

Astérisque

JEAN-PAUL BRASSELET

Existence des classes de Chern en théorie bivariante

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 7-22

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__7_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__7_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE DES CLASSES DE CHERN EN THÉORIE BIVARIANTE

par

Jean-Paul BRASSELET

Les théories bivariantes ont été introduites par W. Fulton et R. Mac Pherson dans le but d'étendre, aux variétés singulières, les propriétés de produits et de dualité. Nous renvoyons à [2] pour la définition et les propriétés de ces théories. Les auteurs montrent, entre autres, l'existence et l'unicité des classes de Stiefel-Whitney en théorie bivariante modulo 2 et conjecturent l'existence et l'unicité des classes de Chern en théorie bivariante à coefficients entiers. Le théorème de spécialisation de J.L. Verdier [5] permet de construire une telle classe lorsque la base (notée Y ci-dessous) est une courbe lisse. Nous montrons ici l'existence de ces classes de Chern, en utilisant les méthodes de M.H. Schwartz [4].

Les espaces considérés sont les espaces analytiques complexes irréductibles, plongeables dans une variété complexe lisse, les applications sont les applications analytiques propres, cellulaires au sens de 2.2. ci-dessous.

C'est grâce à l'accueil de l'Université de Porto Alegre et de M. Sebastiani que j'ai pu effectuer une grande partie de ce travail. Je remercie également le rapporteur pour ses remarques et suggestions.

I - THÉORIE D'HOMOLOGIE BIVARIANTE.

Nous noterons $H(X \rightarrow Y)$ la théorie d'homologie bivariante à coefficients entiers [2 ; §3]. Pour toute application $f : X \rightarrow Y$, et pour tout entier i , $H^i(X \rightarrow Y)$ désigne $H^{i+2m}(Y \times M, Y \times M - X)$ où, si $\phi : X \hookrightarrow M$ est un plongement fermé de X dans une variété analytique complexe M de dimension (réelle) $2m$, l'application f se factorise à travers le plongement (f, ϕ) suivi de la projection

sur Y .

$$\begin{array}{ccc} & & Y \times M \\ & \nearrow (f, \phi) & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Cette définition est indépendante de la factorisation. W. Fulton et R. Mac Pherson montrent que l'on définit bien ainsi une théorie bivariante avec les trois opérations : produit, image directe et image réciproque.

II - THÉORIE BIVARIANTE IF.

2.1. - Un sous-ensemble constructible d'un ensemble analytique X est obtenu à partir des sous-ensembles analytiques de X par un nombre fini de réunions, intersections et complémentaires.

Une fonction constructible $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha^{-1}(n)$ soit un ensemble constructible. Il existe alors une triangulation cellulaire (K) de X telle que α soit constante sur l'intérieur des cellules de (K) . On dira qu'une telle triangulation est α -adaptée.

Si $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction constructible, et A partie de X , on définit $\chi(A; \alpha)$ comme l'entier donné par :

$$\chi(A; \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot \chi(A \cap \alpha^{-1}(n)) .$$

Si (K) est une triangulation α -adaptée et A un sous-complexe de K ,

$$\chi(A; \alpha) = \sum_i (-1)^i \sum_{\sigma \in \text{Sk}^i A} \alpha(\sigma)$$

où $\text{Sk}^i A$ désigne l'ensemble des cellules de dimension i de A et $\alpha(\sigma)$ la valeur de α à l'intérieur d'une telle cellule.

2.2. - Condition d'Euler locale. Soit $f : X \rightarrow Y$ application analytique, (K) et (L) deux triangulations cellulaires de X et Y respectivement, on dit que f est *cellulaire* si l'image de toute cellule de (K) est une cellule de (L) et si la restriction de f à l'intérieur de toute cellule de (K) est de rang constant.

Soit $f : X \rightarrow Y$ application analytique, on dit qu'une fonction constructible $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfait la condition d'Euler locale en $x \in X$ si, pour des triangulations cellulaires (K) et (L) de X et Y respectivement, telles que (K) soit α -adaptée et f cellulaire, si x est dans l'intérieur de σ , cellule de (K) ,

$$\alpha(x) = \chi(\text{St}^0 \sigma \cap f^{-1}(y) ; \alpha)$$

pour tout y de $\text{St}^0 f(\sigma)$. ($\text{St}^0 \sigma$ désigne l'étoile ouverte de σ , réunion des intérieurs de toutes les cellules qui rencontrent l'intérieur de σ).

De façon équivalente, la formule peut s'écrire :

$$\alpha(x) = \sum_s (-1)^{\dim s} \cap f^{-1}(y)_{\alpha(s)}$$

où s décrit l'ensemble des cellules de $\text{St}^0 \sigma$ qui rencontrent $f^{-1}(y)$.

2.3. - Définition de $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$. Pour toute application analytique cellulaire $f : X \rightarrow Y$, $\mathbb{F}(X \rightarrow Y) = \mathbb{F}^0(X \rightarrow Y)$ est l'ensemble des fonctions constructibles $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant la condition d'Euler locale en tout point de X . On note $\textcircled{\alpha}$ les éléments de $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$.

On a bien une théorie bivariante, au regard des trois opérations :

1°) Produit : Si on a : $X \xrightarrow[f]{\textcircled{\alpha}} Y \xrightarrow[g]{\textcircled{\beta}} Z$, alors

$$(\alpha.\beta)(x) = \alpha(x).\beta(f(x))$$

2°) Images directes : Si on a : $\begin{array}{ccc} & \textcircled{\alpha} & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \longrightarrow Z \end{array}$, alors

$$(f_* \alpha)(y) = \chi(f^{-1}(y)) ; \alpha$$

3°) Images réciproques : Si on a un produit fibré $\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$, alors

$$(g^* \alpha)(x') = \alpha(g'(x'))$$

Exemples : Soit $f : X \rightarrow D$ une application analytique surjective et propre, où D est un disque assez petit de $\mathbb{C}$, centré en 0, et X est irréductible. Alors, la fonction constructible définie par $\alpha(x) = 1$ si $x \in X \setminus f^{-1}(0)$ et $\alpha(x) = \chi(F_x)$ si $x \in f^{-1}(0)$, où F_x est la fibre de Milnor de f en x , est un élément de $\mathbb{F}(X \rightarrow D)$.

Les fonctions constructibles de $\mathbb{F}(X \xrightarrow{\text{id}} X) = \mathbb{F}^*(X)$ sont les fonctions constantes sur les composantes connexes de X .

Si Y est connexe et f non surjective, $\mathbb{F}(X \rightarrow Y) = 0$. On peut éviter cet inconvénient en posant $\mathbb{F}(X \rightarrow Y) = \sum \mathbb{F}(X_S \rightarrow S)$, la somme étant prise pour tous les sous-ensembles analytiques fermés de Y .

2.4. - Application d'Euler. Une application d'Euler est une application $f : X \rightarrow Y$ pour laquelle la fonction constante 1 sur X satisfait à la condition d'Euler locale, pour tout x de X . On la note alors (1_f) .

Exemples : $\pi : X \rightarrow \text{pt}$ est une application d'Euler si et seulement si X est un espace d'Euler, c'est-à-dire, pour tout $x \in X$, $\chi(X, X - x) = (-1)^n$.

Pour toute application d'Euler, les fibres sont des espaces d'Euler. Réciproquement, une fibration dont les fibres sont des espaces d'Euler est une application d'Euler.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application d'Euler, alors $\chi(f^{-1}(y))$ est une fonction localement constante sur Y .

Si X est un espace d'Euler, $\mathbb{F}(X \rightarrow \text{pt}) = \mathbb{F}_*(X)$ est le groupe abélien des fonctions constructibles sur X . Le résultat que l'on démontre ici est une généralisation du théorème de Mac Pherson [3] (énoncé pour les variétés algébriques réduites sur $\mathbb{C}$) :

THÉORÈME [3]. Il existe une transformation naturelle additive c_* de $\mathbb{F}_*$ dans l'homologie telle que, si X est lisse, on ait $c_*(l_X) = c(X) \cap [X]$ où l_X est la fonction constante 1 sur X , $c(X)$ est la classe de Chern totale du fibré tangent à X et $[X]$ est la classe fondamentale d'homologie de X .

Nous utilisons ici la méthode de définition des classes de Schwartz-Mac Pherson due à M.H. Schwartz ([1], [4]).

III - LE RÉSULTAT - SCHÉMA DE LA DÉMONSTRATION.

Une transformation de Grothendieck $\mathbb{F} \rightarrow H$ est une collection d'homomorphismes $\mathbb{F}(X \rightarrow Y) \rightarrow H(X \rightarrow Y)$ qui préserve les trois opérations (produit, images directes, images réciproques).

THÉORÈME.- Il existe une transformation de Grothendieck γ de $\mathbb{F}$ dans H telle que, si X est une variété, $\gamma(l_\pi) = c(X) \cdot [X]$

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 c(X) \swarrow & & \searrow [X] \\
 X & \xrightarrow{\gamma(l_\pi)} & \text{pt}
 \end{array}$$

où $c(X)$ désigne la classe de Chern du fibré tangent à X et $[X]$ la classe fondamentale de la variété X .

La démonstration se fait en trois étapes :

Etant données des triangulations cellulaires (K) et (L) de X et Y respectivement, telles que $f : X \rightarrow Y$ soit cellulaire, on note $\dim_f \sigma$ et on appelle dimension relative de σ la différence $\dim \sigma - \dim f(\sigma)$.

PROPOSITION 1.- Soit k un entier fixé, on peut construire des triangulations (K) et (L) de X et Y respectivement, et attacher à toute cellule σ de (K), de dimension relative $2k$, un indice $\mu_\sigma \in \mathbb{Z}$, bien déterminé, tel que :

i) Si τ' est une cellule contenant $f(\sigma)$, alors : $\mu_\sigma = \sum_{\alpha} \mu_\alpha$, où σ'_α décrit l'ensemble des cellules de dimension relative $2k$ telles que $f(\sigma'_\alpha) = \tau'$ et $\sigma < \sigma'_\alpha$.

ii) Pour tout y , $y \in \tau^0$, un cycle de la classe de Schwartz-Mac Pherson $c_k(f^{-1}(y))$ est donné par $\sum_{\sigma} \mu_\sigma \sigma_y$ où σ décrit l'ensemble des cellules de dimension relative $2k$ telles que $f(\sigma) = \tau$ et σ_y est la cellule $\sigma \cap f^{-1}(y)$.

PROPOSITION 2.- Soit $f : X \rightarrow Y$ une application d'Euler, on note X^{2k} la réunion des cellules de dimension relative $2k$ de X, alors $\sum_{\sigma \in X^{2k}} \mu_\sigma \cdot \sigma$ définit une classe de $H^{-2k}(X^{2k} \rightarrow Y)$ qui, restreinte à $X_y^{2k} = X^{2k} \cap f^{-1}(y)$ donne, dans $H^{-2k}(X_y^{2k} \rightarrow \{y\})$ la classe de Schwartz-Mac Pherson $c_k(f^{-1}(y))$.

PROPOSITION 3.- Soit $\alpha \in \mathbb{F}(X \rightarrow Y)$, on note $\Gamma_k(\alpha)$ la classe, dans $H^{-2k}(X^{2k} \rightarrow Y)$ du "cycle" : $\sum_{\sigma \in X^{2k}} \alpha(\sigma) \mu_\sigma \sigma$ et $\gamma_k(\alpha)$ son image dans $H^{-2k}(X \rightarrow Y)$. L'élément $\gamma(\alpha) = \sum_k \gamma_k(\alpha)$ satisfait les conditions du théorème.

Pour démontrer la proposition 1, nous construisons des décompositions cellulaires (paragraphe 4) et un champ de repères (paragraphe 5) appropriés. Au paragraphe 6 nous montrons les propositions 2 et 3, en particulier, comment à $\sum_{\sigma} \mu_\sigma \sigma$ et $\sum_{\sigma} \alpha(\sigma) \mu_\sigma \sigma$ on associe une classe dans $H^{-2k}(X^{2k} \rightarrow Y)$.

IV - CONSTRUCTION DES CELLULES $A(\sigma)$.

4.1. - Construction des triangulations cellulaires (K) et (L).

4.1.1. - Soit $X \hookrightarrow M$ le plongement de X dans une variété analytique complexe M de dimension (réelle) $2m$. On considère des stratifications (V_i) et (W_j) de X et Y respectivement, satisfaisant aux conditions de Whitney, telles que $f(V_i) = W_{j(i)}$ et que le rang de f le long de chaque V_i soit constant. On ajoute $M - X$ comme strate régulière de M.

Nous avons supposé l'application f cellulaire. Quitte à opérer des subdivi-

sions des cellules, nous pouvons supposer que (K) et (L) sont des triangulations cellulaires de M et Y respectivement, telles que (K) soit compatible avec la stratification de M, que (K) soit α -adaptée et que $f : (K) \rightarrow (L)$ soit cellulaire.

X est un sous-polyèdre de (K) que l'on notera encore (K), par abus de notation.

Ceci étant on subdivise encore (K) et (L) comme suit :

On subdivise les cellules de (L), de manière à ce que, pour tout triple $y < \tau' < \tau$ de cellules, où y est un sommet, il existe une chaîne $y = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau' = \tau_\alpha < \dots < \tau = \tau_\beta$ de cellules avec $\dim \tau_i = i$. On subdivise alors les cellules de (K) de manière à conserver les propriétés précédentes.

Enfin on subdivise (K) de manière à ce que, pour toute cellule σ de (K) et tout sommet y de (L), $\sigma \cap f^{-1}(y)$ soit une cellule (ce qui est possible, par définition de f cellulaire).

On sous-stratifie alors la stratification (V_i) de manière à ce que pour tout sommet y de (L), $f^{-1}(y)$ soit réunion de strates de (V_i) . (On rajoute des strates "fantômes" et (K) est encore compatible avec la stratification (V_i)).

Comme dans ([1], proposition 5.4), on considère, dans chaque cellule σ , un "centre" $\hat{\sigma}$, d'où une subdivision "barycentrique" (Δ) de (K) et une décomposition cellulaire (D) duale de (K), dans M. Pour toute cellule σ de (K), on note $D(\sigma)$ la cellule duale de σ ; on a : $\{\hat{\sigma}\} = \sigma \cap D(\sigma)$.

4.1.2. - Définition des couples des premier et deuxième types.

Soit σ_o une cellule de $f^{-1}(y^o)$, où y^o est un sommet de (L), et σ_α une cellule telle que $\sigma_o < \sigma_\alpha$ et $\dim_f \sigma_\alpha = \dim \sigma_o + 1$.

DÉFINITION. - On dit que le couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est du premier type si, en notant $\tau = f(\sigma_\alpha)$, il existe une chaîne :

$$y^o = \tau_{i_0} < \tau_{i_1} < \dots < \tau \quad (\text{avec } \dim \tau_{i_k} = k)$$

et une chaîne de cellules :

$$\textcircled{C} \quad \sigma_o < \sigma_{i_0} < \sigma_{i_1} < \dots < \sigma_\alpha$$

telles que : $f(\sigma_{i_k}) = \tau_{i_k}$ et $\dim_f \sigma_{i_k} = \dim \sigma_o + 1$ pour tout k.

Dans le cas contraire, on dit que le couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est du deuxième type.

Remarque : Notons $\sigma_{\alpha,o} = \sigma_\alpha \cap f^{-1}(y^o)$. Lorsque $\dim_f \sigma_{\alpha,o} \leq \dim_f \sigma_\alpha$, la définition est équivalente à la suivante : le couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est du premier type si et seulement si $\sigma_o \neq \sigma_{\alpha,o}$ et du deuxième type si et seulement si $\sigma_o = \sigma_{\alpha,o}$.

LEMME 1.- On peut, quitte à subdiviser convenablement (K) (sans introduire de sommets supplémentaires), supposer que, pour tout couple (σ, σ_α) satisfaisant à :
 $\sigma < \sigma_\alpha$, $f(\sigma) = f(\sigma_\alpha)$ et $\dim \sigma = \dim \sigma_\alpha - 1$, il n'existe qu'un seul couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ satisfaisant à :
 $\sigma_o < \sigma$, $\dim_f \sigma_o = \dim_f \sigma$ et $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est du premier type.

[Dans le cas où l'on a deux tels couples du premier type : $(\sigma_o^{(1)}, \sigma_\alpha)$ et $(\sigma_o^{(2)}, \sigma_\alpha)$ correspondant à deux chaînes (C) arrivant en $\sigma_{i_o}^{(1)}$ et $\sigma_{i_o}^{(2)}$, les hypothèses faites sur f permettant de partager σ_α en deux cellules, l'une contenant dans son bord $\sigma_{i_o}^{(1)}$ et l'autre $\sigma_{i_o}^{(2)}$].

4.2. - Définition des cellules $E(\sigma_y)$.

Soit (K_y) la décomposition cellulaire induite de celle de (K) sur $F_y = f^{-1}(y)$. On montre que, pour tout point y suffisamment proche d'un sommet y^o de (L), la décomposition cellulaire (D) induit une décomposition cellulaire (E_y) duale de (K_y) dans M.

Soit $B(y^o)$ un voisinage de y^o dans Y suffisamment petit pour que $f^{-1}(B(y^o))$ ne contienne aucun sommet de (D). On considère un point y de $\tau \cap B(y^o)$ avec $\tau = f(\sigma)$. Soit $\sigma_y = \sigma \cap f^{-1}(y)$ une cellule de (K_y) , on va définir la cellule $E(\sigma_y)$ duale de σ_y , élément de (E_y) , par récurrence décroissante sur la dimension de σ_y .

4.2.1. - Cas où σ_y est de dimension maximum q dans $f^{-1}(y)$.

On note $p = \dim \sigma$, donc $\tau = f(\sigma)$ est de dimension $p - q$.

Considérons toutes les séquences possibles :

$$y^o = \tau_{i_o} < \tau_{i_1} < \dots < \tau_{i_{p-q}} = \tau$$

avec $\dim \tau_{i_k} = k$. En procédant à partir de τ , on prend dans chaque $f^{-1}(\tau_{i_k})$ la cellule s_{i_k} de dimension la plus grande possible telle que l'on ait une séquence :

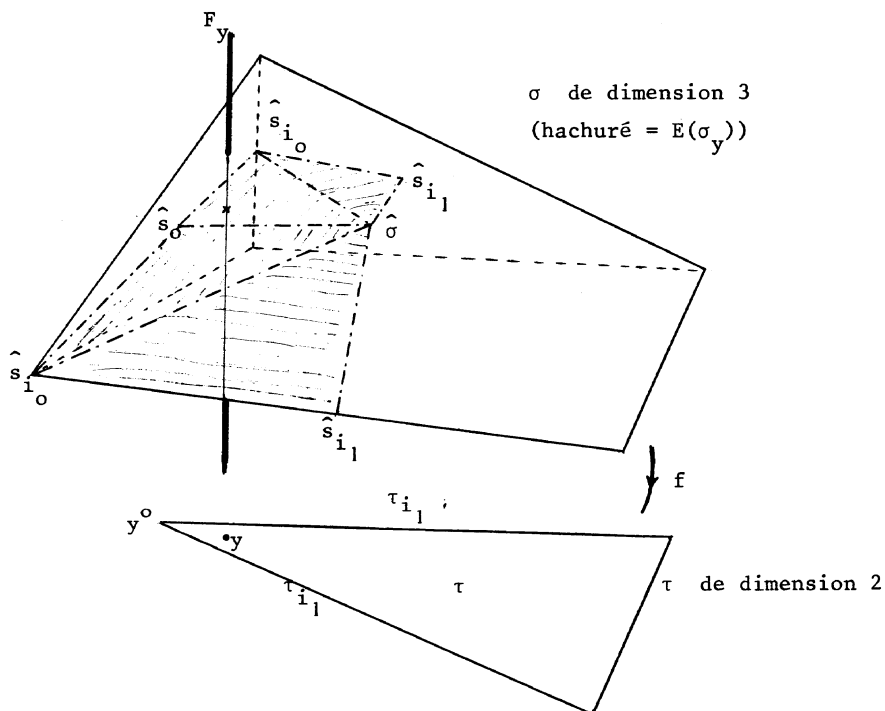
$$s_{i_o} < s_{i_1} < \dots < s_{i_{p-q}} = \sigma$$

satisfaisant à $\dim s_{i_k} \leq \dim s_{i_{k+1}} - 1$.

D'autre part, on note s_o la cellule $\sigma \cap f^{-1}(y^o)$. Ceci étant, on considère toutes les séquences possibles :

$$\sigma_{i_o} < \sigma_{i_1} < \dots < \sigma_{i_{p-q}} = \sigma$$

dans lesquelles $\dim \sigma_{i_h} < \dim \sigma_{i_{h+1}}$ et les σ_{i_h} sont des s_{i_k} ou s_o .



Enfin, les simplexes de dimension maximum de la cellule $D(\sigma)$, duale de σ s'écrivent :

$$(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{r_{p+1}}, \dots, \hat{\sigma}_{r_{2m}}) \text{ avec } \dim \sigma_{r_\alpha} = \alpha.$$

La cellule $E(\sigma_y)$ est alors formée de tous les simplexes tels que :

$$(\hat{\sigma}_{i_o}, \hat{\sigma}_{i_1}, \dots, \hat{\sigma}_{i_{p-q}} = \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{r_{p+1}}, \dots, \hat{\sigma}_{r_{2m}})$$

Remarque : Dans le cas où $\dim s_o \leq \dim_f \sigma$, on a $s_{i_o} = s_o$, ce qui simplifie la construction.

4.2.2. - Cas où σ_y est de dimension inférieure à q .

σ_y est alors face (dans F_y) de cellules $\sigma_{\alpha,y}$ de dimension $\dim \sigma_y + 1$, pour lesquelles $E(\sigma_{\alpha,y})$ est déjà construit. On considère l'ensemble constitué :

- d'une part, de la cellule, relative à σ_y , construite comme en 4.2.1., mais que nous noterons $E'(\sigma_y)$,

- d'autre part, de tous les simplexes des cônes $\hat{s}_o * E(\sigma_{\alpha,y})$.

La cellule $E(\sigma_y)$ est le saturé simplicial de cet ensemble, au sens suivant : si un Δ -simplexe a tous ses sommets dans $E(\sigma_y)$, il est aussi dans $E(\sigma_y)$:

Remarques : 1) Si y' est un autre point de $\tau^o \cap B(y^o)$, on a $E(\sigma_y) = E(\sigma_{y'})$.

2) Par construction, la réunion des cellules $E(\sigma_y)$ forme un voisinage tubulaire de $f^{-1}(y)$.

3) Les cellules $E(\sigma_y)$ sont transverses à $f^{-1}(y)$ (plus précisément, à la triangulation induite sur $f^{-1}(y)$ par la triangulation (K)).

4.3. - Définition des cellules $A(\sigma)$.

4.3.1. - Soit, comme précédemment, un couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ de cellules telles que $f(\sigma_o) = y^o$ soit un sommet de $\tau = f(\sigma_\alpha)$, $\sigma_o < \sigma_\alpha$ et $\dim_f \sigma_\alpha = \dim \sigma_o + 1$. On note y un point de τ^o proche de y^o . Si $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est un couple du premier type, la cellule σ_{i_o} , premier élément de la chaîne de cellules (C) (Définition 4.1.2.) est la même que la cellule s_{i_o} (définie en 4.2.1., où l'on remplace σ par σ_α). On a $\dim \sigma_{i_o} = \dim \sigma_o + 1$, d'où $\hat{\sigma}_o \notin E(\sigma_{\alpha,y})$. On en déduit :

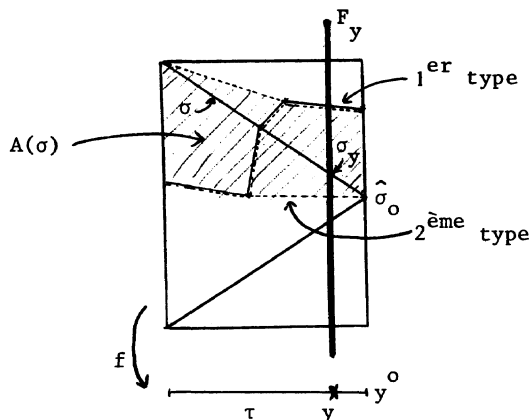
LEMME 2.- 1) Le couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est du premier type si et seulement si $\hat{\sigma}_o \notin E(\sigma_{\alpha,y})$. Dans ce cas, les simplexes de $E(\sigma_{\alpha,y})$ de dimension maximum, et ayant pour sommet $\hat{\sigma}_{i_o}$ (voir (C) , Définition 4.1.2.) sont situés dans le bord de $D(\sigma_o)$. On dit qu'ils sont du premier type.

2) Le couple $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$ est du deuxième type si et seulement si $\hat{\sigma}_o \in E(\sigma_{\alpha,y})$. Dans ce cas, on dit que les simplexes de $E(\sigma_{\alpha,y})$ de dimension maximum et ayant pour sommet $\hat{\sigma}_o$ sont du deuxième type.

Remarque : Soit σ une cellule telle que $\sigma_o < \sigma < \sigma_\alpha$, $\tau = f(\sigma) = f(\sigma_\alpha)$ et $\dim \sigma = \dim \sigma_\alpha - 1$; alors, pour y voisin de y^o et pour $\sigma_y = \sigma \cap f^{-1}(y)$, les simplexes du premier ou du deuxième type, relativement à $(\sigma_o, \sigma_\alpha)$, sont situés dans le bord de la cellule $E(\sigma_y)$.

4.3.2. - Soit σ de dimension relative $2k$ et soient $y_1^0, \dots, y_q^0$ les sommets de $\tau = f(\sigma)$. On note $A(\sigma)$ la réunion $\bigcup_{i=1}^q E(\sigma_{y_i}^0)$ où $E(\sigma_{y_i}^0)$ est la cellule duale de $\sigma_{y_i}^0 = \sigma \cap f^{-1}(y_i^0)$ pour $y_i^0 \in \tau$ suffisamment proche du sommet y_i^0 .

De même, pour σ_α de dimension $\dim \sigma + 1$, telle que $\sigma < \sigma_\alpha$ et $\tau = f(\sigma) = f(\sigma_\alpha)$, on note $A(\sigma_\alpha) = \bigcup_{i=1}^q E(\sigma_{\alpha, y_i})$.



$A(\sigma)$ est une cellule (homéomorphe à une boule) de dimension $2p = 2(m-k)$. On note $B(\sigma)$ son bord et, $A'(\sigma)$, $A'(\sigma_\alpha)$, $B'(\sigma)$ les restrictions de $A(\sigma)$, $A(\sigma_\alpha)$ et $B(\sigma)$, respectivement, à $f^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

LEMME 3.- 1) $B'(\sigma) = \bigcup_{\alpha} A'(\sigma_{\alpha})$ où α décrit l'ensemble d'indices tel que $\sigma < \sigma_{\alpha}$
avec $\dim \sigma_{\alpha} = \dim \sigma + 1$ et $f(\sigma) = f(\sigma_{\alpha})$.

2) $A'(\sigma_\alpha)$, $B'(\sigma)$ et $A'(\sigma)$ sont des fibrés triviaux de base $\begin{smallmatrix} 0 \\ \tau \end{smallmatrix}$,
chacun d'entre eux étant sous-fibré du suivant.

3) Soit σ_α une cellule fixée telle que $\sigma < \sigma_\alpha$ et $\tau = f(\sigma) = f(\sigma_\alpha)$. Pour toute cellule σ_0 , la contribution de $(\sigma_0, \sigma_\alpha)$ à $A(\sigma_\alpha)$ est formée de simplexes du premier ou du deuxième type. Elle n'est du premier type que pour une seule cellule σ_0 .

En effet, les cellules $E(\sigma_{\alpha, y_i})$ qui interviennent dans la définition de $A(\sigma_{\alpha})$ sont situées dans la partie du bord de $E(\sigma_y)$ située dans $B(\sigma)$, on en déduit (1) en restreignant la situation à τ . (2) vient de ce que

$f|_{f^{-1}(\tau)} : f^{-1}(\tau) \rightarrow \tau$ est un fibré trivial et que les décompositions cellulaires induites par (K) sur chacun des $f^{-1}(y_i)$ sont homéomorphes, d'où les décomposi-

tions (E_{y_i}) , pour tous les points y_i , sont homéomorphes, dans un homéomorphisme qui respecte les $E(\sigma_{y_i})$. (3) découle du lemme 1.

V - CONSTRUCTION DU CHAMP Z_r .

5.1. - Dans ce paragraphe, on construit, le long de $B'(\sigma)$, un champ de r -repères tangent aux fibres $F_y = f^{-1}(y)$, ce qui permettra de définir μ_σ .

Soit k fixé, tel que $2k = 2(m-p) = 2(r-1)$ soit strictement inférieur à la dimension maximum des fibres F_y .

5.1.1. - Dans un premier temps, on construit, relativement à la stratification V_i et à la triangulation cellulaire (D) un champ de r -repères Z_r suivant la méthode de prolongement radial de M.H. Schwartz [4]. Il est sans singularité sur le $(2p-1)$ -squelette de (D) , le champ de $(r-1)$ -repères formé des $(r-1)$ premiers vecteurs n'a pas de singularité sur le $2p$ -squelette de (D) et Z_r admet, éventuellement, une singularité isolée, à l'intérieur des cellules $D(\sigma)$ de dimension $2p$, en $\{\hat{\sigma}\} = \sigma \cap D(\sigma)$ ($\dim \sigma = 2k$).

Par construction, le champ est "tangent" aux fibres situées au-dessus des sommets $\{y^0\}$ de (L) . On entend par là que, si $x \in f^{-1}(y^0)$ et si V_i désigne la strate de $f^{-1}(y^0)$ contenant x , $Z_r(x)$ est dans $T_x(V_i)$, espace vectoriel tangent à V_i en x .

5.1.2. - Définition des τ^1 -voisinages.

On suppose Y plongé dans une variété sur laquelle est définie une métrique riemannienne, et on considère un triple (y^0, τ^1, τ) de cellules de (L) tel que $y^0 < \tau^1 < \tau$ et $\dim \tau^1 = 1$.

Soit $b(y^0)$ une boule, centrée en y^0 , de rayon suffisamment petit pour que l'intersection de chaque cellule du bord de τ avec $b(y^0)$ soit composée de rayons de $b(y^0)$. Le bord de $b(y^0)$ rencontre τ suivant une boule b' . On note $V(\tau^1)$ un voisinage du point $\tau^1 \cap b'$ dans b' .

DÉFINITION.- On appelle τ^1 -voisinage de y^0 dans τ , et on note $U(y^0)$, la réunion des rayons de $b(y^0)$ issus de y^0 et aboutissant en des points de $V(\tau^1)$.

5.1.3. - Soit $\sigma_0 \subset f^{-1}(y^0)$ une cellule de dimension $2k$. Le long du bord $\partial D(\sigma_0)$ de $D(\sigma_0)$, le champ Z_r construit précédemment est sans singularité.

D'autre part, la stratification (V_i) induit, par construction (4.1.1.) une stratification $V_{i,y} = V_i \cap f^{-1}(y)$ sur chaque fibre $f^{-1}(y)$.

LEMME 4.- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un τ^1 -voisinage $U(y^0)$ en y^0 , suffisamment petit pour que, si $y \in U(y^0) \cap \tau^0$, pour tout x de $\partial D(\sigma_0) \cap f^{-1}(y)$, on ait : angle $(Z_r(x), T_x(V_{i,y})) < \varepsilon$.

On a ici supposé l'existence d'une métrique riemannienne sur M . On en déduit que, le long de $\partial D(\sigma_0) \cap f^{-1}(U(y^0))$, le champ Z_r est homotope, dans $T_x(V_{i,y})$, à un champ Z'_r tangent à $T_x(V_{i,y})$.

5.1.4. -

LEMME 5.- Soit σ une cellule de dimension relative $2k$, telle que $\tau = f(\sigma)$, le champ Z'_r s'étend, au-dessus de $B'(\sigma)$ en un champ qui, en tout point x de $B'(\sigma)$ est "tangent" à $f^{-1}(f(x))$.

En effet, soit x un point quelconque de $B'(\sigma)$ et $y = f(x)$, il existe une unique cellule σ_α telle que $x \in E(\sigma_{\alpha,y})$ et une unique cellule σ_0 ($\sigma_0 < \sigma$) telles que le couple $(\sigma_0, \sigma_\alpha)$ soit du premier type. En utilisant la trivialisation de $B'(\sigma)$ au-dessus de τ^0 (lemme 3), on peut transporter en x le champ Z'_r construit sur $B'(\sigma) \cap f^{-1}(U(y^0) \cap \tau^0) \cap \partial D(\sigma_0)$.

Reste à vérifier que, dans une même fibre, les champs construits sur $B'(\sigma) \cap f^{-1}(y)$ et relatifs à des couples $(\sigma_0, \sigma_\alpha)$ différents se recollent bien. Or, en notant $2q = \dim f^{-1}(y)$, on a $\dim(B'(\sigma) \cap f^{-1}(y)) = 2(q+p-m)-1$; d'autre part, l'obstruction au "recolllement" sans singularité est en dimension $2(q-r+1)$, qui lui est strictement supérieure, d'où le résultat.

5.2. - Définition de μ_σ .

5.2.1. - Le champ Z'_r étant construit comme ci-dessus, on définit μ_σ , pour tout simplexe σ de dimension relative $2k$ de la manière suivante :

Si σ_0 est une cellule de dimension $2k$ de $f^{-1}(y^0)$, où y^0 est un sommet de (L) , on pose $\mu_{\sigma_0} =$ indice du champ Z_r en sa singularité isolée $\hat{\sigma}_0$.

Si $\sigma_y = \sigma \cap F_y$ est de dimension maximum dans la fibre F_y , on pose $\mu_\sigma = 1$.

Si σ_y n'est pas de dimension maximum dans F_y , on définit μ_σ comme suit : Pour y fixé dans τ^0 , proche d'un sommet quelconque de τ , considérons la strate $V_{i,y} = V_i \cap f^{-1}(y)$ contenant $\{\hat{\sigma}_y\} = \sigma_y \cap E(\sigma_y)$. $A(\sigma) \cap V_{i,y}$ est une cellule, dans $f^{-1}(y)$, telle que Z'_r soit construit le long de son bord $B'(\sigma) \cap V_{i,y}$. On note μ_σ l'obstruction à étendre Z'_r en une section de $T_r(V_{i,y})$ (fibré des r -repères tangents à $V_{i,y}$), à l'intérieur de $A(\sigma) \cap V_{i,y}$. Autrement dit, si l'on étend Z'_r à l'intérieur de $A(\sigma) \cap V_{i,y}$ comme section de $T_r(V_{i,y})$ avec une singularité isolée en $\hat{\sigma}_y$, μ_σ est l'indice du champ Z'_r en $\hat{\sigma}_y$. Par construction de Z'_r , cette

obstruction est indépendante de y choisi dans τ^0 et ne dépend que de σ .

5.2.2. - Soit alors σ_0 , cellule de dimension $2k$ de $f^{-1}(y^0)$ et $y \in U(y^0)$. Le champ Z'_r est construit et tangent à F_y le long de $\partial D(\sigma_0) \cap F_y$ et on a le :

LEMME 6.- L'obstruction à étendre Z'_r à l'intérieur de $D(\sigma_0) \cap F_y$, de façon à rester "tangent" à F_y est égale à $\mu_{\sigma_0} =$ indice du champ Z'_r en $\hat{\sigma}_0$.

La proposition 1 vient alors : pour (i) de ce que, pour y élément de $U(y^0) \cap \tau^0$, l'ensemble des $E(\sigma_y) \cap F_y$ tels que $\sigma_y = \sigma \cap F_y$ avec $\dim_f \sigma = 2k$, $\sigma_0 < \sigma$ et $f(\sigma) = \tau$ forme une partition de $D(\sigma_0) \cap F_y$, et du lemme 6 ; pour (ii) de la remarque, (p. 101, de [1]) et de ce que le champ Z'_r s'étend par prolongement radial, sur $\bigcup_{\sigma} E(\sigma_y)$.

VI - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

6.1. - La proposition 2 se démontre en "construisant" Y par dimension croissante des cellules, une cellule à la fois, et à l'aide de la suite exacte de Mayer - Vietoris (cf [2], démonstration de la proposition 6.E.) :

Si la proposition est vraie pour $f^{-1}(Y') \rightarrow Y'$, avec $Y' \subset Y$, et si τ est une cellule telle que $Y' \cap \tau \neq \emptyset$, on a la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} H^{-2k-1}(f^{-1}(Y' \cap \tau) \cap X^{2k}) & \longrightarrow & Y' \cap \tau = 0 \\ \downarrow & & \\ H^{-2k}(f^{-1}(Y' \cup \tau) \cap X^{2k}) & \longrightarrow & Y' \cup \tau \\ \downarrow & & \\ H^{-2k}(f^{-1}(Y') \cap X^{2k} \rightarrow Y') \oplus H^{-2k}(f^{-1}(\tau) \cap X^{2k} \rightarrow \tau) & & \\ \downarrow & & \\ H^{-2k}(f^{-1}(Y' \cap \tau) \cap X^{2k}) & \longrightarrow & Y' \cap \tau \end{array}$$

Si $g : y \rightarrow \tau$ est l'inclusion d'un point de l'intérieur de τ dans τ , alors :

$$g^* : H^{-2k}(f^{-1}(\tau) \cap X^{2k} \rightarrow \tau) \longrightarrow H^{-2k}(f^{-1}(y) \cap X^{2k} \rightarrow y)$$

est un isomorphisme. Notons $[y_y]$ la classe du cycle $\sum \mu_{\sigma} \sigma_y$ dans $H^{-2k}(f^{-1}(y) \cap X^{2k} \rightarrow y)$, la proposition 1 permet de conclure au recollement de la

classe connue au-dessus de Y' et de $g^{*-1}([\gamma_Y])$.

6.2. - De même, pour la proposition 3, la condition d'Euler locale est précisément celle qui permet de montrer que $\sum_{\sigma \in X^{2k}} \alpha(\sigma) \mu_\sigma$ définit un cycle de $H^{-2k}(X^{2k} \rightarrow Y)$. On note $\Gamma_k(\alpha)$ ce cycle. D'après [1], sa restriction à chaque fibre, $\sum_{\sigma \in X^{2k}} \alpha(\sigma) \mu_\sigma$ est un cycle dont la classe, dans $H^{-2k}(X_y^{2k} \rightarrow \{y\})$ est la classe de Schwartz - Mac Pherson $c_k(\alpha)$ de $f^{-1}(y)$. Soit i_{2k} l'inclusion :

$$\begin{array}{ccc} X^{2k} & \xleftarrow{i_{2k}} & X \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

on note $\gamma_k(\alpha) = i_{2k*}([\Gamma_k(\alpha)])$ et $\gamma(\alpha) = \sum_k \gamma_k(\alpha)$.

$\gamma(\alpha)$ satisfait la proposition 3 et donc les conditions du théorème :

La condition de normalité sur les variétés vient de ([1], Remarque, page 101) et de [3].

Le fait que γ préserve les produits, images directes et images réciproques se vérifie par construction explicite de champs de repères, comme ci-dessus et en utilisant les propriétés de c_* ([3]). Par exemple, la propriété du produit s'écrit, au niveau des cycles :

$$\gamma_k(\alpha \cdot \beta) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(\alpha) \cdot \gamma_j(\beta)$$

relation qui découle de la propriété suivante :

6.3. - Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications analytiques. On note α et β deux éléments de $\mathbb{F}(X \rightarrow Y)$ et $\mathbb{F}(Y \rightarrow Z)$ respectivement, et on suppose que les espaces considérés sont munis de triangulations cellulaires et de stratifications telles que ci-dessus (4.1.1.). On demande de plus que l'image du centre de toute cellule σ de X soit le centre de $f(\sigma)$.

PROPRIÉTÉ.- Soit σ , cellule de X telle que $\dim_{\text{fog}} \sigma = 2k$, et soit v_σ l'entier attaché à σ relativement à $h = \text{fog}$, alors $v_\sigma = \mu_\sigma \cdot \mu_{f(\sigma)}$ où μ_σ et $\mu_{f(\sigma)}$ sont les entiers attachés à σ et $f(\sigma)$ relativement à f et g , respectivement.

La démonstration de cette propriété exige une construction de champs de repères que l'on peut résumer ainsi :

$$\text{Notons } 2k = \dim_h \sigma, 2k_1 = \dim_f \sigma \text{ et } 2k_2 = \dim_g \tau$$

où $\tau = f(\sigma)$. On a $2k = 2(k_1 + k_2)$. Dans la suite D_X désignera une décomposition cellulaire duale de la triangulation cellulaire de X dans une variété M contenant X , de même D_Y une décomposition cellulaire duale de la triangulation cellulaire de Y dans une variété N contenant Y .

On construit, d'abord avec $2k_2 = 2(s-1) = \dim N - 2p_2$, un champ U_s de s -repères suivant la méthode de M.H. Schwartz, sur les cellules de dimension $2p_2$ de D_Y .

On note w un point de $\widehat{g(\tau)}$ suffisamment proche d'un sommet w^0 de $g(\tau)$ (voir 4.2) et $2n = \dim$ de la strate S de Y contenant τ .

Par la méthode précédente, on en déduit, sur $B'(\tau)$, un champ U'_s dont la restriction à $g^{-1}(w)$ est "tangente" à $g^{-1}(w)$. L'obstruction à étendre ce champ à l'intérieur de $S \cap A(\tau) \cap g^{-1}(w)$ est égale à $\mu_\tau = \text{indice de } U'_s \text{ comme section de } T_s(S \cap g^{-1}(w))$ en la singularité isolée $\hat{\tau}_w$.

On construit alors, avec $2k_1 = 2(r-1) = \dim M - 2p_1$, un champ Z'_r de r -repères sur les cellules de D_X de dimension $2p_1$. On note y un point de $g^{-1}(w) \cap \hat{\tau}$ suffisamment proche d'un sommet de τ , $A_f(\sigma)$ la cellule construite en 4.3.2. relativement à f , de même pour $B'_f(\sigma)$. Comme dans le lemme 5, on construit, sur $B'_f(\sigma)$, un champ Z'_r "tangent" aux fibres $f^{-1}(y)$, sans singularité sur $B'_f(\sigma) \cap f^{-1}(y)$. Notons V_i la strate de X contenant $\hat{\sigma}_y$; l'obstruction à étendre Z'_r à l'intérieur de $V_i \cap A_f(\sigma) \cap f^{-1}(y)$ est $\mu_\sigma = \text{indice de } Z'_r \text{ comme section de } T_r(V_i \cap f^{-1}(y))$ en la singularité isolée $\hat{\sigma}_y$.

On remarque que, si $\sigma_y = \sigma \cap f^{-1}(y)$, $\tau_w = \tau \cap g^{-1}(w)$ et $\sigma_w = \sigma \cap h^{-1}(w)$, on a $E(\sigma_w) \subset E(\sigma_y) \cap f^{-1}(E(\tau_w))$. Par hypothèse faite sur f , on peut relever U_s et U'_s en $\tilde{U}_s$ et $\tilde{U}'_s$ sur $V \cap f^{-1}(E(\tau_w))$ où V est une sous-variété de dimension $2n$ de la strate V_i , transverse à $f^{-1}(\tau_w)$ en $\hat{\sigma}_w$. L'indice de $\tilde{U}'_s$ en la singularité isolée $\hat{\sigma}_w$, comme champ de s -repères tangent à V , est égal à μ_τ .

Les singularités des champs $Z_r = (Z_1, \dots, Z_{r-1}, Z_r)$ et $\tilde{U}_s = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{s-1}, \tilde{U}_s)$ sont dûes à l'annulation du dernier vecteur de chacun des repères. On remarque que le champ de $(r+s-1)$ -repères $(Z_1, \dots, Z_{r-1}, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{s-1}, Z_r + \tilde{U}_s)$ construit sur le $2p$ -squelette de $D_X : (D_X)^{2p} \subset (D_X)^{2p_1} \cap f^{-1}((D_Y)^{2p_2})$ satisfait aux conditions de M.H. Schwartz [4].

On en déduit, sur $B'_h(\sigma) \cap h^{-1}(w)$, un champ de $(r+s-1)$ -repères $R'_{r+s-1} = (Z'_1, \dots, Z'_{r-1}, \tilde{U}'_1, \dots, \tilde{U}'_{s-1}, Z'_r + \tilde{U}'_s)$ sans singularité et dont l'obstruction à l'extension à l'intérieur de $V_i \cap A_h(\sigma) \cap h^{-1}(w)$ est ν_σ . Comme, par construction,

l'indice de R'_{r+s-1} en $\hat{\sigma}_w$ comme champ de $(r+s-1)$ -repères tangent à V_i est $\mu_\sigma \cdot \mu_\tau$, on en déduit le résultat.

Remarque concernant l'unicité.

La démonstration de [2] ne semble pas s'étendre au cas des classes de Chern. La démonstration de l'existence, ci-dessus, suggère l'unicité de γ . Cependant, une démonstration indépendante de la construction précédente reste à trouver.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J.P. BRASSELET et M.H. SCHWARTZ - Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe. Exposé 6 - Séminaire ENS 1978-1979 dans Astérisque 82-83.
- [2] W. FULTON et R. MAC PHERSON - Categorical frame work for the study of singular spaces. Memoirs of the A.M.S. May 1981, vol 33, n° 243.
- [3] R. MAC PHERSON - Chern classes for singular algebraic varieties. Annals of Math, (1974), 100, 423-432.
- [4] M.H. SCHWARTZ - Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, CRAS, (1965), t. 260, 3262-3264 et 3535-3537.
- [5] J.L. VERDIER - Specialisation des classes de Chern - Exposé 7 - Séminaire ENS, 1978-1979 dans Astérisque 82-83.

Jean-Paul BRASSELET

ERA au CNRS n° 07 590

Université des Sciences et Techniques
de Lille I

U.E.R. de Mathématiques Pures et
Appliquées

59655 - VILLENEUVE D'ASCQ - CEDEX .