. du C.N.R.S. n<sup>o</sup> 169.

## SUMMARY

In chapter I we give an exposition of D. Birkhoff's 1920 theory of curves invariant by area preserving monotone twist maps of an annulus  $A = \mathbf{T} \times \mathbf{R}$  (a curve means an  $C^0$ -embedded circle that we suppose non-homotopic to zero). In an appendix to chapter I Albert Fathi gives a more topological proof of Birkhoff's theorem about curves being graphs.

Using Birkhoff's theory we show that Moser's invariant curve theorem (improved by H. Rüssmann) is optimal up to  $\epsilon > 0$ : in particular we show in chapter II that usually for  $C^{3-\epsilon}$ -perturbations of a  $C^\infty$ -complete integrable monotone twist map there exists no invariant curve of a fixed rotation number. We give another proof of this result in chapter III, by constructing an area preserving  $C^{3-\epsilon}$ -diffeomorphism  $f$  of  $A$  that leaves invariant a curve  $C$  and such that  $f|_C$  is a Denjoy counter-example.

In chapter II we also give counter-examples to stability for  $C^{2-\epsilon}$ -perturbations and other results on the optimal character of the known invariant curve theorem.

In chapter III, at the end, we give some insight of the geometry of the set of "standard-diffeomorphisms" of  $A$  that leave invariant a curve.

In chapter IV we prove H. Rüssmann's translated curve theorem in class  $C^{3+\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ , if one restricts the rotation number on the translated curve to be a number of constant type. (The translated curve theorem is a non conservative generalization of Moser's invariant curve theorem.) The proof makes use of special properties of numbers of constant type, standard facts on Hölder functions, and only requires Schauder-Tychonoff's fixed point theorem. We believe that the method is simpler than the other existing techniques.

A volume II is planned and will be about more elaborate existence theorems of invariant curves.